

分析

积分理论、卷积、Fourier 与 Laplace 变换

独立中文讲义

Marc Briane Gilles Pagès

依据第 8 版 (De Boeck Supérieur, 2023) 翻译、校订并重新排版

中文译校与排版: Yuguang XIAO (肖煜光)

原著 ISBN: 978-2-8073-5955-0

原始讲义: <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~jean-francois.le-gall/IPPA2.pdf>

第八版前言

本书源自一门积分论课程：该课程曾连续多年面向巴黎第十二大学马恩河谷校区、后来面向索邦大学（原巴黎第六大学皮埃尔与玛丽·居里校区）的数学本科生讲授；自 2014 年起，又在雷恩国立应用科学学院三年级（L3）开设。本书首先面向即将完成本科三年级（L3）或刚进入数学专业硕士一年级（M1）的学生。第一层次的内容介绍 Lebesgue 理论不可或缺的基础及其初步应用，所需预备知识相当于本科二年级（L2）水平。我们还希望读者在本科之后，无论在旧制硕士阶段、准备法国教师资格考试，甚至在研究生阶段，都能把本书用作参考。因此，在第一层次之外，我们还详细证明了本理论的若干经典大定理，例如 Lebesgue 测度的构造、Riesz 定理与 Lusin 定理等。同时，我们通过大量应用强调 Lebesgue 积分的威力，尤其是在需要交换积分号与极限号的问题中。每章末均有一节练习，其中既有直接操练定义的题目，也有更具挑战性的题目。

对大多数练习，读者可以参考第 18 章集中给出的提示。我们的教学经验表明，与完整详解相比，恰到好处的提示更能帮助读者掌握 Lebesgue 积分的基本技巧——特别是支配收敛定理、Fubini 定理、变量替换、卷积以及 Fourier 与 Laplace 变换。这里我们尤其想到那些愿意主动学习数学、直面学科困难的学生（见图 1）。不过，本版新增的 Fourier 与 Laplace 变换练习以及少数旧题，仍给出了较为详细的解答。总体而言，第 18 章的解题提示会随问题难度而详略不同。每章的练习并不一定严格依照正文顺序排列；这样的安排让读者可以像工蜂采蜜一样，按照自己的程度在不同难度之间穿梭。书中还把证明下面著名公式的九种方法分散安排成练习；这些方法有一部分受到 R. Chapman 汇编¹的启发（参见索引中的“Basel 问题”）。该公式由瑞士数学家 Euler 于 1735 年首次得到：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

书中还会得到下列令人惊叹的恒等式（见练习 15.24 与 15.25）：

$$\pi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = \pi,$$

其中含 $n = 0$ 的两项按连续延拓取值。² 它们显示出可数性、求和与积分之间的紧密联系；这三个概念在 Lebesgue 积分理论中不可分割。³

积分理论自然可以从两个很不相同的角度展开。其一是源于 Bourbaki 的泛函方法：借助 Riesz 表示定理推广 Riemann 积分；其二是直接以正测度概念为基础的抽象方法。我们选择后一条道路，不仅因为它反而更为具体，也因为它可以自然地引出概率论与统计学。对未来的“分析学家”来说，代价也许是要花费较长篇幅讨论可测性。无论如何，我们认为，对今天的学生而言，抽象测度仍是两种方法中较易掌握的一种，或许正因为它所需的拓扑知识较少。

本书分为六个部分：

- 第一部分“回顾与预备知识”先简要回顾初等积分，以便突出 Lebesgue 理论的决定性优势；其余内容主要介绍基数理论与拓扑学的若干基础。可数性是 Borel 与 Lebesgue 方法的核心，却往往没有被低年级学生充分掌握，因此这里提供一次系统梳理。拓扑学的“回顾”一方面扩展

¹R. Chapman, *Evaluating $\zeta(2)$* , Department of Mathematics, University of Exeter, 07-2003.

²阅读提示：也就是说， $\sin n/n$ 与 $\sin^2 n/n^2$ 在 $n = 0$ 处都取极限值 1。

³L. Euler, *De summis serierum reciprocarum*, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 7 (1740), 123–134；收入 *Opera Omnia*, Series 1, vol. 14, 73–86 (E41)。

度量结构课程中已经出现的基本概念，另一方面介绍可分性等稍具技术性的内容；这些概念在后文不可或缺。

- 第二部分“测度论”建立积分理论的基础： σ -代数、可测函数与正测度，并特别强调 Lebesgue 测度。进一步的内容包括 Carathéodory 延拓定理、实直线上 Lebesgue 测度与 Stieltjes 测度的构造，以及局部紧空间或完备可分空间上测度的正则性。
- 第三部分“积分理论”从构造 Lebesgue 积分开始，随后介绍三个经典收敛定理 (Beppo Levi、Fatou、Lebesgue)，以及研究含参积分的工具，包括连续性和积分号下逐点求导。接着讨论 L^p 空间与稠密性定理 (包括 Lusin 定理)，再介绍乘积测度、Fubini 定理、变量替换定理及其在重积分计算中的应用。本部分最后讨论测度的完备化及其后果，特别是 Fubini–Lebesgue 定理。
- 第四部分“卷积、Fourier 与 Laplace 变换”讨论积分理论的重要延伸： $\mathbb{R}^d$ 上的卷积，以及 $\mathbb{R}^d$ 上的 Fourier 与 Laplace 变换。它们既是调和分析的基础工具，也是概率论的基础工具，并可视为第三部分收敛定理的重要应用。卷积及恒等逼近概念在变换理论中不可或缺，特别是在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 与 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的 Fourier 反演定理里；这些定理是分析学中最优美的结果之一，也是调和分析的出发点。近几十年来，图像处理推动了调和分析的迅速发展。第八版把 Laplace 变换作为 Fourier 变换的自然延伸纳入正文；篇幅虽较少，却配有约二十道内容充分的新练习 (共 13 页)，涉及常微分方程、偏微分方程与有限差分方程等多类方程。其中的高潮是 Bernstein–Widder 定理 (练习 15.39) 与 Riemann–Liouville 积分 (练习 15.40)：前者的证明用到 Lebesgue 积分的全部基本定理，后者与分数阶导数紧密相关，并以此结束全书课程部分。
- 第五部分由选择题与考试问题组成。
- 第六部分用 30 页篇幅，为全书 261 道练习提供详细程度不同的提示，并给出选择题答案。

还要特别说明：作为引言，第二部分开头完整转载了 Henri Lebesgue 于 1901 年发表在巴黎科学院《会议纪要》上的论文 *Sur une généralisation de l'intégrale définie* (《论定积分的一种推广》)。在仅仅四页的篇幅中，他以惊人的数学力量和美感提出了其理论的基本原则与最初结果。

标题前带有 ♣ 的部分属于补充或深化内容，初次阅读时可以跳过。同样，某些偏离主线较远的应用，或近似于已解习题的内容，在原书中使用较小字号排印。本书开头有详细目录，书末有包含 477 项 (其中若干为重复入口) 的索引。

我们对积分理论的共同兴趣，很大程度上来自两位老师：已故的 J. Deny 与 O. Kavian。本书受惠于他们良多。P. G. Ciarlet 的明智建议与鼓励对我们同样弥足珍贵。

本书中的一切错误都应由我们负责；但从第一版起，许多人帮助减少了错误的数量：Omer Adelman、Marie-Dominique de Cayeux、Yannick Baraud、Fabienne Comte、François James、Laurence Marsalle、Patrick Polo、Jacques Roubaud、Emmanuel Roy、Dominique Simpelaere、Sergio Vega。谨向他们致谢。我们还要特别感谢 Yannick Joncour 所做的大量审读工作：他在第七版中发现了不少排印错误。

巴黎与雷恩，2023 年 6 月 26 日

Marc Briane
Gilles Pagès

记号

集合

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$

$\mathcal{P}(X)$

${}^c A$

$\mathbf{1}_A$

$\subset$

$\triangle$

$\text{Card } X$

$X \hookrightarrow Y$

$\mathcal{O}(X)$

$\overline{A}$

$\overset{\circ}{A}$

∂A

$\sigma(\mathcal{C})$

$\Lambda(\mathcal{C})$

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$

$\text{supp } f$

$\mu\text{-a.e.}$

$\lim_n^{\uparrow} A_n = \bigcup_{n \geq 0} A_n$

$\lim_n^{\downarrow} A_n = \bigcap_{n \geq 0} A_n$

标量域为实数域或复数域。

集合 X 的幂集。

子集 A 在 X 中的补集。

A 的示性函数：若 $x \in A$ ，则 $\mathbf{1}_A(x) = 1$ ；若 $x \in {}^c A$ ，则 $\mathbf{1}_A(x) = 0$ 。

广义包含关系，允许两集合相等。

对称差。

集合 X 的基数。

从 X 到 Y 的单射。

度量空间 X 的全体开集。

子集 A 的闭包。

子集 A 的内部。

子集 A 的边界。

由 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ 生成的 σ -代数。

由 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ 生成的 λ -系。

所有边分别属于 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 的可测矩形 $A \times B$ 所成的集合。

σ -代数 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的张量积，即乘积 σ -代数。

测度空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 的完备化。

函数 f 的支集。

μ -几乎处处。

关于包含关系单调递增的集合列 $(A_n)_{n \geq 0}$ 的并。

关于包含关系单调递减的集合列 $(A_n)_{n \geq 0}$ 的交。

函数

$f(x+)$

$f(x-)$

sgn

$\text{Re } f$

$\text{Im } f$

$|f|$

f^+

f^-

$f \vee g$

$f \wedge g$

f 在 x 处的右极限。

f 在 x 处的左极限。

符号函数，并约定 $\text{sgn}(0) = 0$ 。

f 的实部。

f 的虚部。

f 的模。

f 与 0 的最大值。

$-f$ 与 0 的最大值。

f 与 g 的最大值。

f 与 g 的最小值。

$\sup_{i \in I} x_i$	实数族 $(x_i)_{i \in I}$ 的上确界。
$\inf_{i \in I} x_i$	实数族 $(x_i)_{i \in I}$ 的下确界。
$\equiv$	恒等于。
$\text{dist}(x, A)$	点 x 到集合 A 的距离。

序列的收敛

$\lim_n f_n$	序列 $(f_n)_{n \geq 0}$ 的极限。
$\lim_n^{\uparrow} f_n$	单调递增序列 $(f_n)_{n \geq 0}$ 的极限。
$\lim_n^{\downarrow} f_n$	单调递减序列 $(f_n)_{n \geq 0}$ 的极限。
$\limsup_n f_n$	序列 $(f_n)_{n \geq 0}$ 的上极限。
$\liminf_n f_n$	序列 $(f_n)_{n \geq 0}$ 的下极限。
$f_n \rightarrow f$	序列 $(f_n)_{n \geq 0}$ 收敛到 f 。
$f_n \uparrow f$	序列 $(f_n)_{n \geq 0}$ 单调递增地收敛到 f 。
$f_n \downarrow f$	序列 $(f_n)_{n \geq 0}$ 单调递减地收敛到 f 。
$f_n \xrightarrow{S} f$	函数列 $(f_n)_{n \geq 0}$ 逐点收敛到 f 。
$f_n \xrightarrow{\text{Unif}} f$	函数列 $(f_n)_{n \geq 0}$ 一致收敛到 f 。
$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$	函数列 $(f_n)_{n \geq 0}$ 几乎处处收敛到 f 。
$f_n \xrightarrow{\ \cdot\ } f$	函数列 $(f_n)_{n \geq 0}$ 按范数 $\ \cdot\ $ 收敛到 f 。

函数空间

$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$	从 $[a, b]$ 到 $\mathbb{K}$ 的阶梯函数全体。
$\mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$	从 $[a, b]$ 到 $\mathbb{K}$ 的 Riemann 可积函数全体。
$\mathcal{C}(X, Y)$	从 X 到 Y 的连续函数全体。
$\mathcal{C}_K(X, Y)$	从 X 到 Y 且具有紧支集的连续函数全体。
$\mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{K})$	在开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上连续、取值于 $\mathbb{K}$ 且在无穷远处趋于零的函数全体。
$\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{K})$	在开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上 n 次可微的 $\mathbb{K}$ -值函数全体。
$\mathcal{C}_K^n(\Omega, \mathbb{K})$	$\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{K})$ 中支集为 Ω 内紧集的函数全体。
$\mathcal{C}_b^n(\Omega, \mathbb{K})$	$\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{K})$ 中各阶导数均有界的函数全体。
$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$	p 次幂关于 μ 可积的 $\mathbb{K}$ -值可测函数全体。
$\mathcal{L}_{\text{loc}, \mathbb{K}}^1(\lambda_d)$	在 $\mathbb{R}^d$ 每个紧集上关于 λ_d 可积的 $\mathbb{K}$ -值函数全体。
$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu)$	关于 μ 本质有界的 $\mathbb{K}$ -值可测函数全体。
$L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$	$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 关于 μ -几乎处处相等所得的等价类空间。
$\text{Lip}_b(X, \mathbb{K})$	从 X 到 $\mathbb{K}$ 的有界 Lipschitz 函数全体。
$\text{Lip}_K(X, \mathbb{K})$	从 X 到 $\mathbb{K}$ 且具有紧支集的 Lipschitz 函数全体。

范数

$ x $	$x \in \mathbb{K}^d$ 的范数。
$\ f\ _{\text{sup}}$	函数 f 的上确界范数。
$\ f\ _p$	函数 f 的 L^p (半) 范数。
$\ f\ _{\infty}$	函数 f 的本质上的确界 (半) 范数。

目录

第八版前言	ii
记号	iv
第一部分 回顾与预备知识	1
第一章 Riemann 积分	2
1.1 阶梯函数的积分	2
1.2 Riemann 可积函数	3
1.3 调节函数	5
1.4 Riemann 积分与原函数计算	7
1.5 变量替换与分部积分	8
1.6 积分中值公式	9
1.7 Riemann 和	10
1.8 半赋范空间 $\mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$	11
1.9 含参积分	12
小结	15
1.10 练习	15
第二章 基数理论初步	21
2.1 基数	21
2.2 可数集	23
2.3 习题	27
第三章 拓扑学若干补充	29
3.1 扩充实直线	29
3.2 上极限与下极限	31
3.3 集合上的拓扑与度量空间	34
3.4 可数开基与可分性	34
3.5 拓扑的构造示例	35
3.5.1 诱导拓扑	35
3.5.2 乘积拓扑	36
3.6 点到集合的距离	37
3.7 习题	38

第二部分 测度论	40
从 Riemann 到 Lebesgue	41
第四章 集合上的 σ-代数	44
集合论预备知识	44
4.1 σ -代数与 Borel σ -代数	45
4.2 其他 σ -代数示例	49
4.2.1 原像 σ -代数	49
4.2.2 像 σ -代数	50
4.3 传递引理	50
4.4 习题	52
第五章 可测函数	54
5.1 定义	54
5.2 可测函数的运算	57
5.3 可测空间上的简单函数	59
5.4 习题	62
第六章 可测空间上的正测度	65
6.1 定义与例	65
6.1.1 基本性质	66
6.1.2 Lebesgue 测度在 $\mathbb{R}$ 上的应用	69
6.2 测度的刻画与唯一性	71
6.2.1 一个单调类定理	71
6.2.2 测度刻画的应用	72
6.3 由延拓构造测度 (I)	74
6.3.1 Carathéodory 延拓定理	74
6.3.2 构造 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 测度的原理	76
6.4 Lebesgue 测度的正则性	76
6.5 ♣ 由延拓构造测度 (II)	77
6.5.1 Carathéodory 定理的证明	77
6.5.2 在 $\mathbb{R}$ 上构造测度: Lebesgue 测度与 Stieltjes 测度	84
6.6 ♣ 度量空间上测度的正则性	93
6.6.1 有限测度情形	93
6.6.2 σ -有限测度情形	95
6.6.3 Borel 测度的正则性	97
6.6.4 Polish 空间上有限测度的正则性	100
6.6.5 测度刻画中的应用	101

6.7 练习	102
第三部分 Lebesgue 积分	110
第七章 关于正测度的积分	111
7.1 非负简单函数的积分	111
7.2 非负可测函数的积分	115
7.3 可积函数空间 $L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$	121
7.4 紧区间上的 Riemann 积分与 Lebesgue 积分	124
7.5 练习	128
第八章 收敛定理及其应用	132
8.1 Fatou 引理与控制收敛定理	132
8.2 在函数项级数中的应用	138
8.3 依赖参数的积分	139
8.4 带密度的测度：初步介绍	146
8.5 习题	148
第九章 L^p 空间	164
9.1 $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 空间：定义与初步性质	164
9.2 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式	165
9.3 Banach 空间 $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$	172
9.3.1 半赋范空间预备知识	172
9.3.2 构造与性质	173
9.4 $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中的稠密性定理, $1 \leq p < +\infty$ (一)	179
9.5 空间 $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ ($\mu \neq 0$)	185
9.6 空间 $\mathbf{L}^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ 的 Hilbert 空间性质	192
9.6.1 Hilbert 空间 $\mathbf{L}^2_{\mathbb{K}}(\mu)$	193
9.6.2 正交投影定理	193
9.6.3 连续线性泛函的表示	194
9.7 $\mathbf{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中的稠密性定理 (II), $p < +\infty$	195
9.7.1 Lipschitz 函数在 $\mathbf{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中的稠密性	196
9.7.2 紧支撑 Lipschitz 函数的稠密性	197
9.7.3 Lusin 定理	199
9.8 习题	203
第十章 表示定理及其应用	211
10.1 Riesz 表示定理	211
10.1.1 正线性泛函的情形	211

10.1.2 Radon 测度	212
10.2 Radon–Nikodym 定理	226
10.2.1 参考测度有限的情形	228
10.2.2 推广到 σ -有限情形	230
10.3 L^p – L^q 对偶	231
10.3.1 正实线性泛函	231
10.3.2 实或复线性泛函	234
10.4 L^p 空间上的插值	236
10.5 练习	240
第十一章 乘积测度与 Fubini 定理	248
11.1 乘积 σ -代数	248
11.1.1 定义与初步性质	248
11.1.2 Borel σ -代数的情形	250
11.1.3 乘积可测集的截面	251
11.2 σ -有限测度的乘积测度	252
11.2.1 构造与刻画	252
11.2.2 高维 Lebesgue 测度 λ_d 的构造	256
11.3 Fubini 定理	257
11.4 无限多个概率测度的乘积	261
11.5 练习	263
第十二章 像测度与变量替换	272
12.1 像测度	272
12.2 一般变量替换定理	274
12.3 应用：Brouwer 拓扑度	280
12.4 练习	285
第十三章 完备测度、Lebesgue σ-代数与 Cantor 集	291
13.1 测度的完备化	291
13.2 Lebesgue σ -代数	293
13.3 Cantor 集、Lebesgue 函数及其应用	294
13.4 完备测度的乘积与乘积的完备化	297
13.5 完备化与可测函数	299
第四部分 卷积、Fourier 与 Laplace 变换	302
第十四章 卷积及其应用	303
14.1 函数的平移算子	303

14.2 $\mathbb{R}^d$ 上的卷积	304
14.2.1 非负函数情形	304
14.2.2 一般情形	305
14.3 存在条件与性质	307
14.4 近似恒等族	310
14.5 用卷积正则化	312
14.6 其他卷积	315
14.6.1 函数的其他卷积	315
14.6.2 非负测度的卷积	316
14.7 习题	317
第十五章 Fourier 变换与 Laplace 变换	321
15.1 定义与初步性质	321
15.2 单射性与反演公式	326
15.3 Fourier–Plancherel 变换	331
15.4 Laplace 变换	333
15.4.1 定义与初步例子	333
15.4.2 Laplace 变换的性质	334
15.4.3 Laplace 反演	336
15.4.4 概率论中的两个例子	338
15.5 习题	339
第五部分 选择题与考试问题	359
第十六章 多项选择题	360
16.1 选择题 1	360
16.2 选择题 2	361
16.3 选择题 3	363
16.4 选择题 4	364
16.5 选择题 5	365
16.6 选择题 6	367
第十七章 若干考试问题	369
17.1 问题 1	369
17.2 问题 2	370
17.3 问题 3	371
17.4 问题 4	372
17.5 问题 5	374
17.6 问题 6	375

17.7 问题 7	377
17.8 问题 8	379
17.9 问题 9	380
17.10 问题 10	382
17.11 问题 11	383
第六部分 习题解答与选择题答案	385
第十八章 习题提示与解答	386
18.1 第 1 章习题	386
18.2 第 2 章习题	389
18.3 第 3 章习题	390
18.4 第 4 章习题	390
18.5 第 5 章习题	390
18.6 第 6 章习题	391
18.7 第 7 章习题	392
18.8 第 8 章习题	394
18.9 第 9 章习题	401
18.10 第 10 章习题	403
18.11 第 11 章习题	407
18.12 第 12 章习题	410
18.13 第 14 章习题	412
18.14 第 15 章习题	414
第十九章 选择题答案	428
参考文献	433
索引	436

第一部分

回顾与预备知识

第一章 Riemann 积分

本章回顾 Riemann 积分，不给出有关结果的证明；读者可以参考文献 [32] 或 [31]。我们的目的只是指出这一理论的若干不足。德国数学家 Riemann 在博士论文 [5] 中建立了这一理论；论文于 1854 年答辩，1857 年发表。他的工作决定性地推广了法国数学家 Cauchy 在 19 世纪 20 年代提出的理论——后者是第一套大体严格的连续函数积分理论。18 世纪积分理论的两位伟大先驱无疑是 Newton 与 Leibniz：Newton 以“流数”（fluxion）为名，系统研究求导的逆运算；Leibniz 的方法则以面积计算为基础，具有鲜明的几何特征。

记号。 本章始终在非空且不退化的紧区间 $[a, b]$ 上工作，即 $-\infty < a < b < +\infty$ 。字母 $\mathbb{K}$ 既可以表示实数域 $\mathbb{R}$ ，也可以表示复数域 $\mathbb{C}$ 。

1.1 阶梯函数的积分

定义 1.1。

(a) 区间 $[a, b]$ 的一个分割，是满足

$$\sigma = (a_0, \dots, a_n), \quad a = a_0 < \dots < a_n = b$$

的任意 $(n+1)$ -元组。

(b) 若存在 $[a, b]$ 的一个分割 $(a_0, \dots, a_n)$ 以及 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ，使得

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall x \in (a_{i-1}, a_i), \quad f(x) = \lambda_i, \quad (1.1)$$

则称函数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ 为阶梯函数。从 $[a, b]$ 到 $\mathbb{K}$ 的阶梯函数全体记为 $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ 。^a

(c) 暂把 f 关于分割 σ 的积分记为 $I(f, \sigma)$ ，并定义

$$I(f, \sigma) := \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_{i-1}).$$

^a**校订注：**原书在本项开头把 f 的值域印成 $\mathbb{R}$ ，但同项随即取 $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ，并把所得空间记为 $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ 。因此值域应为 $\mathbb{K}$ ，否则复值阶梯函数没有被定义。

注。

- 阶梯函数在分点 a_i 处的取值并未由上述常值条件规定；因此 $I(f, \sigma)$ 与 f 在这些点的取值无关。
- 还可以验证：只要所选分割 σ 与 f 相适应，即满足式 (1.1)， $I(f, \sigma)$ 就与具体分割无关。

第二点使我们可以从积分记号中删去 σ 。以后， f 在 a 与 b 之间的积分统一记为

$$\int_a^b f \quad \text{或} \quad \int_a^b f(x) \, dx.$$

变量 x 是哑变量；例如 $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(y) \, dy$ 。

命题 1.1。

(a) 映射

$$\int_a^b : (\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\sup}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

是连续线性泛函，因为

$$\left| \int_a^b f \right| \leq (b-a) \|f\|_{\sup}, \quad \|f\|_{\sup} := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

这里的上确界必为有限值，因为 f 只取有限多个值。(b) 若 $f, g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ ，则

$$f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(c) 若 $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ ，则 $|f| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$ ，并且

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

1.2 Riemann 可积函数**定义 1.2。** 若对每个 $\varepsilon > 0$ ，都存在

$$\Phi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}), \quad \Psi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$$

使得

$$|f - \Phi_\varepsilon| \leq \Psi_\varepsilon, \quad \int_a^b \Psi_\varepsilon \leq \varepsilon,$$

则称 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ Riemann 可积，或称 f 在 Riemann 意义下可积。定义在 $[a, b]$ 上、取值于 $\mathbb{K}$ 的 Riemann 可积函数全体记为 $\mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ 。**注。**

- 取 $\varepsilon = 1$ ，便有 $|f| \leq |\Phi_1| + \Psi_1$ ，所以 Riemann 可积函数一定有界。
- 显然 $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ ：只需取 $\Phi_\varepsilon = f$ 、 $\Psi_\varepsilon = 0$ 。

积分的构造（概要）。 设 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ 。依次取 $\varepsilon = 1/n$ ，定义 1.2 给出两列函数 $(\tilde{\Phi}_n)_{n \geq 1}$ 与 $(\tilde{\Psi}_n)_{n \geq 1}$ ，使得对每个 $n \geq 1$ ，

$$|f - \tilde{\Phi}_n| \leq \tilde{\Psi}_n, \quad \int_a^b \tilde{\Psi}_n \leq \frac{1}{n}.$$

于是，对所有 $p, q \in \mathbb{N}^*$ ，

$$|\tilde{\Phi}_p - \tilde{\Phi}_q| \leq |\tilde{\Phi}_p - f| + |\tilde{\Phi}_q - f| \leq \tilde{\Psi}_p + \tilde{\Psi}_q,$$

从而

$$\left| \int_a^b \tilde{\Phi}_p - \int_a^b \tilde{\Phi}_q \right| \leq \int_a^b |\tilde{\Phi}_p - \tilde{\Phi}_q| \leq \int_a^b (\tilde{\Psi}_p + \tilde{\Psi}_q) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

因此, $(\int_a^b \tilde{\Phi}_n)_{n \geq 1}$ 是 $\mathbb{K}$ 中的 Cauchy 列, 故收敛于某个有限极限 ℓ 。容易验证: 只要

$$|f - \tilde{\Phi}_n| \leq \tilde{\Psi}_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \tilde{\Psi}_n = 0,$$

这个极限就与所选函数列无关。

定义 1.3。 上述各列 $(\int_a^b \tilde{\Phi}_n)_{n \geq 1}$ 的共同极限记为

$$\int_a^b f.$$

它就是函数 f 在区间 $[a, b]$ 上的 Riemann 积分。

命题 1.2。

(a) $\mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ 是 $\mathbb{K}$ -向量空间, 并且

$$\int_a^b : (\mathcal{I}([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\sup}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

是范数为 $b - a$ 的连续线性泛函。

(b) 若 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$, 则 $|f| \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R}_+)$, 并且

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

(c) 设 $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 为 $\mathbb{R}$ -线性映射。对任意 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{C})$, 都有 $\varphi(f) \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{C})$, 且

$$\int_a^b \varphi(f) = \varphi \left(\int_a^b f \right).$$

(d) 若 $f, g \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$, 则 $fg \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ 。

练习。 设 $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R})$, 并设 $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 关于每个坐标都单调。证明

$$\varphi(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R}).$$

应用 1.1。

(a) 由命题 1.2(b) 可得积分的正性与单调性:

$$\begin{aligned} f, g \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R}), \quad f \geq 0 &\implies \int_a^b f \geq 0, \\ f, g \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R}), \quad f \geq g &\implies \int_a^b f \geq \int_a^b g. \end{aligned}$$

(b) 由命题 1.2(c) 可知: 若 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{C})$, 则 $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ 与 $\bar{f}$ 都 Riemann 可积。

命题 1.3 (Chasles 关系)。设 $c \in (a, b)$ 。若 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ ，则 f 在 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 上的限制均 Riemann 可积，并且

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

约定。对每个 $a \in \mathbb{R}$ ，约定

$$\int_a^a f = 0.$$

当 $a > b$ 时，约定

$$\int_a^b f = - \int_b^a f.$$

在这些约定下，只要 f 在 $[\min(a, b, c), \max(a, b, c)]$ 上 Riemann 可积，Chasles 关系就对任意三个实数 a, b, c 成立。

命题 1.4 (积分与一致收敛)。设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 是 $\mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ 中的一列函数，并且一致收敛到 f ，即 $\|f_n - f\|_{\sup} \rightarrow 0$ 。则

$$f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K}), \quad \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

下面再给出一个在应用中常用的 Riemann 可积性判别准则。

命题 1.5。设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 有界，并且在每个包含于 (a, b) 的闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上 Riemann 可积。则 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积。

此时，一个自然问题是：阶梯函数之外是否还有 Riemann 可积函数？

1.3 调节函数

定义 1.4。若存在一列阶梯函数 $(f_n)_{n \geq 1}$ 一致收敛到 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ，则称 f 为调节函数。^a

^a**阅读提示**：法文术语为 *fonction réglée*，英文通常称 *regulated function*；中文资料中也可见“规范函数”等译名。其数学定义始终是阶梯函数的一致极限。

换言之，在全体有界函数组成的空间中，对一致范数 $\|\cdot\|_{\sup}$ 而言，调节函数恰好构成阶梯函数集合的闭包。

命题 1.6。若 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ 是调节函数，则

$$f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K}).$$

这是命题 1.4 的直接推论。

定理 1.1。函数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ 是调节函数，当且仅当它在每个 $x \in [a, b)$ 处有右极限、在每个 $x \in (a, b]$ 处有左极限；这些极限都在 $\mathbb{K}$ 中取值。

推论 1.1。

- (a) $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ 。
 (b) 若 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 单调, 则 f Riemann 可积。

例 1。 在 $[0, 1]$ 上定义

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

由于 f 在 $0+$ 处没有极限, 它不是调节函数。不过, f 在 $(0, 1]$ 上连续、在 $[0, 1]$ 上有界, 所以由命题 1.5 可知它 Riemann 可积。

例 2 (Thomae 函数)。 在 $[0, 1]$ 上定义

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \gcd(p, q) = 1. \end{cases}$$

这个函数是调节函数, 见练习 1.3。

例 3。 有理数在 $[0, 1]$ 上的示性函数

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

不是 Riemann 可积函数。

事实上, 设 $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([0, 1], \mathbb{R})$ 、 $\psi \geq 0$, 并且 $|\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} - \varphi| \leq \psi$ 。于是

$$\varphi - \psi \leq \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} \leq \varphi + \psi.$$

函数 $\varphi \pm \psi$ 都是阶梯函数; 又因为 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中都稠密, 所以除有限多个点外, 必有

$$\varphi - \psi \leq 0 \leq 1 \leq \varphi + \psi.$$

因此, 除有限多个点外,

$$1 - \psi \leq \varphi \leq \psi, \quad \text{从而} \quad \psi \geq \frac{1}{2}.$$

故

$$\int_0^1 \psi \geq \frac{1}{2}.$$

当 $\varepsilon < 1/2$ 时, 这与 Riemann 可积性的定义矛盾。

不过, $\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ “几乎总是”为零, 因而把

$$\int_0^1 \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} = 0$$

作为积分值似乎很合理。Lebesgue 积分将使这种想法得到严格实现。

应用 1.2。

(a) *Riemann* 可积性与逐点收敛。设 $(r_n)_{n \geq 1}$ 是 $[0, 1]$ 中有理数的一个编号，并令

$$f_n(x) := \mathbf{1}_{\{r_1, \dots, r_n\}}(x), \quad n \geq 1.$$

每个 f_n 显然都是阶梯函数，因而 *Riemann* 可积。另一方面，对每个 $x \in [0, 1]$ ，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}(x),$$

而极限函数在 $[0, 1]$ 上不 *Riemann* 可积。因此， $\mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ 对逐点收敛并不封闭。

(b) *Riemann* 可积函数的复合。分别定义

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \gcd(p, q) = 1, p \leq q, \end{cases} \quad f(0) = 1,$$

以及

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

函数 f 与 g 都 *Riemann* 可积：前者见例 2，后者是阶梯函数。然而

$$g \circ f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} \notin \mathcal{I}([0, 1], \mathbb{R})$$

(见例 3)。所以 *Riemann* 可积性对复合运算并不封闭。不过，当外层函数 g 连续时，结论成立。^a

^a校订注：原书此处把不可积性误引为“例 1”；实际证明该结论的是同节例 3。

1.4 Riemann 积分与原函数计算

命题 1.7。 设 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ 。对 $x \in [a, b]$ ，令

$$F(x) := \int_a^x f.$$

(a) F 是 Lipschitz 函数，Lipschitz 常数为 $\|f\|_{\sup}$ ，即

$$|F(x) - F(y)| \leq \|f\|_{\sup} |x - y|.$$

(b) 若 f 在 $c \in [a, b)$ 处右连续，则 F 在 c 处右可导，且

$$F'_d(c) = f(c).$$

在 $c \in (a, b]$ 处也有相应的左侧结论。

推论 1.2。 若 f 在 $[a, b]$ 上连续，则 f 在 $[a, b]$ 上存在原函数，即存在 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ 使 $F' = f$ 。

而且 f 的任意原函数 F 都满足

$$\forall x \in [a, b], \quad F(x) = F(a) + \int_a^x f.$$

应用 1.3。 函数 $x \mapsto 1/x$ 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上连续, 因而存在唯一一个在 1 处为零的原函数, 即自然对数

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

反例。 有些不 Riemann 可积、从而更不连续的函数仍然存在原函数。例如, 在 $[0, 1]$ 上定义

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它在 $[0, 1]$ 上的一个原函数是

$$F(x) = \begin{cases} x^{3/2} \sin(1/x), & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

但是

$$f\left(\frac{1}{2\pi n}\right) = -\sqrt{2\pi n},$$

所以 f 无界, 不可能在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积。

命题 1.8。 设 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ 可导 (在端点处取单侧导数), 且其导函数 F'_d 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积。则

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'_d.$$

1.5 变量替换与分部积分

这是初等积分计算的两个主要实用工具。

定理 1.2 (初等变量替换)。 设 $\varphi \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, 并设

$$f \in \mathcal{C}(\varphi([\alpha, \beta]), \mathbb{K}) \subset \mathcal{I}(\varphi([\alpha, \beta]), \mathbb{K}).$$

则

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u) \, du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \, dx.$$

注。 在实际计算中, 真正有用的通常是单调变量替换。此时, 当 φ 递增时,

$$\varphi([\alpha, \beta]) = [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)],$$

当 φ 递减时,

$$\varphi([\alpha, \beta]) = [\varphi(\beta), \varphi(\alpha)].$$

例。 计算

$$\int_0^a \frac{dx}{\cosh x}.$$

令

$$x = \varphi(u) := \operatorname{arsinh} u, \quad u \in [0, \sinh a].$$

于是

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\sinh a) = a, \quad \varphi'(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

从而

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dx}{\cosh x} &= \int_0^{\sinh a} \frac{du}{\cosh(\operatorname{arsinh} u) \sqrt{1+u^2}} \\ &= \int_0^{\sinh a} \frac{du}{1+u^2} = \arctan(\sinh a). \end{aligned}$$

定理 1.3 (初等分部积分)。 设 $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{K})$ 。则

$$\int_a^b f g' = [fg]_a^b - \int_a^b f' g.$$

例。 计算 $\arctan$ 的一个原函数:

$$\begin{aligned} \int_0^x \arctan u \, du &= [u \arctan u]_0^x - \int_0^x \frac{u}{1+u^2} \, du \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

1.6 积分中值公式

命题 1.9 (第一积分中值公式)。 设

$$f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \quad g \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R}_+).$$

则存在 $c \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f g = f(c) \int_a^b g.$$

注。

- 若 $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, 则存在 $c \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f = f(c)(b-a).$$

- 对 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, 结论不再成立。例如

$$\int_0^{2\pi} e^{ix} dx = 0 \neq e^{ic}(2\pi - 0)$$

对任意 $c \in [0, 2\pi]$ 都成立。

命题 1.10 (第二积分中值公式)。设 $f, g \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R})$, 且 f 非负、单调递减。则存在 $c \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b fg = f(a+) \int_a^c g.$$

应用 1.4。设实值函数 f, g 在 $[1, +\infty)$ 的每个紧区间上都 Riemann 可积, 并满足: f 非负且单调递减,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad G(x) := \int_1^x g$$

有界。则极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x fg$$

在 $\mathbb{R}$ 中存在。

证明。函数 $x \mapsto \int_1^x fg$ 在 $+\infty$ 附近满足 Cauchy 准则。事实上, 由第二积分中值公式, 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $A_\varepsilon \geq 1$, 使得当 $y \geq x > A_\varepsilon$ 时, 可取某个 $c \in [x, y]$, 并有

$$\begin{aligned} \left| \int_1^y fg - \int_1^x fg \right| &= \left| \int_x^y fg \right| \\ &= f(x+) |G(c) - G(x)| \\ &\leq 2f(x) \|G\|_{\sup} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

把这个结果应用于

$$f(x) = x^{-\alpha}, \quad g(x) = \sin x,$$

便知当 $\alpha \in (0, 1]$ 时, 广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

收敛, 但不绝对收敛; 这类积分称为条件收敛的广义积分。

1.7 Riemann 和

定义 1.5。设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$, 并设

$$\sigma = (a_0, \dots, a_n)$$

为 $[a, b]$ 的一个分割。称

$$\|\sigma\| := \max_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$$

为分割 σ 的步长。

取实数组

$$\xi_\sigma = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \xi_i \in [a_{i-1}, a_i].$$

函数 f 关于 σ 与 ξ_σ 的 Riemann 和定义为

$$S(f, \sigma, \xi_\sigma) := \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i).$$

^a

^a**校订注：**原书把 ξ_σ 称为“ $\mathbb{K}$ 中元素组成的 n -元组”，但每个 ξ_i 必须属于实区间 $[a_{i-1}, a_i]$ 。因此这里应为实数组，与 f 的值域 $\mathbb{K}$ 无关。

注意

$$S(f, \sigma, \xi_\sigma) = \int_a^b \varphi,$$

其中 φ 是满足

$$\varphi(x) = f(\xi_i), \quad x \in (a_{i-1}, a_i)$$

的阶梯函数。

定理 1.4。 若 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ ，则

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall \sigma, \quad \|\sigma\| \leq \alpha \implies \left| S(f, \sigma, \xi_\sigma) - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon.$$

当 $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ 时，可利用 f 在紧集 $[a, b]$ 上的一致连续性把这个结果作为练习证明。一般情形的证明更为细致。

应用 1.5。 若 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ ，则

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f.$$

例如，

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

1.8 半赋范空间 $\mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$

定义 1.6。 对每个 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ ，定义

$$N_1(f) := \int_a^b |f|.$$

命题 1.11。 $(\mathcal{I}([a, b], \mathbb{K}), N_1)$ 是不完备的半赋范空间。

N_1 不是范数。例如，在 $[0, 1]$ 上定义

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

这个函数不恒为零，却满足

$$\int_0^1 |f| = 0.$$

我们暂且承认：可以构造一系列 $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ ，满足

(i) 对每个 $\varepsilon > 0$ ，存在 $n_\varepsilon \geq 1$ ，使得

$$p, q \geq n_\varepsilon \implies N_1(f_p - f_q) \leq \varepsilon;$$

(ii) 不存在 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$ 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_1(f_n - f) = 0.$$

另一方面，若 f 连续、非负，并且 $\int_a^b f = 0$ ，则容易证明 $f \equiv 0$ 。把这一点用于 $|f|$ ，立即可知 $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}), N_1)$ 是赋范空间；但它仍然不完备。

命题 1.12. $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}), N_1)$ 是不完备的赋范空间。

反例。 设 $(f_n)_{n \geq 2} \subset \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ 是下列分段仿射函数列：

$$f_n = 1 \quad \text{在 } [0, \frac{1}{2}] \text{ 上}, \quad f_n = 0 \quad \text{在 } [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \text{ 上},$$

并在 $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ 上作线性连接。

一方面， $(f_n)_{n \geq 2}$ 在 $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), N_1)$ 中是 Cauchy 列；另一方面，它逐点收敛，并在 $(\mathcal{I}([0, 1], \mathbb{R}), N_1)$ 中收敛到

$$\tilde{f}_\infty = \mathbf{1}_{[0, 1/2]} \notin \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}).$$

如果 f_n 按 N_1 范数收敛到某个连续函数 f_∞ ，则必有

$$N_1(f_\infty - \tilde{f}_\infty) = 0.$$

但不难验证：对每个连续函数 f ，都有

$$N_1(f - \tilde{f}_\infty) > 0.$$

这就证明了所述不完备性。

1.9 含参积分

考虑映射

$$\begin{aligned} f : J \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{K}, \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x), \end{aligned}$$

其中 J 是 $\mathbb{R}$ 中非空开区间。

命题 1.13。

(a) 积分号下的连续性。若 $f \in \mathcal{C}(J \times [a, b], \mathbb{K})$, 则

$$F(t) := \int_a^b f(t, x) \, dx$$

在 J 上连续。

(b) 积分号下求导。若 f 与 $\partial f / \partial t$ 都属于 $\mathcal{C}(J \times [a, b], \mathbb{K})$, 则 F 在 J 上可导, 而且

$$\forall t \in J, \quad F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \, dx.$$

注。 若 $g \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$, 并令

$$f(t, x) = \begin{cases} g(x), & x \leq t, \\ 0, & x > t, \end{cases}$$

则

$$F(t) = \int_a^b f(t, x) \, dx = \int_a^t g.$$

这个例子完全不在上一命题的适用范围内。

因此, 上一结果没有处理 f 不连续的情形, 更没有处理积分区间非紧的情形, 例如 $\mathbb{R}$ 或 $(0, 1)$ 。含参广义积分确实有一般定理, 但使用起来较为复杂; 实际计算中, 把积分切成若干部分再逐段处理, 往往更有效。

应用 1.6。 计算广义积分

$$F(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \, dx, \quad t \geq 0.$$

证明。 基本思路是在积分号下求导, 使容易求原函数的 $x \mapsto \sin x e^{-tx}$ 出现。但现有定理只适用于紧区间, 因此先定义

$$F_n(t) := \int_0^n \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \, dx, \quad t \geq 0.$$

第一步: (F_n) 在 $\mathbb{R}_+$ 上一致收敛到 F , 且 F 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续。

设 $n \leq m$, $n, m \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}_+$ 。函数

$$x \mapsto x^{-1} e^{-tx}$$

非负、递减且连续。由第二积分中值公式, 存在 $c \in [n, m]$, 使

$$\begin{aligned} F_m(t) - F_n(t) &= \int_n^m \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \, dx \\ &= \frac{e^{-nt}}{n} \int_n^c \sin x \, dx = \frac{e^{-nt}}{n} (\cos n - \cos c). \end{aligned}$$

所以

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |F_m(t) - F_n(t)| \leq \frac{2}{n}.$$

一致 Cauchy 准则表明 (F_n) 一致收敛。

另一方面，定义

$$h(t, x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} e^{-tx}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

函数 h 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上连续，特别是在 $\mathbb{R}_+ \times [0, n]$ 上连续。因此由命题 1.13, F_n 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续。

^a 所以 F 作为连续函数列的一致极限，在 $\mathbb{R}_+$ 上连续，特别是在 0 处连续。

第二步： F 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上可导，并且 $F'(t) = -(1+t^2)^{-1}$ 。

由于 $x \mapsto \sin x/x$ 在 $x=0$ 处按连续延拓后光滑， h 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上的 C^1 函数。由命题 1.13(b),

$$F'_n(t) = - \int_0^n \sin x e^{-tx} dx.$$

固定 $a > 0$ 。当 $t \geq a$ 、 $n \in \mathbb{N}^*$ 时，

$$\begin{aligned} \left| F'_n(t) + \int_0^{+\infty} \sin x e^{-tx} dx \right| &= \left| \int_n^{+\infty} \sin x e^{-tx} dx \right| \\ &\leq \int_n^{+\infty} e^{-tx} dx = \frac{e^{-nt}}{t} \leq \frac{1}{na}. \end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin x e^{-tx} dx &= \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-t)x} dx \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(-\frac{1}{i-t} \right) = \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

^b

因此 (F'_n) 在每个 $[a, +\infty)$ 上一致收敛到

$$t \mapsto -\frac{1}{1+t^2}.$$

由于 F_n 逐点收敛到 F ，逐项求导定理给出： F 在每个 $[a, +\infty)$ 上可导。任意 $a > 0$ ，故

$$\forall t > 0, \quad F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}.$$

第三步：对每个 $t \geq 0$ ， $F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$ 。

由第二步，存在 $k \in \mathbb{R}$ ，使得

$$F(t) = k - \arctan t, \quad t > 0.$$

因为 F 在 0 处连续，

$$\lim_{t \downarrow 0} F(t) = F(0) = k.$$

另一方面，对 $t > 0$ ，

$$|F(t)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| e^{-tx} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx = \frac{1}{t}.$$

故

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0 = k - \frac{\pi}{2}.$$

于是 $k = \pi/2$ ，即

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t, \quad t \geq 0.$$

□

^a**校订注：**原书两次把含参函数的矩形写成 $[0, n] \times \mathbb{R}_+$ ，把参数 t 与积分变量 x 的坐标顺序颠倒了。按本节始终采用的记号 $(t, x) \mapsto f(t, x)$ ，正确次序是 $\mathbb{R}_+ \times [0, n]$ ；也可先在 $\mathbb{R} \times [0, n]$ 上应用命题 1.13，再限制到 $t \geq 0$ 。

^b**校订注：**原书把最后一项误印为 $-1/(1+t^2)$ 。直接计算 $-1/(i-t) = (t+i)/(1+t^2)$ ，其虚部为正；而下一行对 F'_n 的极限又使用了正确的负号。

小结

本章已经多次看到，Riemann 积分在理论与实践上都有许多局限。Riemann 可积函数必然有界；Riemann 可积函数空间 $\mathcal{I}([a, b])$ 对逐点收敛不封闭，对复合运算也不封闭； $(\mathcal{I}([a, b]), N_1)$ 不完备。含参积分的一般结论也只能在连续函数等很受限的框架中直接应用。

此外，即使有这些限制，Riemann 积分仍然是一套技术性很强、使用颇为细致的工具。因此，有必要引入适用范围更广的新积分概念，以便为实际问题提供更强有力的工具。

不过，Riemann 积分仍有自身的优点，特别是它可以立即推广到取值于 Banach 空间（即完备赋范向量空间）的函数。相比之下，把 Lebesgue 积分推广到这类向量值函数相当微妙，本书不作讨论。

1.10 练习

练习 1.9、1.11、1.12、1.15、1.16 与 1.18 都涉及极限与积分的交换。它们指出：Riemann 积分只能借助一致收敛（见命题 1.4）来交换极限与积分，因而常常需要相当细致地分割积分区间。第 8 章 Lebesgue 积分的强大定理将克服这些困难，特别参见练习 8.0。

练习 1.1。

- a) 设 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R})$ ，并设 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在一个包含 $f([a, b])$ 的有界区间上 Lipschitz 连续。证明

$$g \circ f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R}).$$

- b) 更一般地，证明：若 g 连续，则仍有

$$g \circ f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R}).$$

^a

^a**校订注：**原书允许 f 取值于 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ，却只把 g 定义在 $\mathbb{R}$ 上；当 f 为复值函数时， $g \circ f$ 没有定义。按题目给定的 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，这里应把 f 限定为实值函数。

练习 1.2 (Riemann–Lebesgue 引理与 Basel 问题 1)。

- a) 设 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{C})$ 。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{inx} dx = 0.$$

b) 求 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 使得对每个 $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi (\alpha x + \beta x^2) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{n^2}.$$

c) 证明: 对每个 $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin(x/2)} - \frac{1}{2}.$$

d) 在 $[\delta, \pi]$ 上应用第 a) 问, 并利用

$$\sin(x/2) \geq \frac{x}{\pi}$$

估计 $[0, \delta]$ 上的积分, 从而推出

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \delta \in (0, \pi].$$

练习 1.3. 证明下列定义在 $[0, 1]$ 上的函数是调节函数:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}^*, \quad \gcd(p, q) = 1. \end{cases}$$

练习 1.4. 设 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R}_+^*)$. 证明

$$\int_a^b f > 0.$$

练习 1.5. 计算数列

$$u_n := \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{1/n}, \quad n \geq 1,$$

的极限。

练习 1.6. 设 $f \in \mathcal{I}([0, 1], \mathbb{R})$. 计算

$$T_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n \geq 1,$$

的极限。

练习 1.7 (Riemann 和).

a) 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 单调, 并且广义积分

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

收敛。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

b) 证明：对每个 $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

再借助第 a) 问计算

$$\int_0^\pi \ln(\sin x) \, dx.$$

练习 1.8。 设连续函数 $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足： f 单调递减，且 $0 \leq g \leq 1$ 。令

$$I := \int_0^1 g(x) \, dx.$$

证明

$$\int_0^1 f(x)g(x) \, dx \leq \int_0^I f(x) \, dx.$$

练习 1.9。 在 $[0, 1]$ 上定义

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}, \quad n \geq 1.$$

证明 $(f_n)_{n \geq 1}$ 在

$$(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), N_1), \quad N_1(f) := \int_0^1 |f|,$$

中是 Cauchy 列，但不在该空间中收敛。

练习 1.10。

a) 在 $[0, 1]$ 上定义

$$f_n(x) := \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}, \quad n \geq 0.$$

函数列 (f_n) 在 $[0, 1]$ 上是否一致收敛？在 $a > 0$ 时，它在 $[a, 1]$ 上是否一致收敛？

b) 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx.$$

练习 1.11。

a) 利用级数展开证明

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

b) 对每个 $a \in [0, 1)$ ，先在 $[0, a]$ 上展开

$$x \mapsto \frac{1}{x-1},$$

再估计 $[a, 1]$ 上的积分，从而证明

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

练习 1.12。

a) 证明：对每个 $n \geq 1$ ，函数

$$f_n(x) := e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上非负且单调递增。

b) 由此计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

练习 1.13。 研究定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的函数

$$f(x) := \int_0^x \sin(1/t) dt, \quad x \geq 0,$$

特别研究它在 0 处的性质。

练习 1.14。 研究定义在 $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ 上的函数

$$f(x) := \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t},$$

特别研究它在 0 与 1 附近的性质。

练习 1.15 (Gauss 积分)。 在 $\mathbb{R}$ 上定义

$$f(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

a) 证明：对每个 $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2.$$

b) 由此计算

$$I := \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

再在 $\mathbb{R}$ 上定义

$$g(x) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

c) 证明 g 在 $\mathbb{R}$ 上连续、在 $\mathbb{R}^*$ 上可导。计算 g' 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ，并由此求出 g 。

d) 再次推出 I 的值。

练习 1.16 (Basel 问题 2: Euler 1741 年的第二种解法)。a) Wallis 积分。对 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

证明：对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n, \quad I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2n+2}, \quad I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

b) 在 $[0, 1)$ 上定义 $f(x) = (1-x)^{-1/2}$ 。证明：对每个 $n \in \mathbb{N}$ 、 $x \in [0, 1)$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2n+1)I_{2n+1}} (1-x)^{-n-1/2}.$$

由此推出

$$\forall x \in [0, 1), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)I_{2n+1}}.$$

c) 证明

$$\forall x \in [0, 1), \quad \arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2 I_{2n+1}}.$$

d) 利用第 c) 问证明

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

把 $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2}$ 分成偶数项与奇数项，完成证明。

来源：L. Euler, *Démonstration de la somme de cette suite* $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + 1/36 + \dots$, *Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord*, vol. 2 (1743), 115–127; 收入 *Opera Omnia*, Series 1, vol. 14, 177–186 (E63)。

练习 1.17 (Basel 问题 3)。继续使用练习 1.16 中的 Wallis 积分。作变量替换 $x = \cos \theta$, 得到

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^n d\theta.$$

再定义

$$J_n := \int_0^{\pi/2} \theta^2 (\cos \theta)^{2n} d\theta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) 通过分部积分证明：对每个 $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{2n} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n.$$

b) 借助练习 1.16(a) 推出：对每个 $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^2} = \frac{2J_{n-1}}{I_{2n-2}} - \frac{2J_n}{I_{2n}}.$$

c) 利用凸性不等式

$$\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta, \quad \theta \in [0, \pi/2],$$

证明

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{J_n}{I_{2n}} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \right).$$

d) 由此推出

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

本题取自 Y. Matsuoka, *An elementary proof of the formula $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} = \pi^2/6$* , *American Mathematical Monthly*, 68 (1961), 485–487.

练习 1.18 (Basel 问题 4)。

a) 证明：对每个 $x \in (0, 1)$,

$$\ln x \ln(1-x) - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt - \int_1^{1-x} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = 0.$$

b) 推出：对每个 $x \in (0, 1)$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n + (1-x)^n}{n^2} \ln x \ln(1-x).$$

c) 证明

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}n^2} + (\ln 2)^2.$$

本题取自 L. Euler, *De summatione innumerabilium progressionum*, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 5 (1738), 91–105; 收入 *Opera Omnia*, Series 1, vol. 14, 25–41 (E20)。

第二章 基数理论初步

2.1 基数

定义 2.1。 设 X, Y 为两个集合。若存在从 X 到 Y 的双射，则称 X 与 Y 等势，记作

$$X \sim Y \quad \text{或} \quad \text{card } X = \text{card } Y.$$

显然，每个集合 X 都与自身等势，因为 X 上的恒等映射是从 X 到 X 的双射。若函数 $f: X \rightarrow Y$ 是双射，则它有双射逆映射 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ ；因此，若 $X \sim Y$ ，则 $Y \sim X$ 。最后，两个双射的复合仍是双射，所以若 $X \sim Y$ 且 $Y \sim Z$ ，则 $X \sim Z$ 。

因而，等势关系是“所有集合组成的总体”上的等价关系，其“等价类”定义了“基数”。之所以使用引号，是因为所有集合组成的总体并不是一个集合；否则这个集合本身也会是该总体的元素。因此，以朴素方式把基数理解为等势关系的等价类，从严格的集合论观点看并不完全令人满意。不过，这一困难可以绕开，从而严格定义基数（参见文献 [16]，E-III-3）。

例。

1. $\mathcal{P}(X)$ 与 $\{0, 1\}^X$ 等势，因为映射

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \{0, 1\}^X, \\ A &\longmapsto \mathbf{1}_A, \end{aligned} \quad \mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

是双射。

2. $\mathbb{N}$ 与 $2\mathbb{N}$ 等势，因为 $n \mapsto 2n$ 是双射。

命题 2.1。 设 X 为集合。集合 X 与 $\mathcal{P}(X)$ 不等势；更准确地说，不存在从 X 到 $\mathcal{P}(X)$ 的满射。

证明。 反设存在满射 $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ 。令

$$A := \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

由满射性，可以找到 $a \in X$ 使得 $f(a) = A$ 。然而，若 $a \in A$ ，则 $a \notin f(a) = A$ ；若 $a \notin A$ ，则 $a \in f(a) = A$ 。两种情形都导致矛盾。□

记号与定义。

- (a) 若存在从 X 到 Y 的单射，记作 $\text{card } X \leq \text{card } Y$ 。
- (b) 若 $\text{card } X \leq \text{card } Y$ ，且 X, Y 不等势，记作 $\text{card } X < \text{card } Y$ 。

定理 2.1 (Bernstein 定理)。

- (a) 若 $X \neq \emptyset$ ，且存在从 X 到 Y 的单射，则存在从 Y 到 X 的满射。^a

- (b) 若存在从 X 到 Y 的满射，则存在从 Y 到 X 的单射。
 (c) 若既存在从 X 到 Y 的单射（相应地，满射），又存在从 Y 到 X 的单射（相应地，满射），则 X 与 Y 等势，也就是说二者具有相同的基数。
 (d) 任给两个集合 X, Y ，它们必且只处于下列三种情形之一：

$$\text{card } X < \text{card } Y, \quad \text{card } X = \text{card } Y, \quad \text{card } X > \text{card } Y.$$

^a**校订注：**原书漏写了条件 $X \neq \emptyset$ 。若 $X = \emptyset$ 而 $Y \neq \emptyset$ ，则确有单射 $X \rightarrow Y$ ，却不存在映射 $Y \rightarrow X$ ，更不可能存在满射。

这里不证明这一较难的结果。关于 (c) 中单射版本的证明，可参见文献 [30]，第 59 页。¹

推论 2.1. 关系 $\leq$ 是基数全体上的全序关系。

证明。对任意集合 X ，恒等映射 Id_X 都是单射，因此自反性显然成立。反对称性由定理 2.1(c) 得出。两个单射的复合仍为单射，故传递性也显然成立。由定理 2.1(d)，该序还是全序。 $\square$

说明。

1. 若 $X \subset Y$ ，则 $\text{card } X \leq \text{card } Y$ 。
2. 一方面， $n \mapsto \{n\}$ 是单射，所以 $\text{card } \mathbb{N} \leq \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ；另一方面，由命题 2.1，不存在从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 的满射。因此

$$\text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

定义 2.2. 若存在 $x_0 \in X$ 以及从 X 到 $X \setminus \{x_0\}$ 的单射，则称集合 X 为无限集。否则称 X 为有限集，并记 $\text{card } X < +\infty$ 。

例。 $\mathbb{N}$ 是无限集，因为 $n \mapsto n+1$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ 的单射。

命题 2.2. 若存在从 X 到 Y 的单射，且 X 为无限集，则 Y 也是无限集。特别地，只要一个集合含有无限子集，它本身就是无限集。

证明。 设 $i: X \rightarrow Y$ 为单射， $\varphi: X \rightarrow X \setminus \{x_0\}$ 为单射。定义

$$\psi(y) := \begin{cases} y, & y \in Y \setminus i(X), \\ i(\varphi(x)), & y = i(x) \in i(X). \end{cases}$$

则 ψ 是从 Y 到 $Y \setminus \{i(x_0)\}$ 的单射。 $\square$

命题 2.3. 集合 X 是无限集，当且仅当存在从 $\mathbb{N}$ 到 X 的单射；也就是说

$$\text{card } X \geq \text{card } \mathbb{N}.$$

¹**阅读提示：**本书采用通常的经典集合论框架并默认选择公理。在这一框架下，(b)、(c) 的满射版本以及 (d) 均成立；其中 (c) 的单射版本通常称为 Cantor–Bernstein 定理，而 (d) 与选择公理密切相关。

证明。 设 X 为无限集。我们用归纳法证明：对每个 $n \in \mathbb{N}$ ，都存在 X 中两两不同的 $n+1$ 个元素 $x_0, \dots, x_n$ ，以及从 X 到 $X \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ 的单射 i_n 。当 $n=0$ 时，这正是无限集的定义。假设结论对 n 成立。由命题 2.2，集合 $X \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ 仍为无限集。因此，可取

$$x_{n+1} \in X \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$$

以及单射

$$j: X \setminus \{x_0, \dots, x_n\} \longrightarrow X \setminus \{x_0, \dots, x_{n+1}\}.$$

于是 $i_{n+1} := j \circ i_n$ 是从 X 到 $X \setminus \{x_0, \dots, x_{n+1}\}$ 的单射。最终，映射 $n \mapsto x_n$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 X 的单射。

反过来，若存在从 $\mathbb{N}$ 到 X 的单射，则由命题 2.2 以及 $\mathbb{N}$ 的无限性， X 是无限集。 $\square$

注。 命题 2.3 也可以等价地表述为：

$$\text{集合 } X \text{ 有限} \iff \text{card } X < \text{card } \mathbb{N}.$$

这说明，从基数的意义看，与 $\mathbb{N}$ 等势的集合是“最小”的无限集。

例。

1. $\mathbb{R}$ 是无限集，因为 $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ 。
2. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是无限集，因为 $n \mapsto \{n\}$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 的单射。然而，我们已经看到

$$\text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

因此，无限集存在多个——事实上存在无穷多个——不同的等势“类”；其中最小的一类由所有与 $\mathbb{N}$ 等势的集合构成。下面对这一类作更细致的研究。

2.2 可数集

定义 2.3。

- (a) 若存在从 X 到 $\mathbb{N}$ 的单射，即 $\text{card } X \leq \text{card } \mathbb{N}$ ，则称 X 为可数集。
- (b) 若 X 与 $\mathbb{N}$ 等势，即 $\text{card } X = \text{card } \mathbb{N}$ ，则称 X 为可数无限集。可数无限基数记作 $\aleph_0$ 。
- (c) 若 $\text{card } X > \text{card } \mathbb{N}$ ，则称 X 为不可数集，有时也称不可数无限集。

字母 $\aleph$ (读作“阿列夫”) 是希伯来字母表的第一个字母。显然， $\mathbb{N}$ 是可数无限集，而 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是不可数无限集 (参见上例)。

注。 由 Bernstein 定理，集合 X 是可数无限集，当且仅当它既是无限集又是可数集。这也说明上述定义彼此相容。

由这些定义立即得到下列性质。

命题 2.4。

- (a) 集合 X 可数，当且仅当它是有限集或可数无限集。
- (b) 可数集的任意子集都是可数集。
- (c) 若 X 是无限集， Y 是可数集，且 $X \subset Y$ ，则 Y 是可数无限集。

证明。(b) 设 $X' \subset X$ 。把典范单射 $X' \rightarrow X$ 与一个单射 $X \rightarrow \mathbb{N}$ 复合，便得到从 X' 到 $\mathbb{N}$ 的单射。因此 X' 可数。

(c) 由命题 2.3, Y 是无限集；另一方面，按定义 Y 可数，所以 Y 是可数无限集。 $\square$

应用 2.1。

- (a) $\mathbb{Z}$ 是可数无限集。
- (b) $\mathbb{N}^2$ 是可数无限集。
- (c) $\mathbb{Q}$ 是可数无限集。

证明。(a) 定义映射

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ 2n &\longmapsto n \quad (n \geq 0), \\ 2n-1 &\longmapsto -n \quad (n \geq 1).\end{aligned}$$

这是一个双射，所以 $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ 。

(b) 定义

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N}, \\ (p, q) &\longmapsto \Phi(p, q) := \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q.\end{aligned}$$

该映射是双射。它按照图 2.1 所示的路线依次遇到 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 中的各个有序对，并为它们编号。

(c) 一方面， $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ ，故 $\mathbb{Q}$ 是无限集。另一方面，每个有理数 r 都可以唯一写成

$$r = \frac{p}{q}, \quad (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \gcd(p, q) = 1,$$

其中 $q > 0$ ；零的标准表示为 $0 = 0/1$ 。因此映射

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \\ \frac{p}{q} &\longmapsto (p, q)\end{aligned}$$

是单射。又因为 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$ ，通过复合便得到从 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{N}$ 的单射。 $\square$

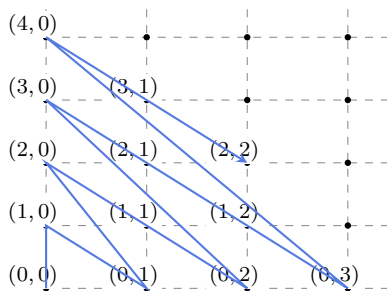


图 2.1: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 的可数性

由应用 2.1 立即得到如下推论。

推论 2.2。

- (a) 对每个 $d \geq 1$, $\mathbb{N}^d$ 都可数。
- (b) 对每个 $d \geq 1$, 若 $X_1, \dots, X_d$ 都是可数集，则笛卡儿积 $X_1 \times \dots \times X_d$ 也可数。此外，若

所有 X_i 都非空，且其中至少一个是可数无限集，则 $X_1 \times \cdots \times X_d$ 是可数无限集。

证明。 对 $d \geq 2$ 归纳证明 (b)。先设 $d = 2$ 。因为 X_1, X_2 都可数，所以存在单射 $\Phi_i : X_i \rightarrow \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2\}$ 。映射

$$\begin{aligned}\Phi : X_1 \times X_2 &\longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \\ (x_1, x_2) &\longmapsto (\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2))\end{aligned}$$

是单射。因此 $X_1 \times X_2$ 可数。

例如，设 X_2 是可数无限集。此时 $X_2 \sim \mathbb{N}$ ，故可设 Φ_2 为双射。在非空集 X_1 中固定一点 x_1^0 。映射

$$\Psi(n) = (x_1^0, \Phi_2^{-1}(n))$$

把 $\mathbb{N}$ 单射到 $X_1 \times X_2$ 中。

利用恒等式

$$X_1 \times \cdots \times X_d \times X_{d+1} = (X_1 \times \cdots \times X_d) \times X_{d+1},$$

即可完成从 d 到 $d+1$ 的归纳。最后，只需重新排列集合的编号，便总可以把某个可数无限的因子记作 X_{d+1} 。□

命题 2.5。 可数多个可数集的并仍为可数集。

证明。 设

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i, \text{ 且 } I \subset \mathbb{N},$$

且每个 X_i ($i \in I$) 都可数。对每个 $i \in I$ ，取单射 $\varphi_i : X_i \rightarrow \mathbb{N}$ 。对任意 $x \in X$ ，定义

$$n(x) := \min\{i \in I : x \in X_i\}.$$

再定义

$$\begin{aligned}\Phi : X &\longrightarrow \mathbb{N}^2, \\ x &\longmapsto \Phi(x) := (n(x), \varphi_{n(x)}(x)).\end{aligned}$$

该映射是单射。事实上，若 $x \neq y$ ，则或者 $n(x) \neq n(y)$ ，从而 $\Phi(x) \neq \Phi(y)$ ；或者 $n(x) = n(y) = n$ ，此时 $x, y \in X_n$ ，而 $\varphi_n(x) \neq \varphi_n(y)$ ，因为 φ_n 是单射。故仍有 $\Phi(x) \neq \Phi(y)$ 。所以 X 可数。□

注。 若某个 X_i 是可数无限集，则由命题 2.4(c)， X 也是可数无限集。

最后证明下面这个重要定理。

定理 2.2。 $\mathbb{R}$ 是不可数无限集。更准确地说，

$$\text{card } \mathbb{R} = \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

证明。 定义映射

$$\begin{aligned}\Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow [0, 1/2], \\ x = (x_n)_{n \geq 0} &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{3^{n+1}}.\end{aligned}$$

Φ 是单射。事实上，若 $(x_n)_{n \geq 0} \neq (y_n)_{n \geq 0}$ ，则

$$\ell := \min\{n : x_n \neq y_n\} < +\infty.$$

于是

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \geq \frac{1}{3^{\ell+1}} - \sum_{n=\ell+1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{2 \cdot 3^{\ell+1}} > 0.$$

由于 $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ，映射 Φ 把 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 单射到区间 $[0, 1/2]$ 中。又因为 $[0, 1/2]$ 通过典范嵌入单射到 $\mathbb{R}$ 中，所以

$$\text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq \text{card } \mathbb{R}.$$

至此，由 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是不可数无限集，立即可知 $\mathbb{R}$ 也是不可数无限集。
为了证明 $\text{card } \mathbb{R} = \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ，先考虑双射

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow (0, 1), \\ x &\longmapsto \frac{e^x}{1 + e^x}.\end{aligned}$$

于是

$$\text{card}[0, 1] \leq \text{card } \mathbb{R} = \text{card}(0, 1) \leq \text{card}[0, 1),$$

从而 $\text{card } \mathbb{R} = \text{card}[0, 1)$ 。再定义

$$\begin{aligned}\Psi : [0, 1) &\longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \\ x &\longmapsto \Psi(x) := (x_n)_{n \in \mathbb{N}},\end{aligned} \quad \begin{cases} x_0 := \lfloor 2x \rfloor, \\ x_n := \left\lfloor 2^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{2^{k+1}} \right) \right\rfloor, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

这里 $\lfloor x \rfloor$ 表示 x 的整数部分。 $\Psi(x)$ 是 x 的规范二进制展开，并且

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}.$$

该等式又说明 Ψ 是单射。因此

$$\text{card } \mathbb{R} = \text{card}[0, 1) \leq \text{card}\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

结合前面已经得到的反向不等式，可得

$$\text{card } \mathbb{R} = \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

□

2.3 习题

习题 2.1。 设 $f: X \rightarrow Y$ 为映射。

(a) 证明下列命题等价：

- (i) f 为满射；
- (ii) 对每个 $B \in \mathcal{P}(Y)$, 都有 $f(f^{-1}(B)) = B$;
- (iii) 对每个 $A \in \mathcal{P}(X)$, 都有 $(f(A))^c \subset f(A^c)$, 其中两个补集分别在 Y 与 X 中取。

(b) 证明下列命题等价：

- (i) f 为单射；
- (ii) 对每个 $A \in \mathcal{P}(X)$, 都有 $f^{-1}(f(A)) = A$;
- (iii) 对每个 $A \in \mathcal{P}(X)$, 都有 $f(A^c) \subset (f(A))^c$, 其中两个补集分别在 X 与 Y 中取；
- (iv) 对任意 $A, B \in \mathcal{P}(X)$, 都有 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ 。

习题 2.2。 设 $A, B \in \mathcal{P}(X)$ 。用示性函数 $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B$ 表示

$$\mathbf{1}_{A^c}, \quad \mathbf{1}_{A \cap B}, \quad \mathbf{1}_{A \cup B}, \quad \mathbf{1}_{A \setminus B}, \quad \mathbf{1}_{A \Delta B}.$$

习题 2.3。

(a) 设 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(X)$, $n \geq 1$ 。证明

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \text{card}(I)=k}} \mathbf{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}.$$

(b) 由此推出：若 X 为有限集，则有 Poincaré 公式

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \text{card}(I)=k}} \text{card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

习题 2.4。

(a) 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 且 $p_1, \dots, p_n$ 是 n 个互不相同的素数。利用映射

$$(k_1, \dots, k_n) \mapsto p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$$

证明 $\mathbb{N}^n$ 可数。

(b) 由此证明有限多个可数集的笛卡儿积仍然可数。可数无限多个可数集的笛卡儿积又能得到什么结论？

习题 2.5。 考察 $[0, 1)$ 中每个实数的规范十进制展开（即小数位序列不从某一项起恒等于 9 的展开），证明 $\mathbb{R}$ 不可数。

习题 2.6。 证明 $\mathbb{N}$ 的所有无限子集组成的集合不可数；更一般地，任一无限集的所有无限子集组成的集合都不可数。

习题 2.7。 证明实代数数全体 $\mathcal{A}$ 可数。这里，实代数数是指整系数多项式的实根。

习题 2.8。 证明单调函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的不连续点集可数。

习题 2.9。 证明 $\mathbb{R}$ 的任意开集 Ω 都可以表示成可数个两两不交的开区间之并。

第三章 拓扑学若干补充

以下回顾与补充绝不能替代一般拓扑学或度量结构的系统课程。本章只介绍测度论与积分理论中不可或缺的概念：扩充实直线 $\overline{\mathbb{R}}$ 、上极限与下极限、可分性与可数开基，以及点到集合的距离函数。反过来，闭包、内部、紧性等基本概念将在后文大量使用，却既不在这里展开，也不重新定义。读者若对此有所遗忘或疑惑，应查阅一般拓扑学教材，或较为基础的度量结构教材，例如文献 [18]。

3.1 扩充实直线

扩充实直线通常记为 $\overline{\mathbb{R}}$ 。我们希望它是一个有序度量空间，并满足三个基本要求：

- 它是包含 $\mathbb{R}$ 的集合，并且在包含关系意义下尽可能“小”；
- 它是紧致且全序的；
- 它与实直线相容： $\mathbb{R}$ 上的序与拓扑限制到 $\mathbb{R}$ 后，分别与 $\mathbb{R}$ 上的自然序以及绝对值度量所诱导的拓扑一致。

构造方法有多种，其共同思想大致都是：先在 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 的某个开区间之间构造同胚，再适当地延拓这个同胚。例如，考虑

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1), \\ x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

函数 f 显然是 $\mathbb{R}$ 到 $(-1, 1)$ 的同胚；其逆映射

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

确实连续。开区间 $(-1, 1)$ 在 $\mathbb{R}$ 中的闭包是紧区间 $[-1, 1]$ 。因此，构造 $\overline{\mathbb{R}}$ 的思路是：给 $\mathbb{R}$ 添加两个记作 $-\infty, +\infty$ 的元素，并把它们分别规定为 $-1, 1$ 在 f 的适当延拓 $\tilde{f}$ 下的原像。

具体定义

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \quad \tilde{f}|_{\mathbb{R}} := f, \quad \tilde{f}(-\infty) := -1, \quad \tilde{f}(+\infty) := 1. \quad (3.1)$$

现在还要在 $\overline{\mathbb{R}}$ 上定义全序 $\leq$ 和距离 δ ，这是构造中最重要的一步。

$\overline{\mathbb{R}}$ 上的序。

(i) 在 $\mathbb{R}$ 上采用通常的序，即对 $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}_+.$$

(ii) 对每个 $x \in \mathbb{R}$ ，规定

$$-\infty \leq x \leq +\infty.$$

$\overline{\mathbb{R}}$ 上的距离。 对任意 $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ ，定义

$$\delta(x, y) := |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|. \quad (3.2)$$

下面的命题说明这一构造达到了预期目标。

命题 3.1。

- (a) 二元关系 $\leq$ 是 $\mathbb{R}$ 上的全序； $\mathbb{R}$ 的每个非空子集都有上确界和下确界； δ 是 $\mathbb{R}$ 上的距离。
 (b) 恒等映射

$$\text{Id} : (\mathbb{R}, \delta|_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

是同胚。

- (c) $(\mathbb{R}, \delta)$ 是紧致空间，并与区间 $[-1, 1]$ 同胚；而且 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 的开子集。可以选取一个保持 $\mathbb{R}$ 与 $[-1, 1]$ 上序关系的同胚；式 (3.1) 定义的 $\tilde{f}$ 就具有这一性质。

证明。 (a) $\leq$ 是全序这一事实显然。进一步， $\mathbb{R}$ 的任意非空子集或者在 $\mathbb{R}$ 中有上界，因而在 $\mathbb{R}$ 以及 $\mathbb{R}$ 中有上确界；或者在 $\mathbb{R}$ 中无上界，此时 $+\infty$ 是它在 $\mathbb{R}$ 中的上确界。下确界的情形相同。关于距离，只需注意： f 是 $\mathbb{R}$ 到 $(-1, 1)$ 的单射，因而 $\tilde{f}$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $[-1, 1]$ 的单射。这保证

$$\delta(x, y) = 0 \iff x = y.$$

其余距离公理直接由 $\mathbb{R}$ 上绝对值的相应性质得到。

(b) 根据 δ 在 $\mathbb{R}$ 上的定义，恒等映射关于 δ 与 $|\cdot|$ 的双连续性，恰好等价于 f 是 $\mathbb{R}$ 与 $(-1, 1)$ 之间的同胚。这一点已在本节开头证明。因此， δ 在 $\mathbb{R}$ 上诱导的拓扑确实就是绝对值度量所诱导的拓扑。

(c) 映射 $\tilde{f}$ 显然是 $\mathbb{R}$ 到 $[-1, 1]$ 的严格递增双射。对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ ，都有

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| = \delta(x, y),$$

所以 $\tilde{f}$ 是满的等距映射，从而是同胚。由此，

$$\mathbb{R} = \tilde{f}^{-1}([-1, 1])$$

是紧致区间，因为 $\tilde{f}^{-1}$ 连续。最后， $\mathbb{R} = \tilde{f}^{-1}((-1, 1))$ 是连续映射 $\tilde{f}$ 下开集的原像，故在 $\mathbb{R}$ 中为开集。□

下面的推论立即来自 (b)。这里， $\mathcal{O}_d(X)$ 表示距离 d 在 X 上诱导的拓扑中的开集全体（参见第 3.3 节）。

推论 3.1。

$$\{O \cap \mathbb{R} : O \in \mathcal{O}_\delta(\mathbb{R})\} = \mathcal{O}_{|\cdot|}(\mathbb{R}).$$

^a

^a**校订注：**原书左端写作 $\mathcal{O}_\delta(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}$ ，但 $\mathcal{O}_\delta(\mathbb{R})$ 是集合族，而 $\mathbb{R}$ 是点集，这一“交集”并不表示所需的诱导拓扑。原书随后的证明实际使用的是开集在 $\mathbb{R}$ 上的迹，故在此明确写成 $\{O \cap \mathbb{R} : O \in \mathcal{O}_\delta(\mathbb{R})\}$ 。

证明。 设 $i : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ 为典范单射。对任意 $O \in \mathcal{O}_\delta(\mathbb{R})$ ，都有

$$i^{-1}(O) = O \cap \mathbb{R} \in \mathcal{O}_{|\cdot|}(\mathbb{R}).$$

反过来，因为 $\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 中为开集，所以 $\mathbb{R}$ 的每个开集 O 也是 $\mathbb{R}$ 的开集；它当然正是自身在 $\mathbb{R}$ 上的迹。□

3.2 上极限与下极限

以下始终给 $\overline{\mathbb{R}}$ 赋予式 (3.2) 定义的距离 δ 。该距离与 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的序相容，并使其成为紧致度量空间。

定义 3.1。 设 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的序列。其上极限定义为

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf_{n \geq 0} \left(\sup_{k \geq n} x_k \right) \in \overline{\mathbb{R}},$$

其下极限定义为

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup_{n \geq 0} \left(\inf_{k \geq n} x_k \right) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

注。 由于 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的每个单调序列都收敛，立即有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty}^{\downarrow} \left(\sup_{k \geq n} x_k \right), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \left(\inf_{k \geq n} x_k \right).$$

下面的结果建立了上、下极限与单调性、连续性之间的联系，后文将会用到。

命题 3.2。 设 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的序列，且 $f: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 单调并连续。

• 若 f 递增，则

$$f \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \quad f \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

• 若 f 递减，则

$$f \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \quad f \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

证明。 只讨论 f 递增时的上极限，其余情形类似。令

$$y_n := \sup_{k \geq n} x_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

f 的递增性给出

$$f(y_n) \geq \sup_{k \geq n} f(x_k).$$

另一方面，由上确界的定义，可以从 $(x_k)_{k \geq n}$ 中选出一个子列 $(x_{\varphi(k)})$ ，使其在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中收敛到 y_n (这里固定 n)。由 f 的连续性，

$$f(y_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(k)}) \leq \sup_{k \geq n} f(x_k).$$

故

$$f(y_n) = \sup_{k \geq n} f(x_k).$$

再次使用 f 的连续性，得到

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} f(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \\ &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = f\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n\right).\end{aligned}$$

这就是所需等式。 □

上、下极限最重要的意义体现在下面的结果中。

命题 3.3. 设 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的序列。则 $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ 与 $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ 分别是该序列在 $\mathbb{R}$ 中最大和最小的聚点。此外，

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ 在 } \overline{\mathbb{R}} \text{ 中收敛} \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

证明. 因为 $(\mathbb{R}, \delta)$ 紧致，序列 (x_n) 至少有一个聚点 (Bolzano–Weierstrass 定理)。设 ℓ 是 (x_n) 的一个聚点，则存在子列 $(x_{\varphi(n)})$ 在 $(\mathbb{R}, \delta)$ 中收敛到 ℓ 。由于

$$x_{\varphi(n)} \leq \sup_{k \geq \varphi(n)} x_k,$$

而右端单调递减地收敛到 $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ ，由 $\mathbb{R}$ 上拓扑与序的相容性，

$$\ell \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

下面证明

$$\ell_+ := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

本身就是 (x_n) 的聚点。根据度量空间中聚点的刻画，只需证明

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \quad \delta(x_n, \ell_+) \leq \varepsilon.$$

令

$$y_n := \tilde{f}(x_n) \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N},$$

其中 $\tilde{f}$ 由式 (3.1) 定义。因为 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{R}$ 上递增且连续，由命题 3.2，

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n = \tilde{f}(\ell_+).$$

因此

$$z_n := \sup_{k \geq n} y_k$$

单调递减地收敛到 $\tilde{f}(\ell_+)$ 。给定 $\varepsilon > 0$ 与 $N \in \mathbb{N}$ ，可以找到 $n_0 \geq N$ ，使对每个 $n \geq n_0$ ，都有

$$\tilde{f}(\ell_+) \leq z_n \leq \tilde{f}(\ell_+) + \varepsilon.$$

由上确界的定义，还可以找到 $n \geq n_0$ ，使

$$y_n \leq z_{n_0} < y_n + \varepsilon.$$

于是存在 $n \geq N$ 满足

$$\tilde{f}(\ell_+) - \varepsilon \leq z_{n_0} - \varepsilon \leq y_n \leq z_n \leq \tilde{f}(\ell_+) + \varepsilon,$$

从而

$$\delta(x_n, \ell_+) = |y_n - \tilde{f}(\ell_+)| \leq \varepsilon.$$

注意到

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\limsup_{n \rightarrow \infty} (-x_n),$$

便可对下极限得到相应结论。最后，因为 $(\mathbb{R}, \delta)$ 紧致， (x_n) 收敛当且仅当它只有一个聚点；这又等价于

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

□

最后给出上、下极限关于加法与乘法的两个性质。

命题 3.4。

(a) 设 (x_n) 与 (y_n) 是 $\mathbb{R}$ 中的两个序列；二者同时在 $[-\infty, +\infty)$ 中有上界，或者同时在 $(-\infty, +\infty]$ 中有下界。则

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(b) 设 (x_n) 与 (y_n) 是 $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty]$ 中的两个序列；二者同时在 $\mathbb{R}_+$ 中有上界，或者同时在 $(0, +\infty]$ 中有下界。则

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n \right),$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

证明。(a) 由下列估计直接得到：

$$\sup_{k \geq n} (x_k + y_k) \leq \sup_{k \geq n} x_k + \sup_{k \geq n} y_k,$$

$$\inf_{k \geq n} (x_k + y_k) \geq \inf_{k \geq n} x_k + \inf_{k \geq n} y_k.$$

(b) 对序列 $(\ln x_n)$ 与 $(\ln y_n)$ 应用 (a)，其中约定

$$\ln 0 = -\infty, \quad \ln(+\infty) = +\infty,$$

再依次对函数 $\ln$ 与 $\exp$ 应用命题 3.2 即得结论。^a

□

^a校订注：原书此处写成“应用 (i)”，但命题 3.4 并没有第 (i) 项；证明实际使用的是本命题的 (a)。

3.3 集合上的拓扑与度量空间

定义 3.2。

(a) 集合 X 上的一个拓扑, 是指 X 的一个子集族 $\mathcal{O}(X)$, 它满足:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}(X)$;

(ii) 对每个 $n \in \mathbb{N}^*$, 若 $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{O}(X)$, 则

$$\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{O}(X)$$

(对有限交封闭);

(iii) 任给指标集 I , 若对每个 $i \in I$ 都有 $O_i \in \mathcal{O}(X)$, 则

$$\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}(X)$$

(对任意并封闭)。

(b) $\mathcal{O}(X)$ 的元素称为 X 的开集; 开集的补集称为闭集。

(c) 若 X 中任意两个不同的点都分别属于两个互不相交的开集, 则称该拓扑为 *Hausdorff* 拓扑 (或分离拓扑)。

度量情形。 若 (X, d) 是度量空间,^a 则距离 d 在 X 上诱导的拓扑由下列开集族给出:

$$\mathcal{O}_d(X) := \left\{ \bigcup_{i \in I} \mathring{B}(x_i, r_i) : x_i \in X, r_i \in \mathbb{R}_+^*, I \text{ 为任意指标集} \right\},$$

其中

$$\mathring{B}(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

容易验证, 这一集合族满足 Hausdorff 拓扑的公理。此外, 在这一框架下, 显然有

$$O \in \mathcal{O}_d(X) \iff \forall x \in O, \exists r_x > 0, \quad \mathring{B}(x, r_x) \subset O.$$

^a回顾: 距离是映射 $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$, 满足 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$; $d(x, y) = d(y, x)$; 以及对任意 $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ 。

3.4 可数开基与可分性

定义 3.3。

(a) 若拓扑空间 $(X, \mathcal{O}(X))$ 存在一个由非空开集组成的可数族 $\{\omega_n : n \geq 1\}$, 使得

$$\forall O \in \mathcal{O}(X), \exists I \subset \mathbb{N}^*, \quad O = \bigcup_{n \in I} \omega_n,$$

则称它具有可数开基。^a

(b) 若度量空间 (X, d) 含有一个稠密序列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 则称它为可分空间。^b

^a校订注：原书把开基写成 $\{\omega_n : n \geq 1\}$, 却在并集公式中取 $I \subset \mathbb{N}$, 从而可能用到未定义的 ω_0 。这里把指标集统一为 $I \subset \mathbb{N}^*$ 。

^b回顾：序列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 在 X 中稠密, 是指对任意 $x \in X$, 都存在一个子列 $(x_{\varphi_x(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, 使 $d(x_{\varphi_x(n)}, x) \rightarrow 0$ 。

命题 3.5。 一个度量空间可分, 当且仅当它具有可数开基。

证明。 $(\Rightarrow)$ 设 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是稠密序列。验证可知,

$$\left\{ \overset{\circ}{B}(x_n, r) : n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}_+^* \right\}$$

构成一个可数开基。事实上, 对 X 的每个开集 O , 都有

$$O = \bigcup_{\overset{\circ}{B}(x_n, r) \subset O} \overset{\circ}{B}(x_n, r).$$

而 $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}_+^*$ 的可数性来自第 2 章关于基数的结果。

$(\Leftarrow)$ 设 $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一个可数开基。对每个 n , 在 ω_n 中取一点 x_n 。显然, 任何满足 $x_n \in \omega_n$ 的序列 (x_n) 都在 X 中稠密。 $\square$

3.5 拓扑的构造示例

3.5.1 诱导拓扑

定义 3.4。 设 $(X, \mathcal{O}(X))$ 为拓扑空间, $Y \subset X$ 。在 Y 上定义由 X 的拓扑诱导的拓扑:

$$\mathcal{O}(Y) := \{O \cap Y : O \in \mathcal{O}(X)\}.$$

若 $i : Y \hookrightarrow X$ 表示典范单射, 则

$$\mathcal{O}(Y) = \{i^{-1}(O) : O \in \mathcal{O}(X)\} = i^{-1}(\mathcal{O}(X)).$$

此外, 由 Hausdorff 拓扑诱导的拓扑仍是 Hausdorff 的。

度量情形。 若 X 上的拓扑由距离 d 诱导, 则容易验证

$$\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}_{d|_Y}(Y),$$

其中 $d|_Y$ 表示 d 在 $Y \times Y$ 上的限制。

诱导拓扑与可分性。 若 (X, d) 可分, 则它具有可数开基。根据诱导拓扑的定义, 若 $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 X 的可数开基, 则删去空集后, $(\omega_n \cap Y)_{n \in \mathbb{N}}$ 构成 Y 的可数开基。因此 $(Y, d|_Y)$ 可分。

3.5.2 乘积拓扑

定义 3.5。 若 $(X, \mathcal{O}(X))$ 与 $(Y, \mathcal{O}(Y))$ 是两个拓扑空间, 则 $X \times Y$ 上的乘积拓扑由下列开族定义:

$$\mathcal{O}(X \times Y) := \left\{ \bigcup_{i \in I} (O_i \times \Omega_i) : O_i \in \mathcal{O}(X), \Omega_i \in \mathcal{O}(Y), I \text{ 为任意指标集} \right\}.$$

注。

- 两个 Hausdorff 拓扑的乘积拓扑仍是 Hausdorff 的。
- $X \times Y$ 上的乘积拓扑, 是使典范投影

$$\pi_X : X \times Y \rightarrow X, \quad \pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$$

分别关于 $(X, \mathcal{O}(X))$ 与 $(Y, \mathcal{O}(Y))$ 连续的最小拓扑。

若 X, Y 上的拓扑分别由距离 d, δ 诱导, 则容易验证 (例如参见文献 [18]): $\mathcal{O}(X \times Y)$ 也是下列 $X \times Y$ 上常用距离所诱导的拓扑:

$$D_1((x, y), (x', y')) := d(x, x') + \delta(y, y'),$$

$$D_p((x, y), (x', y')) := (d(x, x')^p + \delta(y, y')^p)^{1/p}, \quad p \in [1, +\infty),$$

$$D_\infty((x, y), (x', y')) := \max(d(x, x'), \delta(y, y')).$$

此外, 还有许多 $X \times Y$ 上的距离也能诱导同一个乘积拓扑。

命题 3.6。

- 若 $(X, \mathcal{O}(X))$ 与 $(Y, \mathcal{O}(Y))$ 都具有可数开基, 则 $(X \times Y, \mathcal{O}(X \times Y))$ 也具有可数开基。
- 若 (X, d) 与 (Y, δ) 都可分, 则对任何诱导乘积拓扑且拓扑等价的距离, $X \times Y$ 都可分; 例如对每个 $p \in [1, +\infty]$, $(X \times Y, D_p)$ 都可分。

证明。 (a) 设

$$\mathcal{U}_X := \{U_n : n \geq 1\}, \quad \mathcal{V}_Y := \{V_m : m \geq 1\}$$

分别为 X, Y 的可数开基。则可数族

$$\mathcal{U}_X \times \mathcal{V}_Y := \{U_n \times V_m : (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$$

是 $\mathcal{O}(X \times Y)$ 的开基。事实上, 若

$$O \in \mathcal{O}(X \times Y), \quad z = (x, y) \in O = \bigcup_{i \in I} (O_i \times \Omega_i),$$

则存在 $i_z \in I$, 使 $(x, y) \in O_{i_z} \times \Omega_{i_z}$ 。根据 $\mathcal{U}_X, \mathcal{V}_Y$ 是开基这一事实, 存在正整数 n_x, m_y , 使

$$x \in U_{n_x} \subset O_{i_z}, \quad y \in V_{m_y} \subset \Omega_{i_z}.$$

最终

$$\begin{aligned} O &= \bigcup_{(x,y) \in O} (U_{n_x} \times V_{m_y}) \\ &= \bigcup_{(n,m) \in L_O} (U_n \times V_m), \end{aligned}$$

其中

$$L_O := \{(n_x, m_y) : (x, y) \in O\} \subset (\mathbb{N}^*)^2.$$

(b) 这是 (a) 与命题 3.5 的直接推论。也可以直接证明：若 $\{x_n : n \geq 1\}$ 与 $\{y_m : m \geq 1\}$ 分别在 (X, d) 与 (Y, δ) 中稠密，则由 D_p 的定义，

$$\{(x_n, y_m) : n, m \geq 1\}$$

在 $(X \times Y, D_p)$ 中稠密。 □

3.6 点到集合的距离

定义 3.6。 设 (X, d) 为度量空间， A 是 X 的非空子集。对每个 $x \in X$ ，定义 x 到 A 的距离为

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a) < +\infty.$$

这类函数在测度论中经常出现，因为它们提供了一种有效方法，可以用连续函数逼近集合的示性函数。

命题 3.7。

(a) 对 X 的每个非空子集 A ，函数

$$x \mapsto d(x, A)$$

取值于 $\mathbb{R}_+$ ，并且关于距离 d 是 Lipschitz 常数为 1 的函数，即

$$\forall x, y \in X, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

(b)

$$\{x \in X : d(x, A) = 0\} = \overline{A},$$

其中 $\overline{A}$ 表示 A 在 X 中的闭包。

证明。 (a) 对任意 $z \in A$ ，

$$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

所以 $d(x, A) - d(x, y)$ 是所有 $d(y, z)$ ($z \in A$) 的下界。于是

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A),$$

最终得到

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

交换 x, y 的角色，即得绝对值形式的不等式。

(b) 距离 $d(x, A)$ 总是非负的。由下确界的定义,

$$d(x, A) = 0 \iff \text{存在 } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \text{ 使 } \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, a_n) = 0.$$

根据度量空间中闭包的定义, 这正好等价于 $x \in \overline{A}$.^a □

^a**校订注:** 原书此处写成“由上确界的定义”, 但 $d(x, A)$ 在定义 3.6 中是 $\{d(x, a) : a \in A\}$ 的下确界, 应为“由下确界的定义”。

后文将根据需要逐步建立这类函数的其他性质, 而它们都以命题 3.7 为基础。

3.7 习题

习题 3.1。

(a) 设 $(a_n)_{n \geq 0}$ 为实数序列, 并满足

$$\forall p, n, r \geq 0, \quad a_{pn+r} \leq p a_n + r \alpha,$$

其中 α 是固定实数。证明序列

$$\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n \geq 1}$$

在 $\mathbb{R}$ 中收敛到

$$\inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}.$$

(b) 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 为递增函数。对每个 $n \geq 1$, 令

$$S_n^f := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

利用 (a) 证明: 序列 $(S_n^f)_{n \geq 1}$ 在 $\mathbb{R}$ 中收敛到它的下确界。

习题 3.2。 设 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 满足

$$\forall x, y \geq 0, \quad f(xy) \leq f(x)f(y).$$

证明: 对任意 $x \geq 0$, 序列

$$\left(f(x^n)^{1/n}\right)_{n \geq 1}$$

收敛到 $[0, f(x)]$ 中的某个元素。将结论应用于

$$f(x) := (1+x)^a, \quad a \geq 0.$$

习题 3.3。 设 $M_d(\mathbb{K})$ 为 $\mathbb{K}$ 上的 $d \times d$ 矩阵全体, 并赋予一个满足

$$\forall A, B \in M_d(\mathbb{K}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

的范数 $\|\cdot\|$ 。证明: 对每个 $A \in M_d(\mathbb{K})$, 序列

$$\left(\|A^n\|^{1/n}\right)_{n \geq 1}$$

收敛到 $[0, \|A\|]$ 中的某个元素。^a

^a校订注：原书先在 $M_d(\mathbb{K})$ 上给出矩阵与范数，却在结论中无故改写成 $A \in M_d(\mathbb{R})$ 。论证对 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 同样成立，故这里统一为 $A \in M_d(\mathbb{K})$ 。

习题 3.4。

- (a) 设 X 为非空集， $(f_n)_{n \geq 1}$ 是一列有界函数 $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ，并逐点收敛到有界函数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 。证明

$$\sup_{x \in X} f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in X} f_n(x) \right).$$

对下确界建立类似的不等式。

- (b) 给出一个使上述不等式为严格不等式的例子。证明：若 $(f_n)_{n \geq 1}$ 一致收敛，则等号成立。

^a

^a校订注：原书本题开头把序列记为 $(f_n)_{n \geq 1}$ ，(b) 中却写成 $(f_n)_{n \geq 0}$ 。这里统一为 $n \geq 1$ 。

习题 3.5。设 $(A_n)_{n \geq 0}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 中的序列，并定义

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

- (a) 用 $\mathbf{1}_{A_n}$ 表示

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{n \geq 0} A_n}, \quad \mathbf{1}_{\bigcap_{n \geq 0} A_n}, \quad \mathbf{1}_{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n}, \quad \mathbf{1}_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n}.$$

- (b) 由此推出：

(i)

$$\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right)^c = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n;$$

(ii)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{A_n} = +\infty \right\}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{A_n^c} < +\infty \right\};$$

(iii)

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) &= \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \right), \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) &\subset \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cap \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \right). \end{aligned}$$

第二部分

测度论

从 Riemann 到 Lebesgue

Riemann 积分的基本思想，是利用以横轴为底边的“小”矩形

$$[a_{i-1}, a_i] \times [0, \Phi_i]$$

去逼近横轴与函数 f 的图像之间的面积，其中矩形高度 Φ_i 接近 f 在 $[a_{i-1}, a_i]$ 上的“平均”高度。Riemann 和定理（参见定理 1.4）精确表达的正是这一思想。

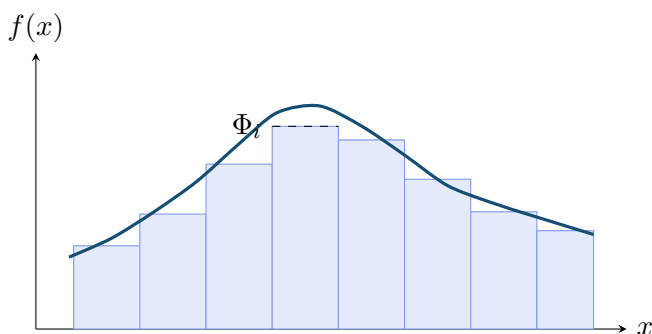


图 3.1: Riemann 积分的分割方式

Lebesgue 积分理论的创新思路恰好相反：先把纵轴分成“小”区间 $[b_{j-1}, b_j]$ ，再用

$$\int_a^b f \approx \sum_j \frac{b_{j-1} + b_j}{2} \text{length}\{x : b_{j-1} \leq f(x) \leq b_j\}$$

逼近 f 图像下方的面积。

主要困难在于，集合

$$E_j := \{x : b_{j-1} \leq f(x) \leq b_j\}$$

通常并不是区间；要为其赋予长度——更一般地说，赋予“测度”——并不容易，在某些情形下甚至不可能。

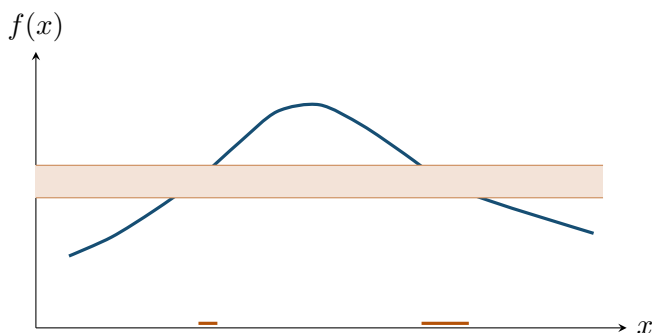


图 3.2: Lebesgue 积分的分割方式

因此，在第三部分正式进入 Lebesgue 积分理论之前，我们必须先定义哪些集合可以“测量”，再定义哪些函数适合积分，最后定义测度本身。这正是第二部分的内容。

有些读者或许会问：相对于 Riemann 积分，Lebesgue 积分把横坐标与纵坐标所扮演的角色互换，这一点究竟有多么核心？为此，我们认为完整重印 Lebesgue 的奠基性文字很有启发。这篇短短四页的札记当年发表于《巴黎科学院院报》（参见文献 [2]）。后来还有更详尽的论述，例如文献 [4]；但读者会看到，理论的核心已经尽在其中。原书特别说明：下文有两条脚注是 1901 年原文不可分割的一部分；另有一条关于“开区间”的脚注是本书编者补入的辨析。

论定积分的一种推广

Henri Lebesgue

1901 年 4 月 29 日

对连续函数而言，积分与原函数这两个概念完全一致。Riemann 定义了某些不连续函数的积分，但并非每个导函数在 Riemann 意义下都可积。因此，寻找原函数的问题尚未由积分理论解决；我们自然希望得到一个新的积分定义：它以 Riemann 积分为特例，并且能够解决原函数问题。¹

为了定义连续递增函数

$$y(x) \quad (a < x < b)$$

的积分，可以把区间 (a, b) 分成若干子区间，把每个子区间的长度乘以 x 位于该区间时 y 所取的某个值，再把这些乘积相加。当 $x \in (a_i, a_{i+1})$ 时， y 在某两个界 m_i, m_{i+1} 之间变化；反过来，当 y 位于 m_i, m_{i+1} 之间时， x 位于 a_i, a_{i+1} 之间。因此，我们原本给出的是 x 的变化范围的分割，也就是给出数 a_i ；其实也可以改为给出 y 的变化范围的分割，也就是给出数 m_i 。由此产生了推广积分概念的两种方法。众所周知，第一种方法（给出 a_i ）导向 Riemann 的定义，以及 Darboux 先生给出的上积分与下积分。下面考察第二种方法。

设函数 y 的值介于 m 与 M 之间。给定

$$m = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_{p-1} < M = m_p.$$

当 x 属于集合 E_0 时，令 $y = m$ ；当 x 属于集合 E_i 时，令

$$m_{i-1} < y < m_i.$$

稍后我们将定义这些集合的测度 λ_0, λ_i 。考察下面两个和：

$$m_0 \lambda_0 + \sum_i m_i \lambda_i, \quad m_0 \lambda_0 + \sum_i m_{i-1} \lambda_i.$$

如果相邻 m_i 之差的最大值趋于零时，这两个和趋于同一个不依赖于所选 m_i 的极限，那么按照定义，这个极限就是 y 的积分，并称 y 可积。

考察 (a, b) 中的一个点集。可以用无穷多种方法，把这些点包含在可数无穷多个区间之中；²这些区间长度之和的下确界称为该集合的测度。若集合 E 的测度与不属于 E 的点集的测度之和等于 (a, b) 的测度，则称 E 可测。³

¹预先对积分的任何推广提出的这两个要求显然彼此相容，因为在 Riemann 意义下可积的导函数，其积分就是它的一个原函数。

²Henri Lebesgue 想到的很可能是开区间；本书作者的同事 Patrick Polo 曾向我们指出这一点。

³若再适当地加入某些零测集，便得到 Borel 先生意义下的可测集（《函数理论讲义》[1]）。

这些集合具有如下两个性质。给定可数无穷多个可测集 E_i ，至少属于其中一个 E_i 的点所组成的集合仍然可测；如果各 E_i 两两没有公共点，那么所得集合的测度等于各 E_i 测度之和。所有 E_i 的公共点组成的集合也可测。

自然应先考虑这样一类函数：积分定义中出现的集合都可测。可以得到如下结论：若函数的绝对值有上界，并且无论 A, B 如何，满足

$$A < y \leq B$$

的 x 所组成的集合都可测，那么该函数可以用上述方法积分。这样的函数称为可求和函数。可求和函数的积分介于其下积分与上积分之间。因此，若一个 Riemann 可积函数也是可求和的，那么两种定义给出的积分相同。

事实上，每个 Riemann 可积函数都是可求和的，因为它的不连续点集是零测集。还可以证明：若忽略一个由 x 的值组成的零测集之后，剩余集合上的函数在每一点都连续，则该函数可求和。这个性质立即给出一些在 Riemann 意义下不可积、却可求和的函数。设 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 为两个连续函数，且 $\varphi(x)$ 不恒为零。取一个处处稠密的零测集；某个函数只在该集合上与 $f(x)$ 不同，并在这些点取值 $f(x) + \varphi(x)$ ，那么它可求和，但在 Riemann 意义下不可积。例如： x 为无理数时函数值为 0， x 为有理数时函数值为 1。

上述构造方法表明，可求和函数全体的势大于连续统的势。这类函数还有如下两个性质：

1. 若 f, φ 可求和，则 $f + \varphi$ 与 $f\varphi$ 也可求和，并且 $f + \varphi$ 的积分等于 f, φ 的积分之和。
2. 若一列可求和函数存在极限，则其极限仍为可求和函数。

可求和函数全体显然包含 $y = k$ 与 $y = x$ 。所以由性质 1，它包含所有多项式；又由性质 2，它包含自身所有的极限，因而包含所有连续函数，也就是第一类函数（参见 Baire, *Annali di Matematica*, 1899）；它还包含所有第二类函数，等等。

特别地，每个绝对值有上界的导函数都属于第一类，因而可求和；并且可以证明，把它的积分看作积分上限的函数时，这个函数是它的一个原函数。

最后给出一个几何应用。若 $|f'|, |\varphi'|, |\psi'|$ 都有上界，则曲线

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$$

的长度为

$$\int \sqrt{f'(t)^2 + \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt.$$

若 $\varphi = \psi = 0$ ，就得到有界变差函数 f 的全变差。当 f', φ', ψ' 不存在时，可以用 Dini 数代替导数，得到一个几乎相同的定理。

历史术语提示。 上文按 1901 年原文翻译。“可求和”以及“第一类”等词使用的是当时的术语；它们与本书后文的现代定义并不完全同义。尤其是，逐点极限的封闭性在现代积分论中必须结合可测性、有限性或支配条件等具体语境理解。后续章节将给出严格的现代版本。

第四章 集合上的 σ -代数

集合论预备知识

本节汇集处理集合与映射时所需的若干结果；它们是进入测度论与积分理论不可缺少的工具。其中大部分只是回顾。

(a) **集合运算**。设 X 为集合， $\mathcal{P}(X)$ 为其幂集，且 $A, B \in \mathcal{P}(X)$ 。记

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{x \in X : x \in A \text{ 或 } x \in B\}, \\ A \cap B &:= \{x \in X : x \in A \text{ 且 } x \in B\}, \\ A^c &:= \{x \in X : x \notin A\}, \\ A \setminus B &:= \{x \in X : x \in A \text{ 且 } x \notin B\} = A \cap B^c, \\ A \triangle B &:= \{x \in X : x \in A \cup B \text{ 且 } x \notin A \cap B\} \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{aligned}$$

(b) **直接像与原像**。设 $f: X \rightarrow Y$ ， $A_i \subset X$ ， $B_j \subset Y$ 。与 f 典范地对应两个集合映射：直接像映射 f_d 与原像映射 f_r^{-1} ，定义为

$$\begin{aligned} f_d: \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(Y), \quad A \longmapsto f_d(A) := \{f(x) : x \in A\}, \\ f_r^{-1}: \mathcal{P}(Y) &\longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad B \longmapsto f_r^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}. \end{aligned}$$

为简便起见，尽管可能引起混淆，我们几乎总把 f_d 写成 f ，把 f_r^{-1} 写成 f^{-1} 。这些集合映射满足下列 Hausdorff 公式。设 $(A_i)_{i \in I}$ 是 X 的子集族， $(B_j)_{j \in J}$ 是 Y 的子集族，其中 I, J 非空，则

$$\begin{aligned} f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= \bigcup_{i \in I} f(A_i), \\ f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &\subset \bigcap_{i \in I} f(A_i), \end{aligned}$$

且后一包含关系在 f 为单射时成为等式；

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) &= \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j), \\ f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) &= \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j), \quad f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c. \end{aligned}$$

若 f 为双射，则集合原像映射与 f 的逆映射之间有简单联系：对 Y 的每个子集 B ，

$$f_r^{-1}(B) = \{f^{-1}(b) : b \in B\}.$$

若 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ 是 Y 的一个子集族，还约定

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\} \subset \mathcal{P}(X).$$

(c) **集合序列的上、下极限。** 设 $(A_n)_{n \geq 1}$ 是一个可数的子集序列。定义

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &:= \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k \\ &= \{x \in X : \forall n \geq 1, \exists k \geq n, x \in A_k\} \\ &= \{x \in X : x \text{ 属于无穷多个 } A_k\},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &:= \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k \\ &= \{x \in X : \exists n \geq 1, \forall k \geq n, x \in A_k\} \\ &= \{x \in X : x \text{ 从某一项起始终属于 } A_k\}.\end{aligned}$$

显然,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

当二者相等时, 称 (A_n) 有极限, 并把公共集合记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 。

若 (A_n) 关于包含关系递增, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n;$$

若 (A_n) 关于包含关系递减, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

(d) **De Morgan 律。**

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c, \quad \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c.$$

由此立即得到

$$\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right)^c = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c, \quad \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right)^c = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n^c.$$

4.1 σ -代数与 Borel σ -代数

定义 4.1。

(a) 设 X 为集合。若 X 的一个子集族 $\mathcal{A}$ 满足

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(ii) 若 $A \in \mathcal{A}$, 则 $A^c \in \mathcal{A}$ (对补集封闭);

(iii) 若 $(A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$, 则

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$$

(对可数并封闭),

则称 $\mathcal{A}$ 为 X 上的一个 σ -代数。

(b) 二元组 $(X, \mathcal{A})$ 称为可测空间, 意思是该空间 “可以承载测度”。

注。 条件 (iii) 蕴含 $\mathcal{A}$ 对有限并封闭。事实上，固定 n_0 ，只需令

$$A_n = \emptyset, \quad n > n_0.$$

σ -代数的例。

1. $\mathcal{A} := \{\emptyset, X\}$ ，称为平凡 σ -代数（原书称“粗 σ -代数”）。
2. $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$ ，称为离散 σ -代数。
3. 固定 $A \subset X$ ，则

$$\mathcal{A} := \{\emptyset, X, A, A^c\}$$

是包含 A 的最小 σ -代数。

4. 设

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i,$$

其中 I 非空且有限或可数无限，并且当 $i \neq j$ 时 $X_i \cap X_j = \emptyset$ 。也就是说， $(X_i)_{i \in I}$ 是 X 的一个分割。则

$$\mathcal{A} := \left\{ \bigcup_{j \in J} X_j : J \subset I \right\}$$

是一个 σ -代数。

5. 令

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ 可数, 或 } A^c \text{ 可数}\}.$$

这里只需验证公理 (iii)。设 $(A_n)_{n \geq 1}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的序列。若每个 A_n 都可数，则由命题 2.5，它们的并仍可数。若其中某个 A_{n_0} 不可数，则 $A_{n_0}^c$ 可数；于是

$$\left(\bigcup_n A_n \right)^c = \bigcap_n A_n^c \subset A_{n_0}^c$$

必为可数集。

此外，还可以证明：

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X) \iff X \text{ 具有不可数无限基数}.$$

这一结论明显不那么平凡，超出了本书范围。

6. 若 $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ 是 X 上任意一族 σ -代数， $I \neq \emptyset$ ，则

$$\mathcal{A} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

仍是一个 σ -代数。

性质 4.1。 设 $\mathcal{A}$ 是 X 上的 σ -代数，则：

- (a) $X \in \mathcal{A}$;
- (b) 若对每个 $n \in \mathbb{N}$ ，都有 $A_n \in \mathcal{A}$ ，则

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

因此 $\mathcal{A}$ 对有限交封闭；只需在 $n > n_0$ 时令 $A_n = X$ 。

(c) 若 $A, B \in \mathcal{A}$, 则

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}.$$

(d) 若 $A, B \in \mathcal{A}$, 则

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}.$$

(e) 若对每个 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $A_n \in \mathcal{A}$, 则

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

都属于 $\mathcal{A}$ 。

证明。

$$X = \emptyset^c \in \mathcal{A},$$

而

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \right)^c \in \mathcal{A}.$$

(c)、(d)、(e) 立即得到。 □

反例。 若 X 是拓扑空间 (甚至只是度量空间; 参见第 3.3 节), 开集族

$$\mathcal{O}(X) := \{O \in \mathcal{P}(X) : O \text{ 是 } X \text{ 的开集}\}$$

通常不是 σ -代数, 原因是它不满足补集公理 (ii): 开集 O 的补集一般不是开集。例如,

$$\mathbb{R}_-^* = (-\infty, 0) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}), \quad (\mathbb{R}_-^*)^c = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty) \notin \mathcal{O}(\mathbb{R}).$$

命题 4.1 与定义。 设 $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ 。

(a) 存在包含 $\mathcal{E}$ 的最小 σ -代数 (关于包含关系而言), 记为 $\sigma(\mathcal{E})$, 并称为由 $\mathcal{E}$ 生成的 σ -代数。

(b) 若 $\mathcal{T}$ 本身是 σ -代数, 则

$$\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{T}.$$

(c) 若 $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, 则

$$\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{F}).$$

特别地, 若 $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$, 且 $\mathcal{T}$ 是 σ -代数, 则 $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{T}$ 。

证明。 对 (a), 定义

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{T} \supset \mathcal{E} \\ \mathcal{T} \text{ 为 } \sigma\text{-代数}}} \mathcal{T}.$$

$\mathcal{P}(X)$ 是包含 $\mathcal{E}$ 的 σ -代数, 所以参与交运算的族非空。由上面的例 6, $\sigma(\mathcal{E})$ 是 σ -代数, 并且显然是包含 $\mathcal{E}$ 的最小者。(b)、(c) 立即由生成 σ -代数的定义得到。 □

最初的例。

1. 固定非空真子集 $A \in \mathcal{P}(X)$ 。由 $\mathcal{E} := \{A\}$ 生成的 σ -代数是

$$\mathcal{T}_A = \{\emptyset, X, A, A^c\}.$$

2. 由所有单点集生成的 σ -代数，即

$$\mathcal{E} := \{\{x\} : x \in X\},$$

恰好是

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ 可数, 或 } A^c \text{ 可数}\}.$$

定义 4.2。 设 $(X, \mathcal{O}(X))$ 为拓扑空间。 X 的 *Borel* σ -代数（也称 X 的 Borel 集族）定义为

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}(X)).$$

^a

^a这一名称是为了纪念法国数学家 Émile Borel (1871–1956)；他揭示了这一集合族对当时初创的测度论的重要性。

注。

- 立即有

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\{F \in \mathcal{P}(X) : F \text{ 为闭集}\}).$$

- 一般而言， $\mathcal{B}(X) \neq \mathcal{P}(X)$ ；特别地， $X = \mathbb{R}$ 时如此。这一结论不易证明，但可用基数论论证： $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 与 $\mathbb{R}$ 等势（参见文献 [6]，习题 2.6.11，第 286 页），故

$$\text{card } \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \text{card } \mathbb{R} < \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

（参见命题 2.1）。

也可以借助选择公理直接构造一个非 Borel 集；参见定理 13.2(b) 的证明。

具有可数开基的拓扑空间的 Borel 集。 回顾：若拓扑空间（特别是度量空间） $(X, \mathcal{O}(X))$ 存在开集族 $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ，使得

$$\forall O \in \mathcal{O}(X), \exists I \subset \mathbb{N}, \quad O = \bigcup_{i \in I} \omega_i,$$

则称它具有可数开基。

特别地，若度量空间 (X, d) 可分，也就是含有稠密序列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ，^a则它具有可数开基，因为

$$\{\dot{B}(x_n, r) : n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}_+^*\}$$

就是这样一个开基，而 $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}_+^*$ 可数。详见第 3.4 节。

^a这里“稠密”是指：对每个 $x \in X$ ，都存在一个子列 $x_{\varphi(n)}$ ，使得 $n \rightarrow +\infty$ 时 $x_{\varphi(n)} \rightarrow x$ 。

由 σ -代数对可数并封闭以及 Borel σ -代数的定义，立即得到：

命题 4.2。 设 X 是具有可数开基 $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 的拓扑空间，则

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}).$$

应用 4.1。 在实直线 $X = \mathbb{R}$ 上，每个区间 I 都是 Borel 集，因为它总可以写成一个开区间与至多两个单点集（闭集）的并。反过来，某些区间族生成 Borel σ -代数：

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{Q}\}) \\ &= \sigma(\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{Q}\}). \end{aligned}$$

证明。 由于 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，

$$\{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha < \beta\} = \{(\rho - r, \rho + r) : \rho \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{Q}_+^*\}$$

是 $\mathbb{R}$ 的一个可数开基。因此

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha < \beta\}).$$

又因为

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, +\infty) \cap [\beta, +\infty)^c,$$

并且

$$(\alpha, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} [\alpha + 1/n, +\infty),$$

所以

$$\sigma(\{[\alpha, +\infty) : \alpha \in \mathbb{Q}\}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

反向包含显然，因为每个 $[\alpha, +\infty)$ 都是 $\mathbb{R}$ 的闭集。其余等式同理。 □

4.2 其他 σ -代数示例

4.2.1 原像 σ -代数

命题 4.3。 设 $f : X \rightarrow Y$ ， $\mathcal{B}$ 是 Y 上的 σ -代数。则

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

是 X 上的 σ -代数。

证明。 由本章开头回顾的原像 Hausdorff 公式，结论显然。具体地，

$$(f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A},$$

以及

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \in \mathcal{A}.$$

□

定义 4.3。

$$\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

称为 $\mathcal{B}$ 在 f 下的原像 σ -代数, 记为

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \quad \text{或} \quad \sigma(f).$$

例。

1. 迹 σ -代数。设 $Y \subset X$, $i: Y \rightarrow (X, \mathcal{A})$ 为典范单射, 则

$$i^{-1}(\mathcal{A}) = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}.$$

这称为 $\mathcal{A}$ 在 Y 上的迹 σ -代数。若 $Y \in \mathcal{A}$, 则 $i^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ 。

2. 带状 σ -代数。设 $\pi: X \times Y \rightarrow (X, \mathcal{A})$ 为从 $X \times Y$ 到 X 的典范投影, 则

$$\pi^{-1}(\mathcal{A}) = \{A \times Y : A \in \mathcal{A}\},$$

称为带状 σ -代数。

4.2.2 像 σ -代数

这里的术语容易引起误解: 若 $f: X \rightarrow Y$ 是映射, $\mathcal{A}$ 是 X 上的 σ -代数, 则

$$\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$$

一般并不是 Y 上的 σ -代数。

定义 4.4。 设 $f: X \rightarrow Y$, $\mathcal{A}$ 是 X 上的 σ -代数。定义 Y 上的 像 σ -代数

$$\mathcal{B} := \{B \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

由原像 Hausdorff 公式, $\mathcal{B}$ 显然是 σ -代数。

4.3 传递引理

下面的命题通常称为传递引理。

命题 4.4 (传递引理)。 设 $f: X \rightarrow Y$, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ 。则

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})),$$

且两端都是 X 上的 σ -代数。

证明。 证明双向包含。

$\subset$: 因为

$$f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})),$$

而右端由命题 4.3 是 σ -代数, 所以

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})).$$

$\supset$: 令 $\mathcal{B}$ 为 $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ 在 f 下的像 σ -代数, 即

$$\mathcal{B} := \{B \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\}.$$

因为 $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$, 所以 $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}$, 进而

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subset f^{-1}(\mathcal{B}).$$

根据 $\mathcal{B}$ 的定义,

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})).$$

故得到所需的反向包含。 $\square$

注。 这个命题其实很容易记忆; 主要困难只是准确理解等式两端各自的含义。

命题 4.5。

(a) 若 X 是度量空间 (相应地, 拓扑空间), 且 $Y \subset X$ 赋予诱导距离 (相应地, 诱导拓扑; 参见第 3.5.1 节), 则

$$\mathcal{B}(Y) = \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}(X)\}.$$

(b) 此外,

$$\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X) \iff Y \in \mathcal{B}(X).$$

在这种情形下,

$$\mathcal{B}(Y) = \{A \in \mathcal{B}(X) : A \subset Y\}.$$

证明。 (a) 设 $i: Y \hookrightarrow X$ 为典范嵌入。由于

$$\mathcal{O}(Y) = \{O \cap Y : O \in \mathcal{O}(X)\} = i^{-1}(\mathcal{O}(X)),$$

传递引理给出

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(Y) &= \sigma(i^{-1}(\mathcal{O}(X))) = i^{-1}(\sigma(\mathcal{O}(X))) \\ &= i^{-1}(\mathcal{B}(X)) = \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}(X)\}. \end{aligned}$$

(b) 若 $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X)$, 则 $Y \in \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X)$ 。反过来, 若 $Y \in \mathcal{B}(X)$, 则 $\mathcal{B}(X)$ 对有限交封闭; 结合 (a) 即得结论。 $\square$

应用 4.2。

(a) $\mathbb{R}$ 的若干常用 Borel 子集上的 Borel 集。例如,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \subset \mathbb{R}_+\},$$

因为 $\mathbb{R}_+$ 在 $\mathbb{R}$ 中闭, 因而是 Borel 集。类似地,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^*) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : 0 \notin A\}.$$

(b) $\overline{\mathbb{R}}$ 的 Borel 集。取 $X = \overline{\mathbb{R}}$, $Y = \mathbb{R}$ 。由推论 3.1, 命题 4.5 正好适用, 因此

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subset \{A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{-\infty, +\infty\} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

反过来, $\{+\infty\}, \{-\infty\}, \{-\infty, +\infty\}$ 都是有限集, 从而在 $\bar{\mathbb{R}}$ 中闭, 故属于 $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ 。又由命题 4.5,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}),$$

因为 $\mathbb{R} \in \mathcal{O}(\bar{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ 。所以得到第一种刻画:

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \{A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{-\infty, +\infty\} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}. \quad (4.1)$$

与 $\mathbb{R}$ 上的 Borel σ -代数类似, $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ 也由广义区间生成:

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \sigma(\{[a, +\infty] : a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{(a, +\infty] : a \in \mathbb{Q}\}). \quad (4.2)$$

令

$$\mathcal{T} := \sigma(\{[a, +\infty] : a \in \mathbb{Q}\}).$$

广义区间 $[a, +\infty]$ 在 $\bar{\mathbb{R}}$ 中闭, 所以 $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ 。另一方面,

$$\{+\infty\} = \bigcap_{n \geq 1} [n, +\infty] \in \mathcal{T},$$

并且

$$\{-\infty\} = \left(\bigcup_{n \geq 1} [-n, +\infty] \right)^c \in \mathcal{T}.$$

因此

$$\mathbb{R} = \bar{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty, +\infty\} \in \mathcal{T}.$$

若 $i: \mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 为典范嵌入, 则 $i^{-1}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。传递引理给出

$$\begin{aligned} i^{-1}(\mathcal{T}) &= \sigma(\{i^{-1}([a, +\infty]) : a \in \mathbb{Q}\}) \\ &= \sigma(\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{Q}\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

故 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}$ 。结合刻画 (4.1), 可得 $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{T}$, 从而证明式 (4.2) 的第一个等式。第二个等式同理。

4.4 习题

以下 $(X, \mathcal{A})$ 表示一个可测空间。

习题 4.1。 由 X 的所有有限子集生成的 σ -代数是什么? 给出它等于 $\mathcal{P}(X)$ 的一个充分条件。

习题 4.2。

(a) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 X 上的两个 σ -代数。 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 是否必为 X 上的 σ -代数?

(b) 证明

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) &= \sigma(\{A \cup B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}) \\ &= \sigma(\{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}). \end{aligned}$$

习题 4.3. 对 $n \in \mathbb{N}^*$, 令

$$I_n^0 := \left(0, \frac{1}{2^n}\right), \quad I_n^k := \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right), \quad k \in \{1, \dots, 2^n - 1\},$$

并在 $(0, 1)$ 上定义

$$\mathcal{B}_n := \sigma(\{I_n^k : 0 \leq k < 2^n\}).$$

证明 $(\mathcal{B}_n)$ 是递增的 σ -代数序列, 但 $\bigcup_n \mathcal{B}_n$ 不是 σ -代数。

习题 4.4. 设 $(X, \mathcal{A})$ 、 $(Y, \mathcal{B})$ 是两个可测空间。对 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 、 $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$, 记

$$\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} := \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}\}).$$

设

$$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C}), \quad \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{D}), \quad X \in \mathcal{C}, \quad Y \in \mathcal{D}.$$

证明

$$\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

原书把最后两个条件合写为 $X \times Y \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, 其含义就是 $(X, Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, 即 $X \in \mathcal{C}$ 、 $Y \in \mathcal{D}$ 。 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 称为乘积 σ -代数, 第 11 章将详细研究。

习题 4.5. 对 $x \in X$, 定义由 x 生成的 σ -代数 $\mathcal{A}$ 的原子

$$\dot{x} := \bigcap_{\substack{x \in A \\ A \in \mathcal{A}}} A.$$

(a) 证明: 对每个 $x \in X$, $\dot{x}$ 等于 x 关于下列等价关系 $\sim$ 的等价类:

$$x \sim y \iff \forall A \in \mathcal{A}, \quad x \in A \iff y \in A.$$

(b) 证明: 若 $\mathcal{A}$ 可数, 则 $\mathcal{A}$ 包含它的原子, 并且 $\mathcal{A}$ 的每个元素都可以写成至多可数个原子的并。

(c) 由此推出: σ -代数 $\mathcal{A}$ 或者有限, 或者不可数。

第五章 可测函数

在 Lebesgue 积分理论中，实值或复值可测函数在很大程度上扮演初等理论中 Riemann 可积函数所扮演的角色。

5.1 定义

定义 5.1。

(a) 设 $(X, \mathcal{A})$ 、 $(Y, \mathcal{B})$ 为两个可测空间。若

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

则称函数

$$f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$$

是 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -可测的，简称可测函数。

(b) 若 X, Y 是度量空间（更一般地，拓扑空间），并分别赋予 Borel σ -代数

$$\mathcal{A} := \mathcal{B}(X), \quad \mathcal{B} := \mathcal{B}(Y),$$

则称可测函数 f 为 Borel 可测函数。

注。

- f 的可测性可以用原像 σ -代数写成

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}.$$

所以 $f^{-1}(\mathcal{B})$ 是使 f 可测的 X 上最小 σ -代数。类比生成 σ -代数，它也记作 $\sigma(f)$ 。

- 常见应用中， Y 通常是 $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{R}}$ 或 $\mathbb{R}^d$ ，并赋予相应的 Borel σ -代数；此时常省略值域上的 Borel σ -代数。
- 若 $A \subset X$ ，定义 A 的示性函数

$$\mathbf{1}_A : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\})),$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

则 $\mathbf{1}_A$ 可测，当且仅当 $A \in \mathcal{A}$ 。

记号。 以后经常用 $\{f \in B\}$ 代替

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

例如，

$$\{f \geq b\} := f^{-1}([b, +\infty]), \quad \{f = b\} := f^{-1}(\{b\}).$$

例。 每个常值函数 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ 都可测。事实上，若 $f(x) = y_0$ 对所有 $x \in X$ 成立，则

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} X, & y_0 \in B, \\ \emptyset, & y_0 \notin B. \end{cases}$$

命题 5.1。 设 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ ，且 $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$ ，其中 $\mathcal{E}$ 是 Y 的一个子集族。则

$$f \text{ 可测} \iff f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A},$$

也就是说，对每个 $B \in \mathcal{E}$ ，都有 $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ 。

证明。 f 可测当且仅当 $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ 。由传递引理，

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})).$$

所以 f 可测当且仅当 $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset \mathcal{A}$ ；由于 $\mathcal{A}$ 是 σ -代数，这又等价于 $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$ 。 $\square$

应用 5.1。

(a) 函数

$$f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \quad \text{或} \quad f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$$

可测，当且仅当

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f \geq a\} = \{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}.$$

(b) 更一般地，若 Y 为拓扑空间，则

$$f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$$

可测，当且仅当

$$\forall O \in \mathcal{O}(Y), \quad f^{-1}(O) \in \mathcal{A}.$$

(c) 特别地，若 X, Y 为度量空间（甚至拓扑空间），则每个连续函数 $X \rightarrow Y$ 都是 Borel 可测的。

命题 5.2。 设 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ ，并设 $Y' \in \mathcal{B}$ 且 $f(X) \subset Y'$ 。则 f 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -可测的，当且仅当

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad B \subset Y' \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

此外，把 f 看成从 $(X, \mathcal{A})$ 到 Y' 的函数时，它关于 $\mathcal{B}$ 在 Y' 上的迹 σ -代数可测。

证明。 正向显然。反过来，任取 $B \in \mathcal{B}$ 。因为 $Y' \in \mathcal{B}$ ，所以 $B \cap Y' \in \mathcal{B}$ ，并且

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap Y') \in \mathcal{A}.$$

关于迹 σ -代数的结论也显然：当 $Y' \in \mathcal{B}$ 时，它恰由 $\mathcal{B}$ 中包含于 Y' 的集合组成。 $\square$

应用 5.2。

- (a) 若 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 可测且非负, 则把 f 看成取值于 $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ 的函数时仍可测。反过来, 取值于 $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ 的可测函数, 作为实值函数也可测, 因为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上的迹。
- (b) 若 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 可测, 则把 f 看成 $\overline{\mathbb{R}}$ -值函数时仍可测。反过来, 若

$$f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$$

可测且 $f(X) \subset \mathbb{R}$, 则把 f 看成实值函数时可测。

命题 5.3 (复合)。 设

$$(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{B}) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{C}).$$

若 f, g 都可测, 则 $g \circ f$ 可测。

证明。 对任意 $C \in \mathcal{C}$,

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A},$$

因为 $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ 。 □

结合应用 5.1(c) 与命题 5.3, 可以从一个给定的可测函数构造新的可测函数。

应用 5.3。

- (a) 设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 可测。则

$$\max(f, a), \quad \min(f, a), \quad |f|, \quad f^+ := \max(f, 0), \quad f^- := -\min(f, 0)$$

都可测。

- (b) 若 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$ 可测, 则 $1/f$ 可测。若 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ 可测, 则 $\sqrt{f}$ 可测; 若进一步 f 处处不为零, 则 $\ln f$ 也可测, 等等。

命题 5.4。 设

$$f = (f_1, f_2) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)).$$

则 f 可测, 当且仅当两个分量

$$f_1, f_2 : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

都可测。

证明。 ($\Rightarrow$) 有 $f_1 = \pi_1 \circ f$, 其中第一典范投影

$$\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \pi_1(x_1, x_2) = x_1$$

连续, 因而可测。由命题 5.3, f_1 可测; f_2 同理。

($\Leftarrow$) 由两个可分度量空间的乘积拓扑定义, $\mathbb{R}^2$ 的每个开集都是可数个开矩形 $U_i \times V_i$ 的并。因此

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{U \times V : U, V \text{ 为 } \mathbb{R} \text{ 的开集}\}).$$

由命题 5.1, 只需验证 $f^{-1}(U \times V) \in \mathcal{A}$ 。而

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V) \in \mathcal{A}.$$

□

应用 5.4。

(a) 把 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 识别, 即

$$z = x + iy \longleftrightarrow (x, y),$$

则命题 5.4 可改述为: 函数

$$f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$$

可测, 当且仅当 $\operatorname{Re} f$ 与 $\operatorname{Im} f$ 都可测。

(b) 若 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ 或 $\mathbb{C}$ 可测, 则对每个 $p > 0$, $|f|^p$ 可测, 因为 $u \mapsto |u|^p$ 在相应空间上连续, 从而 Borel 可测。

5.2 可测函数的运算

命题 5.5。 设

$$f, g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

可测。则对每个 $\alpha \in \mathbb{R}$, 函数

$$\alpha f + g, \quad fg$$

都可测。

证明。 由命题 5.4, 映射

$$(f, g) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$$

可测。另一方面, 映射

$$(x_1, x_2) \mapsto \alpha x_1 + x_2, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$$

从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 连续, 因而 Borel 可测。由命题 5.3 即得结论。 □

推论 5.1。 命题 5.5 对复值函数仍成立。

证明。 若 f, g 可测, 则 $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f, \operatorname{Re} g, \operatorname{Im} g$ 可测。由命题 5.5,

$$\operatorname{Re}(f + g) = \operatorname{Re} f + \operatorname{Re} g, \quad \operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$$

可测, 故由应用 5.4, $f + g$ 可测。利用复数乘法公式, 可同样处理乘积以及复常数乘法。 □

命题 5.6。 从 $(X, \mathcal{A})$ 到 $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ 的可测函数全体, 在函数的通常加法、数乘与乘法下构成一个 $\mathbb{K}$ -代数。^a

^a也就是说, 它关于加法与数乘是 $\mathbb{K}$ -向量空间, 关于加法与乘法是环, 并且这些运算满足函数空间中通常的相

容关系。

命题 5.7. 设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 是从 $(X, \mathcal{A})$ 到 $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ 的可测函数序列。

- (a) $\sup_n f_n$ 与 $\inf_n f_n$ 可测；
- (b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ 与 $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ 可测；
- (c) 若 f_n 逐点收敛到 f ，即对每个 $x \in X$ ， $f_n(x) \rightarrow f(x)$ 于 $\overline{\mathbb{R}}$ ，则 f 可测。

证明。 因为

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\}),$$

要证明函数 g 可测，只需对每个 $a \in \mathbb{R}$ 验证

$$\{g > a\} \in \mathcal{A} \quad \text{或} \quad \{g \geq a\} \in \mathcal{A}.$$

(a) 有

$$\left\{ \sup_n f_n > a \right\} = \bigcup_{n \geq 1} \{f_n > a\} \in \mathcal{A},$$

以及

$$\left\{ \inf_n f_n \geq a \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n \geq a\} \in \mathcal{A}.$$

(b) 回顾

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k,$$

再应用 (a)。

(c) $\mathbb{R}$ 中的序列收敛，当且仅当其上限等于下极限；此时极限就是二者的公共值。因此，若 $f_n \rightarrow f$ ，则

$$f = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

可测。 □

例。 若 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 可导，则

$$f' = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(f \left(\cdot + \frac{1}{n} \right) - f \right)$$

是 Borel 可测函数。

补充与细化 1. 即使不预先假设 (f_n) 收敛，序列在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的收敛点集

$$C_{\overline{\mathbb{R}}} := \{x \in X : \lim_n f_n(x) \text{ 在 } \overline{\mathbb{R}} \text{ 中存在}\}$$

仍属于 $\mathcal{A}$ 。事实上，

$$\begin{aligned} C_{\overline{\mathbb{R}}} &= \left\{ \liminf_n f_n = \limsup_n f_n \right\} \\ &= \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{ \liminf_n f_n < r \} \cap \{ \limsup_n f_n \geq r \} \right) \right)^c \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

此外,

$$\lim_n f_n : C_{\overline{\mathbb{R}}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

关于 $\mathcal{A}$ 在 $C_{\overline{\mathbb{R}}}$ 上的迹与 $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ 总是可测。

补充与细化 2。 命题 5.7(c) 中的 $\overline{\mathbb{R}}$ 可以换成任意度量空间 (E, d) 。设可测函数

$$f_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{B}(E))$$

逐点收敛到 f 。对 E 的每个闭集 F ,

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= \{x \in X : d(f(x), F) = 0\} \\ &= \{x \in X : \lim_n d(f_n(x), F) = 0\} \\ &= \bigcap_{p \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left\{ x \in X : d(f_n(x), F) \leq \frac{1}{p} \right\} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

这里 $x \mapsto d(f_n(x), F)$ 是可测函数 f_n 与 1-Lipschitz 连续函数 $e \mapsto d(e, F)$ 的复合, 因此从 $(X, \mathcal{A})$ 到 $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ 可测。

补充与细化 3。 若 (E, d) 还完备且可分, 则 f_n 在 E 中收敛的点集也可测。^a 设 $(e_p)_{p \in \mathbb{N}}$ 是 E 中的稠密序列, 则

$$\begin{aligned} C_E &:= \{x \in X : (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ 为 Cauchy 序列}\} \\ &= \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{\ell \geq 1} \bigcap_{m, n \geq \ell} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left(\left\{ d(f_m, e_p) \leq \frac{1}{k} \right\} \cap \left\{ d(f_n, e_p) \leq \frac{1}{k} \right\} \right) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

空间 $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{C}, \mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d$ 都是完备可分度量空间。

^a这种空间有时称为 Polish 空间, 以纪念众多揭示这类空间重要性的波兰数学家; 它们在概率论中尤其重要。

练习。 仿照上面“补充与细化 1”的方法, 证明: 若

$$f, g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$$

可测, 则

$$\{f = g\} \in \mathcal{A}.$$

5.3 可测空间上的简单函数

定义 5.2。 若可测函数

$$f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$$

只取有限多个值, 则称 f 为简单函数, 其中 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 。

每个简单函数都可以写成

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad I \text{ 有限}, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}, \quad (5.1)$$

其中 $(A_i)_{i \in I}$ 是 X 的一个 $\mathcal{A}$ -可测分割；这里允许某些 A_i 为空。反过来，式 (5.1) 形式的每个函数都是简单函数。

在简单函数 f 的所有式 (5.1) 分解中，恰有一个分解使各 α_i 两两不同。此时

$$\{\alpha_i : i \in I\} = f(X), \quad A_i = \{f = \alpha_i\},$$

并得到 f 的标准形式

$$f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mathbf{1}_{\{f=\alpha\}}.$$

简单函数在 Lebesgue 积分的构造中所扮演的角色，正如阶梯函数在 Riemann 理论中所扮演的角色。

例。

1. 函数 $f: (X, \mathcal{P}(X)) \rightarrow \mathbb{K}$ 是简单函数，当且仅当 $\text{card}(f(X)) < +\infty$ 。
2. 若 $A \in \mathcal{A}$ ，则 $\mathbf{1}_A$ 是简单函数，其标准形式为

$$\mathbf{1}_A = 1 \cdot \mathbf{1}_A + 0 \cdot \mathbf{1}_{A^c}.$$

3. 设 $X = [a, b]$ 、 $a < b$ ，且 $\mathcal{A} = \mathcal{B}([a, b])$ 。每个阶梯函数 f 都是简单函数。事实上，它只取有限多个值；对每个 $\alpha \in f([a, b])$ ，集合 $\{f = \alpha\}$ 是 $[a, b]$ 中有限多个区间与单点集的并，故为 Borel 集。反命题不成立；这说明简单函数确实推广了阶梯函数。

式 (5.1) 类型的其他分解通常也存在。例如，只要存在 $\tilde{A} \in \mathcal{A}$ 满足 $\emptyset \neq \tilde{A} \subsetneq A$ ，就还可以写成

$$\mathbf{1}_A = 1 \cdot \mathbf{1}_{\tilde{A}} + 1 \cdot \mathbf{1}_{A \setminus \tilde{A}} + 0 \cdot \mathbf{1}_{A^c}.$$

命题 5.8。简单函数空间

$$\mathcal{E}_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}) := \{f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) : f \text{ 为简单函数}\}$$

是一个 $\mathbb{K}$ -代数。当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时，它还对有限次逐点最大值与最小值封闭，因而是格代数。^a

^a**校订注：**原书对 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 一概称其为“格代数”，并在证明中写 $\max(\alpha_i, \beta_j)$ 。复数没有这里所需的自然全序，故复值函数的 $\max/\min$ 没有定义；格结构只适用于 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ，而代数结构对两种数域均成立。

证明。零函数显然是简单函数。设

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad g = \sum_{j \in J} \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$$

是式 (5.1) 类型的分解，且 $\lambda \in \mathbb{K}$ 。则

$$\lambda f + g = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (\lambda \alpha_i + \beta_j) \mathbf{1}_{A_i \cap B_j},$$

$$fg = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \alpha_i \beta_j \mathbf{1}_{A_i \cap B_j}.$$

若 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, 还有

$$\max(f, g) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \max(\alpha_i, \beta_j) \mathbf{1}_{A_i \cap B_j},$$

最小值同理。这些都是关于 $\mathcal{A}$ -可测分割 $(A_i \cap B_j)_{i \in I, j \in J}$ 的式 (5.1) 类型分解。 $\square$

练习。 证明：若

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}, \quad A_i \in \mathcal{A}, \quad I \text{ 有限},$$

但不要求 (A_i) 是分割, 则 f 仍是简单函数。

定理 5.1 (基本逼近引理)。 设

$$f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \overline{\mathbb{R}} \text{ 或 } \mathbb{C}$$

可测。则存在简单函数序列 $(f_n)_{n \geq 1}$, 使对每个 $x \in X$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

此外：

(a) 若 $f \geq 0$, 可以把 (f_n) 选为非负递增序列：

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq f_n \leq f_{n+1}.$$

(b) 若 f 有界, 可以使 f_n 一致收敛到 f , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

证明。 (a) 先设 $f \geq 0$ 。对每个 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$E_{n,k} := \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad k \in \{0, \dots, n2^n - 1\},$$

以及

$$E_{n,\infty} := \{f \geq n\}.$$

这些集合都是 f 对 $\overline{\mathbb{R}}$ 中区间的原像, 因而属于 $\mathcal{A}$ 。定义

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{E_{n,k}} + n \mathbf{1}_{E_{n,\infty}}.$$

按构造, f_n 是简单函数。

若 $x \in E_{n,k}$, 则在把长度为 2^{-n} 的值域小区间二等分后,

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x), & \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}}, \\ f_n(x) + 2^{-(n+1)}, & \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2(k+1)}{2^{n+1}}. \end{cases}$$

若 $x \in E_{n,\infty}$, 则

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} n+1 > f_n(x), & f(x) \geq n+1, \\ \frac{n2^{n+1} + \ell}{2^{n+1}} \geq n, & \frac{n2^{n+1} + \ell}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{n2^{n+1} + \ell + 1}{2^{n+1}}, \end{cases}$$

其中 $0 \leq \ell \leq 2^{n+1} - 1$ 。所以对每个 $x \in X$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ 。

按构造, 若 $x \in \{f < n\}$, 则

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}.$$

因此, 对任意 $x \in \{f < n_0\}$, 当 $n \geq n_0$ 时有

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n} \rightarrow 0.$$

于是 $f_n \rightarrow f$ 于

$$\{f < +\infty\} = \bigcup_{k \geq 1} \{f < k\}.$$

而若

$$x \in \{f = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f \geq n\},$$

则 $f_n(x) = n \rightarrow +\infty$ 。

如果非负函数 f 由常数 M 控制, 则 $n > M$ 时 $\{f \geq n\} = \emptyset$, 并且对所有 $x \in X$,

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}.$$

所以此时收敛一致。

(b) 实值情形: 若 f 取值于 $\overline{\mathbb{R}}$, 写成

$$f = f^+ - f^-, \quad f^+ := \max(f, 0), \quad f^- := \max(-f, 0).$$

有 $f^\pm \geq 0$, $f^+ + f^- = |f|$ 。所以 $f^\pm$ 同时有界, 当且仅当 f 有界。在每个 $x \in X$, $f^+(x), f^-(x)$ 中至少一个为零。

对 f^+, f^- 分别使用 (a) 的构造, 得到 f_n^+, f_n^- , 再令

$$f_n := f_n^+ - f_n^-.$$

f_n 显然是简单函数, 且逐点收敛到 f 。极限中不会出现不定式: $0 \leq f_n^\pm \leq f^\pm$, 而固定 x 后, 两个序列 $(f_n^+(x)), (f_n^-(x))$ 中有一个恒为零。若 f 有界, 则 $f^\pm$ 有界, 所以收敛还一致。

复值情形: 写

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$$

并分别逼近实部与虚部即可。 □

注。 基本逼近引理确实体现了“从 Riemann 到 Lebesgue”一节中的思想: 把函数 f 的“纵轴”均匀分割并据此逼近 f , 而不是像阶梯函数那样分割“横轴”。

5.4 习题

以下 $(X, \mathcal{A})$ 表示可测空间。

习题 5.1。

- (a) 设 Y 为集合, $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow Y$ 。集合族 $f(\mathcal{A}) := \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ 是否必为 σ -代数? 描述使 f 可测的 Y 上最大 σ -代数。
- (b) 设 $(Y, \mathcal{B})$ 为可测空间, $f : X \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ 。使 f 可测的 X 上最小 σ -代数是什么?

习题 5.2。 设 $(Y_i, \mathcal{B}_i)_{i \in I}$ 是一族可测空间, Y 为集合, 并有映射 $f_i : Y \rightarrow Y_i$ 。令 $\mathcal{B}$ 为由 $(f_i)_{i \in I}$ 生成的 σ -代数, 即使所有 f_i 可测的 Y 上最小 σ -代数。证明

$$f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$$

可测, 当且仅当对每个 $i \in I$,

$$f_i \circ f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y_i, \mathcal{B}_i)$$

可测。

习题 5.3。

- (a) 证明

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A = -A\}$$

是 $\mathbb{R}$ 上的 σ -代数, 其中

$$-A := \{-a : a \in A\}.$$

- (b) 刻画从 $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ 的可测函数, 以及从 $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 的可测函数。

习题 5.4。 设 $f : X \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, 并令

$$\mathcal{A}_f := f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

- (a) 若 $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ Borel 可测, 证明

$$g := h \circ f$$

从 $(X, \mathcal{A}_f)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 可测。

- (b) 设

$$s : (X, \mathcal{A}_f) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

是可测简单函数。证明存在 Borel 可测函数 t , 使 $s = t \circ f$ 。由此推出: 若

$$g : (X, \mathcal{A}_f) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

可测, 则存在 Borel 可测 h 使 $g = h \circ f$ 。

习题 5.5。 定义

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), \quad f(x) := x^2.$$

- (a) 证明 f 的原像 σ -代数是

$$\mathcal{A}_f = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = -A\}.$$

- (b) 求从 $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_f)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 的所有可测函数。

习题 5.6。

- (a) 证明每个从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的调节函数都是 Borel 可测的。
- (b) 由此推出每个从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的单调函数都是 Borel 可测的。
- (c) 利用“单调函数的不连续点集可数”这一事实，重新证明 (b)。

习题 5.7。 设

$$f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$$

可测。证明存在可测函数

$$\theta : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

使

$$f = e^{i\theta} |f|.$$

习题 5.8。 证明度量空间 (X, d) 的 Borel σ -代数等于其 Baire σ -代数，即由所有有界连续实值函数生成的 σ -代数（参见习题 5.2）。

习题 5.9。 设 (Y, d) 是赋予 Borel σ -代数的度量空间，并设可测函数

$$f_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$$

逐点收敛到 f 。

- (a) 证明：对每个 $\Omega \in \mathcal{O}(Y)$ ，存在 $A \in \mathcal{A}$ 使

$$f^{-1}(\Omega) \subset A \subset f^{-1}(\overline{\Omega}).$$

- (b) 由此推出 f 可测。

第六章 可测空间上的正测度

6.1 定义与例

定义 6.1。

(a) 设 $(X, \mathcal{A})$ 为可测空间。若映射

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

满足：

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) 若 $(A_n)_{n \geq 1}$ 是 $\mathcal{A}$ 中两两不交（允许为空）的序列，则

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

(σ -可加性)，

则称 μ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的一个正测度，简称测度。

(b) 若 $\mu(X) < +\infty$ ，称 μ 为有限测度或有界测度；若 $\mu(X) = 1$ ，称 μ 为概率测度。

注。 上述条件蕴含有限可加性：对任意两两不交的 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n).$$

只需对 $k > n$ 令 $A_k = \emptyset$ ，再同时使用 (i)、(ii)。

例。

1. $(X, \mathcal{P}(X))$ 上的零测度：

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \quad \mu(A) := 0.$$

2. 粗测度：

$$\mu(\emptyset) := 0, \quad \mu(A) := +\infty \quad (A \neq \emptyset).$$

3. 点 $a \in X$ 处的 Dirac 测度：

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \quad \delta_a(A) := \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A. \end{cases} \quad (6.1)$$

4. $(X, \mathcal{P}(X))$ 上的计数测度：

$$m(A) := \begin{cases} \text{card}(A), & A \text{ 有限}, \\ +\infty, & A \text{ 无限}. \end{cases}$$

显然 $m(\emptyset) = 0$ 。若 $A_1, \dots, A_n$ 两两不交，则

$$\text{card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \text{card}(A_1) + \dots + \text{card}(A_n).$$

对两两不交的可数族，若其并有限，则只有有限多个非空项；若其并无限，则右端也为 $+\infty$ 。所以 m 确为测度。它也由

$$\forall x \in X, \quad m(\{x\}) = 1$$

所刻画。这个例子很重要：它把积分与由 X 编号的可求和族联系起来；当 $X = \mathbb{N}$ 时，又把积分与级数联系起来。

以上测度都定义在全部子集组成的离散 σ -代数 $\mathcal{P}(X)$ 上，因而也可以限制到 X 上的任意 σ -代数 $\mathcal{A}$ 。反过来，一般无法在整个 $\mathcal{P}(X)$ 上定义所需的测度。

5. 设 μ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的测度， $B \in \mathcal{A}$ 。定义 μ 在 B 上的迹测度

$$\mu_B := \mu(\cdot \cap B).$$

若 $0 < \mu(B) < +\infty$ ，定义给定 B 的条件测度

$$\mu(\cdot | B) := \frac{\mu(\cdot \cap B)}{\mu(B)}.$$

6. $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度。这是本表中最重要例子：正是 Lebesgue 测度使我们能够把 Riemann 积分从 $\mathbb{R}$ 上的函数推广到 $\mathbb{R}$ 乃至 $\mathbb{R}^d$ 上的 Borel 函数。

为了陈述 Lebesgue 测度的存在性与刻画，先约定：对 $a \in \mathbb{R}^d$ 、 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ，记

$$a + A := \{a + x : x \in A\}.$$

映射 $\tau_a : x \mapsto x - a$ 连续，因而 Borel 可测，所以

$$a + A = \tau_a^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

定理 6.1. 在 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上存在唯一测度，称为 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度并记作 λ_d ，它满足：

- (i) $\lambda_d([0, 1]^d) = 1$;
- (ii) 对任意 $a \in \mathbb{R}^d$ 、 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\lambda_d(a + A) = \lambda_d(A).$$

实直线上的 Lebesgue 测度常简记为 λ 。暂时承认 λ_d 的存在性。首先将在一维情形证明区间 I 的 Lebesgue 测度就是它的长度（第 6.1.2 节），这已经足以证明定理的唯一性部分（应用 6.1）。第 6.3 节将由 Carathéodory 定理初步构造 $\mathbb{R}$ 上的 λ ；在详细证明该定理之后，第 6.5.2 节给出完整构造，初次阅读可以跳过。到第 11 章讨论乘积测度时，还将构造 $\mathbb{R}^d$ 上的 λ_d ，详见第 11.2.2 节。

6.1.1 基本性质

以下设 μ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的正测度。

P1: 关于包含关系的单调性。

- (a) 对任意 $A, B \in \mathcal{A}$,

$$A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B).$$

- (b) 若进一步 $\mu(A) < +\infty$ ，则

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \leq +\infty.$$

(c) 若 $\mu(A) = +\infty$, 则不能由 $\mu(A), \mu(B)$ 推断 $\mu(B \setminus A)$ 。

证明。 因为

$$B = A \dot{\cup} (B \setminus A),$$

所以

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

当 $\mu(A) < +\infty$ 时可以移项；当 $\mu(A) = +\infty$ 时, $+\infty - (+\infty)$ 没有定义。 $\square$

P2: 强可加性。 对任意 $A, B \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

证明。 若 $\mu(A \cap B) = +\infty$, 则由 P1, $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cup B) = +\infty$, 等式两边都为 $+\infty$ 。
若 $\mu(A \cap B) < +\infty$, 把 $A \cup B$ 分成不交并

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \dot{\cup} (A \cap B) \dot{\cup} (B \setminus (A \cap B)).$$

于是

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus (A \cap B)) \\ &= \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \end{aligned}$$

$\square$

P3: 从下连续性。 若 $(A_n)_{n \geq 1}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的递增序列, 即 $A_n \subset A_{n+1}$, 则

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \mu(A_n).$$

证明。 令

$$B_1 := A_1, \quad B_n := A_n \setminus A_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

归纳可得

$$A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k.$$

事实上, 若 $A_{n-1} = \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$, 则

$$A_n = (A_n \setminus A_{n-1}) \dot{\cup} A_{n-1} = \bigcup_{k=1}^n B_k.$$

各 B_k 两两不交，因此

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(B_n) \\ &= \lim_{n\rightarrow\infty}^{\uparrow} \sum_{k=1}^n \mu(B_k) = \lim_{n\rightarrow\infty}^{\uparrow} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \lim_{n\rightarrow\infty}^{\uparrow} \mu(A_n).\end{aligned}$$

□

注。 因为 (A_n) 关于包含关系递增，

$$\bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} A_n = \lim_{n\rightarrow\infty} A_n.$$

所以 P3 也可以写成

$$\mu\left(\lim_{n\rightarrow\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightarrow\infty} \mu(A_n),$$

这解释了“从下连续”的术语。

P4: 从上连续性。 若 $(A_n)_{n\geq 1}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的递减序列，即 $A_{n+1} \subset A_n$ ，并且存在 $n_0 \geq 1$ 使 $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ ，则

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 1}^{\downarrow} A_n\right) = \lim_{n\rightarrow\infty}^{\downarrow} \mu(A_n).$$

证明。 对递增序列 $(A_{n_0} \setminus A_n)_{n\geq n_0}$ 应用 P3。注意

$$\bigcup_{n\geq n_0}^{\uparrow} (A_{n_0} \setminus A_n) = A_{n_0} \setminus \bigcap_{n\geq n_0} A_n.$$

又因为 $A_n \subset A_{n_0}$ 且 $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ ，

$$\mu(A_{n_0} \setminus A_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_n).$$

于是

$$\mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{n\rightarrow\infty} \mu(A_n).$$

消去有限量 $\mu(A_{n_0})$ 即得结论。

□

注与反例。

- 因为 (A_n) 递减，只要右端有限，等式可写为

$$\mu\left(\lim_{n\rightarrow\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightarrow\infty} \mu(A_n).$$

- 某一项具有有限测度这一条件不可省略。在 $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 上取计数测度，并令

$$A_n := \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}, \quad n \geq 1.$$

则 $A_{n+1} \subset A_n$ 、 $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \emptyset$ ，但 $\mu(A_n) = +\infty$ 对所有 n 成立。

P5：次可加性。 对任意 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$,

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

证明。 先归纳证明有限次不等式。 $n = 1$ 时显然； $n = 2$ 时由 P2,

$$\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

若结论对 n 成立，则

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \right) \leq \mu(A_{n+1}) + \mu \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k).$$

因此对每个 $n \geq 1$,

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \leq \sum_{k \geq 1} \mu(A_k).$$

最后对递增序列 $(\bigcup_{k=1}^n A_k)_{n \geq 1}$ 应用 P3，得到所需结论。 $\square$

6.1.2 Lebesgue 测度在 $\mathbb{R}$ 上的应用

命题 6.1。 设 λ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度。对 $\mathbb{R}$ 的任意区间 I ,

$$\lambda(I) = \text{long}(I),$$

其中 $\text{long}(I)$ 表示区间长度。

证明。第一步。 令 $\alpha := \lambda(\{0\})$ 。平移不变性给出

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda(\{x\}) = \alpha.$$

对任意 $n \geq 1$,

$$n\alpha = \lambda \left(\left\{ \frac{1}{k} : 1 \leq k \leq n \right\} \right) \leq \lambda([0, 1]) = 1.$$

所以 $0 \leq \alpha \leq 1/n \rightarrow 0$ ，从而

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda(\{x\}) = 0.$$

第二步。 仍由平移不变性，

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda([0, 1]) = \lambda((0, 1]) \\ &= \lambda \left(\bigcup_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] \right) = \sum_{k=1}^n \lambda \left(\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] \right) \\ &= n\lambda \left(\left(0, \frac{1}{n} \right] \right). \end{aligned}$$

因此

$$\lambda\left(\left(0, \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{1}{n}.$$

若 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ 、 $k_1 \leq k_2$ ，则

$$\lambda\left(\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right]\right) = \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \lambda\left(\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) = \frac{k_2 - k_1}{n}.$$

故对任意 $r < r'$ ($r, r' \in \mathbb{Q}$)，

$$\lambda((r, r']) = r' - r.$$

现取 $a < b$ 。存在有理数序列

$$r_n \downarrow a, \quad r'_n \uparrow b, \quad r_n < r'_n.$$

区间 $A_n := (r_n, r'_n]$ 递增，且 $\bigcup_n A_n = (a, b)$ 。由 P3，

$$\lambda((a, b)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (r'_n - r_n) = b - a.$$

^a 由于单点测度为零，

$$\lambda([a, b]) = \lambda((a, b]) = \lambda((a, b)) = \lambda([a, b)) = b - a.$$

最后，

$$[a, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} [a + n - 1, a + n),$$

所以

$$\lambda([a, +\infty)) = \sum_{n \geq 1} 1 = +\infty.$$

其他类型的区间同理。 □

^a**校订注：**原书这一步印成 $\lambda((a, b)) = \lim_n(A_n) = \lim_n(r'_n - r_n)$ ，中间的 $\lim_n(A_n)$ 是集合而不是数值，量纲不合；应为 $\lim_n \lambda(A_n)$ 。

命题 6.2。 对 $\mathbb{R}^d$ 中的任意长方体

$$P := I_1 \times \cdots \times I_d$$

(各 I_ℓ 为区间)，

$$\lambda_d(P) = \text{Vol}(P) := \prod_{\ell=1}^d \text{long}(I_\ell),$$

约定 $0 \cdot (+\infty) = 0$ 。

可以仿照一维证明直接证明命题 6.2，但会多出一些技术细节。第 11 章将利用乘积测度同时构造并刻画 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度；不过，该方法仍以实直线上的 Lebesgue 测度已经存在为基础。

6.2 测度的刻画与唯一性

σ -代数，尤其是 Borel σ -代数，通常包含极其丰富的集合，无法逐一描述。例如，若 X 为拓扑空间，则

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}(X))$$

不仅含有开集与闭集，还含有可数个开集的交（称为 G_δ 集）、可数个闭集的并（称为 F_σ 集），以及对这些集合继续作可数并、可数交所得的集合，等等。

因此，直接在 $\mathcal{A}$ 的每个元素上验证两个测度相等，似乎是一项无法完成的任务。下面的刻画定理建立在单调类定理之前，目的正是绕开这个困难。

6.2.1 一个单调类定理

定义 6.2。 若 X 的子集族 Λ 满足：

- (i) $\emptyset \in \Lambda$;
- (ii) 若 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \Lambda$ 递增，则

$$\bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} A_n \in \Lambda;$$

- (iii) 若 $A, B \in \Lambda$ 且 $A \subset B$ ，则

$$B \setminus A \in \Lambda,$$

则称 Λ 为一个 λ -系统。

命题 6.3。

- (a) 对 X 的任意子集族 $\mathcal{E}$ ，存在包含 $\mathcal{E}$ 的最小 λ -系统，记为 $\Lambda(\mathcal{E})$ 。
- (b) 若 $X \in \Lambda$ ，且 λ -系统 Λ 对有限交封闭，则 Λ 是 σ -代数。

证明。 (a) $\mathcal{P}(X)$ 是包含 $\mathcal{E}$ 的 λ -系统。定义

$$\Lambda(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\Lambda \supset \mathcal{E} \\ \Lambda \text{ 为 } \lambda\text{-系统}}} \Lambda.$$

直接验证该交集仍是 λ -系统；它显然最小。

(b) 因为 $X \in \Lambda$ ，由 (iii)，对 $A \in \Lambda$ 有

$$A^c = X \setminus A \in \Lambda.$$

只需再证明对可数并封闭。利用

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right),$$

只需证明有限并封闭；而这由有限交封闭与

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$$

得到。 □

定理 6.2 (π - λ 定理). 设 $\mathcal{E}$ 是包含 X 且对有限交封闭的子集族；这样的集合族称为 π -系统。则

$$\Lambda(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}).$$

证明。 由命题 6.3，只需证明 $\Lambda(\mathcal{E})$ 对有限交封闭，因为 $X \in \Lambda(\mathcal{E})$ 。

固定 $E \in \mathcal{E}$ ，令

$$\Lambda_E := \{A \in \Lambda(\mathcal{E}) : A \cap E \in \Lambda(\mathcal{E})\}.$$

容易验证 Λ_E 是 λ -系统。又因为 $\mathcal{E}$ 对有限交封闭， $\Lambda_E \supset \mathcal{E}$ ，故由最小性 $\Lambda_E = \Lambda(\mathcal{E})$ 。于是

$$\forall E \in \mathcal{E}, \forall A \in \Lambda(\mathcal{E}), \quad A \cap E \in \Lambda(\mathcal{E}).$$

现固定 $B \in \Lambda(\mathcal{E})$ ，令

$$\Lambda_B := \{A \in \Lambda(\mathcal{E}) : A \cap B \in \Lambda(\mathcal{E})\}.$$

Λ_B 也是 λ -系统；由上一步它包含 $\mathcal{E}$ ，所以 $\Lambda_B = \Lambda(\mathcal{E})$ 。这对每个 $B \in \Lambda(\mathcal{E})$ 成立，故 $\Lambda(\mathcal{E})$ 对有限交封闭。

因此 $\Lambda(\mathcal{E})$ 是包含 $\mathcal{E}$ 的 σ -代数，从而

$$\Lambda(\mathcal{E}) \supset \sigma(\mathcal{E}).$$

反过来，每个 σ -代数显然都是 λ -系统，所以反向包含也成立。 □

6.2.2 测度刻画的应用

推论 6.1. 设 μ, ν 是可测空间 $(X, \mathcal{A})$ 上的两个有限测度， $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ 是生成 $\mathcal{A}$ 的 π -系统，即

$$X \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} \text{ 对有限交封闭}, \quad \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}.$$

若

$$\forall E \in \mathcal{E}, \quad \mu(E) = \nu(E),$$

则 $\mu = \nu$ 。

证明。 令

$$\Lambda := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}.$$

利用 μ, ν 有限，容易验证 Λ 是 λ -系统。又 $\Lambda \supset \mathcal{E}$ ，所以由定理 6.2，

$$\Lambda \supset \Lambda(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}.$$

^a

□

^a**校订注：**原书最后一式印成 $\Lambda \supset \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ 。这里需要使用的是生成假设 $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ ；写成 $\sigma(\mathcal{A})$ 虽然也等于 $\mathcal{A}$ ，却不能由 $\Lambda \supset \mathcal{E}$ 推出。

注。 有限性最关键的用途，是保证 Λ 对真差封闭。若 $A \subset B$ 、 $\mu(A) < +\infty$ ，并且 μ, ν 在 A, B 上相等，则

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A).$$

不过，有限性假设可以部分放宽。

推论 6.2。 设 μ, ν 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的两个测度， $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ 满足：

- (i) $\mathcal{E}$ 是 π -系统，且 $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ ；
- (ii) 对每个 $A \in \mathcal{E}$ ， $\mu(A) = \nu(A)$ ；
- (iii) 存在递增序列 $(E_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{E}$ ，使

$$X = \bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} E_n, \quad \mu(E_n) = \nu(E_n) < +\infty.$$

则 $\mu = \nu$ 。

证明。 对每个 $n \geq 1$ ，定义有限测度

$$\mu_n := \mu(\cdot \cap E_n), \quad \nu_n := \nu(\cdot \cap E_n).$$

因为 $E_n \in \mathcal{E}$ ，且 $\mathcal{E}$ 对有限交封闭，所以 μ_n, ν_n 在 $\mathcal{E}$ 上相等。由推论 6.1，

$$\mu_n = \nu_n.$$

对任意 $A \in \mathcal{A}$ ，

$$A = \bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} (A \cap E_n).$$

由 P3，

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \lim_n \mu(A \cap E_n) = \lim_n \mu_n(A) \\ &= \lim_n \nu_n(A) = \lim_n \nu(A \cap E_n) = \nu(A). \end{aligned}$$

□

注。 条件 (iii) 中的递增序列也可以换成 X 的一个可数分割 $X = \dot{\bigcup}_{n \geq 1} E_n$ ，其中 $\mu(E_n) = \nu(E_n) < +\infty$ 。

应用 6.1。

(a) $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 测度的唯一性。取

$$E_n = [-n, n],$$

并令 $\mathcal{E}$ 为 $\mathbb{R}$ 的所有区间组成的集合族。若 λ, λ' 都满足定理 6.1 的条件，则由命题 6.1，它们在 $\mathcal{E}$ 上相等，且

$$\lambda([-n, n]) = \lambda'([-n, n]) = 2n < +\infty.$$

$\mathcal{E}$ 显然是生成 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 的 π -系统，故由推论 6.2， $\lambda = \lambda'$ 。

(b) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上测度的刻画。若两个测度 μ, ν 满足：对每个 $x \in \mathbb{R}$ ，

$$\mu([0, x]) = \nu([0, x]) < +\infty,$$

其中 $[0, x]$ 表示端点为 $0, x$ 的闭线段，则 $\mu = \nu$ 。

分别把测度限制到

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \quad \mathbb{R}_- = (-\infty, 0].$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上, 集合族

$$\mathcal{E}_+ := \{[0, x] : x \geq 0\}$$

是生成 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 的 π -系统, 并由 $[0, n] \uparrow \mathbb{R}_+$ 作有限测度穷竭。因此推论 6.2 表明 μ, ν 在 $\mathbb{R}_+$ 上的限制相等。同理, 在 $\mathbb{R}_-$ 上使用

$$\mathcal{E}_- := \{[x, 0] : x \leq 0\}, \quad [-n, 0] \uparrow \mathbb{R}_-,$$

可知二者在 $\mathbb{R}_-$ 上的限制也相等。

最后把任意 Borel 集分成不交并

$$A = (A \cap (-\infty, 0)) \dot{\cup} (A \cap [0, +\infty)),$$

即可得到 $\mu(A) = \nu(A)$ 。^a

^a校订注：原书改取 $\mathcal{E} = \{[0, x] : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$, 并称它“显然满足推论 6.2 的条件”。但这个 π -系统中不存在递增、测度有限且并为整个 $\mathbb{R}$ 的序列, 因此不能直接套用推论 6.2。这里分别在正、负半轴上使用有限测度穷竭, 再拼接两个限制测度; 结论不变。

6.3 由延拓构造测度 (I)

6.3.1 Carathéodory 延拓定理

定义 6.3。 若 X 的子集族 $\mathcal{C}$ 满足:

- (i) $X \in \mathcal{C}$;
 - (ii) 对任意 $A, B \in \mathcal{C}$, $A \cup B \in \mathcal{C}$ (对有限并封闭);
 - (iii) 对任意 $A \in \mathcal{C}$, $A^c \in \mathcal{C}$ (对补集封闭),
- 则称 $\mathcal{C}$ 是 X 上的一个 *Boolean* 代数。

定理 6.3 (Carathéodory 延拓定理)。 设 $\mathcal{C}$ 是 X 上的 Boolean 代数, 映射

$$\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

满足:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) 若 $A, B \in \mathcal{C}$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

(有限可加性);

- (iii) 对 $\mathcal{C}$ 中任意递减序列 $(A_n)_{n \geq 1}$, 若

$$\mu(A_1) < +\infty, \quad \bigcap_{n \geq 1} A_n = \emptyset,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0;$$

(iv) 存在 $\mathcal{C}$ 中的递增序列 $(E_n)_{n \geq 1}$, 满足

- (a) $X = \bigcup_{n \geq 1}^\uparrow E_n$;
- (b) 对每个 $n \geq 1$, $\mu(E_n) < +\infty$;
- (c) 对每个 $A \in \mathcal{C}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^\uparrow \mu(A \cap E_n) = \mu(A).$$

则在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上存在唯一测度 $\tilde{\mu}$, 使

$$\tilde{\mu}|_{\mathcal{C}} = \mu.$$

术语。 条件 (iii) 称为 *Carathéodory* 性质, 有时也称测度在空集处的连续性。

定理 6.3 是构造 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 测度的基础。其证明较长且精细, 需要引入外测度, 将在第 6.5 节详细给出; 第 6.5.2 节专门构造 Lebesgue 测度以及作为其推广的 Stieltjes 测度。第 11.4 节还将用同一定理构造无限乘积测度。

现在已经可以看出唯一性: Boolean 代数特别是 π -系统, 而条件 (iv) 正好提供推论 6.2 所需的有限测度穷竭。因此, $\tilde{\mu}$ 的唯一性直接来自第 6.2 节。

补充 1。 若 $\mu(X) < +\infty$, 则取 $E_n := X$ 即可满足条件 (iv)。

补充 2: 等价的连续性表述。 定理采用 Carathéodory 条件是出于历史原因。它描述 μ 沿 $\mathcal{C}$ 中递减到空集的序列 “从上连续”。在 μ 对 $\mathcal{C}$ 有限可加的前提下, 条件 (iii) 与 (iv)(c) 合起来, 等价于如下从下连续性:

若 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}$ 递增, 且 $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{C}$, 则

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1}^\uparrow A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty}^\uparrow \mu(A_n).$$

证明。 ($\Leftarrow$) 为证明 (iii), 对递减到空集的序列 (A_n) 考察递增序列

$$A'_n := A_1 \setminus A_n.$$

由有限可加性与 $\mu(A_1) < +\infty$, 从下连续性给出 $\mu(A_n) \downarrow 0$ 。条件 (iv)(c) 则直接对递增序列 $(A \cap E_n)$ 应用从下连续性。

($\Rightarrow$) 设 $A_n \uparrow A := \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{C}$ 。若 $\mu(A) < +\infty$, 令

$$A'_k := A \setminus A_k.$$

则 $A'_k \downarrow \emptyset$, 由 (iii), $\mu(A'_k) \downarrow 0$, 再由有限可加性得到 $\mu(A_k) \uparrow \mu(A)$ 。

若 $\mu(A) = +\infty$, 对每个 $p \in \mathbb{N}$, 有限测度情形可用于 $(A_n \cap E_p)_n$, 因为

$$\mu(A \cap E_p) \leq \mu(E_p) < +\infty.$$

因此

$$\lim_n \mu(A_n) \geq \lim_n \mu(A_n \cap E_p) = \mu(A \cap E_p).$$

再由 (iv)(c),

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mu(A \cap E_p) = \mu(A) = +\infty.$$

故 $\lim_n \mu(A_n) = +\infty$ 。 □

补充 3。 同理可证：在有限可加性成立时，条件 (iii) 与 (iv)(c) 也等价于下述 σ -可加性——对 $\mathcal{C}$ 中任意两两不交的序列，只要其并仍属于 $\mathcal{C}$ ，就有

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

6.3.2 构造 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 测度的原理

令

$$\mathcal{C} := \{I_1 \cup \cdots \cup I_n : n \geq 1, I_1, \dots, I_n \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 中两两不交的区间}\}.$$

$\mathcal{C}$ 是 Boolean 代数。定义

$$\text{long} : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \text{long}(I_1 \cup \cdots \cup I_n) := \sum_{k=1}^n \text{long}(I_k).$$

这个定义是相容的，因为右端不依赖于所选的两两不交区间分解。

取

$$E_n = [-n, n], \quad n \geq 1.$$

函数 long 满足 Carathéodory 定理的 (i)–(iv)，因此存在唯一延拓到

$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

的测度；这一定义就是 Lebesgue 测度 λ 。

最后还要证明平移不变性。固定 $a \in \mathbb{R}$ ，定义

$$\lambda_a(A) := \lambda(A + a).$$

λ 与 λ_a 都是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的测度，并且在生成 π -系统 $\mathcal{C}$ 上都等于长度。由唯一性，

$$\lambda_a = \lambda, \quad \text{即} \quad \lambda(A + a) = \lambda(A).$$

关于 long 定义的相容性及其各项性质，详见第 6.5 节。

注。 把区间换成长方体，可以同样直接构造 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的 Lebesgue 测度。不过，第 11 章将给出基于乘积测度的另一种构造。

6.4 Lebesgue 测度的正则性

正则性是 Lebesgue 测度的重要性质，也是积分论中逼近定理与稠密性定理的关键。

定理 6.4。 设 λ_d 是 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的 Lebesgue 测度。则对每个 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\lambda_d(A) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ 紧}}} \lambda_d(K) = \inf_{\substack{O \supset A \\ O \text{ 开}}} \lambda_d(O). \quad (6.2)$$

称 λ_d 是内正则且外正则的，简称正则测度。

这是第 6.6 节将证明的更一般结果的特例。

定理 6.5。 设 (X, d) 是度量空间, μ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的测度。若满足下列任一条件:

- (a) (X, d) 局部紧且可分, 并且 μ 在紧集上有限;
 - (b) (X, d) 完备且可分, 并且 μ 有限,
- 则 μ 具有式 (6.2) 意义下的正则性。

注。 稠密性定理 (参见第 9.4、9.7 节) 主要以外正则性

$$\mu(A) = \inf_{\substack{O \supset A \\ O \text{ 开}}} \mu(O)$$

为基础。后文将看到, 只要存在递增开集序列 $(E_n)_{n \geq 1}$ 满足

$$E_n \subset E_{n+1}, \quad X = \bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} E_n, \quad \mu(E_n) < +\infty,$$

外正则性就成立。

6.5 ♣ 由延拓构造测度 (II)

本进阶节证明第 6.3 节中未加证明的 Carathéodory 定理, 并由此构造 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度, 继而构造 Stieltjes 测度。

6.5.1 Carathéodory 定理的证明

回顾。 X 的子集族 $\mathcal{C}$ 是 Boolean 代数, 是指:

$$X \in \mathcal{C}, \quad A, B \in \mathcal{C} \implies A \cup B \in \mathcal{C}, \quad A \in \mathcal{C} \implies A^c \in \mathcal{C}.$$

Boolean 代数对有限交封闭, 因为

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c;$$

并且 $\emptyset = X^c \in \mathcal{C}$ 。

定理 6.6 (Carathéodory)。 设 $\mathcal{C}$ 是集合 X 上的 Boolean 代数, 映射 $\mu: \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ 满足:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) 若 $A, B \in \mathcal{C}$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B);$$

- (iii) 若 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}$ 递减、 $\mu(A_1) < +\infty$, 且

$$\bigcap_{n \geq 1}^{\downarrow} A_n = \emptyset,$$

则 $\lim_n \mu(A_n) = 0$;

(iv) 存在递增序列 $(E_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}$, 使

$$X = \bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} E_n, \quad \mu(E_n) < +\infty,$$

并且对每个 $A \in \mathcal{C}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \mu(A \cap E_n) = \mu(A).$$

则在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上存在唯一测度 $\tilde{\mu}$, 并且 $\tilde{\mu}|_{\mathcal{C}} = \mu$.

定义 6.4。

- (a) 类比一般情形, 若映射 $\mu : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ 满足定理 6.6 的 (i)–(iii), 称它为 Boolean 代数 $\mathcal{C}$ 上的测度; 若还满足 (iv), 称为 $\mathcal{C}$ 上的 σ -有限测度。
 (b) 若映射

$$m : \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

满足:

- (i) $m(\emptyset) = 0$;
- (ii) $A \subset B \implies m(A) \leq m(B)$;
- (iii) 对任意 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{P}(X)$,

$$m\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} m(A_n),$$

则称 m 为 X 上的外测度。

注意。 外测度总是定义在全部子集组成的 $\mathcal{P}(X)$ 上, 而不是只定义在某个 σ -代数上。

Boolean 代数上测度的基本性质。 由有限可加性立即得到第 6.1.1 节的 P1、P2:

$$A \subset B, \quad A, B \in \mathcal{C} \implies \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A),$$

以及

$$\forall A, B \in \mathcal{C}, \quad \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

定理唯一性部分的证明。 唯一性直接来自第 6.2 节的推论 6.2, 因为 Boolean 代数特别是 π -系统, 而条件 (iv) 给出了 σ -有限穷竭。 $\square$

下面两段证明延拓的存在性。

$\mu(X) < +\infty$ 时 $\tilde{\mu}$ 的存在性

此时由单调性, 对每个 $A \in \mathcal{C}$,

$$\mu(A) \leq \mu(X) < +\infty.$$

条件 (iv) 不再构成额外限制, 因为可以取 $E_n := X$ 。证明分若干步进行。

步骤 1: Boolean 代数上测度的进一步性质。 设 μ 是 Boolean 代数 $\mathcal{C}$ 上的有限测度。

(a) 若 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}$ 两两不交, 并且 $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{C}$, 则

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

(b) 若 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}$ 递增, 并且 $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{C}$, 则

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(c) 若 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}$, 并且 $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{C}$, 则

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

证明。 (a) 对每个 $n \geq 1$, 令

$$A'_n := \bigcup_{k \geq n+1} A_k = \left(\bigcup_{k \geq 1} A_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \in \mathcal{C}.$$

$A_1, \dots, A_n, A'_n$ 两两不交, 且其并为 $\bigcup_{k \geq 1} A_k$ 。有限可加性给出

$$\mu \left(\bigcup_{k \geq 1} A_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) + \mu(A'_n).$$

又 $A'_{n+1} \subset A'_n$, 且 $\bigcap_n A'_n = \emptyset$, 所以由条件 (iii), $\mu(A'_n) \downarrow 0$ 。令 $n \rightarrow \infty$ 即得 (a)。

(b)、(c) 分别照搬第 6.1.1 节 P3、P5 的证明; 额外需要检查的只是其中出现的集合都属于 $\mathcal{C}$ 。
□

^a**校订注:** 原书把 (b) 称为“从右连续”, 但这里处理的是递增集合序列, 且第 6.1.1 节同一性质 P3 称为“从左连续”。为与全书中术语及通常测度论术语一致, 这里写作“从下连续”。

步骤 2: 构造延拓 μ 的外测度 μ^* 。 对任意 $A \subset X$, 定义

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n \geq 1} \mu(B_n) : A \subset \bigcup_{n \geq 1} B_n, \quad B_n \in \mathcal{C} \right\}.$$

则 μ^* 是外测度, 并且

$$\mu^*|_{\mathcal{C}} = \mu.$$

特别地, μ^* 有限。

证明。 先证明 $\mu^* = \mu$ 于 $\mathcal{C}$ 。任取 $A \in \mathcal{C}$ 。在定义中取

$$B_1 := A, \quad B_k := \emptyset \quad (k \geq 2),$$

得到 $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ 。

反过来, 若 $B_n \in \mathcal{C}$ 且 $A \subset \bigcup_{n \geq 1} B_n$, 则

$$A = \bigcup_{n \geq 1} (A \cap B_n).$$

步骤 1 的次可加性与 μ 的单调性给出

$$\mu(A) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A \cap B_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(B_n).$$

对所有覆盖取下确界, 得到 $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ 。故二者在 $\mathcal{C}$ 上相等。

下面验证外测度公理。首先,

$$\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0,$$

而关于包含关系的单调性由定义显然得到。

最后验证 σ -次可加性。设 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{P}(X)$ 。给定 $\varepsilon > 0$, 对每个 $n \geq 1$, 可取 $(B_k^{(n)})_{k \geq 1} \subset \mathcal{C}$, 使

$$A_n \subset \bigcup_{k \geq 1} B_k^{(n)}, \quad \sum_{k \geq 1} \mu(B_k^{(n)}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

对 n 求和得

$$\sum_{n, k \geq 1} \mu(B_k^{(n)}) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

又

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n \subset \bigcup_{(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2} B_k^{(n)},$$

而 $(\mathbb{N}^*)^2$ 可数, 所以

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$ 即得结论。 □

步骤 3: 把外测度 μ^* 限制在适当的 σ -代数上, 以构造 $\tilde{\mu}$ 。定义

$$\mathcal{T}^* := \{A \subset X : \forall B \subset X, \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)\}.$$

则:

- (a) $\mathcal{T}^*$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的 σ -代数, 因而 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}^*$;
- (b) $\mu^*|_{\mathcal{T}^*}$ 是可测空间 $(X, \mathcal{T}^*)$ 上的测度。因此

$$\tilde{\mu} := \mu^*|_{\sigma(\mathcal{C})}$$

就是延拓问题的一个解。

证明。 (a)、(b) 同时证明。

首先, $\emptyset \in \mathcal{T}^*$, 因为 $\mu^*(\emptyset) = 0$ 。其次, 若 $A \in \mathcal{T}^*$, 则由对称性及 $(A^c)^c = A$, 立即有 $A^c \in \mathcal{T}^*$ 。

对有限并封闭。 设 $A, A' \in \mathcal{T}^*$, 并任取 $B \subset X$ 。依次对 A 与 A' 使用定义, 得到

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \\ &= \mu^*((B \cap A) \cap A') + \mu^*((B \cap A) \cap (A')^c) \\ &\quad + \mu^*((B \cap A^c) \cap A') + \mu^*((B \cap A^c) \cap (A')^c) \\ &= \mu^*(B \cap (A \cap A')) + \mu^*(B \cap (A \cap (A')^c)) \\ &\quad + \mu^*(B \cap (A^c \cap A')) + \mu^*(B \cap (A^c \cap (A')^c)).\end{aligned}$$

又

$$A \cup A' = (A \cap A') \dot{\cup} (A' \cap A^c) \dot{\cup} (A \cap (A')^c).$$

由外测度 μ^* 的次可加性,

$$\begin{aligned}\mu^*(B \cap (A \cap A')) + \mu^*(B \cap (A \cap (A')^c)) + \mu^*(B \cap (A^c \cap A')) \\ \geq \mu^*(B \cap (A \cup A')).\end{aligned}$$

所以

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap (A \cup A')) + \mu^*(B \cap (A \cup A')^c).$$

反向不等式直接来自 μ^* 的次可加性, 故上式取等号, $A \cup A' \in \mathcal{T}^*$ 。因此 $\mathcal{T}^*$ 是 Boolean 代数。

对可数并封闭, 并证明 μ^* 在 $\mathcal{T}^*$ 上 σ -可加。 先设 $A, A' \in \mathcal{T}^*$ 且 $A \cap A' = \emptyset$ 。由于 $A' \subset A^c$, 对每个 $B \subset X$,

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A').$$

归纳可得: 若 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}^*$ 两两不交, 则

$$\forall B \subset X, \quad \mu^*(B) \geq \sum_{i=1}^n \mu^*(B \cap A_i). \quad (6.3)$$

现在任取序列 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{T}^*$, 令

$$A'_1 := A_1, \quad A'_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A'_k \quad (n \geq 2).$$

各 A'_n 两两不交, 并且

$$A'_n \subset A_n, \quad \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n A'_k, \quad \bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} A'_n.$$

^a 由于 $\mathcal{T}^*$ 已知是 Boolean 代数, 每个 $A'_n \in \mathcal{T}^*$ 。只须证明 $\bigcup_{n \geq 1} A'_n \in \mathcal{T}^*$ 。任取 $B \subset X$ 。对每个 $n \geq 1$, 有限并 $\bigcup_{k=1}^n A'_k \in \mathcal{T}^*$, 从而

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*\left(B \cap \bigcup_{k=1}^n A'_k\right) + \mu^*\left(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A'_k\right)^c\right) \\ &\geq \sum_{k=1}^n \mu^*(B \cap A'_k) + \mu^*\left(B \cap \left(\bigcup_{k \geq 1} A'_k\right)^c\right).\end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$\mu^*(B) \geq \sum_{k \geq 1} \mu^*(B \cap A'_k) + \mu^* \left(B \cap \left(\bigcup_{k \geq 1} A'_k \right)^c \right). \quad (6.4)$$

再由 μ^* 的 σ -次可加性,

$$\sum_{k \geq 1} \mu^*(B \cap A'_k) \geq \mu^* \left(B \cap \bigcup_{k \geq 1} A'_k \right).$$

于是

$$\mu^*(B) \geq \mu^* \left(B \cap \bigcup_{k \geq 1} A'_k \right) + \mu^* \left(B \cap \left(\bigcup_{k \geq 1} A'_k \right)^c \right).$$

反向不等式仍由 σ -次可加性给出。因此, 对任意 $B \subset X$,

$$\mu^*(B) = \mu^* \left(B \cap \bigcup_{n \geq 1} A'_n \right) + \mu^* \left(B \cap \left(\bigcup_{n \geq 1} A'_n \right)^c \right). \quad (6.5)$$

故

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} A'_n \in \mathcal{T}^*.$$

这证明了 $\mathcal{T}^*$ 是 σ -代数。

最后, 若 $(A'_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{T}^*$ 两两不交, 在 (6.4) 中取 $B := \bigcup_{n \geq 1} A'_n$, 并结合 σ -次可加性, 得到

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \geq 1} A'_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mu^*(A'_n).$$

所以 μ^* 在 $\mathcal{T}^*$ 上 σ -可加, 亦即 $\mu^*|_{\mathcal{T}^*}$ 是测度。

证明 $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}^*$. 任取 $A \in \mathcal{C}$ 与 $B \subset X$. 因为在当前有限测度情形中 $\mu^*(B) < +\infty$, 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $(B_n^\varepsilon)_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}$, 使

$$B \subset \bigcup_{n \geq 1} B_n^\varepsilon, \quad \sum_{n \geq 1} \mu(B_n^\varepsilon) \leq \mu^*(B) + \varepsilon.$$

由 μ 在 $\mathcal{C}$ 上的可加性, 以及 $B_n^\varepsilon \cap A, B_n^\varepsilon \cap A^c \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &\geq \sum_{n \geq 1} \mu^*(B_n^\varepsilon \cap A) + \sum_{n \geq 1} \mu^*(B_n^\varepsilon \cap A^c) - \varepsilon \\ &\geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) - \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 得到

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

反向不等式来自 μ^* 的次可加性, 故取等号, 因而 $A \in \mathcal{T}^*$. 定理在 $\mu(X) < +\infty$ 时的存在性得证. $\square$

^a**校订注:** 原书此处印作 $A'_n \subset A_n = \bigcup_{k=1}^n A'_k$. 对任意集合序列, 第二个等号并不成立; 归纳得到的正确恒等式是 $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n A'_k$.

一般情形： μ 为 σ -有限测度

现在以 σ -有限性条件 (iv) 代替 $\mu(X) < +\infty$ ：存在递增序列 $(E_p)_{p \geq 1} \subset \mathcal{C}$ ，使

$$\forall p \geq 1, \quad \mu(E_p) < +\infty, \quad X = \bigcup_{p \geq 1}^{\uparrow} E_p, \quad \forall A \in \mathcal{C}, \quad \mu(A \cap E_p) \uparrow \mu(A).$$

对每个 $p \geq 1$ ，定义

$$\mu_p := \mu(\cdot \cap E_p).$$

这是 Boolean 代数 $\mathcal{C}$ 上的有限测度，故由已经证明的有限情形，可将其延拓为 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的有限测度 $\tilde{\mu}_p$ 。

又有

$$\tilde{\mu}_{p+1}(\cdot \cap E_p) = \tilde{\mu}_p.$$

事实上，根据第 6.2 节的刻画定理，这两个有限测度在生成 π -系统 $\mathcal{C}$ 上相等，因而处处相等。因此

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \quad \forall p \geq 1, \quad \tilde{\mu}_p(A) = \tilde{\mu}_{p+1}(A \cap E_p) \leq \tilde{\mu}_{p+1}(A).$$

所以 $(\tilde{\mu}_p(A))_{p \geq 1}$ 递增。定义

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \quad \tilde{\mu}(A) := \lim_{p \rightarrow \infty}^{\uparrow} \tilde{\mu}_p(A).$$

验证 $\tilde{\mu}$ 是测度并且延拓 μ 。 显然

$$\tilde{\mu}(\emptyset) = \lim_p \tilde{\mu}_p(\emptyset) = 0.$$

设 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \sigma(\mathcal{C})$ 两两不交。对每个 $p \geq 1$ ，

$$\tilde{\mu}_p \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n \geq 1} \tilde{\mu}_p(A_n) \leq \sum_{n \geq 1} \tilde{\mu}(A_n).$$

令 $p \rightarrow \infty$ ，得到

$$\tilde{\mu} \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) \leq \sum_{n \geq 1} \tilde{\mu}(A_n).$$

另一方面，对任意 $n, p \geq 1$ ，有限可加性给出

$$\tilde{\mu}_p \left(\bigcup_{j \geq 1} A_j \right) \geq \sum_{k=1}^n \tilde{\mu}_p(A_k).$$

先令 $p \rightarrow \infty$ ，再令 $n \rightarrow \infty$ ，可得

$$\tilde{\mu} \left(\bigcup_{j \geq 1} A_j \right) \geq \sum_{k \geq 1} \tilde{\mu}(A_k).$$

这就证明了 $\tilde{\mu}$ 在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上 σ -可加。

最后，若 $A \in \mathcal{C}$ ，由条件 (iv) 以及 $\tilde{\mu}_p$ 的构造，

$$\tilde{\mu}(A) = \lim_p \tilde{\mu}_p(A) = \lim_p \mu(A \cap E_p) = \mu(A).$$

所以 $\tilde{\mu}$ 确为 μ 的延拓。定理 6.6 的存在性证明完成。 □

Carathéodory 性质对于保证延拓测度存在是不可缺少的，下面的例子说明这一点。

例。 在集合 $\mathbb{N}$ 上考虑 Boolean 代数

$$\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : A \text{ 有限, 或 } A^c \text{ 有限}\}.$$

定义

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ 有限,} \\ 1, & A^c \text{ 有限.} \end{cases}$$

容易验证 $\mu(\emptyset) = 0$, 且 μ 在 $\mathcal{C}$ 上有限可加, 因而它是 Boolean 代数上的测度。然而, 它不满足 Carathéodory 性质: 对 $n \geq 1$, 令

$$A_n := \{n, n+1, \dots\}.$$

则 $A_n \in \mathcal{C}$, $\mu(A_n) = 1$, 但 $A_n \downarrow \emptyset$ 。

事实上, μ 不可能延拓为 $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \sigma(\mathcal{C})$ 上的测度 $\tilde{\mu}$ 。若这样的延拓存在, 则对任意无限集 $A \subset \mathbb{N}$, 由从下连续性,

$$\tilde{\mu}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \mu(A \cap \{1, 2, \dots, n\}) = 0.$$

特别地 $\tilde{\mu}(\mathbb{N}) = 0$; 但延拓性质又要求 $\tilde{\mu}(\mathbb{N}) = \mu(\mathbb{N}) = 1$, 矛盾。^a

^a**校订注：**原书末句印作 $\tilde{\mu}(\mathbb{N}) = 0 = \mu(\mathbb{N}) = 1$, 其中 $0 = \mu(\mathbb{N})$ 显然不是推导所得的等式。这里将矛盾的两条结论分开表述。

6.5.2 在 $\mathbb{R}$ 上构造测度：Lebesgue 测度与 Stieltjes 测度

为了构造 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度——这是本节的主要目标——下面进一步削弱 Boolean 代数的结构要求。

半代数与可加函数

定义 6.5。 称 X 的子集族 $\mathcal{S}$ 为一个半代数, 若:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{S}$;
- (ii) 对任意 $A, B \in \mathcal{S}$, 有 $A \cap B \in \mathcal{S}$ (即对有限交封闭);
- (iii) 对任意 $A \in \mathcal{S}$, 存在 $n \geq 1$ 以及两两不交的 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$, 使

$$A^c = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

基本例。 令

$$\mathcal{S}_I := \{I \subset \mathbb{R} : I \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 中的任意区间}\}.$$

则 $\mathcal{S}_I$ 是半代数。事实上, $\emptyset \in \mathcal{S}_I$, 区间族对交封闭; 而对任意区间 $I \subset \mathbb{R}$, 其补集均可写成

$$I^c = I_1 \dot{\cup} I_2,$$

其中 I_1, I_2 是两个区间, 允许其中一个或两个为空集。

注意。 正如上例所示，半代数一般不对有限并封闭。

命题 6.4。 设 $\mathcal{S}$ 是半代数。

(a) 集合族

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}) := \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i : A_i \in \mathcal{S}, n \geq 1 \right\}$$

是包含 $\mathcal{S}$ 的最小 Boolean 代数。

(b) 设映射

$$\mu : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

满足 $\mu(\emptyset) = 0$ ，并具有下述有限可加性：只要 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ 两两不交，并且 $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{S}$ ，就有

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

则 μ 可唯一延拓为

$$\bar{\mu} : \mathcal{C}(\mathcal{S}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

上的有限可加函数；这里的有限可加性取定理 6.6 条件 (ii) 的意义。

证明。 (a) 任何包含 $\mathcal{S}$ 的 Boolean 代数都对有限并封闭，因而都包含 $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ 。只须证明 $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ 本身是 Boolean 代数。

首先，

$$\emptyset \in \mathcal{S} \subset \mathcal{C}(\mathcal{S}).$$

其次，若 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ 两两不交， $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{S}$ 两两不交，则

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right) = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (A_i \cap B_j).$$

右端各集合属于 $\mathcal{S}$ ，并且两两不交，所以 $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ 对有限交封闭。若再证明它对取补封闭，便可由 De Morgan 律推出它对有限并封闭。

设

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad A_i \in \mathcal{S}.$$

由半代数的定义，对每个 i ，可写成

$$A_i^c = \bigcup_{k=1}^{m(i)} B_k^{(i)}, \quad B_k^{(i)} \in \mathcal{S}.$$

必要时补入空集，可设所有 $m(i)$ 都等于

$$m := \max_{1 \leq i \leq n} m(i).$$

于是

$$\begin{aligned} A^c &= \bigcap_{i=1}^n A_i^c = \bigcap_{i=1}^n \left(\bigcup_{k=1}^m B_k^{(i)} \right) \\ &= \bigcup_{1 \leq k_1, \dots, k_n \leq m} \left(\bigcap_{i=1}^n B_{k_i}^{(i)} \right). \end{aligned}$$

每个交集都属于 $\mathcal{S}$ ，不同指标组对应的交集两两不交，故 $A^c \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ 。这就证明了 (a)。

(b) 对任意

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C}(\mathcal{S}), \quad A_i \in \mathcal{S},$$

定义

$$\bar{\mu}(A) := \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

这个定义与分解方式无关。事实上，若还有另一分解

$$A = \bigcup_{j=1}^m A'_j, \quad A'_j \in \mathcal{S},$$

则

$$A = \bigcup_{i,j} (A_i \cap A'_j).$$

分别在每个 A_i 与 A'_j 中应用 μ 在 $\mathcal{S}$ 上的有限可加性，得到

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i,j} \mu(A_i \cap A'_j) = \sum_{j=1}^m \mu(A'_j).$$

因此 $\bar{\mu}$ 定义良好。它完全由 μ 在 $\mathcal{S}$ 上的取值确定，所以延拓唯一；从定义也立即看出 $\bar{\mu}$ 有限可加。□

有限可加延拓的直接推论。 由 $\bar{\mu}$ 的有限可加性立即得到：

- 单调性：若 $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ 且 $A \subset B$ ，则

$$\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B);$$

- 强可加性：对任意 $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$,

$$\bar{\mu}(A \cup B) + \bar{\mu}(A \cap B) = \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B);$$

- 有限次可加性：对任意 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$,

$$\bar{\mu}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \bar{\mu}(A_1) + \dots + \bar{\mu}(A_n).$$

构造 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度

若 I 是 $\mathbb{R}$ 中的区间, 定义其长度 $\text{long}(I) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ 为

$$\text{long}(I) := \begin{cases} \sup I - \inf I, & I \neq \emptyset, \\ 0, & I = \emptyset. \end{cases}$$

当 I 无界时, 上式按 $\text{long}(I) = +\infty$ 理解。

回顾第 4.1 节应用 4.1:

$$\sigma(\mathcal{S}_I) = \sigma(\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

定理 6.7. 在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上存在唯一测度 λ , 使它在 $\mathcal{S}_I$ 上与区间长度 long 一致。称 λ 为 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度。它满足

$$\lambda([0, 1]) = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \lambda(A + a) = \lambda(A) \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

反过来, 单位区间的测度为 1 与平移不变性这两个性质刻画了 Lebesgue 测度。

证明. 区间长度在半代数 $\mathcal{S}_I$ 上满足命题 6.4(b) 意义下的有限可加性: 若区间 I, J 两两不交, 并且 $I \cup J$ 仍为区间, 则

$$\text{long}(I \cup J) = \text{long}(I) + \text{long}(J).$$

^a 由命题 6.4, 长度可唯一延拓为 Boolean 代数

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}_I) = \left\{ \bigcup_{k=1}^n I_k : I_k \text{ 是区间, } n \geq 1 \right\}$$

上的有限可加函数 $\overline{\text{long}}$ 。定理 6.6 的条件 (i) 显然成立, 只须验证 (iii)、(iv)。

步骤 1: 验证条件 (iii)。 设 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}(\mathcal{S}_I)$ 递减, 并且

$$\overline{\text{long}}(A_1) < +\infty, \quad \bigcap_{n \geq 1} A_n = \emptyset.$$

A_1 是有限个总长度有限的区间之并, 所以有界。对每个 $n \geq 1$, 写成

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{p_n} I_k^{(n)},$$

其中各 $I_k^{(n)}$ 是两两不交的区间。若某个 $A_n = \emptyset$, 结论显然; 以下设每个 $p_n \geq 1$ 。给定 $\varepsilon > 0$ 。记 $\alpha_k^{(n)}, \beta_k^{(n)}$ 分别为 $I_k^{(n)}$ 的下端点与上端点, 定义

$$J_k^{(n)} := \left[\alpha_k^{(n)} + \frac{\varepsilon}{p_n 2^{n+1}}, \beta_k^{(n)} - \frac{\varepsilon}{p_n 2^{n+1}} \right]$$

当

$$\beta_k^{(n)} - \alpha_k^{(n)} \geq \frac{\varepsilon}{p_n 2^n}$$

时采用上述定义, 否则令 $J_k^{(n)} := \emptyset$ 。这样 $J_k^{(n)}$ 是包含于 $I_k^{(n)}$ 的紧区间, 允许为空。令

$$A'_n := \bigcup_{k=1}^{p_n} J_k^{(n)}.$$

则 $A'_n \in \mathcal{C}(S_I)$ 、 $A'_n \subset A_n$ ，而且

$$\overline{\text{long}}(A_n \setminus A'_n) \leq \sum_{k=1}^{p_n} \frac{2\varepsilon}{p_n 2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

每个 A'_n 都是紧集，因而是紧集 A_1 中的闭集。又 $\bigcap_{n \geq 1} A'_n = \emptyset$ ，由紧性，存在 $n_\varepsilon \geq 1$ ，使

$$\bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A'_k = \emptyset.$$

由于 A_n 递减，

$$A_{n_\varepsilon} = \bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A_k.$$

在参考空间 A_{n_ε} 中应用 De Morgan 律，得到

$$\begin{aligned} A_{n_\varepsilon} &= \left(\bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A_k \right) \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A'_k \right) \\ &= \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} \left[\left(\bigcap_{j=1}^{n_\varepsilon} A_j \right) \setminus A'_k \right] \subset \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} (A_k \setminus A'_k). \end{aligned}$$

故由有限次可加性，

$$\overline{\text{long}}(A_{n_\varepsilon}) \leq \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \overline{\text{long}}(A_k \setminus A'_k) \leq \varepsilon.$$

当 $n \geq n_\varepsilon$ 时，

$$\overline{\text{long}}(A_n) \leq \overline{\text{long}}(A_{n_\varepsilon}) \leq \varepsilon.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\text{long}}(A_n) = 0,$$

条件 (iii) 得证。

步骤 2：验证条件 (iv)。 令

$$E_n := [-n, n].$$

则

$$E_n \subset E_{n+1}, \quad \bigcup_{n \geq 1} E_n = \mathbb{R}, \quad \overline{\text{long}}(E_n) = 2n.$$

任取 $A \in \mathcal{C}(S_I)$ 。若 $\overline{\text{long}}(A) < +\infty$ ，则 A 有界，所以充分大的 n 满足 $A \subset E_n$ ，从而

$$\overline{\text{long}}(A \cap E_n) = \overline{\text{long}}(A).$$

若 $\overline{\text{long}}(A) = +\infty$ ，组成 A 的某个区间必定无界，只须对无界区间验证。例如充分大的 n 满足

$$\text{long}([a, +\infty) \cap E_n) = \text{long}([a, n]) = n - a,$$

因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{long}([a, +\infty) \cap E_n) = +\infty = \text{long}([a, +\infty)).$$

其他类型的无界区间同理。故条件 (iv) 成立。

步骤 3: Lebesgue 测度的性质。 由定理 6.6, $\overline{\text{long}}$ 可唯一延拓为 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的测度 λ 。命题 6.4(b) 与延拓定理的唯一性保证这个测度唯一。也可直接注意到: $\mathcal{S}_I$ 是生成 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 的 π -系统, 并含有有限测度穷竭 $E_n = [-n, n]$, 因而可应用第 6.2 节的唯一性定理。

固定 $a \in \mathbb{R}$, 定义

$$\lambda_a(A) := \lambda(A + a), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

因为对每个区间 $I \in \mathcal{S}_I$,

$$\text{long}(I + a) = \text{long}(I),$$

所以 λ_a 与 λ 在 $\mathcal{S}_I$ 上相等。由唯一性,

$$\lambda_a = \lambda \quad \text{于 } \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

即 λ 平移不变。又

$$\lambda([0, 1]) = \text{long}([0, 1]) = 1.$$

反过来, 平移不变性与单位区间测度为 1 能够刻画 Lebesgue 测度, 这一点已在第 6.2.2 节应用 6.1 中证明。□

^a**校订注:** 原书写成“只要 $I \cap J = \emptyset$, 就有 $\text{long}(I \cup J) = \text{long}(I) + \text{long}(J)$ ”。若两个区间相隔, $I \cup J$ 不是区间, 而此时 $\text{long}(I \cup J)$ 尚未定义。命题 6.4(b) 所需且正确的条件是 $I \cup J \in \mathcal{S}_I$ 。

高维情形。 也可直接用超矩形半代数

$$\mathcal{S}_{I,d} := \left\{ \prod_{i=1}^d I_i : I_i \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 中的区间} \right\}$$

构造 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的 Lebesgue 测度 λ_d 。定义超体积

$$\text{Vol}(I_1 \times \cdots \times I_d) := \prod_{i=1}^d \text{long}(I_i) \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

并约定 $0 \cdot (+\infty) = 0$, 即可重复上述延拓过程。

$\mathbb{R}$ 上的 Stieltjes 测度

Stieltjes 测度是 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 测度的自然推广。其基本思想是: 对每个 $a, b \in \mathbb{R}$, 不再把区间 $(a, b]$ 的质量取为几何长度, 而取为

$$F(b) - F(a),$$

其中 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是单调递增且右连续的函数。

也可以从测度的“分布函数”理解这个概念。若 μ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的测度, 定义

$$F_\mu(t) := \begin{cases} \mu((0, t]), & t \geq 0, \\ -\mu((t, 0]), & t \leq 0. \end{cases}$$

若 μ 在紧集上有限, 则

$$F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

单调递增、右连续，并且 $F_\mu(0) = 0$ 。自然要问：反过来，每个具有这些性质的函数是否都来自某个测度？Stieltjes 测度给出肯定答案。¹

定理 6.8 (Stieltjes)。 设 $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 单调递增且右连续。则在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上存在唯一测度 μ_F ，使

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b, \quad \mu_F((a, b]) = F(b) - F(a).$$

称 μ_F 为与 F 相联系的 Stieltjes 测度。

这个证明与 Lebesgue 测度的构造非常相似。记

$$F(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x), \quad F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x),$$

两个极限取扩充实数值。特别地，当 $F(x) = x$ 时，所构造的 μ_F 就是 Lebesgue 测度。

证明。步骤 1：构造 μ_F 的“种子”。 令

$$\mathcal{S}'_I := \{(a, b] : -\infty \leq a \leq b < +\infty\} \cup \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}.$$

这是一个半代数。定义

$$\text{long}_F : \mathcal{S}'_I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

如下：

$$\text{long}_F((a, b]) := F(b) - F(a), \quad \text{long}_F((a, +\infty)) := F(+\infty) - F(a).$$

这里 $a = -\infty$ 时使用上面定义的 $F(-\infty)$ 。由于 F 单调，这些差均属于 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 。

函数 long_F 在 $\mathcal{S}'_I$ 上有限可加。例如当 $a \leq b \leq c$ 时，

$$\begin{aligned} \text{long}_F((a, b] \dot{\cup} (b, c]) &= \text{long}_F((a, c]) \\ &= F(c) - F(a) \\ &= [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] \\ &= \text{long}_F((a, b]) + \text{long}_F((b, c]). \end{aligned}$$

区间 $(a, b]$ 与 $(b, +\infty)$ 的情形完全相同。^a

由命题 6.4， long_F 唯一延拓为 Boolean 代数

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}'_I) := \left\{ \bigcup_{k=1}^n I_k : I_k \in \mathcal{S}'_I, \quad n \geq 1 \right\}$$

上的有限可加函数 $\overline{\text{long}}_F$ 。

又由第 4.1 节应用 4.1，

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}) \subset \sigma(\mathcal{S}'_I).$$

反向包含显然，所以

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{S}'_I) = \sigma(\mathcal{C}(\mathcal{S}'_I)).$$

定理 6.6 的条件 (i) 已成立，下面验证 (iii)、(iv)。

步骤 2：先设 $F(+\infty) = +\infty$ 且 $F(-\infty) = -\infty$ 。

验证 (iii)。此时对每个 $A \in \mathcal{C}(\mathcal{S}'_I)$ ，

$$A \text{ 有界} \iff \overline{\text{long}}_F(A) < +\infty.$$

¹校订注：原书把这里的值域写成 $\mathbb{R}_+$ 。但当 $t < 0$ 且 $\mu((t, 0]) > 0$ 时， $F_\mu(t) < 0$ ，故正确值域应为 $\mathbb{R}$ 。

设 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}(\mathcal{S}_I')$ 递减,

$$\overline{\text{long}}_F(A_1) < +\infty, \quad \bigcap_{n \geq 1} A_n = \emptyset.$$

于是 A_1 有界。对每个 $n \geq 1$, 写成

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{p_n} I_k^{(n)}, \quad I_k^{(n)} = (\alpha_k^{(n)}, \beta_k^{(n)}].$$

若某个 $A_n = \emptyset$, 结论显然; 以下设 $p_n \geq 1$ 。

给定 $\varepsilon > 0$ 。由 F 在每个 $\alpha_k^{(n)}$ 处右连续, 可取

$$\alpha_k^{(n)} < \tilde{\alpha}_k^{(n)} \leq \beta_k^{(n)}$$

充分接近 $\alpha_k^{(n)}$, 使

$$F(\tilde{\alpha}_k^{(n)}) - F(\alpha_k^{(n)}) \leq \frac{\varepsilon}{p_n 2^n}.$$

令

$$J_k^{(n)} := [\tilde{\alpha}_k^{(n)}, \beta_k^{(n)}], \quad A'_n := \bigcup_{k=1}^{p_n} J_k^{(n)}.$$

各 $J_k^{(n)}$ 是包含于 $I_k^{(n)}$ 的紧区间, 允许为空; 并且

$$A'_n \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_I'), \quad A'_n \subset A_n,$$

以及

$$\overline{\text{long}}_F(A_n \setminus A'_n) \leq \sum_{k=1}^{p_n} \frac{\varepsilon}{p_n 2^n} = \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

阅读提示。 这里正是右连续性发挥作用的地方: 把半开区间的左端点稍向右移动时, 损失的质量 $F(\tilde{\alpha}) - F(\alpha)$ 可以任意小; 同时留下的 $[\tilde{\alpha}, \beta]$ 是紧区间, 因而可以使用紧性。

各 A'_n 是紧集, 且是紧集 A_1 中的闭集; 又 $\bigcap_n A'_n = \emptyset$ 。因此存在 $n_\varepsilon \geq 1$, 使

$$\bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A'_k = \emptyset.$$

完全照搬定理 6.7 步骤 1 中的 De Morgan 律与有限次可加性论证, 得到

$$\overline{\text{long}}_F(A_{n_\varepsilon}) \leq \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \overline{\text{long}}_F(A_k \setminus A'_k) \leq \varepsilon.$$

由单调性, 对 $n \geq n_\varepsilon$ 也有 $\overline{\text{long}}_F(A_n) \leq \varepsilon$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\text{long}}_F(A_n) = 0.$$

验证 (iv)。取

$$E_n := (-n, n].$$

则 $E_n \uparrow \mathbb{R}$, 并且

$$\overline{\text{long}}_F(E_n) = F(n) - F(-n) < +\infty.$$

对 $\mathcal{C}(\mathcal{S}'_I)$ 中的每个集合逐个区间计算, 即得

$$\overline{\text{long}}_F(A \cap E_n) \uparrow \overline{\text{long}}_F(A).$$

因此定理 6.6 给出 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上所需的唯一延拓 μ_F 。

步骤 3: 一般情形。 举例设

$$F(+\infty) \in \mathbb{R}, \quad F(-\infty) = -\infty.$$

给定 $\varepsilon > 0$, 可取 $L_\varepsilon \in \mathbb{R}$, 使

$$F(+\infty) - F(L_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

在验证条件 (iii) 时, 若 $A_n \downarrow \emptyset$ 且 $\overline{\text{long}}_F(A_1) < +\infty$, 则

$$A_n \cap (-\infty, L_\varepsilon]$$

仍是递减序列; 这些集合有界, 可以应用步骤 2 的紧集逼近论证, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\text{long}}_F(A_n \cap (-\infty, L_\varepsilon]) = 0.$$

另一方面, 由 F 的单调性,

$$\overline{\text{long}}_F(A_n \cap (L_\varepsilon, +\infty)) \leq F(+\infty) - F(L_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

将 A_n 分成以上两个不交部分, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\text{long}}_F(A_n) \leq \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 条件 (iii) 得证。其余端点极限为有限值的组合同理处理; 条件 (iv) 仍用 $E_n = (-n, n]$, 证明不变。

综上, 定理 6.6 给出测度 μ_F 的存在性; 唯一性也由同一定理得到, 因为 $\mathcal{S}'_I$ 生成 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。 $\square$

^a**校订注:** 原书这段有三处相互关联的排印错误: 把 long_F 的值域误写成 $\mathcal{S}'_I$; 把 $\text{long}_F((a, +\infty))$ 的末项误写成 $F(b)$; 又在望远镜分解中写成 $[F(c) - F(b)] + [F(b) - F(c)]$ 。这里分别改为 $\mathbb{R}_+$ 、 $F(a)$ 与 $[F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)]$ 。

记号。 在多数应用中, 为了便于形式运算, 常把 μ_F 记作

$$dF.$$

闭区间与原子质量。 单调函数 F 在每一点 a 都有左极限

$$F(a^-) := \lim_{x \uparrow a} F(x).$$

由 Stieltjes 测度的定义, 对 $-\infty < a \leq b < +\infty$,

$$\mu_F([a, b]) = F(b) - F(a^-).$$

特别地,

$$\mu_F(\{a\}) = \Delta F(a) := F(a) - F(a^-).$$

因此, F 在 a 处的跳跃大小正好等于 Stieltjes 测度在点 a 上的原子质量。

6.6 ♣ 度量空间上测度的正则性

本节中, X 是度量空间, 距离记作 d 。所有测度都定义在由该度量拓扑生成的下述 Borel σ -代数上:

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}(X))$$

一般很难把 Borel σ -代数中的每个集合逐一描述出来。不过, 通常可以用包含它的开集和包含在它之内的闭集 (或紧集), 以任意精度从外、从内逼近其测度。这引出下列定义。

定义 6.6。 设 μ 是 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上的测度。

(a) 若对每个 $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$\mu(A) = \inf_{\substack{A \subset O \\ O \text{ 开}}} \mu(O),$$

则称 μ 外正则。

(b) 若对每个 $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ 紧}}} \mu(K),$$

则称 μ 内正则。

(c) 若 μ 同时外正则与内正则, 则称 μ 正则。

6.6.1 有限测度情形

命题 6.5。 设 μ 是 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上的有限正测度。则对任意 $A \in \mathcal{B}(X)$ 与 $\varepsilon > 0$, 存在开集 O 和闭集 F , 使

$$F \subset A \subset O, \quad \mu(O \setminus F) \leq \varepsilon. \quad (6.6)$$

证明。 令

$$\mathcal{T} := \{A \in \mathcal{B}(X) : A \text{ 满足式(6.6)}\}.$$

证明的思路是说明 $\mathcal{T}$ 是包含全部开集的 σ -代数; 于是

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}(X)) \subset \mathcal{T}.$$

$\mathcal{T}$ 包含所有开集。 设 $A \subset X$ 开, 给定 $\varepsilon > 0$ 。取 $O := A$, 并对 $\delta > 0$ 定义

$$F_\delta := \{x \in X : d(x, A^c) \geq \delta\}.$$

函数 $x \mapsto d(x, A^c)$ 连续 (见命题 3.7(a)), 所以 F_δ 闭。又因 A^c 闭,

$$\bigcup_{p \geq 1} F_{1/p} = \{x \in X : d(x, A^c) > 0\} = (\overline{A^c})^c = A = O.$$

由测度的从下连续性 P3,

$$\mu(F_{1/p}) \uparrow \mu(O).$$

由于 $\mu(O) < +\infty$,

$$\mu(O \setminus F_{1/p}) \longrightarrow 0.$$

故充分大的 p 满足 $\mu(O \setminus F_{1/p}) < \varepsilon$, 从而 $A \in \mathcal{T}$ 。这证明了 $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{T}$ 。

$\mathcal{T}$ 对可数并封闭。 设 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{T}$, 并给定 $\varepsilon > 0$ 。对每个 $n \geq 1$, 可取闭集 F_n 和开集 O_n , 使

$$F_n \subset A_n \subset O_n, \quad \mu(O_n \setminus F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

显然

$$\bigcup_{n \geq 1} F_n \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n \subset \bigcup_{n \geq 1} O_n,$$

并且

$$\left(\bigcup_{n \geq 1} O_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n \geq 1} F_n \right) \subset \bigcup_{n \geq 1} (O_n \setminus F_n).$$

由 σ -次可加性,

$$\mu \left(\left(\bigcup_{n \geq 1} O_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n \geq 1} F_n \right) \right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(O_n \setminus F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面,

$$\bigcup_{n \geq 1} F_n = \bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} \left(\bigcup_{k=1}^n F_k \right).$$

由从下连续性, 可取 $n_\varepsilon \geq 1$, 使

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 1} F_n \right) \leq \mu \left(\bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} F_k \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

令

$$O := \bigcup_{n \geq 1} O_n, \quad F := \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} F_k.$$

则 O 开、 F 闭, 并且

$$F \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n \subset O.$$

又因为 $\mu(O) < +\infty$,

$$\begin{aligned} \mu(O \setminus F) &= \mu(O) - \mu(F) \\ &= \mu \left(\bigcup_{n \geq 1} O_n \right) - \mu \left(\bigcup_{n \geq 1} F_n \right) + \mu \left(\bigcup_{n \geq 1} F_n \right) - \mu(F) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

所以 $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{T}$ 。

$\mathcal{T}$ 对补集封闭。 设 $A \in \mathcal{T}$ 。给定 $\varepsilon > 0$, 取闭集 F 与开集 O , 满足

$$F \subset A \subset O, \quad \mu(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

则

$$O^c \subset A^c \subset F^c,$$

其中 O^c 闭、 F^c 开，而且

$$F^c \setminus O^c = O \setminus F.$$

故 $\mu(F^c \setminus O^c) \leq \varepsilon$ ，即 $A^c \in \mathcal{T}$ 。

综上， $\mathcal{T}$ 是包含 $\mathcal{O}(X)$ 的 σ -代数，命题得证。 $\square$

等价表述。 命题 6.5 等价于：对每个 $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$\mu(A) = \sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{ 闭}}} \mu(F) = \inf_{\substack{A \subset O \\ O \text{ 开}}} \mu(O).$$

下面将把这一结论推广到某些总质量无限、但在“足够大的”Borel 集上仍有限的测度。

6.6.2 σ -有限测度情形

定义 6.7。 设 μ 是可测空间 $(X, \mathcal{A})$ 上的测度。若存在递增序列 $(E_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ ，使

$$X = \bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} E_n, \quad \mu(E_n) < +\infty \quad (n \geq 1),$$

则称 μ 是 σ -有限测度；也称测度空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是 σ -有限的。^a

^a**校订注：**原书在一般可测空间 $(X, \mathcal{A})$ 中把 E_n 称作“Borel 集”。此处没有给 X 指定拓扑，Borel 集尚无定义；正确要求是 $E_n \in \mathcal{A}$ 。

定理 6.9。 设 μ 是 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上的 σ -有限测度，并以递增 Borel 集 $(E_n)_{n \geq 1}$ 作有限测度穷竭。

(a) 对每个 $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$\mu(A) = \sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{ 闭}}} \mu(F).$$

(b) 若另外满足

$$X = \bigcup_{n \geq 1} E_n^\circ,$$

则 μ 外正则，即对每个 $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$\mu(A) = \inf_{\substack{A \subset O \\ O \text{ 开}}} \mu(O).$$

(c) 若可把各 E_n 选为紧集，则 μ 内正则，即对每个 $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ 紧}}} \mu(K).$$

证明。 (a) 先设 $\mu(A) < +\infty$ 。给定 $\varepsilon > 0$ 。由于

$$A = \bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} (A \cap E_n),$$

由从下连续性, 可取 $n_\varepsilon \geq 1$, 使

$$\mu(A \cap E_{n_\varepsilon}^c) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

定义有限测度

$$\tilde{\mu} := \mu(\cdot \cap E_{n_\varepsilon}).$$

由命题 6.5, 存在闭集 $F \subset A$, 使

$$\tilde{\mu}(A \setminus F) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \mu(A \setminus F) &= \mu((A \setminus F) \cap E_{n_\varepsilon}) + \mu((A \setminus F) \cap E_{n_\varepsilon}^c) \\ &\leq \tilde{\mu}(A \setminus F) + \mu(A \cap E_{n_\varepsilon}^c) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

这证明了 $\mu(A)$ 有限时的结论。

若 $\mu(A) = +\infty$, 仍由从下连续性,

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \mu(A \cap E_n).$$

而每个 $A \cap E_n$ 的测度有限, 由刚证明的情形,

$$\mu(A \cap E_n) = \sup_{\substack{F \subset A \cap E_n \\ F \text{ 闭}}} \mu(F) \leq \sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{ 闭}}} \mu(F).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$\mu(A) \leq \sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{ 闭}}} \mu(F).$$

反向不等式来自单调性, 故 (a) 得证。

(b) 对每个 $n \geq 1$, 定义有限测度

$$\mu_n := \mu(\cdot \cap E_n).$$

固定 $A \in \mathcal{B}(X)$ 与 $\varepsilon > 0$ 。由命题 6.5, 对每个 $n \geq 1$, 可取开集 $O_n \supset A$, 使

$$\mu_n(O_n \setminus A) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

等价地,

$$\mu(O_n \cap E_n) \leq \mu(A \cap E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

下面归纳证明

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n (O_k \cap E_k)\right) \leq \mu(A \cap E_n) + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2^k}. \quad (6.7)$$

$n = 1$ 时结论就是上式。假设 (6.7) 对 n 成立。由强可加性,

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} (O_k \cap E_k) \right) &= \mu(O_{n+1} \cap E_{n+1}) + \mu \left(\bigcup_{k=1}^n (O_k \cap E_k) \right) \\ &\quad - \mu \left((O_{n+1} \cap E_{n+1}) \cap \bigcup_{k=1}^n (O_k \cap E_k) \right). \end{aligned}$$

又因为 $E_k \subset E_n$ ($k \leq n$),

$$A \cap E_n \subset \bigcup_{k=1}^n (O_k \cap E_k),$$

并且

$$A \cap E_n \subset A \cap E_{n+1} \subset O_{n+1} \cap E_{n+1}.$$

所以

$$\mu(A \cap E_n) \leq \mu \left((O_{n+1} \cap E_{n+1}) \cap \bigcup_{k=1}^n (O_k \cap E_k) \right) < +\infty.$$

代入归纳假设, 得到

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} (O_k \cap E_k) \right) \leq \mu(A \cap E_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\varepsilon}{2^k},$$

故归纳完成。

令

$$O := \bigcup_{n \geq 1} (O_n \cap E_n^\circ).$$

O 是开集, 并且

$$\mu(O) \leq \mu \left(\bigcup_{n \geq 1} (O_n \cap E_n) \right) \leq \mu(A) + \varepsilon,$$

其中最后一步由 (6.7) 令 $n \rightarrow \infty$ 得到。又根据假设 $X = \bigcup_n E_n^\circ$,

$$A = \bigcup_{n \geq 1} (A \cap E_n^\circ) \subset \bigcup_{n \geq 1} (O_n \cap E_n^\circ) = O.$$

因此 μ 外正则。

(c) 由 (a), 对每个 $A \in \mathcal{B}(X)$, 可用闭集 $F \subset A$ 从内逼近。若各 E_n 紧, 则

$$F \cap E_n$$

是紧集, 并且

$$\mu(F) = \lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \mu(F \cap E_n).$$

故闭集逼近可以进一步换成紧集逼近, μ 内正则。 □

6.6.3 Borel 测度的正则性

Borel 测度给出了满足定理 6.9 全部假设的第一类重要例子。

定义 6.8. 若 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上的测度 μ 对每个紧集 $K \subset X$ 都满足

$$\mu(K) < +\infty,$$

则称 μ 为 *Borel* 测度。

下面主要考虑定义在可分空间（即存在可数稠密子集，见第 3.4 节）和局部紧空间上的 Borel 测度。

定义 6.9. 若度量空间 (X, d) 的每个点 $x \in X$ 都有一个紧邻域 K_x ，亦即

$$x \in K_x^\circ,$$

则称 (X, d) 局部紧。

事实上，在局部紧空间中，点 x 的每个邻域都包含 x 的一个紧邻域（参见文献 [18]）。

基本例. $\mathbb{R}^d$ 配备任意有限维赋范空间结构时，是局部紧且可分的。反之，无限维赋范空间从不局部紧。

$(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的 Lebesgue 测度 λ_d 是 Borel 测度。事实上，任意紧集 K 有界，所以存在 $M > 0$ ，使

$$K \subset [-M, M]^d.$$

于是

$$\lambda_d(K) \leq (2M)^d < +\infty.$$

^a

^a**校订注：**原书此式把前文一直使用的 $\lambda_d(K)$ 误写成 $\lambda(K)$ 。这里统一恢复维数下标 d 。

定理 6.10. 局部紧可分度量空间上的每个 Borel 测度都是正则的。也就是说，对每个 $A \in \mathcal{B}(X)$ ，

$$\mu(A) = \inf_{\substack{A \subset O \\ O \text{ 开}}} \mu(O) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ 紧}}} \mu(K). \quad (6.8)$$

证明. 由定理 6.9，只须证明存在紧集序列 $(L_n)_{n \geq 1}$ ，使

$$L_n \subset L_{n+1}, \quad X = \bigcup_{n \geq 1}^\uparrow L_n^\circ.$$

因为 μ 是 Borel 测度，各 L_n 的测度自动有限。

步骤 1：证明 (X, d) 是 σ -紧的。 所谓 σ -紧，是指存在递增紧集序列 (K_n) ，使

$$X = \bigcup_{n \geq 1}^\uparrow K_n.$$

取 X 中的稠密序列 $(x_n)_{n \geq 1}$ ，并令

$$\mathcal{I} := \{(n, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Q}_+^* : \overline{B}(x_n, r) \text{ 紧}\}.$$

$\mathcal{I}$ 至多可数, 故可写成递增有限集序列 $(\mathcal{I}_p)_{p \geq 1}$ 的并。

任取 $x \in X$ 。由局部紧性, x 有一个紧邻域 K_x 。利用 (x_n) 稠密, 并适当选取有理半径 $r > 0$, 可找到 $n \geq 1$, 使

$$x \in \overline{B}(x_n, r) \subset K_x^\circ.$$

因此

$$X = \bigcup_{(n,r) \in \mathcal{I}} \overline{B}(x_n, r).$$

令

$$K_p := \bigcup_{(n,r) \in \mathcal{I}_p} \overline{B}(x_n, r).$$

每个 K_p 是有限个紧集之并, 因而紧; 并且

$$K_p \subset K_{p+1}, \quad X = \bigcup_{p \geq 1}^\uparrow K_p.$$

步骤 2: 递归构造 L_n 。 令 $L_1 := K_1$ 。假设已经构造出紧集 $L_1, \dots, L_n$, 满足

$$K_k \subset L_k \quad (1 \leq k \leq n), \quad L_{k-1} \subset L_k^\circ \quad (2 \leq k \leq n).$$

集合 $K_{n+1} \cup L_n$ 紧。由局部紧性, 其中每个点 x 都有紧邻域 V_x , 且 $x \in V_x^\circ$ 。开集族

$$(V_x^\circ)_{x \in K_{n+1} \cup L_n}$$

覆盖紧集 $K_{n+1} \cup L_n$, 故可抽取有限子覆盖

$$V_{x_1}^\circ \cup \dots \cup V_{x_p}^\circ.$$

定义

$$L_{n+1} := V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_p}.$$

则 L_{n+1} 紧, 并且

$$K_{n+1} \subset L_{n+1}, \quad L_n \subset V_{x_1}^\circ \cup \dots \cup V_{x_p}^\circ \subset L_{n+1}^\circ.$$

递归所得紧集序列满足

$$X = \bigcup_{n \geq 1}^\uparrow K_n \subset \bigcup_{n \geq 1}^\uparrow L_n \subset \bigcup_{n \geq 1}^\uparrow L_{n+1}^\circ \subset \bigcup_{n \geq 1}^\uparrow L_n^\circ \subset X.$$

所以 $X = \bigcup_n L_n^\circ$, 定理 6.9(b)、(c) 同时适用, 结论得证。□

应用 6.2。 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的每个 Borel 测度都正则。这当然包括 Lebesgue 测度 λ_d , 也包括所有具有密度

$$\mu = f \cdot \lambda_d$$

的测度, 其中 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是非负 Borel 函数, 并且局部 Lebesgue 可积, 即

$$\forall K \subset \mathbb{R}^d, \quad K \text{ 紧} \implies \int_K f d\lambda_d < +\infty.$$

拓扑补充。

- (a) 每个 σ -紧度量空间都可分。先看紧度量空间 K 。对每个 $r \in \mathbb{Q}_+^*$ ，由紧性，可取有限个点 $x_1^{(r)}, \dots, x_{n_r}^{(r)} \in K$ ，使

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n_r} B(x_i^{(r)}, r).$$

于是

$$\{x_i^{(r)} : 1 \leq i \leq n_r, r \in \mathbb{Q}_+^*\}$$

可数且在 K 中稠密。若 X 是可数个紧集的并，对每个紧集取可数稠密集，再取这些稠密集的可数并，就得到 X 的可数稠密集。

- (b) 结合 (a) 与定理 6.10 证明的步骤 1 可知：在局部紧度量空间中，

$$\text{可分} \iff \sigma\text{-紧}.$$

- (c) Urysohn 度量化定理还说明：若一个 Hausdorff 拓扑空间事先未必度量化，但它局部紧且具有可数开基，则它可度量化，即其拓扑由某个距离生成（参见文献 [21]，第 218 页）。

^a

^a这一结论中，局部紧条件还可以换成更弱的正则性条件：每个点 x 的每个邻域都包含 x 的一个闭邻域。

6.6.4 Polish 空间上有限测度的正则性

当 μ 有限时，也可以用空间的完备性代替局部紧性来得到正则性。

定义 6.10。 若度量空间 (X, d) 同时可分且完备，则称它为 *Polish* 空间。

定理 6.11。 设 (X, d) 是 Polish 空间， μ 是 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上的有限测度。则：

- (a) 对每个 $\varepsilon > 0$ ，存在紧集 $K_\varepsilon \subset X$ ，使

$$\mu(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon;$$

- (b) μ 具有式 (6.8) 意义下的正则性。

证明。 (a) 取 X 中的稠密序列 $(x_n)_{n \geq 1}$ ，并固定 $\varepsilon > 0$ 。对每个 $p \geq 1$ ，

$$X = \bigcup_{n \geq 1} B(x_n, 1/p).$$

由于 $\mu(X) < +\infty$ ，从下连续性保证存在 $n_p \in \mathbb{N}^*$ ，使

$$\mu \left(\left(\bigcup_{n=1}^{n_p} B(x_n, 1/p) \right)^c \right) \leq \frac{\varepsilon}{2^p}.$$

定义

$$K_\varepsilon := \bigcap_{p \geq 1} \overline{\bigcup_{n=1}^{n_p} B(x_n, 1/p)}.$$

对每个 $p \geq 1$,

$$K_\varepsilon \subset \bigcup_{n=1}^{n_p} \overline{B}(x_n, 1/p).$$

所以 K_ε 全有界；它又是完备空间 X 中的闭集，故完备。完备且全有界的度量空间是紧的（参见文献 [25]，第 137 页），于是 K_ε 紧。

另一方面，

$$K_\varepsilon^c \subset \bigcup_{p \geq 1} \left(\bigcup_{n=1}^{n_p} B(x_n, 1/p) \right)^c.$$

由 σ -次可加性，

$$\mu(K_\varepsilon^c) \leq \sum_{p \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^p} = \varepsilon.$$

(b) 由命题 6.5，有限测度可用闭集从内逼近，也可用开集从外逼近。再用 (a) 取紧集 K ，使 $\mu(K^c)$ 任意小；若 F 闭，则

$$F \cap K$$

是紧集。故闭集逼近可进一步换成紧集逼近， μ 内、外正则。 □

6.6.5 测度刻画中的应用

利用前述定理和命题 6.5，可以得到若干实用的测度唯一性判据。

定理 6.12。 设 (X, d) 是度量空间， μ, μ' 是 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上的两个测度。若它们满足下列三组条件之一，则

$$\mu = \mu'.$$

(a) 存在递增开集序列 (E_n) ，使

$$X = \bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} E_n, \quad \mu(E_n) = \mu'(E_n) < +\infty,$$

并且 μ, μ' 在所有开集上取值相同；

(b) (X, d) 局部紧且可分，并且对每个紧集 $K \subset X$ ，

$$\mu(K) = \mu'(K) < +\infty;$$

(c) (X, d) 可分且完备，

$$\mu(X) = \mu'(X) < +\infty,$$

并且对每个紧集 $K \subset X$ ，

$$\mu(K) = \mu'(K).$$

阅读提示（证明思路）。

- 在 (a) 中， (E_n) 使两个测度都满足定理 6.9(b) 的外正则性；它们在开集上相等，故在每个 Borel 集上相等。
- 在 (b) 中，紧集上的有限性说明二者都是 Borel 测度；由定理 6.10 的内正则性，紧集上的相等推出所有 Borel 集上的相等。

- 在 (c) 中，定理 6.11 给出同样的紧集内逼近，结论相同。

6.7 练习

本节中， $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 表示测度空间。若某性质在一个可测零测集的补集上成立，则称它 μ -几乎处处成立，记作 μ -a.e.

练习 6.1。 设 $(A_n)_{n \geq 0}$ 、 $(B_n)_{n \geq 0}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的两个序列，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \subset B_n, \quad \mu(A_n) < +\infty.$$

利用数列

$$(\mu(B_n) - \mu(A_n))_{n \geq 0}$$

的各项，分别估计

$$\mu \left(\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n \geq 0} A_n \right) \right)$$

和

$$\mu \left(\left(\bigcap_{n \geq 0} B_n \right) \setminus \left(\bigcap_{n \geq 0} A_n \right) \right).$$

练习 6.2。 设 $(Y, \mathcal{B})$ 是可测空间，

$$f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$$

可测。证明映射

$$\mu_f : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \mu_f(B) := \mu(f^{-1}(B))$$

是 $(Y, \mathcal{B})$ 上的测度。

练习 6.3。 在下列各情形中，证明给出的 μ 是测度，并刻画所有零测集。

(a) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ 。固定 $x \in X$ ，定义

$$\mu(A) := \mathbf{1}_A(x).$$

(b) $X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ 可数, 或 } A^c \text{ 可数}\},$$

并定义： A 可数时 $\mu(A) = 0$ ，否则 $\mu(A) = 1$ 。

(c) $X = \mathbb{N}$ 、 $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 。固定 $(u_n)_{n \geq 0} \in \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathbb{N}}$ ，定义

$$\mu(A) := \sum_{n \in A} u_n.$$

练习 6.4。 设

$$f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

可测。

(a) 证明：若 $\mu(X) \neq 0$ ，则存在 $A \in \mathcal{A}$ ，使 $\mu(A) \neq 0$ ，且 f 在 A 上有界。

(b) 证明：若

$$\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0,$$

则存在 $A \in \mathcal{A}$ ，使 $\mu(A) \neq 0$ ，且 $|f|$ 在 A 上有一个严格正的下界。

练习 6.5。 设 μ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的有限测度，定义

$$F(x) := \mu([x, +\infty)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) 证明测度 μ 由函数 F 唯一确定。

(b) 证明 F 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减且左连续，并计算 F 在 $+\infty$ 、 $-\infty$ 处的极限。

(c) 对 $x \in \mathbb{R}$ 计算 $\mu(\{x\})$ ，再证明

$$F \text{ 在 } x \text{ 处连续} \iff \mu(\{x\}) = 0.$$

由此能对集合

$$D := \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) \neq 0\}$$

得到什么结论？

练习 6.6。 若 $N \subset X$ ，且存在 $A \in \mathcal{A}$ 满足

$$N \subset A, \quad \mu(A) = 0,$$

则称 N 关于 μ 可忽略，或称 N 为 μ -可忽略集。记

$$\mathcal{N} := \{N \subset X : N \text{ 为 } \mu\text{-可忽略集}\},$$

以及

$$\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup N : (A, N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{N}\}.$$

(a) 证明：

$$C \in \overline{\mathcal{A}} \iff \exists A, B \in \mathcal{A}, \quad A \subset C \subset B, \quad \mu(B \setminus A) = 0.$$

(b) 证明 $\overline{\mathcal{A}}$ 是 σ -代数。

(c) 对每个 $C \in \overline{\mathcal{A}}$ ，若

$$A \subset C \subset B, \quad \mu(B \setminus A) = 0,$$

定义

$$\overline{\mu}(C) := \mu(A).$$

证明这个定义与 A, B 的选择无关，并证明 $\overline{\mu}$ 是 $\overline{\mathcal{A}}$ 上的测度，且在 $\mathcal{A}$ 上与 μ 一致。

(d) 证明 $\overline{\mu}$ 是完备测度，即 $\overline{\mathcal{A}}$ 包含所有 $\overline{\mu}$ -可忽略集。

称 $\overline{\mathcal{A}}$ 为测度 μ 的完备化 σ -代数；第 13 章将详细研究这一构造。

练习 6.7。 给定 $a, b \in \mathbb{R}$ ，令

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := ax + b.$$

证明：对每个 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$f(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \lambda(f(A)) = |a| \lambda(A).$$

练习 6.8。

- (a) 证明： $\mathbb{R}$ 中存在测度任意小的稠密开集。
 (b) 由此证明：对每个 $\varepsilon > 0$, 存在内部为空的闭集 $F \subset \mathbb{R}$, 使对每个 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\lambda(F \cap A) \geq \lambda(A) - \varepsilon.$$

练习 6.9。 求 $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 使

$$A + B = \mathbb{R}, \quad \lambda(A) = \lambda(B) = 0.$$

练习 6.10。 证明：连续函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 的图像是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的 λ_{d+1} -零测集。

练习 6.11。 设 (X, d) 是度量空间, μ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限测度。若 $A \in \mathcal{B}(X)$ 满足

$$\mu(A) = \inf_{\substack{A \subset O \\ O \in \mathcal{O}(X)}} \mu(O) = \sup_{\substack{F \subset A \\ F^c \in \mathcal{O}(X)}} \mu(F), \quad (*)$$

则称 A 具有正则性 $(*)$ 。

- (a) 证明 X 的每个闭集都满足 $(*)$ 。
 (b) 证明所有满足 $(*)$ 的集合组成一个 σ -代数。
 (c) 由此证明 X 的每个 Borel 集都满足 $(*)$ 。

练习 6.12 (Egoroff 定理)。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 的总质量有限, 并设

$$f_n: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), \quad n \geq 1,$$

均可测。

- (a) 证明序列 (f_n) 的收敛点集为

$$C := \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{i, j \geq n} \{|f_i - f_j| \leq 1/k\}.$$

- (b) 假设 f_n μ -几乎处处收敛到可测函数 f , 即 $\mu(C^c) = 0$ 。对 $k, n \in \mathbb{N}^*$, 定义

$$A_n^k := \bigcup_{p=1}^n \bigcap_{i \geq p} \{|f_i - f| \leq 1/k\}.$$

证明：对每个 $\varepsilon > 0$ 与 $k \in \mathbb{N}^*$, 存在 $n_{k, \varepsilon} \in \mathbb{N}^*$, 使

$$\mu((A_{n_{k, \varepsilon}}^k)^c) < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

- (c) 推出 Egoroff 定理：对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, 使

$$\mu(A_\varepsilon^c) < \varepsilon,$$

并且 f_n 在 A_ε 上一致收敛到 f 。

(d) 用简单例子说明：若 $\mu(X) = +\infty$ ，上述结论一般不成立。可考虑配备计数测度的 $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ，或配备 Lebesgue 测度的 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 。

练习 6.13 (依测度收敛)。设 $f_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 可测，且 f 可测。若

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0,$$

则称 f_n 依测度收敛到 f 。

- (a) 证明：若 $\mu(X) < +\infty$ ，且 f_n μ -几乎处处收敛到 f ，则 f_n 依测度收敛到 f 。
 (b) 证明：若 f_n 依测度收敛到 f ，则存在子列 (f_{n_k}) μ -几乎处处收敛到 f 。

练习 6.14 (本质支集)。设 X 是可分度量空间，配备 Borel σ -代数 $\mathcal{B}(X)$ 与测度 μ 。对每个可测函数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ，定义

$$S_f^\mu := \{F \subset X : F \text{ 闭, 且 } f = 0 \text{ } \mu\text{-a.e. 于 } F^c\},$$

以及 f 的本质支集

$$S_f^\mu := \bigcap_{F \in S_f^\mu} F.$$

- (a) 若 f 连续，证明

$$S_f^\mu \subset \text{supp } f := \overline{\{f \neq 0\}}.$$

再证明：若 X 的每个非空开集都有严格正的 μ -测度，则上式取等号。

- (b) 对可测 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ，证明

$$f = 0 \text{ } \mu\text{-a.e. 于 } (S_f^\mu)^c.$$

- (c) 设 $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ 可测。证明：若

$$|f| \leq |g| \text{ } \mu\text{-a.e.},$$

则 $S_f^\mu \subset S_g^\mu$ ；若 $|f| = |g|$ μ -a.e.，则 $S_f^\mu = S_g^\mu$ 。

- (d) 设 $(f_n)_{n \geq 0}$ 是递增到 f 的非负可测函数序列。证明

$$S_f^\mu = \overline{\bigcup_{n \geq 0} S_{f_n}^\mu}.$$

练习 6.15 (测度的支集)。设 X 是可分度量空间， μ 是 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上的测度。

- (a) 令

$$\mathcal{O}_\mu := \{O \in \mathcal{O}(X) : \mu(O) = 0\}.$$

证明 $\mathcal{O}_\mu$ 非空，并且在包含关系下有最大元 Ω_μ 。定义

$$\text{supp } \mu := \Omega_\mu^c.$$

- (b) 分别求 Dirac 测度 δ_a 、Lebesgue 测度 λ_d 与计数测度 m 的支集。

- (c) 设 $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ 非负可测，且

$$\nu := f \cdot \mu.$$

证明

$$\operatorname{supp} \nu = S_f^\mu,$$

其中右端是练习 6.14 定义的 μ -本质支集。

练习 6.16 (Hausdorff 测度)。设 (X, d) 是度量空间, $\alpha, \varepsilon > 0$ 。对任意 $A \subset X$, 记 $\mathcal{R}_\varepsilon(A)$ 为 A 的所有可数球覆盖 $(B_k)_{k \geq 1}$ 组成的集合, 其中

$$\operatorname{diam} B_k \leq \varepsilon.$$

定义

$$\mu_\alpha^\varepsilon(A) := \inf_{(B_k) \in \mathcal{R}_\varepsilon(A)} \left\{ \sum_{k \geq 1} (\operatorname{diam} B_k)^\alpha \right\}.$$

(a) 证明函数

$$\varepsilon \mapsto \mu_\alpha^\varepsilon(A)$$

在 $\mathbb{R}_+^*$ 上递减。

(b) 证明 $A \mapsto \mu_\alpha^\varepsilon(A)$ 是外测度 (见定义 6.4)。

(c) 推出

$$\mu_\alpha(A) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_\alpha^\varepsilon(A)$$

是外测度; 称它为 α 维 Hausdorff 测度。

(d) 证明: 对每个 $A \subset X$, 函数

$$\alpha \mapsto \mu_\alpha(A)$$

在 $\mathbb{R}_+^*$ 上递减; 而固定 $\varepsilon > 0$ 后,

$$\alpha \mapsto \varepsilon^{-\alpha} \mu_\alpha^\varepsilon(A)$$

也递减。

练习 6.17 (Hausdorff 维数)。在赋范空间 $\mathbb{R}^d$ 中沿用练习 6.16 的记号。

(a) 设 $\alpha \geq d$ 、 $\varepsilon > 0$ 。证明存在严格正的常数 c_d (依赖于 $\mathbb{R}^d$ 上所选的范数), 使对每个超立方体 $Q \subset \mathbb{R}^d$,

$$\mu_\alpha^\varepsilon(Q) \leq c_d \varepsilon^{\alpha-d} \lambda_d(Q).$$

(b) 推出: 若 $\alpha > d$, 则对每个有界集 $A \subset \mathbb{R}^d$,

$$\mu_\alpha(A) = 0.$$

(c) 对有界集 $A \subset \mathbb{R}^d$, 定义 Hausdorff 维数

$$\mathcal{H}(A) := \inf\{\alpha > 0 : \mu_\alpha(A) = 0\} \in [0, d].$$

证明: 若 $\alpha > \mathcal{H}(A)$, 则 $\mu_\alpha(A) = 0$; 若 $\alpha < \mathcal{H}(A)$, 则 $\mu_\alpha(A) = +\infty$ 。

(d) 若 Q 是 $\mathbb{R}^d$ 中的超立方体, 证明

$$\mathcal{H}(Q) = d.$$

练习 6.18 (测度代数上的距离)。 在 $\mathcal{A}$ 上定义关系 $\mathcal{R}$: 对 $A, B \in \mathcal{A}$,

$$A \mathcal{R} B \iff \mu(A \triangle B) = 0,$$

其中 $\triangle$ 表示对称差。

(a) 证明 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{A}$ 上的等价关系, 并刻画 $\emptyset$ 的等价类。

记 $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ 为商集, $[A]$ 为 $A \in \mathcal{A}$ 的等价类。

(b) 证明: 若 $[A], [B] \in \mathcal{A}/\mathcal{R}$, 则 $\mu(A \triangle B)$ 与代表元 A, B 的选择无关。

(c) 定义

$$d([A], [B]) := \arctan(\mu(A \triangle B)).$$

证明 d 是 $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ 上的距离。

(d) 设 ν 是 $\mathcal{A}$ 上的测度, 并满足

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \mu(A) < \delta \implies \nu(A) < \varepsilon.$$

证明映射

$$[A] \mapsto \nu(A)$$

定义良好, 并且在 $(\mathcal{A}/\mathcal{R}, d)$ 上连续。

练习 6.19。 设 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 并记

$$-A := \{-a : a \in A\}, \quad |A| := \{|a| : a \in A\}.$$

(a) 证明

$$-A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad |A| \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

(b) 证明

$$\lambda(A) = \lambda(-A), \quad \lambda(|A|) \leq \lambda(A).$$

练习 6.20。 设测度空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 满足 $\mu(X) = 1$ 。

(a) 证明

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \leq \sqrt{\mu(A)(1 - \mu(A))\mu(B)(1 - \mu(B))} \leq \frac{1}{4}.$$

(b) 证明以下两个不等式:

$$\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \leq \min\{\mu(A)(1 - \mu(B)), \mu(B)(1 - \mu(A))\},$$

以及

$$\mu(A)\mu(B) - \mu(A \cap B) \leq \min\{\mu(A)(1 - \mu(A)), \mu(B)(1 - \mu(B))\}.$$

(c) 证明 (b) 中的不等式比 (a) 中的不等式更精细。

练习 6.21。

(a) 在 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)$ 上定义

$$\mu(A) := \int_A \frac{dx}{x}.$$

证明 μ 在任意正比例的伸缩变换下不变。

(b) 设 μ' 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)$ 上在正比例伸缩下不变的测度, 并且

$$\mu'([1, e]) = 1.$$

证明 $\mu' = \mu$ 。

(c) 对 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)$ 、 $\alpha > 0$, 令

$$A^\alpha := \{x^\alpha : x \in A\}.$$

证明 $A^\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)$, 并且

$$\mu(A^\alpha) = \alpha \mu(A).$$

练习 6.22。 设 X 配备 σ -代数 $\mathcal{A}$ 。

(a) 设映射 $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ 满足:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) 若 $A, B \in \mathcal{A}$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B);$$

(iii) 对每个递增序列 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$,

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \mu(A_n).$$

证明 μ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的测度。

(b) 设 $(\nu_n)_{n \geq 1}$ 是递增且有上界的有限正测度序列, 即

$$\sup_{n \geq 1} \nu_n(X) < +\infty,$$

并且

$$\forall n \geq 1, \forall A \in \mathcal{A}, \quad \nu_n(A) \leq \nu_{n+1}(A).$$

定义

$$\nu(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(A).$$

证明 ν 是有限测度。

练习 6.23 (函数型单调类定理)。 设 $(X, \mathcal{A})$ 是可测空间, $\mathcal{H}$ 是从 X 到 $\mathbb{R}$ 的有界函数空间的一个实线性子空间, $\mathcal{C}$ 是 X 上的 π -系统。假设:

(i) 对每个 $C \in \mathcal{C}$,

$$\mathbf{1}_C \in \mathcal{H};$$

(ii) 若 $f_n \in \mathcal{H}$ 、 $f_n \geq 0$, 并且

$$f_n \uparrow f,$$

其中极限函数 f 有界, 则 $f \in \mathcal{H}$ 。

a

(a) 令

$$\mathcal{T} := \{A \subset X : \mathbf{1}_A \in \mathcal{H}\}.$$

证明 $\mathcal{T}$ 是 λ -系统，并推出 $\mathcal{H}$ 包含 $\sigma(\mathcal{C})$ 中所有集合的示性函数。
(b) 证明 $\mathcal{H}$ 包含所有有界的 $\sigma(\mathcal{C})$ -可测函数。

^a**校订注：**原书条件 (ii) 未写“极限函数 f 有界”。但 $\mathcal{H}$ 被假定为有界函数空间的子空间；若允许无界递增极限，条件的结论 $f \in \mathcal{H}$ 甚至不属于同一母空间。标准的函数型单调类定理要求有界单调极限。

第三部分

Lebesgue 积分

第七章 关于正测度的积分

本章中, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 始终表示任意测度空间。以后将普遍使用 $\{f \in B\}$ 代替 $f^{-1}(B)$, 表示原像集合

$$\{x \in X : f(x) \in B\};$$

类似地使用 $\{f = a\}$ 、 $\{f \neq a\}$ 、 $\{f \leq a\}$ 等记号。

本章采用以下约定:

$$0 \times \mu(A) = 0 \quad \text{对每个 } A \in \mathcal{A}, \text{ 包括 } \mu(A) = +\infty \text{ 的情形,} \quad (7.1)$$

$$0 \times f(x) = 0 \quad \text{对每个函数 } f, \text{ 包括 } f(x) = \pm\infty \text{ 的情形.} \quad (7.2)$$

因此, 即使 $\mu(\{f = 0\}) = +\infty$, 仍令 $0 \times \mu(\{f = 0\}) = 0$ 。同样, 只要 $f(x)$ 、 $g(x)$ 中有一个为零, 便令 $f(x)g(x) = 0$, 即使另一个因子为无穷。例如, 定义

$$\tilde{f} := f \mathbf{1}_{\{|f| < +\infty\}},$$

则在每个满足 $f(x) = \pm\infty$ 的点 x 处都有 $\tilde{f}(x) = 0$ 。有时把这些约定简写为

$$“0 \times (\pm\infty) = 0”,$$

但使用这个简写时必须谨慎。

7.1 非负简单函数的积分

在简单函数 f 的各种表示中, 标准形式为

$$f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mathbf{1}_{\{f=\alpha\}}.$$

非负简单函数的积分正是借助这一标准形式定义的。为简化记号, 以下记

$$\mathcal{E}_{\overline{\mathbb{R}}_+}(\mathcal{A}) := \{f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)) : f \text{ 为简单函数}\}.$$

定义 7.1。 设 $f \in \mathcal{E}_{\overline{\mathbb{R}}_+}(\mathcal{A})$ 。定义 f 关于测度 μ 的积分为

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

命题 7.1. 设 f 是非负简单函数。对任意分解

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i},$$

其中 $(A_i)_{i \in I}$ 是 X 的有限 $\mathcal{A}$ -可测分割，都有

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i).$$

证明。 把具有相同系数的项归在一起，可得

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{\alpha \in f(X)} \sum_{\substack{i \in I \\ \alpha_i = \alpha}} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \sum_{\substack{i \in I \\ \alpha_i = \alpha}} \mu(A_i).$$

对每个 $\alpha \in f(X)$ ，由于各 A_i 两两不交，且

$$\bigcup_{\substack{i \in I \\ \alpha_i = \alpha}} A_i = \{f = \alpha\},$$

所以

$$\sum_{\substack{i \in I \\ \alpha_i = \alpha}} \mu(A_i) = \mu(\{f = \alpha\}).$$

代回即得结论。 □

还常把同一个积分写成

$$\int_X f(x) \, d\mu(x), \quad \int_X f(x) \, \mu(dx), \quad \text{或} \quad \int_X f \, d\mu.$$

若不会引起歧义，有时省略积分域 X 。

注。

- 若 $f \equiv 0$ ，则

$$\int_X f \, d\mu = 0 \times \mu(X) = 0;$$

当 $\mu(X) = +\infty$ 时，这里用到了约定 (7.1)。

- 由定义可见

$$\int_X f \, d\mu < +\infty \iff \mu(\{f \neq 0\}) < +\infty \text{ 且 } \mu(\{f = +\infty\}) = 0.$$

若 f 处处取有限值，第二个条件自动成立。^a

^a**校订注：**原书只写了条件 $\mu(\{f \neq 0\}) < +\infty$ ，但这里的简单函数允许取值 $+\infty$ 。例如 $f \equiv +\infty$ 、 $0 < \mu(X) < +\infty$ 时，原条件成立而积分仍为 $+\infty$ ，故必须补上 $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$ 。

例。

1. **Dirac 测度**。设 $\mu = \delta_a$ ，其中 $a \in X$ ，并设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ 只取有限多个值。则

$$\int_X f d\mu = f(a).$$

事实上， $\mu(\{f = f(a)\}) = 1$ ，而对每个 $\alpha \in f(X) \setminus \{f(a)\}$ ，都有 $\mu(\{f = \alpha\}) = 0$ 。

2. **计数测度**。设 m 是 $(X, \mathcal{P}(X))$ 上的计数测度。若 $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ 只取有限多个值，则

$$\int_X f dm = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \operatorname{card}\{f = \alpha\}.$$

若 $\operatorname{card}\{f \neq 0\} < +\infty$ ，则

$$\int_X f dm = \sum_{\substack{x \in X \\ f(x) \neq 0}} f(x),$$

右端只有有限项，通常简写为 $\sum_{x \in X} f(x)$ 。若 $\operatorname{card}\{f \neq 0\} = +\infty$ ，则令

$$\sum_{x \in X} f(x) := \int_X f dm = +\infty.$$

因此在两种情形下统一有

$$\int_X f dm = \sum_{x \in X} f(x).$$

特别地，当 $X = \mathbb{N}$ 时，

$$\int_{\mathbb{N}} f(n) dm(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n),$$

这就是以 $f(n)$ 为通项的级数之和；此处 $n \mapsto f(n)$ 只取有限多个非负值。

性质 7.1。设 $f, g \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$ 。

- (a) $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$ (可加性)；
- (b) $f \leq g \implies \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ (单调性)；
- (c) 对每个 $\lambda \geq 0$ ， $\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu$ (正齐次性)。

证明。取分解

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad g = \sum_{j \in J} \beta_j \mathbf{1}_{B_j},$$

其中 $(A_i)_{i \in I}$ 、 $(B_j)_{j \in J}$ 是两个有限可测分割。于是

$$f + g = \sum_{(i,j) \in I \times J} (\alpha_i + \beta_j) \mathbf{1}_{A_i \cap B_j},$$

而 $(A_i \cap B_j)_{(i,j) \in I \times J}$ 是有限可测分割。因此^a

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) d\mu &= \sum_{(i,j) \in I \times J} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{j \in J} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j \in J} \beta_j \sum_{i \in I} \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j \in J} \beta_j \mu(B_j) \\ &= \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

若 $f \leq g$ ，则对每个非空的 $A_i \cap B_j$ ，都有 $\alpha_i \leq \beta_j$ 。故^b

$$\int_X f d\mu = \sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \leq \sum_{i,j} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \int_X g d\mu.$$

最后，若 $\lambda = 0$ ，结论由约定 (7.2) 立即得到。若 $\lambda > 0$ ，则

$$(\lambda f)(X) = \{\lambda \alpha : \alpha \in f(X)\}, \quad \{\lambda f = \lambda \alpha\} = \{f = \alpha\},$$

从而

$$\int_X \lambda f d\mu = \sum_{\alpha \in f(X)} \lambda \alpha \mu(\{\lambda f = \lambda \alpha\}) = \lambda \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) = \lambda \int_X f d\mu.$$

□

^a校订注：原书以下计算的最后一项误印为 $\int_X g dm$ ，此处讨论的是任意测度 μ ，故应为 $\int_X g d\mu$ 。

^b校订注：原书写 $g = f + (g - f)$ 。由于本节允许 f, g 取值 $+\infty$ ，当 $f(x) = g(x) = +\infty$ 时 $g(x) - f(x)$ 没有定义。这里改用共同分割逐项比较，结论及原论证顺序不变。

下面这个引理虽然只包含一些很简单的结论，却是构造 Lebesgue 积分的第一个重要环节。

引理 7.1。

(a) 若 $A \in \mathcal{A}$ 、 $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$ ，则 $1_A f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$ ，并定义^a

$$\int_A f d\mu := \int_X (1_A f) d\mu.$$

(b) 若 $A, B \in \mathcal{A}$ 、 $A \cap B = \emptyset$ ，则

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

(c) 设 $(E_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ 递增，且

$$X = \bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} E_n.$$

则

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \int_{E_n} f d\mu.$$

^a校订注：原书下式右端误印为 $\int_X (1_A f) dm$ ；本章固定的测度是 μ ，且左端也关于 μ 积分，故改为 $d\mu$ 。

证明。 (a) 若 $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, 则

$$\mathbf{1}_A f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i \cap A} + 0 \cdot \mathbf{1}_{A^c},$$

而 $\{A^c, A_i \cap A : i \in I\}$ 是 X 的有限可测分割, 所以 $\mathbf{1}_A f$ 是非负简单函数。

(b) 由 $\mathbf{1}_{A \cup B} f = \mathbf{1}_A f + \mathbf{1}_B f$ 和积分的可加性立即得到。

(c) 对分解 $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, 由 (a) 有

$$\int_{E_n} f \, d\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(E_n \cap A_i) + 0 \times \mu(E_n^c).$$

由于 $E_n \cap A_i \uparrow A_i$, 测度的从下连续性给出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f \, d\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i) = \int_X f \, d\mu.$$

□

7.2 非负可测函数的积分

记

$$\mathcal{M}^+(\mathcal{A}) := \{f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)) : f \text{ 可测}\}.$$

其中的函数可以取值 $+\infty$ 。

定义 7.2。

(a) 若 $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, 定义

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \varphi \leq f, \varphi \in \mathcal{E}_{\overline{\mathbb{R}}_+}(\mathcal{A}) \right\}. \quad (7.3)$$

零函数是积分为零的简单函数且不超过 f , 所以这个上确界有定义并属于 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 。

(b) 若

$$\int_X f \, d\mu < +\infty,$$

则称 f 是 μ -可积的。

性质 7.2。

(a) 若 f 本身是非负简单函数, 则 (7.3) 给出的积分与定义 7.1 一致。

(b) 若 $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ 且 $f \leq g$, 则

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

证明。 (a) 对任意满足 $0 \leq \varphi \leq f$ 的非负简单函数 φ , 性质 7.1(b) 给出

$$\int_X \varphi \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu.$$

另一方面, 定义 (7.3) 中可以取 $\varphi = f$, 故上确界恰等于 $\int_X f \, d\mu$ 。

(b) 若 $f \leq g$, 则

$$\{\varphi \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A}) : \varphi \leq f\} \subset \{\varphi \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A}) : \varphi \leq g\}.$$

对两边相应积分集合取上确界即得结论。^a

□

^a校订注：原书此处又把右端误印成 $\int_X g \, dm$, 应为 $\int_X g \, d\mu$ 。

下面的定理是建立 Lebesgue 积分基本性质的关键。

定理 7.1 (Beppo Levi 定理或单调收敛定理)。设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 是 $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ 中的递增序列, 即

$$0 \leq f_n \leq f_{n+1}.$$

则

$$f := \lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A}), \quad \int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \int_X f_n \, d\mu.$$

证明。第一步。 命题 5.7(c) 已证明 f 可测。又由 $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ 和性质 7.2(b),

$$\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f_{n+1} \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu.$$

所以^a

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu.$$

第二步。 在 (7.3) 的上确界中, 只需考虑处处有限的非负简单函数。事实上, 对任意 $\psi \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$, 令 $\psi_k := \min(\psi, k)$, 则 ψ_k 处处有限、 $\psi_k \leq \psi$, 且直接由定义 7.1 的有限和可得

$$\int_X \psi \, d\mu = \sup_{k \geq 1} \int_X \psi_k \, d\mu.$$

因此, 任取处处有限的 $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$, 使 $\varphi \leq f$, 再任取 $\lambda \in (0, 1)$ 。对 $n \geq 1$, 令

$$E_n := \{f_n \geq \lambda\varphi\}.$$

显然 $E_n \in \mathcal{A}$, 且因 $f_n \leq f_{n+1}$ 有 $E_n \subset E_{n+1}$ 。又因为 φ 处处有限,

$$X = \bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} E_n.$$

确切地说,

$$\bigcap_{n \geq 1}^{\downarrow} E_n^c = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n < \lambda\varphi\} \subset \{f \leq \lambda\varphi\} \cap \{f > 0\} = \emptyset;$$

而在 $\{f = 0\}$ 上有 $f_n = \varphi = 0$, 故这些点从一开始便属于每个 E_n 。

对每个 $n \geq 1$, 都有 $\mathbf{1}_{E_n} \lambda\varphi \leq f_n$, 从而由性质 7.2(b),

$$\lambda \int_{E_n} \varphi \, d\mu = \int_{E_n} \lambda\varphi \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty}^{\uparrow} \int_X f_k \, d\mu.$$

由引理 7.1(c), 令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$\lambda \int_X \varphi \, d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

再令 $\lambda \uparrow 1$, 便有

$$\int_X \varphi \, d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

最后对所有这样的 φ 取上确界, 得到

$$\int_X f \, d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

结合第一步得到的反向不等式, 即得所需等式。^b

□

^a校订注: 原书下式左端的被积函数误印成 c , 应为 f_n , 才能由 $f_n \leq f_{n+1}$ 得到。

^b校订注: 原书第二步允许 φ 取值 $+\infty$, 并据此断言 $X = \bigcup_n \{f_n \geq \lambda\varphi\}$ 。若 $f_n(x) = n$, $f(x) = \varphi(x) = +\infty$, 该点不属于任何一个集合, 断言即失效。这里先用 $\varphi \wedge k$ 说明只需考虑处处有限的简单函数, 再沿用原证明。

Beppo Levi 定理不仅是构造 Lebesgue 积分时不可缺少的技术步骤, 也有许多直接应用, 尤其适合处理积分序列以及依赖参数的积分。章末应用 7.1 将展示这一点。

现在可以把已经对非负简单函数证明的基本性质推广到一般非负可测函数。

性质 7.3. 设 $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ 。

(a) 若 $f \leq g$, 则

$$0 \leq \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu \quad (\text{单调性});$$

(b)

$$\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu \quad (\text{可加性});$$

(c) 对每个 $\lambda \geq 0$,

$$\int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu \quad (\text{正齐次性}).$$

^a

^a校订注: 原书在 (a)、(b) 以及 (b) 的证明末尾三次把关于 μ 的积分误印成关于计数测度 m 的积分; 这里均统一改为 $d\mu$ 。

证明. (a) 已由 Beppo Levi 定理之前的性质 7.2(b) 证明。

(b) 当 f, g 是非负简单函数时, 结论就是性质 7.1(a)。由基本逼近引理 (定理 5.1), 存在非负简单函数序列 (f_n) 、 (g_n) , 使

$$f_n \uparrow f, \quad g_n \uparrow g.$$

于是 $f_n + g_n \uparrow f + g$ 。连续三次应用 Beppo Levi 定理并使用简单函数积分的可加性, 得到

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (f_n + g_n) \, d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f_n \, d\mu + \int_X g_n \, d\mu \right) \\ &= \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu. \end{aligned}$$

(c) 当 $\lambda = 0$ 时, 由约定 (7.1) 立即得到结论. 若 $\lambda > 0$, 对 $f_n \uparrow f$ 使用基本逼近引理, 则 $\lambda f_n \uparrow \lambda f$; 再如 (b) 一样应用简单函数的正齐次性与 Beppo Levi 定理即可. $\square$

命题 7.2. 若 $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, 则

$$\int_X f \, d\mu = 0 \iff \mu(\{f \neq 0\}) = 0.$$

证明. 若 f 是非负简单函数, 由定义与约定 $0 \times (+\infty) = 0$, 等价关系立即成立. 一般情形下, 由基本逼近引理, 存在非负简单函数 $f_n \uparrow f$. 特别地,

$$\{f \neq 0\} = \{f > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{f_n \neq 0\}.$$

由测度的从下连续性,

$$\mu(\{f \neq 0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{f_n \neq 0\}).$$

若 $\int_X f \, d\mu = 0$, 则由 $0 \leq f_n \leq f$ 和性质 7.3(a), 对每个 $n \geq 1$ 都有 $\int_X f_n \, d\mu = 0$, 所以 $\mu(\{f_n \neq 0\}) = 0$. 令 $n \rightarrow \infty$ 得 $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$.

反之, 若 $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$, 则对每个 n , $\mu(\{f_n \neq 0\}) = 0$, 从而 $\int_X f_n \, d\mu = 0$. Beppo Levi 定理给出

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = 0.$$

$\square$

“几乎处处”的记号

与其写 $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$, 通常更简洁地说 “ $f = 0$ 在 μ -几乎处处成立”, 简记为

$$f = 0 \quad \mu\text{-a.e.}$$

这里 a.e. 是 almost everywhere (几乎处处) 的缩写. 同样, $f = g$ μ -a.e. 表示 $\mu(\{f \neq g\}) = 0$.

若 $(f_n)_{n \geq 1}$ 与 f 都是 $(X, \mathcal{A})$ 上的可测函数, 则 $f_n \rightarrow f$ μ -a.e. 表示

$$\mu\left(\left\{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = 0.$$

更一般地, 若命题 P_x 依赖于 x , 则称 P_x 在 $\mu(dx)$ -几乎处处成立, 是指

$$\{x \in X : P_x \text{ 不成立}\} \in \mathcal{A}, \quad \mu(\{x \in X : P_x \text{ 不成立}\}) = 0.$$

有时还允许稍弱的表述: 存在 $N \in \mathcal{A}$, 使

$$\{x \in X : P_x \text{ 不成立}\} \subset N, \quad \mu(N) = 0.$$

推论 7.1. 设 $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. 若 $f = g$ μ -a.e., 则

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

a

^a校订注：原书在结论以及证明中多次误把 $d\mu$ 印成 dm ；此处均已改正。

证明。 命题 5.7(c) 表明 $\max(f, g)$ 与 $\min(f, g)$ 都可测。定义

$$h := \begin{cases} \max(f, g) - \min(f, g), & \min(f, g) < +\infty, \\ 0, & f = g = +\infty. \end{cases}$$

则 h 可测且非负。可测性可以直接检验：若 $a > 0$ ，则

$$\{h \geq a\} = \{\max(f, g) \geq \min(f, g) + a\} \cap \{\min(f, g) < +\infty\} \in \mathcal{A};$$

若 $a \leq 0$ ，则 $\{h \geq a\} = X$ 。

由于 h 在 $\{f = g\}$ 上为零，假设给出 $h = 0$ μ -a.e.，故命题 7.2 蕴含 $\int_X h \, d\mu = 0$ 。又

$$\max(f, g) = \min(f, g) + h,$$

所以由性质 7.3(b)，

$$\int_X \max(f, g) \, d\mu = \int_X \min(f, g) \, d\mu.$$

最后利用

$$\min(f, g) \leq f, g \leq \max(f, g)$$

以及积分的单调性，得到

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

□

命题 7.3 (Markov 不等式)。 设 $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ 。则对每个 $a > 0$ ，

$$\mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_X f \, d\mu.$$

证明。 由逐点不等式

$$f \geq a \mathbf{1}_{\{f \geq a\}}$$

和积分的单调性，

$$\int_X f \, d\mu \geq \int_X a \mathbf{1}_{\{f \geq a\}} \, d\mu = a \mu(\{f \geq a\}).$$

两边除以 $a > 0$ 即得结论。

□

推论 7.2。 若 $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ 是 μ -可积的，则

$$\mu(\{f = +\infty\}) = 0.$$

证明。注意到

$$\{f = +\infty\} = \bigcap_{n \geq 1}^{\downarrow} \{f \geq n\}, \quad \mu(\{f \geq 1\}) \leq \int_X f \, d\mu < +\infty.$$

因此可以对递减集合列使用测度的从上连续性。再由 Markov 不等式,

$$\mu(\{f = +\infty\}) = \lim_{n \rightarrow \infty}^{\downarrow} \mu(\{f \geq n\}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X f \, d\mu = 0.$$

□

例。

1. **$\mathbb{N}$ 上的计数测度。** 取 $X = \mathbb{N}$ 、 $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, 并以 m 表示计数测度。此时

$$\mathcal{M}^+(\mathcal{A}) = \{\text{取值于 } \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ 的序列 } (u_n)_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

非负序列 (u_n) 关于 m 的积分, 正是相应级数的和:

$$\int_{\mathbb{N}} u_n \, dm(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

事实上, 对每个 $N \in \mathbb{N}$, 令

$$u_n^{(N)} := \begin{cases} u_n, & n < N, \\ 0, & n \geq N. \end{cases}$$

则 $(u_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$ 至多取 $N+1$ 个值, 因而是简单函数, 并且当 $N \uparrow +\infty$ 时逐点递增到 (u_n) 。第 7.1 节例 2 给出

$$\int_{\mathbb{N}} u_n^{(N)} \, dm(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^{(N)} = \sum_{n=0}^{N-1} u_n.$$

由 Beppo Levi 定理,

$$\int_{\mathbb{N}} u_n \, dm(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}} u_n^{(N)} \, dm(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

2. **任意集合上的计数测度。** 更一般地, 若 m 是 $(X, \mathcal{P}(X))$ 上的计数测度, 便得到非负“可求和族”的理论。对任意函数 $u: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, 定义

$$\sum_{x \in X} u(x) := \int_X u(x) \, dm(x).$$

Markov 不等式表明: 若

$$\sum_{x \in X} u(x) < +\infty,$$

则 $\{u \neq 0\}$ 至多可数。事实上, 对每个 $n \geq 1$,

$$\text{card}\{x \in X : u(x) \geq 1/n\} \leq n \sum_{x \in X} u(x) < +\infty,$$

而

$$\{u \neq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{u \geq 1/n\}.$$

注意。 推论 7.2 的逆命题不成立。在带计数测度的 $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ 上, 令

$$f_0 := 0, \quad f_n := \frac{1}{n} \quad (n \geq 1).$$

序列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 处处有限, 但

$$\int_{\mathbb{N}} f_n \, dm(n) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty.$$

在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 上也可以构造类似例子。

7.3 可积函数空间 $L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$

一如既往, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 。本节也会考虑取值于 $\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{R}}_+$ 的函数, 甚至偶尔考虑取值于 $\mathbb{C}$ 的 Alexandroff 紧化的函数。¹

定义 7.3。

(a) 可测函数

$$f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$$

称为 μ -可积的, 是指 $|f|$ 是 μ -可积的, 即

$$\int_X |f| \, d\mu < +\infty.$$

(b) 记

$$L^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) : f \text{ 可测且 } \int_X |f| \, d\mu < +\infty \right\}.$$

若不会引起歧义, 通常简写为 $L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, 甚至 $L^1(\mu)$ 。同样的定义也适用于取值于 $\overline{\mathbb{R}}_+, \overline{\mathbb{R}}$ 等空间的函数。

重要说明。

- 若 f 取值于 $\overline{\mathbb{R}}$, 由 $|f| = f^+ + f^-$ 以及非负可测函数积分的单调性和可加性,

$$f \in L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu) \iff f^+, f^- \in L^1_{\overline{\mathbb{R}}_+}(\mu).$$

- 若 $f \in L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$, 则

$$\mu(\{f = \pm\infty\}) = 0,$$

即 f 在 μ -几乎处处取有限值。事实上, $\{f = \pm\infty\} = \{|f| = +\infty\}$, 结论由推论 7.2 得到。

- 若 f, g 取值于 $\overline{\mathbb{R}}$, 且 $f = g$ μ -a.e., 则

$$f \in L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu) \iff g \in L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu).$$

因为 $|f| = |g|$ μ -a.e., 推论 7.1 给出 $\int_X |f| \, d\mu = \int_X |g| \, d\mu$ 。

- 若 f 取值于 $\mathbb{C}$, 则

$$|\operatorname{Re} f| \leq |f|, \quad |\operatorname{Im} f| \leq |f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|.$$

¹局部紧空间的 Alexandroff 紧化构造见文献 [25]。

所以

$$f \in L_{\mathbb{C}}^1(\mu) \iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L_{\mathbb{R}}^1(\mu).$$

同理，若复值函数 $f = g$ μ -a.e.，则二者同时属于或不属于 $L_{\mathbb{C}}^1(\mu)$ 。

定义 7.4。

(a) 若 $f \in L_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ ，定义

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

(b) 若 $f \in L_{\mathbb{C}}^1(\mu)$ ，定义

$$\int_X f \, d\mu := \int_X \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int_X \operatorname{Im} f \, d\mu.$$

^a

^a**校订注：**原书复值积分定义的虚部误印成关于 m 的积分；这里应与实部一致，都关于本章固定的测度 μ 积分。

进一步说明。

- 若扩展实值函数 $f = g$ μ -a.e.，则二者同时可积；又 $f^{\pm} = g^{\pm}$ μ -a.e.，故推论 7.1 给出

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

^a

- 若 $f \in L_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ ，令

$$\tilde{f} := f \mathbf{1}_{\{f \in \mathbb{R}\}}.$$

则

$$\tilde{f} = f \quad \mu\text{-a.e.}, \quad \tilde{f} \in L_{\mathbb{R}}^1(\mu), \quad \int_X \tilde{f} \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

^a**校订注：**原书这个等式的右端再一次误印为 $\int_X g \, dm$ ，已改为 $\int_X g \, d\mu$ 。

因此，后文将尽量不再把 μ -可积函数视为取值于 $\overline{\mathbb{R}}$ 的函数，也不再特别使用 $L_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ 的记号；在零测集上把函数改成有限值不会改变其积分。

例。

1. 在带计数测度 m 的 $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 上， m -可积函数恰好对应绝对收敛级数：

$$L_{\mathbb{K}}^1(m) = \ell_{\mathbb{K}}^1(m) := \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| < +\infty \right\}.$$

2. 在带计数测度的 $(X, \mathcal{P}(X))$ 上， m -可积函数就是通常所说的“绝对可求和族”。

定理 7.2。 对 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ ， $L_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ 是 $\mathbb{K}$ -向量空间，而且

$$f \mapsto \int_X f \, d\mu$$

是线性泛函。它还是正的：若 f 为非负实值函数，则 $\int_X f \, d\mu \geq 0$ 。因此在实值空间上它是单

调的：

$$\forall f, g \in L_{\mathbb{R}}^1(\mu), \quad f \leq g \implies \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

^a

^a**校订注：**原书先允许 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ ，随后却对所有 $f, g \in L_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ 写 $f \leq g$ 。复数没有这里所需的自然次序，故单调性必须陈述在实值函数空间上；复值积分的线性与对非负实值函数的正性仍然成立。

证明。实值情形。 若 $f, g \in L_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ ，则

$$|f + g| \leq |f| + |g|,$$

故由非负积分的单调性与可加性， $f + g \in L_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ 。另一方面，

$$f + g = (f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ + g^+ - f^- - g^-,$$

从而

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

上式各项积分均有限。对等式两边积分并重新排列，得到

$$\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

齐次性由非负积分的正齐次性得到。若 $\lambda \geq 0$ ，则 $(\lambda f)^{\pm} = \lambda f^{\pm}$ ；若 $\lambda < 0$ ，则 $(\lambda f)^{\pm} = -\lambda f^{\mp}$ 。两种情形都给出

$$\int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu.$$

复值情形。 Re 与 Im 的实线性保证可加性。对齐次性，先验证 $\lambda = i$ 的情形，再结合实值情形以及

$$(\alpha + i\beta)(\operatorname{Re} f + i\operatorname{Im} f) = (\alpha \operatorname{Re} f - \beta \operatorname{Im} f) + i(\alpha \operatorname{Im} f + \beta \operatorname{Re} f)$$

即可。

最后，若实值 $f \leq g$ ，则 $g - f \geq 0$ ，所以

$$\int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu = \int_X (g - f) \, d\mu \geq 0.$$

□

注 (练习)。 定义

$$\|f\|_1 := \int_X |f| \, d\mu.$$

这是 $L_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ 上的半范数，其核为

$$\{f \in L_{\mathbb{K}}^1(\mu) : f = 0 \text{ } \mu\text{-a.e.}\}.$$

有关定义见第 9.3.1 节。

命题 7.4 (积分的三角不等式)。(a) 对任意 $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$,

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu.$$

(b) 等号成立的条件如下:

- 若 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, 等号成立当且仅当 f 在 μ -几乎处处同号;
- 若 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, 等号成立当且仅当存在 $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, 使

$$f = \alpha |f| \quad \mu\text{-a.e.},$$

也就是说, f 的辐角在 μ -几乎处处为常数。**证明。** (a) 取 $\lambda \in \mathbb{C}$, 使

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| = \lambda \int_X f \, d\mu.$$

总可以令 $|\lambda| = 1$; 若积分为零, 任取模长为 1 的 λ 即可。于是

$$\begin{aligned} \left| \int_X f \, d\mu \right| &= \int_X \lambda f \, d\mu \\ &= \int_X \operatorname{Re}(\lambda f) \, d\mu + i \int_X \operatorname{Im}(\lambda f) \, d\mu \\ &\leq \int_X |\operatorname{Re}(\lambda f)| \, d\mu \leq \int_X |\lambda f| \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu. \end{aligned} \quad (7.4)$$

这里 $\lambda \int_X f \, d\mu$ 是实数, 所以 $\int_X \operatorname{Im}(\lambda f) \, d\mu = 0$ 。^a

(b) 三角不等式取等, 当且仅当 (7.4) 中两次不等式同时取等, 即

$$\int_X (|\operatorname{Re}(\lambda f)| - \operatorname{Re}(\lambda f)) \, d\mu = 0$$

且^b

$$\int_X (|\lambda f| - |\operatorname{Re}(\lambda f)|) \, d\mu = 0.$$

由命题 7.2, 这等价于

$$\operatorname{Re}(\lambda f) \geq 0, \quad \operatorname{Im}(\lambda f) = 0 \quad \mu\text{-a.e.},$$

继而依次等价于

$$\lambda f = |\lambda f| = |f| \quad \mu\text{-a.e.}$$

令 $\alpha := 1/\lambda$, 便得到复值情形的结论。若 f 实值, 则 f 非零时 α 只能取 1 或 -1 , 这正是 f 几乎处处同号。□^a校订注: 原书在 (7.4) 的虚部积分处误印为 dm , 应为 $d\mu$ 。^b校订注: 原书下式的积分后漏印了 “= 0”。只有补上这一等式, 才与紧接着的 “两个非负函数积分均为零” 以及命题 7.2 的应用一致。

7.4 紧区间上的 Riemann 积分与 Lebesgue 积分

下面说明: 在紧区间 $[a, b]$ 上, 对于 Riemann 可积函数, Riemann 积分与关于 Lebesgue 测度的 Lebesgue 积分在适当意义下相互一致。

命题 7.5。(a) **一般结论。** 对任意 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{K})$, 存在

$$g \in L_{\mathbb{K}}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)$$

满足:

(i) $f = g$ λ -a.e., 也就是说, 存在 $A \in \mathcal{B}([a, b])$, 使

$$\lambda(A) = 0, \quad \forall x \notin A, \quad f(x) = g(x);$$

(ii)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} g d\lambda.$$

(b) **实际使用的形式。** 特别地, 若 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ 是 Borel 可测且 Riemann 可积的, 则

$$f \in L_{\mathbb{K}}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda), \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\lambda.$$

注。

- 若改在 Lebesgue σ -代数 $\mathcal{B}([a, b])^\lambda$, 即把所有零测集的子集补入 Borel σ -代数所得的完备化上工作, 则 (a) 可以直接写成

$$\mathcal{I}([a, b], \mathbb{K}) \subset L_{\mathbb{K}}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b])^\lambda, \lambda), \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\lambda.$$

完备 σ -代数将在第 13 章详细定义和研究。

- (b) 特别说明: 在调节函数上, $[a, b]$ 上的 Riemann 积分与关于 Lebesgue 测度的积分相同。事实上, 调节函数是阶梯函数的一致极限, 故为 Borel 可测函数; 这里用到了每个阶梯函数都是简单函数、因而 Borel 可测。

此外, $[a, b]$ 上的函数是调节函数, 当且仅当它在所有有意义的点都存在左、右极限。因此, 连续函数、单调函数以及有界变差函数都是调节函数。

证明。 先设 $f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R})$ 。根据 Riemann 可积性的定义, 存在 $[a, b]$ 上两列阶梯函数 $(\Phi_n)_{n \geq 1}$, $(\Psi_n)_{n \geq 1}$, 满足

$$|\Phi_n - f| \leq \Psi_n, \quad \int_a^b \Psi_n \longrightarrow 0, \quad \int_a^b \Phi_n \longrightarrow \int_a^b f.$$

令

$$\alpha_n := \Phi_n - \Psi_n, \quad \beta_n := \Phi_n + \Psi_n.$$

则

$$\alpha_n \leq f \leq \beta_n, \quad \int_a^b (\beta_n - \alpha_n) \longrightarrow 0, \quad \int_a^b \alpha_n \longrightarrow \int_a^b f.$$

先注意一个直接事实: 若 γ 是 $[a, b]$ 上的阶梯函数, 则它也是简单函数, 而且

$$\int_a^b \gamma(x) dx = \int_{[a, b]} \gamma d\lambda.$$

定义

$$\tilde{\alpha}_n := \max(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \tilde{\beta}_n := \min(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

它们仍为简单函数，并满足

$$\alpha_n \leq \tilde{\alpha}_n \leq \tilde{\alpha}_{n+1} \leq f \leq \tilde{\beta}_{n+1} \leq \tilde{\beta}_n \leq \beta_n.$$

令

$$\tilde{\alpha} := \lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \tilde{\alpha}_n, \quad \tilde{\beta} := \lim_{n \rightarrow \infty}^{\downarrow} \tilde{\beta}_n.$$

命题 5.7(c) 表明二者都是 Borel 可测的，而且 $\tilde{\alpha} \leq f \leq \tilde{\beta}$ 。由积分的单调性，

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha_n \, d\lambda &= \int_{[a,b]} \alpha_n \, d\lambda \leq \int_{[a,b]} \tilde{\alpha}_n \, d\lambda \leq \int_{[a,b]} \tilde{\alpha} \, d\lambda \\ &\leq \int_{[a,b]} \tilde{\beta} \, d\lambda \leq \int_{[a,b]} \tilde{\beta}_n \, d\lambda \leq \int_a^b \beta_n. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ ，夹逼得到

$$\int_{[a,b]} \tilde{\alpha} \, d\lambda = \int_{[a,b]} \tilde{\beta} \, d\lambda = \int_a^b f.$$

现在令

$$\gamma := \tilde{\beta} - \tilde{\alpha} \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B}([a, b])).$$

这个差有定义，因为

$$\alpha_1 \leq \tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta} \leq \beta_1,$$

而阶梯函数 α_1, β_1 有界，故 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ 都处处有限。又

$$\int_{[a,b]} \gamma \, d\lambda = 0,$$

所以命题 7.2 给出 $\lambda(\{\gamma \neq 0\}) = 0$ 。定义 ^a

$$g := f \mathbf{1}_{\{\gamma=0\}} = \tilde{\alpha} \mathbf{1}_{\{\gamma=0\}}.$$

右端说明 g 是 Borel 可测函数；并且 $g = f$ λ -a.e. ^b，且

$$\int_{[a,b]} g \, d\lambda = \int_{[a,b]} \tilde{\alpha} \mathbf{1}_{\{\gamma=0\}} \, d\lambda = \int_{[a,b]} \tilde{\alpha} \, d\lambda = \int_a^b f.$$

若 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ，分别对 $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R})$ 使用以上论证即可。这证明了 (a)。(b) 由 (a) 以及此时 $f = g$ λ -a.e. 立即得到。□

^a校订注：原书在下式中漏印了第一个示性函数前的 f ，写成 $g := \mathbf{1}_{\{\gamma=0\}} = \tilde{\alpha} \mathbf{1}_{\{\gamma=0\}}$ ，该等式一般不成立。由 $\gamma = 0$ 时 $\tilde{\alpha} = f = \tilde{\beta}$ ，正确式如下。

^b校订注：原书把这里的“ λ -几乎处处”误写成关于本章一般测度 μ 的几乎处处；本节的测度是 $[a, b]$ 上的 Lebesgue 测度 λ 。

对 Borel 可测且 Lebesgue 可积的函数，今后将交替使用

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad \text{和} \quad \int_{[a,b]} f \, d\lambda$$

表示 $[a, b]$ 上的积分。

结合命题 7.5 与下一章的控制收敛定理 (定理 8.3), 可以证明: 若 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ 局部 Riemann 可积, 并且其反常积分绝对收敛, 则存在 $L^1_{\mathbb{K}}(\lambda)$ 中的 Borel 函数与 f 在 λ -几乎处处相等, 且 Lebesgue 积分与反常 Riemann 积分相同。在这种情形下, 可以交替写成

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{\mathbb{R}} f d\lambda, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) \lambda(dx), \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x).$$

注。 令 $f := \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ 。第 1 章已说明 $f \notin \mathcal{I}([0,1], \mathbb{R})$, 但 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$, 并且

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 0.$$

事实上, $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ 是可数个单点闭集的并, 因而是 Borel 集。若 $(r_n)_{n \geq 1}$ 枚举 $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, 则

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = \sum_{n \geq 1} \lambda(\{r_n\}) = 0.$$

应用 7.1 (Beppo Levi 定理的一个实际用法)。 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 、 $\alpha \in \mathbb{R}$, 研究

$$I_n(\alpha) := \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$$

在 $n \rightarrow \infty$ 时的极限。

先写成

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} f_n(x) e^{\alpha x} dx, \quad f_n(x) := \mathbf{1}_{[0,n]}(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \geq 0.$$

下面对 $(f_n)_{n \geq 1}$ 使用 Beppo Levi 定理。先证明它递增。对每个 $n \geq 1$, 只需在 $x \in [0, n)$ 上验证

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

定义

$$g_n(x) := (n+1) \ln \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) - n \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right), \quad x \in [0, n).$$

则

$$g'_n(x) = \frac{n}{n-x} - \frac{n+1}{n+1-x} = \frac{x}{(n-x)(n+1-x)} \geq 0.$$

又 $g_n(0) = 0$, 所以 $g_n \geq 0$, 从而 $f_n \leq f_{n+1}$ 。

另一方面, 对每个固定的 $x \geq 0$, 当 $n \geq x$ 时

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^{-x}.$$

因此 Beppo Levi 定理给出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)x} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

7.5 练习

本节中, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 表示测度空间。

习题 7.1。

(a) 设 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, 并且对每个 $A \in \mathcal{A}$, 都有

$$\int_A f \, d\mu = 0.$$

证明 $f = 0$ μ -a.e.。

(b) 设 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, F 是 $\mathbb{R}$ 中的闭集, 并且对每个满足 $\mu(A) > 0$ 的 $A \in \mathcal{A}$, 都有

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in F,$$

其中约定 $1/(+\infty) = 0$ 。证明

$$f \in F \quad \mu\text{-a.e.}$$

习题 7.2。 证明：测度空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是 σ -有限的, 即存在 $E_n \in \mathcal{A}$ 使

$$X = \bigcup_{n \geq 0}^{\uparrow} E_n, \quad \mu(E_n) < +\infty,$$

当且仅当存在一个处处严格为正的积函数。

习题 7.3。 设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 可测。证明

$$f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu) \iff \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}) < +\infty.$$

习题 7.4。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 的总质量有限, 且 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 可测。

(a) 证明

$$f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu) \iff \sum_{n \geq 1} n \mu(\{n \leq |f| < n+1\}) < +\infty.$$

(b) 证明：对每个 $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k \mu(\{k \leq |f| < k+1\}) = \sum_{k=1}^n \mu(\{|f| \geq k\}) - n \mu(\{|f| \geq n+1\}).$$

(c) 设 $(u_n)_{n \geq 1}$ 是递减到零的序列, 并且

$$v_n := \sum_{k=1}^n u_k - n u_{n+1}$$

组成的序列有界。证明 $\sum_{n \geq 1} u_n < +\infty$ 。

(d) 由此证明

$$f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu) \iff \sum_{n \geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) < +\infty.$$

(e) 当 $\mu(X) = +\infty$ 时, (a)、(d) 的结论是否仍然成立?

习题 7.5。

- (a) 设 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ 。证明：对每个 $\varepsilon > 0$ ，存在 $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ ，使 $\mu(A_\varepsilon) < +\infty$ 、 f 在 A_ε 上有界，并且

$$\int_{X \setminus A_\varepsilon} |f| d\mu < \varepsilon.$$

- (b) 由此推出积分关于测度的连续性：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \leq \delta \implies \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

第 8 章应用 8.4 将给出另一种证明。

习题 7.6。 设 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 。定义 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ：

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt := \begin{cases} \int_{[0,x]} f d\lambda, & x \geq 0, \\ -\int_{[x,0]} f d\lambda, & x \leq 0. \end{cases}$$

证明 F 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。

习题 7.7。

- (a) 设 $(f_n)_{n \geq 0}$ 是一列非负可测函数。证明

$$\int_X \sum_{n \geq 0} f_n d\mu = \sum_{n \geq 0} \int_X f_n d\mu.$$

- (b) 设 $(a_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ 。证明

$$\sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} a_{p,q} = \sum_{q \geq 0} \sum_{p \geq 0} a_{p,q}.$$

习题 7.8。 设 $(f_n)_{n \geq 0}$ 是一列递减的非负可测函数，并在 X 上收敛到 f 。

- (a) 若存在 $n_0 \geq 0$ 使 $f_{n_0} \in L^1(\mu)$ ，证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

- (b) 去掉 (a) 的可积性假设后，结论是否仍然成立？

习题 7.9 (Riemann 可积性的 Lebesgue 判据)。 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界可测函数。定义 f 在 $x \in [a, b]$ 处的振幅为

$$\omega(x) := \lim_{h \downarrow 0} \left(\sup_{y, z \in I_h(x)} |f(y) - f(z)| \right), \quad I_h(x) := [a, b] \cap [x - h, x + h].$$

- (a) 证明： f 在 x 处连续，当且仅当 $\omega(x) = 0$ 。

- (b) 设

$$\sigma_n := \{a = x_0^n < x_1^n < \cdots < x_n^n = b\}, \quad n \geq 1,$$

是一列逐步加细且网格趋于零的分割。对

$$I_k^n := [x_k^n, x_{k+1}^n), \quad 0 \leq k < n,$$

定义阶梯函数

$$\varphi_n(x) := \inf_{I_k^n} f, \quad \psi_n(x) := \sup_{I_k^n} f \quad (x \in I_k^n),$$

并令 $\varphi_n(b) = \psi_n(b) := 0$ 。证明 (φ_n) 、 (ψ_n) 分别单调，而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \omega \quad \lambda\text{-a.e.}$$

(c) 由此推出： f Riemann 可积，当且仅当 f 在 λ -几乎处处连续。

习题 7.10 (Jensen 不等式)。设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是概率空间，即 $\mu(X) = 1$ ； I 是 $\mathbb{R}$ 中非空开区间， $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是非负或有界的凸函数，即

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], \quad \varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

(a) 设 $x_0 \in I$ 。证明右导数 $\varphi'_d(x_0)$ 存在，而且对每个 $x \in I$ ^a,

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \varphi'_d(x_0)(x - x_0).$$

(b) 证明：每个取值于 I 的可积函数 f 都满足 Jensen 不等式

$$\varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f \, d\mu.$$

^a校订注：原书把量词范围误写成 $x \in \mathbb{R}$ ，但 φ 只定义在区间 I 上；不等式的正确范围是 $x \in I$ 。

习题 7.11 (熵不等式)。设 f, g 是 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 上的非负可积函数，并且 $f \ln f$ 、 $f \ln g$ 可积， $g > 0$ μ -a.e.，且

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu = 1.$$

约定 $0 \ln 0 = 0$ 。证明

$$\int_X f \ln f \, d\mu \geq \int_X f \ln g \, d\mu.$$

习题 7.12。设 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是 Borel 函数。计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nf(nt)}{\sqrt{1+t}} \, dt.$$

习题 7.13。设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是满足 $\mu(X) > 0$ 的测度空间。本题中， f^{-1} 表示逐点倒数函数 $1/f$ 。

(a) 证明：对所有 $a, b \geq 0$ 、 $u, v > 0$,

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \implies \frac{1}{u+v} \leq \frac{a}{u} + \frac{b}{v}.$$

(b) 设 $f, g \in L^1_{\mathbb{R}^+}(\mu)$, 且 $f, g > 0$ μ -a.e.。证明

$$\|(f+g)^{-1}\|_1 \leq \frac{\|f\|_1^2 \|f^{-1}\|_1 + \|g\|_1^2 \|g^{-1}\|_1}{(\|f\|_1 + \|g\|_1)^2}.$$

(c) 由此推出

$$\|f+g\|_1 \|(f+g)^{-1}\|_1 \leq \max(\|f\|_1 \|f^{-1}\|_1, \|g\|_1 \|g^{-1}\|_1).$$

习题 7.14。 证明

$$I_a := \int_0^{+\infty} ((1+x)^a - x^a)^2 dx < +\infty \iff -\frac{1}{2} < a \leq 0.$$

习题 7.15。 定义 $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ^a:

$$f(x) := \frac{\sin x}{x}, \quad x \geq 1.$$

(a) 证明极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt$$

存在。

(b) 考察乘积函数 $f \sin$, 并使用 (a), 证明 f 在 $[1, +\infty)$ 上不可积。

(c) 设 $a > 0$ 。证明 $|f|^a$ 在 $[1, +\infty)$ 上可积, 当且仅当 $a > 1$ 。

^a**校订注：**原书已把定义域写成 $[1, +\infty)$, 却又写 “ $x \geq 0$ ”。函数在本题中只从 1 起讨论, 故改为 $x \geq 1$ 。

第八章 收敛定理及其应用

在构造 Lebesgue 积分的过程中，我们已经得到了一类全新的定理：即使没有一致收敛，在适当条件下也可以交换极限与积分。这个结果就是 Beppo Levi 定理，也称单调收敛定理。先重述第 7.2 节已经证明的结论。

定理 8.1 (Beppo Levi 定理)。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间， $(f_n)_{n \geq 1}$ 是一列递增的非负可测函数。则

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} f_n$$

是 $\mathcal{A}$ -可测的，而且

$$\int_X \lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \int_X f_n d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

本章将以这个定理为基础，建立处理积分序列收敛问题的一组工具。它们在很大程度上体现了 Lebesgue 理论的优势，并广泛用于依赖参数的积分、由积分定义的函数等常见问题。除非另有说明，本章始终在测度空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 上工作。

8.1 Fatou 引理与控制收敛定理

定理 8.2 (Fatou 引理)。 设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 是一列非负 $\mathcal{A}$ -可测函数。则

$$0 \leq \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq +\infty.$$

证明。 对每个 $n \geq 1$ ，令

$$\varphi_n := \inf_{k \geq n} f_k.$$

由命题 5.7(a)， φ_n 非负且 $\mathcal{A}$ -可测；并且 $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ ，逐点有

$$\varphi_n \uparrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Beppo Levi 定理给出

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \varphi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \int_X \varphi_n d\mu.$$

另一方面， $\varphi_n \leq f_n$ ，故

$$\int_X \varphi_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} \int_X \varphi_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

合并以上等式与不等式即得结论。 □

使用示例。

1. 设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 是一列可积函数，逐点收敛到 f ，并满足

$$\sup_{n \geq 1} \int_X |f_n| d\mu < +\infty.$$

则 $f \in L^1(\mu)$ 。事实上，对非负函数 $|f_n|$ 使用 Fatou 引理，

$$\begin{aligned} \int_X |f| d\mu &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n| d\mu \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| d\mu \leq \sup_{n \geq 1} \int_X |f_n| d\mu < +\infty. \end{aligned}$$

2. 反过来，若非负函数列 (f_n) 满足

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = +\infty,$$

则只要 $\mu(X) > 0$ ，Fatou 引理便给出

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = +\infty.$$

3. **扩展的 Fatou 引理。** 设 $(f_n)_{n \geq 1} \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ，并且存在 $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ，使

$$f_n \geq g \quad \mu\text{-a.e.}, \quad n \geq 1.$$

若

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = +\infty \quad \mu\text{-a.e.},$$

则当 $\mu(X) > 0$ 时，

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = +\infty.$$

确实，对非负函数 $f_n - g$ 使用 Fatou 引理，得到

$$0 \leq \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n - g) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (f_n - g) d\mu.$$

因为可积函数 g 在几乎处处取有限值，

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n - g) = +\infty \quad \mu\text{-a.e.}$$

于是

$$\int_X (+\infty) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu - \int_X g d\mu.$$

右端减去的是有限实数，而 $\int_X (+\infty) d\mu = \mu(X) \times (+\infty) = +\infty$ ，故结论成立。

应用 8.1 (导数的积分)。 设 f 在 $[0, 1]$ 上递增，在端点 $0, 1$ 处连续，并且在 $[0, 1]$ 上 λ -几乎处处可导。则

$$\int_0^1 f'(x) dx \leq f(1) - f(0).$$

递增函数几乎处处可导这一事实也可以单独证明。

对 $n \geq 1$, 在 $[0, 1]$ 上定义

$$g_n(x) := \begin{cases} n(f(x + 1/n) - f(x)), & x \leq 1 - 1/n, \\ 0, & x > 1 - 1/n. \end{cases}$$

各 g_n 都非负。对 λ -几乎每个 $x \in [0, 1)$, $g_n(x) \rightarrow f'(x)$ 。在导数不存在的点令 $f'(x) = 0$ ；在导数存在处，由单调性有 $f'(x) \geq 0$ 。Fatou 引理给出

$$\int_0^1 f'(x) dx = \int_0^1 \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_n(x) dx &= n \int_0^{1-1/n} f(x + 1/n) dx - n \int_0^{1-1/n} f(x) dx \\ &= n \int_{1/n}^1 f(x) dx - n \int_0^{1-1/n} f(x) dx. \end{aligned}$$

令

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt.$$

则

$$\int_0^1 g_n(x) dx = n(F(1) - F(1 - 1/n)) - n(F(1/n) - F(0)).$$

由 f 在端点连续, $F'_-(1) = f(1)$ 、 $F'_+(0) = f(0)$, 所以右端趋于 $f(1) - f(0)$ 。结论得证。 $\square$

注。 上述不等式可能严格成立。例如

$$f := \mathbf{1}_{[1/2, 1]}$$

在 $[0, 1]$ 上递增, 在端点连续, 且除 $1/2$ 外导数均为零。因此

$$\int_0^1 f'(x) dx = 0 < f(1) - f(0) = 1.$$

第 13 章命题 13.2 将给出一个连续函数仍使不等式严格成立的例子, 即由三分 Cantor 集构造的 Lebesgue 函数。

定理 8.3 (控制收敛定理)。 设 $(f_n)_{n \geq 1} \subset L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, 其中 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 并满足:

- (i) $f_n(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 中收敛, $\mu(dx)$ -几乎处处成立;
- (ii) 存在 $g \in L^1_{\mathbb{R}^+}(\mu)$, 使对每个 $n \geq 1$,

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \mu(dx)\text{-a.e.}$$

则存在 $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, 满足

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \mu(dx)\text{-a.e.},$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

事实上还有更强的结论

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

注。在常见应用中，极限函数 f 往往已经在题目中直接给出。此时可以把条件 (i) 换成 “ $f_n \rightarrow f$ μ -几乎处处”，而 f 的可积性由控制条件 (ii) 推出。

证明。先设 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ，并令

$$C := \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathbb{R} \right\} \in \mathcal{A}.$$

在 C 上令 $f := \lim_n f_n$ ，在 C^c 上令 $f := 0$ 。于是 f 在整个 X 上有定义且可测，并由 (i) 有 $\mu(C^c) = 0$ 。复值情形分别对 $\operatorname{Re} f_n$ 、 $\operatorname{Im} f_n$ 作同样处理。^a

令

$$A := \left(\bigcap_{n \geq 1} \{|f_n| \leq g\} \right) \cap \{g < +\infty\} \cap C.$$

由 (i)、(ii)、 g 的可积性以及测度的 σ -次可加性，

$$\mu(A^c) \leq \mu(C^c) + \mu(\{g = +\infty\}) + \sum_{n \geq 1} \mu(\{|f_n| > g\}) = 0.$$

在 A 上， $|f| = \lim_n |f_n| \leq g$ ，故

$$\int_X |f| d\mu = \int_X |f| \mathbf{1}_A d\mu \leq \int_X g d\mu < +\infty.$$

因此 $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ 。

再考虑非负可测函数

$$h_n := 2g - \mathbf{1}_A |f_n - f|.$$

它们确实非负：在 A 上有 $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$ ，而在 A^c 上第二项为零。又 $h_n \rightarrow 2g$ 处处成立。Fatou 引理给出

$$2 \int_X g d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu = 2 \int_X g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_A |f_n - f| d\mu.$$

所以

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_A |f_n - f| d\mu \leq 0.$$

这些积分非负，故其极限为零。又 $\mu(A^c) = 0$ ，从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

最后，由积分的三角不等式，

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

□

^a**校订注：**原书直接写 $f := \lim_n f_n$ ，但假设只保证极限在几乎处处存在，异常零测集上的 f 尚未定义。这里在异常集上令 $f = 0$ ，使 f 成为整个 X 上的可测函数；这不影响任何几乎处处结论或积分。

关于控制条件 (ii) 的说明。

- 在紧区间 $[a, b]$ 上的初等 Riemann 积分理论中，为了保证积分收敛，通常要求 Riemann 可积函数列 f_n 一致收敛到 f (命题 1.4)。此时

$$C := \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_{\sup} < +\infty,$$

所以 $|f_n| \leq C$ 。常函数 C 在有限区间上可积，这正是控制条件的一个特殊情形。

- 控制条件并不要求一致收敛。在 $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ 上，令

$$f_n(0) := n, \quad f_n(x) := \min \left(\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}, n \right) \quad (0 < x \leq 1).$$

各 f_n 连续，因而 Borel 可测；对每个 $x \in (0, 1]$ ，都有 $f_n(x) \rightarrow 0$ ，所以它们在 λ -几乎处处收敛到零。另一方面，

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = n,$$

故收敛并不一致。不过，对 $x \in (0, 1]$ ，

$$|f_n(x)| \leq g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{(0, 1]}(x),$$

且 $g \in L^1(\lambda)$ 。控制收敛定理因此给出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0.$$

- 控制条件也不能涵盖所有积分收敛情形。在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 上，取连续非负函数 f ，使它在 $[0, 1]$ 外为零且积分非零，并令

$$f_n(x) := \frac{f(x+n)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

这个有时称为“滑动凸峰”的函数列逐点收敛到零，并且

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \frac{1}{n} \int_0^1 f(x) dx \rightarrow 0.$$

然而不存在可积函数同时控制所有 $|f_n|$ 。事实上，各 f_n 的支集除端点外两两不交，所以最小的非负控制函数

$$g(x) := \sup_{n \geq 1} |f_n(x)|$$

满足

$$\int_{\mathbb{R}} g d\lambda = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_0^1 f(x) dx = +\infty.$$

应用 8.2 (导数的积分, 续)。 设 f 在 $[0, 1]$ 上处处可导，并且 f' 有界。则

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0).$$

沿用应用 8.1 中的函数列 (g_n) 。对每个 $x \in [0, 1)$, $g_n(x) \rightarrow f'(x)$ 。令

$$M := \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| < +\infty.$$

由中值定理, 当 $x \leq 1 - 1/n$ 时 $|g_n(x)| \leq M$; 当 $x > 1 - 1/n$ 时结论显然。因此 $|g_n| \leq M$ 在 $[0, 1]$ 上处处成立, 而常函数 M 可积。控制收敛定理给出

$$\int_0^1 f'(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx.$$

应用 8.1 已经算出右端极限为 $f(1) - f(0)$, 故结论成立。 $\square$

应用 8.3. 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 、 $\alpha \in \mathbb{R}$, 研究

$$I_n(\alpha) := \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx$$

在 $n \rightarrow \infty$ 时的极限。

令

$$f_n(x) := \mathbf{1}_{[0, n]}(x) \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \geq 0.$$

对每个 $x \geq 0$, 有 $f_n(x) \rightarrow e^x$ 。Fatou 引理给出

$$\int_0^{+\infty} e^{(1-\alpha)x} dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha).$$

因此, 当 $\alpha \leq 1$ 时, $I_n(\alpha) \rightarrow +\infty$ 。

下面设 $\alpha > 1$ 。对每个 $x \geq 0$, 二项式展开给出

$$\begin{aligned} e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} \\ &\geq \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \right) x^k \geq 0, \end{aligned}$$

因为对 $0 \leq k \leq n$,

$$\frac{k!}{n^k} \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \leq 1.$$

于是

$$0 \leq f_n(x) e^{-\alpha x} \leq e^{(1-\alpha)x},$$

而右端在 $\mathbb{R}_+$ 上可积。控制收敛定理给出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{(1-\alpha)x} dx = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

综上,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha) = \begin{cases} +\infty, & \alpha \leq 1, \\ \frac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

8.2 在函数项级数中的应用

前面的结果尤其适合证明函数项级数中“求和”与“积分”的交换。

定理 8.4. 设 $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ 是一列取值于 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 的 $\mathcal{A}$ -可测函数。

(a) 若每个 $\varphi_n \geq 0$, 则

$$\int_X \left(\sum_{n \geq 1} \varphi_n \right) d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_X \varphi_n d\mu.$$

(b) 若

$$\sum_{n \geq 1} \int_X |\varphi_n| d\mu < +\infty,$$

则每个 φ_n 、函数 $\sum_{n \geq 1} |\varphi_n|$, 以及在 μ -几乎处处定义的函数 $\sum_{n \geq 1} \varphi_n$ 都是 μ -可积的, 而且

$$\int_X \left(\sum_{n \geq 1} \varphi_n \right) d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_X \varphi_n d\mu.$$

证明. (a) 对递增的非负函数列

$$f_n := \sum_{k=1}^n \varphi_k$$

应用 Beppo Levi 定理, 再用有限和的线性性:

$$\int_X \left(\sum_{n \geq 1} \varphi_n \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \sum_{k=1}^n \varphi_k d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_X \varphi_k d\mu.$$

(b) 令

$$g := \sum_{n \geq 1} |\varphi_n|.$$

由 (a) 与假设,

$$\int_X g d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_X |\varphi_n| d\mu < +\infty,$$

所以 $g < +\infty$ μ -几乎处处。因而级数 $\sum_n \varphi_n(x)$ 在实数域或复数域中几乎处处绝对收敛; 在其余零测集上把和函数定义为零。

部分和 f_n 几乎处处收敛到 $\sum_{k \geq 1} \varphi_k$, 并且 $|f_n| \leq g$ 。控制收敛定理给出和函数的可积性以及积分与求和的交换。 $\square$

应用 8.4.

(a) **Borel–Cantelli 引理.** 设 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ 。若

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty,$$

则

$$\mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = 0.$$

这里

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k = \{x \in X : x \text{ 属于无穷多个 } A_n\}.$$

事实上，定理 8.4 给出

$$\int_X \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{A_n} d\mu = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) < +\infty.$$

因此 $\sum_n \mathbf{1}_{A_n}$ 在几乎处处取有限值，等价地， $\mathbf{1}_{A_n}(x)$ 在几乎每个 x 处最终恒为零。这正说明只有一个零测集中的点会属于无穷多个 A_n 。

(b) **积分关于测度的连续性。** 若 $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ ，则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \leq \delta \implies \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

也就是说，只要可测集的测度充分小，可积函数在这个集合上的积分就任意小。

反证。若结论不成立，则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ ，使

$$\mu(A_n) \leq 2^{-n}, \quad \int_{A_n} |f| d\mu > \varepsilon_0.$$

由 Borel–Cantelli 引理， $\mathbf{1}_{A_n}|f| \rightarrow 0$ μ -几乎处处。又

$$0 \leq \mathbf{1}_{A_n}|f| \leq |f| \in L^1(\mu),$$

故控制收敛定理给出

$$\int_{A_n} |f| d\mu \longrightarrow 0,$$

矛盾。

8.3 依赖参数的积分

先回顾序列刻画。设 (E, d) 是度量空间， $h : E \rightarrow \mathbb{K}$ ， $u_\infty \in E$ 。

(a) $\lim_{u \rightarrow u_\infty} h(u) = \ell$ ，当且仅当对每个满足 $u_n \rightarrow u_\infty$ 、 $u_n \neq u_\infty$ 的序列，都有 $h(u_n) \rightarrow \ell$ 。

(b) h 在 u_∞ 连续，当且仅当对每个 $u_n \rightarrow u_\infty$ ，都有 $h(u_n) \rightarrow h(u_\infty)$ 。

以下给定映射 $f : E \times X \rightarrow \mathbb{K}$ 。

定理 8.5 (积分号下的连续性)。 设 $u_\infty \in E$ ，并假设：

(i) 对每个 $u \in E$ ，函数

$$x \longmapsto f(u, x)$$

从 $(X, \mathcal{A})$ 到 $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ 可测；

(ii) 对 $\mu(dx)$ -几乎每个 x ，函数

$$u \longmapsto f(u, x)$$

在 u_∞ 连续；

(iii) 存在 $g \in L^1_{\mathbb{R}^+}(\mu)$ ，使对每个 $u \in E$ ，

$$|f(u, x)| \leq g(x) \quad \mu(dx)\text{-a.e.}$$

则函数

$$F(u) := \int_X f(u, x) \mu(dx)$$

在每个 $u \in E$ 都有定义，并且在 u_∞ 连续。

注。

- 条件 (iii) 通常称为控制条件。
- 条件 (ii) 更精确但更冗长的写法是：存在 $N \in \mathcal{A}$ ，使 $\mu(N) = 0$ ，并且对每个 $x \notin N$ ， $u \mapsto f(u, x)$ 在 u_∞ 连续。
- 可以把 (ii) 中的“连续”替换为“当 $u \rightarrow u_\infty$ 时存在有限极限 $\ell(x)$ ”。此时 ℓ 可积，而且

$$\lim_{u \rightarrow u_\infty} F(u) = \int_X \ell(x) \mu(dx).$$

证明。 使用连续性的序列刻画。任取 $u_n \rightarrow u_\infty$ ，令

$$f_n := f(u_n, \cdot), \quad f_\infty := f(u_\infty, \cdot).$$

条件 (ii)、(iii) 允许直接使用控制收敛定理，得到

$$F(u_n) = \int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f_\infty d\mu = F(u_\infty).$$

所以 F 在 u_∞ 连续。 □

应用 8.5.

- (a) **以上限为变量的积分。** 本项中 λ 表示 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度。设 $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda)$ ， $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 。定义

$$F(u) := \int_a^u f(x) \lambda(dx) := \begin{cases} \int_{(a,u]} f d\lambda, & u \geq a, \\ -\int_{[u,a)} f d\lambda, & u \leq a. \end{cases}$$

则 F 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续。

这个定义下的积分满足 Chasles 关系。特别地，

$$\int_a^u f d\lambda = \int_{-\infty}^u f d\lambda - \int_{-\infty}^a f d\lambda,$$

所以只需讨论 $a = -\infty$ 的情形，即

$$F(u) = \int_{(-\infty, u]} f(x) \lambda(dx).$$

令

$$\Phi(u, x) := \mathbf{1}_{(-\infty, u]}(x) f(x) = \mathbf{1}_{[x, +\infty)}(u) f(x).$$

可测性与控制关系 $|\Phi(u, x)| \leq |f(x)|$ 都显然成立。固定 $u_\infty \in \mathbb{R}$ 后， $u \mapsto \Phi(u, x)$ 在 u_∞ 不连续的 x 至多只有 u_∞ ；而 $\lambda(\{u_\infty\}) = 0$ 。定理 8.5 遂给出 F 的连续性。

推广。 上面的证明只用到了 Lebesgue 测度不赋予单点正质量。若 μ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的弥散测度，即

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu(\{x\}) = 0,$$

则对每个 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ，函数

$$u \mapsto \int_{(-\infty, u]} f(x) \mu(dx)$$

在 $\mathbb{R}$ 上连续。初等 Riemann 积分中的“积分号下连续性”定理并不直接包含这种变上限积分的连续性。

练习。 利用应用 8.4 的积分关于测度的连续性，证明

$$u \mapsto \int_a^u f(x) \lambda(dx)$$

其实在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。

(b) **Fourier 变换。** 若 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ ，定义

$$\widehat{f}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x) \lambda(dx), \quad u \in \mathbb{R}.$$

则 $\widehat{f}$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且连续，称为 f 的 Fourier 变换；第 15 章将深入研究这一变换。连续性由定理 8.5 立即得到，因为对每个 x ， $u \mapsto e^{iux}$ 连续且模长恒为一。

事实上， $\widehat{f}$ 一致连续。对所有 $u, v, x \in \mathbb{R}$ ，中值不等式给出

$$|e^{iux} - e^{ivx}| \leq |u - v| |x|,$$

从而

$$|e^{iux} - e^{ivx}| \leq \min(|u - v| |x|, 2).$$

因此

$$|\widehat{f}(u) - \widehat{f}(v)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{iux} - e^{ivx}| |f(x)| d\lambda(x) \leq \psi(u - v),$$

其中

$$\psi(w) := \int_{\mathbb{R}} \min(|w| |x|, 2) |f(x)| d\lambda(x).$$

定理 8.5 表明 ψ 连续，故 $\psi(w) \rightarrow \psi(0) = 0$ 当 $w \rightarrow 0$ 。这便证明了 $\widehat{f}$ 的一致连续性。^a 这里 Lebesgue 测度没有特殊作用，可以换成 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的任意正测度 μ ，同时令 $f \in L^1(\mu)$ 。

(c) **卷积。** 设 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ ， $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且有界。定义

$$(f * \varphi)(u) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(u - x) f(x) \lambda(dx), \quad u \in \mathbb{R}.$$

则 $f * \varphi$ 连续且有界。事实上，令

$$H(u, x) := \varphi(u - x) f(x).$$

对每个 $x \in \mathbb{R}$ ， $u \mapsto H(u, x)$ 连续，并且

$$|H(u, x)| \leq \|\varphi\|_{\infty} |f(x)|.$$

定理 8.5 给出连续性，同时

$$\|f * \varphi\|_{\infty} \leq \|\varphi\|_{\infty} \|f\|_1.$$

^b 第 14 章将把卷积推广到 φ 仅可积的情形。

(d) **由连续函数项级数定义的函数**。取 $X = \mathbb{N}$ 、 $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, m 为计数测度。如果 $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 E 上连续 (或都在 $u_0 \in E$ 连续), 并且

$$\sum_{n \geq 1} \sup_{u \in E} |f_n(u)| < +\infty,$$

即级数正规收敛, 则

$$u \mapsto \sum_{n \geq 1} f_n(u)$$

在 E 上连续 (或在 u_0 连续)。

^a**校订注**: 原书把控制函数写成 $\min(w|x|, 2)$, 并在上式中代入 $w = u - v$ 。当 $u - v < 0$ 时该表达式可为负, 不可能控制绝对值; 应写成 $\min(|w||x|, 2)$ 。

^b**校订注**: 原书此处写 “对每个 $x \in I$ ”, 但本项没有定义区间 I , 积分变量属于 $\mathbb{R}$; 已改为 $x \in \mathbb{R}$ 。

定理 8.6 (积分号下求导)。设 $I \subset \mathbb{R}$ 是非空开区间, $u_\infty \in I$, 并假设:

- (i) 对每个 $u \in I$, $f(u, \cdot) \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$;
- (ii) 对 $\mu(dx)$ -几乎每个 x , 偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)$$

存在;

- (iii) 存在 $g \in L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, 使对每个 $u \in I$,

$$|f(u, x) - f(u_\infty, x)| \leq g(x)|u - u_\infty| \quad \mu(dx)\text{-a.e.}$$

则

$$F(u) := \int_X f(u, x) \mu(dx)$$

在 I 上处处有定义, 并且在 u_∞ 可导, 且

$$F'(u_\infty) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) \mu(dx).$$

证明。任取 I 中序列 $(u_n)_{n \geq 0}$, 使 $u_n \rightarrow u_\infty$ 且 $u_n \neq u_\infty$ 。令

$$\varphi_n(x) := \frac{f(u_n, x) - f(u_\infty, x)}{u_n - u_\infty}.$$

由 (ii), $\varphi_n(x) \rightarrow \partial f / \partial u(u_\infty, x)$ 在几乎处处成立; 由 (iii), $|\varphi_n| \leq g$ 在几乎处处成立。控制收敛定理给出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(u_n) - F(u_\infty)}{u_n - u_\infty} = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) \mu(dx).$$

根据导数的序列刻画, 这正是所需结论。 □

注。

- 这个定理也可以直接看作定理 8.5 “有限极限” 版本的应用。

- 若把 (ii) 换成 “ $u \mapsto f(u, x)$ 在 u_∞ 几乎处处右可导”，则 F 在 u_∞ 右可导，而且

$$F'_d(u_\infty) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) \mu(dx).$$

左可导的情形相同。

- 同样可以证明复平面开集上的全纯版本，以及 $\mathbb{R}^d$ 中开集 Ω 上的可微版本。

推论 8.1 (开区间上的整体求导)。设 $I \subset \mathbb{R}$ 是非空开区间，并假设：

- (i) 对每个 $u \in I$, $f(u, \cdot) \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$;
- (ii) 对 $\mu(dx)$ -几乎每个 x , 函数 $u \mapsto f(u, x)$ 在整个 I 上可导;
- (iii) 存在 $g \in L^1_{\mathbb{R}^+}(\mu)$, 使对几乎每个 x , 对所有 $u \in I$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) \right| \leq g(x).$$

则

$$F(u) := \int_X f(u, x) \mu(dx)$$

在整个 I 上可导，并且

$$F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) \mu(dx).$$

证明。固定 $u_\infty \in I$ 。由 (ii)、(iii) 与中值定理，对每个 $u \in I$ ，在几乎处处有

$$|f(u, x) - f(u_\infty, x)| \leq \sup_{v \in (u, u_\infty)} \left| \frac{\partial f}{\partial u}(v, x) \right| |u - u_\infty| \leq g(x) |u - u_\infty|.$$

所以定理 8.6 的控制条件成立，而 (ii) 显然蕴含在 u_∞ 处的偏导存在。对每个 $u_\infty \in I$ 应用定理 8.6 即得结论。□

下面四个应用中，前三个可直接由推论 8.1 得到；第四个必须使用定理 8.6，尽管最后得到的也是整个参数区间上的求导公式。

应用 8.6。

- (a) **Fourier 变换**。若 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ ，并且函数 $x \mapsto xf(x)$ 也属于 $L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ ，则

$$\widehat{f}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x) \lambda(dx)$$

在 $\mathbb{R}$ 上连续可导，而且

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}'(u) = i \int_{\mathbb{R}} e^{iux} x f(x) \lambda(dx) = i \widehat{xf}(u).$$

第 15 章将深入研究这一泛函。

- (b) **卷积**。若 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ ，而 φ 在 $\mathbb{R}$ 上可导、有界，且 φ' 也有界，则

$$(f * \varphi)(u) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(u - x) f(x) \lambda(dx)$$

在 $\mathbb{R}$ 上可导，并且

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad (f * \varphi)'(u) = (f * \varphi')(u).$$

第 14 章将深入研究这一运算。

- (c) **由可导函数项级数定义的函数**。在 $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 上取计数测度 m ，并设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 是区间 I 上的一列可导函数。如果对每个 $u \in I$,

$$\sum_{n \geq 1} \left(|f_n(u)| + \sup_{v \in I} |f'_n(v)| \right) < +\infty,$$

则函数

$$u \mapsto \sum_{n \geq 1} f_n(u)$$

在 I 上可导，其导函数为

$$u \mapsto \sum_{n \geq 1} f'_n(u).$$

- (d) **一个原函数的计算**。设 μ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的正测度，它不在给定点 $t_0 \in \mathbb{R}$ 处取正质量，即 $\mu(\{t_0\}) = 0$ 。设 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ，并且 $x \mapsto xf(x)$ 也属于 $L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ 。记

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} (t-x)^+ f(x) \mu(dx), \quad u^+ := \max(u, 0) = \begin{cases} 0, & u \leq 0, \\ u, & u > 0. \end{cases}$$

则 F 在 $\mathbb{R}$ 上有定义，并且在 t_0 可导，且

$$F'(t_0) = \int_{(-\infty, t_0]} f(x) \mu(dx).$$

a

^a**校订注**：原书先写“函数 F 定义在 $\mathbb{R}_+$ 上”，但 t_0 被任意取为实数，紧接着的证明也明确证明 F 在整个 $\mathbb{R}$ 上有定义；故此处改为“定义在 $\mathbb{R}$ 上”。

应用 8.6(d) 的证明。对每个 $t \in \mathbb{R}$ ，有

$$|(t-x)^+ f(x)| \leq (|t| + |x|)|f(x)| \in L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu),$$

所以 F 在整个 $\mathbb{R}$ 上有定义。另一方面，对每个 $x \neq t_0$ ，从而对 $\mu(dx)$ -几乎每个 x ，函数 $t \mapsto (t-x)^+ f(x)$ 在 t_0 可导，其导数为

$$\begin{cases} f(x), & x < t_0, \\ 0, & x > t_0, \end{cases} \quad \text{即} \quad f(x) \mathbf{1}_{(-\infty, t_0)}(x).$$

此外，由 $u \mapsto u^+$ 的 1-Lipschitz 性，

$$\begin{aligned} |(t-x)^+ f(x) - (t_0-x)^+ f(x)| \\ = |(t-x)^+ - (t_0-x)^+| |f(x)| \leq |t-t_0| |f(x)|. \end{aligned}$$

这正是定理 8.6 的控制条件 (iii)。因此

$$F'(t_0) = \int_{(-\infty, t_0]} f(x) \mu(dx) = \int_{(-\infty, t_0]} f(x) \mu(dx),$$

最后一个等号来自 $\mu(\{t_0\}) = 0$ 。

特别地，若 μ 是弥散测度，即它不给 $\mathbb{R}$ 中任何单点赋予正质量，则

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} (t-x)^+ f(x) \mu(\mathrm{d}x)$$

是函数

$$t \mapsto \int_{(-\infty, t]} f(x) \mu(\mathrm{d}x)$$

的一个原函数。 □

应用 8.7。 设 $\varphi \in L^1_{\mathbb{R}}([0, 1], \lambda)$ ，研究函数

$$F(t) := \int_0^1 \sqrt{\varphi(x)^2 + t} \, \mathrm{d}x.$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上的存在性与连续性。 令

$$f(t, x) := \sqrt{\varphi(x)^2 + t}.$$

固定 $t \geq 0$ 后， $x \mapsto f(t, x)$ 是可测函数，因为它是可测函数 φ 与连续函数 $y \mapsto \sqrt{y^2 + t}$ 的复合。又有

$$\sqrt{\varphi(x)^2 + t} \leq |\varphi(x)| + \sqrt{t},$$

而 φ 按假设在 $[0, 1]$ 上可积，所以 F 在 $\mathbb{R}_+$ 上有定义。

对每个 $x \in [0, 1]$ ，函数 $t \mapsto f(t, x)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续；并且对每个 $a > 0$ ，

$$\forall t \in [0, a], \quad \sqrt{\varphi(x)^2 + t} \leq |\varphi(x)| + \sqrt{a} \in L^1([0, 1], \lambda).$$

由定理 8.5， F 在每个区间 $[0, a]$ 上连续，因而在整个 $\mathbb{R}_+$ 上连续。

在 $\mathbb{R}_+^*$ 上的可导性。 设 $t_0 > 0$ 。对每个 $x \in [0, 1]$ ，函数 $t \mapsto f(t, x)$ 在 t_0 可导；而且

$$|f(t, x) - f(t_0, x)| = \frac{|t - t_0|}{\sqrt{\varphi(x)^2 + t} + \sqrt{\varphi(x)^2 + t_0}} \leq \frac{1}{\sqrt{t_0}} |t - t_0|.$$

常数函数 $1/\sqrt{t_0}$ 在 $[0, 1]$ 上可积。因此由定理 8.6， F 在 t_0 可导，并且

$$F'(t_0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{\varphi(x)^2 + t_0}}.$$

在 0 处的可导性。 我们证明： F 在 0 处右可导，当且仅当

$$\frac{1}{\varphi} \in L^1([0, 1], \lambda).$$

先设 $1/\varphi \in L^1([0, 1], \lambda)$ 。则 $\varphi(x) \neq 0$ 对 λ -几乎每个 x 成立；在这样的点， $t \mapsto f(t, x)$ 在 0 处的右导数为 $1/(2|\varphi(x)|)$ 。此外，对几乎每个 x ，

$$|f(t, x) - f(0, x)| = \frac{t}{\sqrt{\varphi(x)^2 + t} + |\varphi(x)|} \leq \frac{t}{|\varphi(x)|} \mathbf{1}_{\{\varphi \neq 0\}}(x).$$

定理 8.6 的右导数版本于是给出

$$F'_+(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2|\varphi(x)|}.$$

反过来, 设 F 在 0 处右可导。对 $n \geq 1$, 定义非负函数

$$h_n(x) := \begin{cases} n(\sqrt{\varphi(x)^2 + 1/n} - |\varphi(x)|), & |\varphi(x)| < +\infty, \\ 0, & |\varphi(x)| = +\infty. \end{cases}$$

对每个 $x \in [0, 1]$, 有

$$h_n(x) \rightarrow \frac{1}{2|\varphi(x)|},$$

其中按通常约定, 当 $\varphi(x) = 0$ 时右端为 $+\infty$ 。由 Fatou 引理,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{2|\varphi(x)|} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 h_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(F(1/n) - F(0)) = F'_+(0) < +\infty. \end{aligned}$$

所以 $1/\varphi \in L^1([0, 1], \lambda)$ 。

也可以用另一种方法证明这一条件的必要性。上面 $t > 0$ 时的导数公式表明, F' 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上非负且递减, 故极限

$$\ell := \lim_{t \rightarrow 0+} F'(t) \in [0, +\infty]$$

存在。又因为 F 连续, 由导数延拓定理,

$$\ell = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F(t) - F(0)}{t}.$$

所以 F 在 0 处右可导, 当且仅当 $\ell < +\infty$ 。另一方面, 对递增函数列

$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)^2 + 1/n}}$$

应用 Beppo Levi 定理 (定理 7.1), 得到

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} F'(1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{\varphi(x)^2 + 1/n}} = \int_0^1 \frac{dx}{2|\varphi(x)|},$$

这再次给出所述条件。

8.4 带密度的测度：初步介绍

仍在测度空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 上工作。回顾：只要积分存在（特别是当 $f \in L_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ 时），就把

$$\int_A f d\mu$$

定义为 $\int_X \mathbf{1}_A f d\mu$ 。

命题 8.1。

(a) 设 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ 可测。对每个 $A \in \mathcal{A}$, 令

$$\nu(A) := \int_A f d\mu.$$

则 ν 是 $\mathcal{A}$ 上的测度, 记作 $\nu := f \cdot \mu$ (有时也记作 $f d\mu$), 并满足

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0, \quad (8.1)$$

这里采用约定 $0 \times (+\infty) = 0$ 。

(b) ν 是有限测度, 当且仅当 $f \in L^1_{\mathbb{R}^+}(\mu)$; 此时

$$\nu(X) = \int_X f d\mu.$$

(c) 设 $g: (X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 可测。则

$$g \in L^1(\nu) \iff gf \in L^1(\mu),$$

并且在这一情形下

$$\int_X g d\nu = \int_X gf d\mu.$$

如果 g 是非负可测函数, 则上式总成立, 允许两端同时为 $+\infty$ 。

证明。 (a) 显然 ν 把 $\mathcal{A}$ 映入 $\mathbb{R}_+$, 且

$$\nu(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = \int_X 0 d\mu = 0.$$

设 $(A_n)_{n \geq 1}$ 是 $\mathcal{A}$ 中两两不交的集合列, 则

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{n \geq 1} A_n} = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{A_n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{A_n},$$

从而

$$0 \leq f \mathbf{1}_{\bigcup_{n \geq 1} A_n} = \sum_{n \geq 1} f \mathbf{1}_{A_n}.$$

对级数应用 Beppo Levi 定理, 便得

$$\nu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \nu(A_n).$$

因此 ν 是测度。若 $\mu(A) = 0$, 则 $\mathbf{1}_A f = 0$ 在 μ -几乎处处成立, 所以

$$\nu(A) = \int_A f d\mu = 0.$$

(b) 由 $\nu(X) = \int_X f d\mu$ 立即得到。

(c) 当 $g = \mathbf{1}_A$ ($A \in \mathcal{A}$) 时, 积分恒等式就是 ν 的定义。由积分的线性性, 它先推广到非负简单函数; 再由 Beppo Levi 定理推广到一切非负可测函数。若 g 可取任意符号, 则分别对 g^+ 与 g^- 应用刚才的恒等式。注意

$$(gf)^+ = g^+ f, \quad (gf)^- = g^- f,$$

因为 $f \geq 0$ 。因此, g 关于 ν 可积, 当且仅当 gf 关于 μ 可积; 在积分有限时, 将正部与负部的两个等式逐项相减即得结论。□

定义 8.1。

(a) 若两个测度 μ 与 ν 满足 (8.1)，则称 ν 关于 μ **绝对连续**，记作

$$\nu \ll \mu.$$

(b) 若 $\nu = f \cdot \mu$ ，则视语境称 f 为 ν 关于 μ 的 **密度**，或称 ν 关于 μ 的 **Radon–Nikodym 导数**，常记作

$$\frac{d\nu}{d\mu}.$$

注。在对测度 μ, ν 加上若干条件后，命题 8.1 有一个证明难度高得多的逆命题，称为 **Radon–Nikodym 定理**。例如，当 μ 与 ν 都是有限测度时，该定理断言下列两点等价：

- (i) μ 与 ν 满足性质 (8.1)；
- (ii) 存在 $f \in L^1_{\mathbb{R}^+}(\mu)$ ，使 $\nu = f \cdot \mu$ 。

第 10 章将详细证明 Radon–Nikodym 定理，并把它推广到质量可以无穷但满足适当条件的测度。

例。

1. 设 $D \in \mathcal{A}$ 。测度 μ 在 D 上的限制

$$\mu_D(A) := \mu(A \cap D)$$

关于 μ 绝对连续，并且

$$\mu_D = \mathbf{1}_D \cdot \mu.$$

2. 第 12 章将证明重积分中的变量代换定理。该定理会用到测度

$$|J_\varphi| \cdot \lambda_d,$$

其中 J_φ 是变量代换 φ 的雅可比行列式， λ_d 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度。Radon–Nikodym 导数在概率论中有重要应用，特别是用于构造条件期望。

8.5 习题

本节中， $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 表示一个测度空间。

练习 8.0。 利用 Lebesgue 积分的各个收敛定理，重新完成练习 1.9、1.11、1.12、1.15、1.16 与 1.18。

练习 8.1。 设 $A \in \mathcal{A}$ 。对函数列 $(f_n)_{n \geq 0}$ 应用 Fatou 引理，其中

$$f_{2n} := \mathbf{1}_A, \quad f_{2n+1} := \mathbf{1}_{A^c}.$$

可以得到什么结论？

练习 8.2。 设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 是 $L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ 中一致收敛到 f 的函数列。

(a) 证明：若 $\mu(X) < +\infty$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

(b) 若 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ，并且极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

存在，(a) 的结论是否仍然成立？

练习 8.3 (Scheffé 定理)。 设 $(f_n)_{n \geq 0} \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ 在 μ -几乎处处收敛到 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ，并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

(a) 证明：如果每个 $n \geq 0$ 都有 $f_n \geq 0$ 在 μ -几乎处处成立，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

(b) (a) 中得到的收敛结论在一般情形下是否成立？

练习 8.4。 设 $(f_n)_{n \geq 0} \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ 在 μ -几乎处处收敛到 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ 。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu.$$

练习 8.5。

(a) 设 $(f_n)_{n \geq 0} \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ 。证明

$$\sum_{n \geq 0} \left(\int_X |f_n| \, d\mu \right) < +\infty \implies \int_X \left(\sum_{n \geq 0} f_n \right) \, d\mu = \sum_{n \geq 0} \int_X f_n \, d\mu.$$

(b) 在 $\mathbb{R}_+$ 上定义

$$f_n(x) := e^{-nx} - 2e^{-2nx} \quad (n \geq 0).$$

计算

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left(\sum_{n \geq 1} f_n(x) \right) \, dx \quad \text{与} \quad \sum_{n \geq 1} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f_n(x) \, dx \right),$$

并作出结论。

练习 8.6。

(a) 设 $(a_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}}$ 是一族实数。证明

$$\sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} |a_{p,q}| < +\infty \implies \sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} a_{p,q} = \sum_{q \geq 0} \sum_{p \geq 0} a_{p,q}.$$

(b) 令

$$a_{p,q} := \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}.$$

分别计算

$$\sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q \geq 0} a_{p,q} \right) \quad \text{与} \quad \sum_{q \geq 0} \left(\sum_{p \geq 0} a_{p,q} \right),$$

并作出结论。

练习 8.7。

(a) 证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

(b) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Borel 函数, 并且对每个 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $x \mapsto e^{ax} f(x)$ 都可积。证明: 对每个 $z \in \mathbb{C}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{zx} f(x) dx = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx.$$

练习 8.8。

(a) 证明控制收敛定理可以用于

$$\sum_{n \geq 0} (-x)^n$$

在测度空间 $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ 上的部分和。由此求出

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}.$$

(b) 设 $z \in \mathbb{C}$ 且 $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ 。证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x} dx = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

练习 8.9。 设 $f \in L^1_{\mathbb{R}}((0, 1))$ 非负且单调。计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx.$$

练习 8.10 (Euler–Mascheroni 常数)。 对 $n \in \mathbb{N}$ 、 $a \in \mathbb{R}_+$, 令

$$I_n(a) := \int_0^{+\infty} e^{-n \sin^2 x} e^{-ax} dx.$$

(a) 设 $a > 0$ 。严格说明理由并计算

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a).$$

(b) 证明

$$I_n(0) := \int_{-\pi}^{+\infty} e^{-n \sin^2 x} dx.$$

由此求出 $I_n(0)$ 的值。

练习 8.11 (Euler–Mascheroni 常数)。 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma,$$

其中按照通常约定

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

是 Euler–Mascheroni 常数。^a

^a**校订注：**原书把 $\lim_n (\ln n - \sum_{k=1}^n 1/k)$ 直接记为 Euler–Mascheroni 常数 γ 。按现代通行约定, $\gamma = \lim_n (\sum_{k=1}^n 1/k - \ln n) > 0$, 所以原书展示的三个相等量都应为 $-\gamma$ 。

练习 8.12。

(a) 设 $f \in L^1_{\mathbb{R}}([0, 1])$ 。计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) \, dx.$$

(b) 假设 f 在 1 处有极限 $\ell \in \mathbb{R}$ 。计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n x^n f(x) \, dx.$$

(c) 假设函数 $x \mapsto f(x)/(1-x)$ 属于 $L^1_{\mathbb{R}}([0, 1])$ 。计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n x^n f(x) \, dx.$$

练习 8.13。 设 $(b_n)_{n \geq 1}$ 是实数列, 并令

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx).$$

假设 f_n 在 $\lambda(dx)$ -几乎处处收敛到 $f \in L^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)| \, dx = 0.$$

(a) 证明: 对每个 $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx.$$

(b) 利用 Abel 变换证明: 对每个 $n \geq 1, x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \pi + 1.$$

(c) 由此证明级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}$$

收敛。

(d) 证明函数列

$$x \mapsto \sum_{k=2}^n \frac{\sin(kx)}{\ln k}$$

在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛。它是否在 $L^1([-\pi, \pi])$ 中收敛？

练习 8.14. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界的 T -周期 Borel 函数。

(a) 证明：对 $\mathbb{R}$ 中每个有界 Borel 集 A ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f(nx) \lambda(dx) = \frac{\lambda(A)}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

(b) 设 E 是所有满足 “ $(f(nx))_{n \geq 0}$ 收敛到某个实数 $g(x)$ ” 的 $x \in [0, T]$ 所成的集合。证明下式有意义，并证明

$$\int_E g(x) \lambda(dx) = \frac{\lambda(E)}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

(c) 当 $f = \cos$ 时，证明 $\lambda(E) = 0$ 。

练习 8.15. 在 $\mathbb{R}_+$ 上定义

$$f(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} e^{-tx} dx.$$

(a) 证明 f 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续，并在 $\mathbb{R}_+^*$ 上二次可导。

(b) 计算 f'' ，以及 f, f' 在 $+\infty$ 处的极限，并由此求出 f 的一个显式表达式。

练习 8.16. 在 $\mathbb{R}$ 上定义

$$f(t) := \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{t}{\sinh x}\right) dx.$$

(a) 证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，在 $\mathbb{R}^*$ 上可导，但在 0 处不可导。^a

(b) 给出 f' 的一个简单表达式，并由此求出 f 在 0 与 $+\infty$ 处的等价无穷小（或等价量）。

^a校订注：原书已把 f 定义在整个 $\mathbb{R}$ 上，却只要求证明它在 $\mathbb{R}_+$ 上连续；结合下一句“在 $\mathbb{R}^*$ 上可导”以及被积函数关于 t 为奇函数，此处显然应为“在 $\mathbb{R}$ 上连续”。

练习 8.17. 对 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ ，定义 Fourier 变换

$$\widehat{f}(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-itx} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

利用积分号下求导定理，在下列两种情形中计算 $\widehat{f}$ ：

$$(a) f(x) := e^{-x^2}; \quad (b) f(x) := \frac{1}{x^2 + 1}.$$

情形 (b) 分三步完成：

(i) 对 $n \geq 1$, 令

$$g_n(t) := \int_{-n}^n \frac{e^{-itx}}{x^2 + 1} dx.$$

证明 $(g'_n)_{n \geq 1}$ 在每个区间 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 上一致收敛。由此证明 $\hat{f}$ 在 $\mathbb{R}^*$ 上可导, 并且对每个 $t > 0$,

$$(\hat{f})'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-iu}{u^2 + t^2} e^{-iu} du.$$

(ii) 证明 $\hat{f}$ 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上二次可导, 并满足

$$(\hat{f})'' = \hat{f}.$$

(iii) 计算 $\hat{f}(0)$ 与 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{f}(t)$, 并由此证明

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(t) = \pi e^{-|t|}.$$

练习 8.18 (Γ 函数与 Stirling 公式)。 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上定义

$$\Gamma(t) := \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0.$$

(a) 证明 Γ 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上无穷次可导。

(b) 证明：对每个 $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

(c) 证明：对每个 $t > 0$,

$$\Gamma(t+1) = \sqrt{t} t^t e^{-t} \int_{-\sqrt{t}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y} dy.$$

(d) 证明：对每个 $y \geq 0$, 函数

$$t \mapsto t \ln \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t}$$

在 $\mathbb{R}_+^*$ 上递减；并且对 $y \in (-\sqrt{t}, 0)$,

$$t \ln \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t} \leq -\frac{y^2}{2}.$$

(e) 利用前面各问以及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi},$$

推出 Stirling 公式

$$\Gamma(t+1) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t} t^t e^{-t}.$$

a

^a**校订注：**原书把所引用的 Gaussian 积分写成 $\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}$, 少了负半轴；正确的是 $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}$, 而半轴积分等于 $\sqrt{\pi/2}$ 。这里的变量代换区间趋于整个 $\mathbb{R}$, 故采用全轴公式。

练习 8.19. 设 $\varphi \in L^1_{\mathbb{R}}([0, 1])$, 并在 $\mathbb{R}$ 上定义

$$f(t) := \int_0^1 |\varphi(x) - t| dx.$$

- (a) 证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续。
- (b) 设 $t \in \mathbb{R}$. 证明: 若 $\lambda(\{\varphi = t\}) = 0$, 则 f 在 t 处可导。
- (c) 反过来, 证明: 若 f 在 t 处可导, 则 $\lambda(\{\varphi = t\}) = 0$.

练习 8.20. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是有限测度空间. 称一族从 X 到 $\mathbb{K}$ 的可测函数 $(f_i)_{i \in I}$ **依概率等度可积**, 如果

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\sup_{i \in I} \int_{\{|f_i| \geq c\}} |f_i| d\mu \right) = 0.$$

- (a) 证明 $L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中的每个有限函数族都依概率等度可积。
- (b) 证明: $(f_i)_{i \in I}$ 依概率等度可积, 当且仅当

$$\begin{cases} \sup_{i \in I} \|f_i\|_1 < +\infty, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \delta \implies \forall i \in I, \int_A |f_i| d\mu < \varepsilon. \end{cases}$$

- (c) 若 $(f_i)_{i \in I}$ 与 $(g_i)_{i \in I}$ 都依概率等度可积, 证明 $(f_i + g_i)_{i \in I}$ 也依概率等度可积。
- (d) 设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 依概率等度可积, 并在 μ -几乎处处收敛到函数 f . 证明

$$f \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

练习 8.21 (Vitali 定理). 称 $L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中的函数族 $(f_i)_{i \in I}$ **等度可积**, 如果

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{A}, \mu(A_\varepsilon) < +\infty, \forall i \in I, \int_{A_\varepsilon^c} |f_i| d\mu < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \delta_\varepsilon \implies \forall i \in I, \int_A |f_i| d\mu < \varepsilon. \end{cases}$$

设 $(f_n)_{n \geq 1} \subset L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ 在 μ -几乎处处收敛到 $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$. 我们要证明 Vitali 定理:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0 \iff (f_n)_{n \geq 1} \text{ 等度可积}.$$

- (a) 证明 $L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中的每个有限函数族都等度可积。
- (b) 证明 Vitali 定理的 “ $\implies$ ” 方向。
- (c) 证明 Vitali 定理的 “ $\impliedby$ ” 方向。
- (d) 说明: 若删去 Vitali 定理中 “在 μ -几乎处处收敛” 的假设, 仅有等度可积条件并不足够。

练习 8.22. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是有限测度空间. 对从 X 到 $\mathbb{K}$ 的任意两个可测函数 f, g , 令

$$d(f, g) := \int_X (|f - g| \wedge 1) d\mu.$$

- (a) 在 “ μ -几乎处处相等” 这一等价关系下, 令 E 为从 X 到 $\mathbb{K}$ 的可测函数所成的等价类集合. 证明 d 在 E 上定义了一个距离。

- (b) 证明依测度收敛 (见练习 6.13) 等价于由距离 d 定义的收敛。
 (c) 下面分四步证明 (E, d) 完备。设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 是 E 中的 Cauchy 列。
 (i) 构造一个子列 $(f_{n_k})_{k \geq 1}$, 使

$$d(f_{n_{k+1}}, f_{n_k}) < k^{-2}, \quad k \geq 1.$$

(ii) 令

$$A_k := \{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq 1\}.$$

证明

$$\sum_{k \geq 1} \mathbf{1}_{A_k} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in L^1(X).$$

(iii) 证明

$$\mu\left(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k^c\right) = 0.$$

(iv) 由此证明

$$\sum_{k \geq 1} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| < +\infty \quad \mu\text{-a.e.},$$

并完成证明。

练习 8.23。 设 $(A_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{A}$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |\mathbf{1}_{A_n} - f| d\mu = 0.$$

(a) 证明: 对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\{|f| > 2\} \subset \{|\mathbf{1}_{A_n} - f| > 1\}.$$

(b) 证明

$$\int_X \mathbf{1}_{\{|f| > 2\}} d\mu \leq \int_X \mathbf{1}_{\{|\mathbf{1}_{A_n} - f| > 1\}} d\mu \leq \int_X |\mathbf{1}_{A_n} - f| d\mu.$$

由此推出 $|f| \leq 2$ 在 X 上 μ -几乎处处成立。

(c) 利用 (b) 证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |\mathbf{1}_{A_n} - f|^2 d\mu = 0.$$

(d) 推出 $f^2 = f$ 在 X 上 μ -几乎处处成立, 并证明 f 几乎处处等于某个集合 $A \in \mathcal{A}$ 的示性函数, 且 $\mu(A) < +\infty$ 。

(e) 证明: 若

$$\sum_{n \geq 0} \mu(A_n \triangle A) < +\infty,$$

则

$$\mathbf{1}_{A_n} \longrightarrow \mathbf{1}_A \quad \mu\text{-a.e.}$$

练习 8.24。 考虑练习 6.18 中的商度量空间 $(\mathcal{A}/\mathcal{R}, d)$ 。设 $(A_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$ 。

(a) 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\dot{A}_n, \dot{A}) = 0,$$

则存在子列 $(A_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$, 使

$$A \mathcal{R} \liminf_{n \rightarrow \infty} A_{\varphi(n)} \quad \text{且} \quad A \mathcal{R} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_{\varphi(n)}.$$

(b) 假设 $\mu(X) < +\infty$. 证明: 若

$$A \mathcal{R} \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \quad \text{且} \quad A \mathcal{R} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\dot{A}_n, \dot{A}) = 0.$$

练习 8.25. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是凸函数。

(a) 设 $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ 非负。证明

$$\int_{\mathbb{R}} (f'_+(x) - f'_-(x)) \varphi(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) + \varphi\left(x - \frac{1}{n}\right) - 2\varphi(x) \right) dx \right].$$

(b) 由此证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上 λ_1 -几乎处处可导。

练习 8.26. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 满足 $\mu(X) = 1$, 并设 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ 。

(a) 在 $\mathbb{R}$ 上定义

$$F(y) := \int_X |f(x) - y| \mu(dx).$$

证明 F 是 1-Lipschitz 函数和凸函数。

(b) 证明: 若 $y \in \mathbb{R}$ 且 $\mu(\{f = y\}) = 0$, 则 F 在 y 处可导, 并且

$$F'(y) = \mu(\{f \leq y\}) - \mu(\{f \geq y\}) = 2\mu(\{f \leq y\}) - 1.$$

(c) 若 f 的分布无原子, 即对每个 $y \in \mathbb{R}$ 都有 $\mu(\{f = y\}) = 0$, 证明 F 在闭集

$$\left\{ y \in \mathbb{R} : \mu(\{f \leq y\}) = \frac{1}{2} \right\}$$

上达到最小值。^a

^a校订注: 原书把条件 $\mu(\{f = y\}) = 0$ (对所有 y) 表述为“测度 μ 是弥散的”。但 μ 本身无原子并不保证随机变量 f 的各个水平集都是零测集; 这里真正需要的是像测度 $f_{\#}\mu$, 即 f 的分布无原子。

练习 8.27.

(a) 先说明被积函数可积, 再计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx^n)}{n x^{n+1/2}} dx.$$

(b) 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{1+nx^2} dx.$$

(c) 计算

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n} dx.$$

练习 8.28。 设 μ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的正测度, 并且

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p \mu(dx) < +\infty, \quad p \in [1, +\infty).$$

定义失真函数

$$D_n^{\mu,p}(x) := \int_{\mathbb{R}} \min_{1 \leq i \leq n} |x_i - u|^p \mu(du), \quad x \in \mathcal{S}^+ := \{y \in \mathbb{R}^n : y_1 < y_2 < \cdots < y_n\}.$$

(a) 证明 $D_n^{\mu,p}$ 在 $\mathcal{S}^+$ 上连续。(b) 假设 μ 是弥散测度, 即对每个 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $\mu(\{x\}) = 0$ 。证明 $D_n^{\mu,p}$ 在 $\mathcal{S}^+$ 的每一点连续可微, 并且对 $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\partial D_n^{\mu,p}}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = p \int_{\tilde{x}_{i-1/2}}^{\tilde{x}_{i+1/2}} \operatorname{sgn}(x_i - u) |x_i - u|^{p-1} \mu(du),$$

其中

$$\tilde{x}_{1/2} := -\infty, \quad \tilde{x}_{i-1/2} := \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \quad (2 \leq i \leq n), \quad \tilde{x}_{n+1/2} := +\infty.$$

练习 8.29。 设 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, 并在 $\mathbb{R}_+$ 上定义

$$f(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(x^2+z)t^2}}{x^2+z} dx.$$

(a) 证明 f 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续, 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上可导, 而且

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0.$$

(b) 证明

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+z} = \frac{\pi}{\sqrt{z}},$$

其中

$$\sqrt{z} := \sqrt{|z|} e^{i \arg(z)/2}, \quad \arg(z) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

是 z 的平方根主值。(c) 利用练习 1.15 求出 $t \in \mathbb{R}_+^*$ 时 $f'(t)$ 的值。

(d) 由此推出 Fresnel 积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \operatorname{Re}(z) \geq 0;$$

当 $\operatorname{Re}(z) = 0$ 时, 该积分为半收敛积分。

练习 8.30。

(a) 设 $(b_n)_{n \geq 1}$ 是递减到 0 的正实数列。证明级数

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

对每个 $x \in [0, \pi]$ 收敛, 并且对每个 $\delta \in (0, \pi]$, 在 $[\delta, \pi]$ 上一致收敛。

(b) 利用练习 8.13(b) 证明

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} \sin(nx)$$

在 $[0, \pi]$ 上一致收敛。

(c) 假设 $f \in L^1([0, \pi])$ 。利用 (a) 在 $[\delta, \pi]$ 上的收敛以及 (b) 在 $[0, \pi]$ 上的收敛, 证明对每个 $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx.$$

(d) 证明级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}$$

收敛。

(e) 由此证明函数

$$x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln n}$$

不属于 $L^1([0, \pi])$ 。

(f) 证明不存在 $f \in L^1([-\pi, \pi])$, 使得

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin(nx) dx.$$

练习 8.31。

(a) 设 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是递减到 0 的正实数列, 并且对每个 $n \geq 1$,

$$a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n \geq 0.$$

证明

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) < +\infty.$$

(b) 证明 Fejér 核 F_n 满足

$$F_n(x) := 1 + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos(kx) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2, \quad x \in (0, \pi].$$

由此证明: 在 $(0, \pi]$ 上定义

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^n k(a_{k-1} + a_{k+1} - 2a_k) F_k(x),$$

则 (f_n) 在 $L^1([0, \pi])$ 中收敛到某个非负函数 $f \in L^1([0, \pi])$ 。

(c) 回顾：对实值 2π -周期函数 $f \in L^1([-\pi, \pi])$ ，实 Fourier 系数定义为

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad (k \geq 1),$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt.$$

对 $n \geq 1$ ，计算 F_n 与 f_n 的 Fourier 系数，并证明

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n [a_k + (n-k)a_{n+1} - (n+1-k)a_n] \cos(kx), \quad x \in (0, \pi].$$

(d) 推出

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(kx) \quad \text{在 } [0, \pi] \text{ 上 } \lambda(dx)\text{-a.e.}$$

(e) 证明函数

$$x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{\ln n}$$

属于 $L^1([0, \pi])$ 。

注。 练习 8.30 与 8.31 给出了一个颇为意外的结论：

$$x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{\ln n} \in L^1([0, \pi]), \quad x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln n} \notin L^1([0, \pi]).$$

练习 8.32 (Pratt 引理)。 设 $(f_n)_{n \geq 0}$ 、 $(g_n)_{n \geq 0}$ 是测度空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 上的两列可测函数，满足

$$0 \leq f_n \leq g_n \quad \mu\text{-a.e.}, \quad f_n \rightarrow f, \quad g_n \rightarrow g \quad \mu\text{-a.e.}$$

(a) 证明 Pratt 引理：

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X g d\mu < +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

(b) 取 $X = \mathbb{R}$ ， μ 为 Lebesgue 测度，并令

$$f_n(x) := \frac{1}{(x+n)^2 + 1}, \quad g_n(x) := 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

研究这一情形，并说明可以得到什么结论。

练习 8.33。 设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ ，并满足

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) \lambda_d(dx) = 0.$$

(a) 对 $\mathbb{R}^d$ 中每个有界开集 Ω ，证明存在 $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ ，该函数列由同一个常数控制，并且

在 Ω 上 $\lambda_d(dx)$ -几乎处处收敛到

$$\frac{f}{|f|} \mathbf{1}_{\{f \neq 0\}}.$$

(b) 推出

$$f = 0 \quad \text{在 } \mathbb{R}^d \text{ 上 } \lambda_d(dx)\text{-a.e.}$$

练习 8.34 (微分系统流的渐近行为)。设 $a \in C^3(\mathbb{R}^2)$ 是 $\mathbb{Z}^2$ -周期函数, 即 $a(x_1, x_2)$ 分别关于 x_1, x_2 以 1 为周期; 并假设 a 在 $\mathbb{R}^2$ 上严格为正。设 $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 。对固定的 $x \in \mathbb{R}^2$, 考虑微分系统

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t, x) = a(X(t, x)) \xi, & t \geq 0, \\ X(0, x) = x. \end{cases}$$

向量值函数 X 称为该微分系统的流。^a

(a) 说明函数 $1/a$ 的 Fourier 级数展开

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{1}{a(x)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \alpha_n e^{2i\pi(x \cdot n)},$$

其中

$$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}^2} \in \ell^1(\mathbb{Z}^2), \quad x \cdot n := n_1 x_1 + n_2 x_2.$$

(b) 证明: 对每个 $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$,

$$X(t, x) = F_x^{-1}(t) \xi + x, \quad F_x(t) := \int_0^t \frac{ds}{a(s\xi + x)}.$$

(c) 证明

$$\begin{aligned} F_x(t) &= t \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^2 \\ \xi \cdot n = 0}} \alpha_n e^{2i\pi(x \cdot n)} \\ &\quad + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^2 \\ \xi \cdot n \neq 0}} \alpha_n e^{2i\pi(x \cdot n)} e^{i\pi t(\xi \cdot n)} \frac{\sin(\pi t(\xi \cdot n))}{\pi(\xi \cdot n)}. \end{aligned}$$

(d) 推出: 对每个 $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F_x(t)}{t} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^2 \\ \xi \cdot n = 0}} \alpha_n e^{2i\pi(x \cdot n)} > 0,$$

进而

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X(t, x)}{t} = \left(\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^2 \\ \xi \cdot n = 0}} \alpha_n e^{2i\pi(x \cdot n)} \right)^{-1} \xi.$$

(e) 假设 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中不可公度, 即 $\xi_1/\xi_2 \notin \mathbb{Q}$ 。证明: 对每个 $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X(t, x)}{t} = \underline{a} \xi, \quad \underline{a} := \left(\int_{[0,1]^2} \frac{dy}{a(y)} \right)^{-1};$$

也就是说, $\underline{a}$ 是 a 的调和平均。

^a**校订注：**原书只假设 $a \in C^1$ ，却在 (a) 中要求推出二维 Fourier 系数绝对可和。一般的二维 C^1 周期函数并不保证 Fourier 系数属于 $\ell^1(\mathbb{Z}^2)$ 。为使 (a) 及后续逐项运算成立，这里把正则性加强为 C^3 ；此时分部积分给出足够的三阶衰减。

练习 8.35 (Basel 问题 5)。 对 $r \in [0, 1)$ ，在 $\mathbb{R}$ 上定义

$$f_r(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\sin^2(nx)}{n^2}.$$

(a) 证明：对每个 $t \in \mathbb{R}$ ，

$$f_r''(t) = \frac{d}{dt} \left[\arctan \left(\frac{r \sin(2t)}{1 - r \cos(2t)} \right) \right].$$

(b) 推出：对每个 $x \in \mathbb{R}$ ，

$$f_r(x) = \int_0^x \arctan \left(\frac{r \sin(2t)}{1 - r \cos(2t)} \right) dt.$$

(c) 证明：对每个 $x \in \mathbb{R}$ ，

$$f_1(x) := \lim_{r \rightarrow 1^-} f_r(x) = \int_0^x \arctan(\cot t) dt.$$

(d) 推出

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

练习 8.36 (Apéry 常数 $\zeta(3)$)。 ^a 对 $t \in \mathbb{R}$ 、 $n \in \mathbb{N}^*$ ，令

$$C_n(t) := \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2kt)}{k}.$$

(a) 利用经典的 $\sum \sin(kt)$ 求和公式证明：对每个 $\theta \in (0, \pi/2)$ ，

$$C_n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - C_n(\theta) = \int_{\theta}^{\pi/2-\theta} \frac{\cos((2n+1)t) - \cos t}{\sin t} dt.$$

(b) 证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \theta \left(C_n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - C_n(\theta) \right) d\theta = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^3}.$$

(c) 利用

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi}t, \quad t \in [0, \pi/2],$$

证明存在常数 $c > 0$ ，使对每个 $\delta \in (0, \pi/4]$ ，

$$\left| \int_0^{\delta} \theta \left(\int_{\theta}^{\pi/2-\theta} \frac{\cos((2n+1)t)}{\sin t} dt \right) d\theta \right| \leq c\delta^2 |\ln \delta|.$$

- (d) 结合 Riemann–Lebesgue 引理（见练习 1.2(a)）与 Lebesgue 控制收敛定理，证明对每个 $\delta \in (0, \pi/4]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{\delta}^{\pi/2} \theta \left(\int_{\theta}^{\pi/2-\theta} \frac{\cos((2n+1)t)}{\sin t} dt \right) d\theta \right| = 0.$$

- (e) 推出

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} = \int_0^{\pi/2} \theta \ln(\tan \theta) d\theta,$$

并因此得到 Apéry 常数

$$\zeta(3) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{8}{7} \int_0^{\pi/2} \theta \ln(\tan \theta) d\theta.$$

^b

^aR. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$* , *Astérisque*, 61 (1979), 11–13.

^b校订注：原书把奇数项之和 $\sum_{m \geq 0} (2m+1)^{-3}$ 直接记作 $\zeta(3)$ 。事实上该和等于 $(1-2^{-3})\zeta(3) = \frac{7}{8}\zeta(3)$ ；这里补上因子 $8/7$ 。

练习 8.37。使用右半平面上的主值对数

$$\log z := \ln |z| + i \arg(z), \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad \arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

重新完成练习 8.35 与 8.36。它满足

$$\log'(z) = \frac{1}{z}, \quad |z| \leq 1, \operatorname{Re}(z) > 0 \implies \log(1-z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n},$$

边界点按径向极限理解。

- (a) 在练习 8.35 中证明

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'_r(t) = -\arg(1 - re^{2it}).$$

- (b) 在练习 8.36 中证明

$$\forall t \in (0, \pi), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(t) = -\operatorname{Re}[\log(1 - e^{2it})].$$

^a

^a校订注：原书此题有三处相互关联的符号或陈述错误： $\log(1-z)$ 的幂级数漏写负号；(a) 的辐角公式也因此漏写负号；(b) 则把依赖 n 的有限和 $C_n(t)$ 直接等同于一个与 n 无关的函数，并同样漏写负号。这里统一改为标准对数公式及 $n \rightarrow \infty$ 的极限式。原书给出的辐角范围只覆盖右半平面，因此正文也明确补出这一对数分支的定义域。

练习 8.38 (Basel 问题 6)。^a

- (a) 证明

$$I := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 2 \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

(b) 在 $\mathbb{R}$ 上定义

$$f(t) := \int_0^1 \frac{\ln(1 - 2x \cos t + x^2)}{x} dx.$$

证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

(c) 证明：对每个 $t \in (0, \pi)$,

$$f'(t) = \pi - t.$$

(d) 由 (a)、(c) 推出：对每个 $t \in [0, \pi]$,

$$f(t) = 2I - \frac{\pi^2}{2} + \pi t - \frac{t^2}{2};$$

进而求出 I ，并证明

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

^aH. Haruki & S. Haruki, *Euler's integrals*, *American Mathematical Monthly*, 90(7) (1983), 464–466.

第九章 L^p 空间

本章研究由“给定次幂可积”的函数组成的向量空间。这些集合推广了 μ -可积函数空间 $L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ ，并具有许多类似的性质。

本章始终用 $\mathbb{K}$ 同时表示实数域或复数域，并用 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 表示任意测度空间。

9.1 $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 空间：定义与初步性质

定义 9.1. 对每个实数 $p > 0$ ，定义

$$L^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) \text{ 可测} : \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}.$$

在不会引起歧义时，简记为 $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 。

例。 若 m 是 $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 上的计数测度，即 $m(A) = \text{Card}(A)$ ，则

$$L^p_{\mathbb{K}}(m) = \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) := \left\{ (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \geq 0} |a_n|^p < +\infty \right\}.$$

命题 9.1. 对每个 $p > 0$ ， $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 都是 $\mathbb{K}$ -向量空间。

证明。 只需验证 $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 是所有从 X 到 $\mathbb{K}$ 的函数所成向量空间 $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ 的线性子空间。零函数显然属于 $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 。设 $\lambda \in \mathbb{K}$ ， $f, g \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 。则

$$\begin{aligned} |\lambda f + g|^p &\leq (|\lambda| |f| + |g|)^p \\ &\leq (2 \max(|\lambda| |f|, |g|))^p \\ &\leq 2^p |\lambda|^p |f|^p + 2^p |g|^p. \end{aligned}$$

因此

$$\int_X |\lambda f + g|^p d\mu \leq 2^p |\lambda|^p \int_X |f|^p d\mu + 2^p \int_X |g|^p d\mu < +\infty.$$

所以 $\lambda f + g \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 。 □

命题 9.2.

(a) 若 $\mu(X) < +\infty$ ，则

$$0 < p \leq q \implies L^q_{\mathbb{K}}(\mu) \subset L^p_{\mathbb{K}}(\mu).$$

(b) 若 m 是 $\mathbb{N}$ 上的计数测度，则

$$0 < p \leq q \implies \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \subset \ell^q_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}).$$

证明。 (a) 若 $0 < p \leq q$, 则

$$|f|^p \leq |f|^q \mathbf{1}_{\{|f| \geq 1\}} + \mathbf{1}_{\{|f| \leq 1\}}.$$

所以只要 $f \in L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$, 就有

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \int_X |f|^q d\mu + \mu(\{|f| \leq 1\}) < +\infty.$$

(b) 若 $0 < p \leq q$ 且

$$\sum_{n \geq 0} |a_n|^p < +\infty,$$

则 $a_n \rightarrow 0$. 因此从某一项 N 起有 $|a_n| \leq 1$, 从而

$$|a_n|^q \leq |a_n|^p, \quad n \geq N.$$

于是 $\sum_{n \geq 0} |a_n|^q < +\infty$. □

注。

- 命题 9.2(b) 立即推广到任意集合 Y 上的计数测度, 以及以 Y 为指标集的 p 次幂可和族:

$$\ell^p_{\mathbb{K}}(Y) := \left\{ (a_y)_{y \in Y} \in \mathbb{K}^Y : \sum_{y \in Y} |a_y|^p < +\infty \right\}.$$

- 在赋予 Lebesgue 测度 λ 的 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上,

$$\frac{\mathbf{1}_{(0,1]}}{\sqrt{\cdot}} \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda) \setminus L^2_{\mathbb{R}}(\lambda), \quad \frac{1}{\sqrt{(\cdot)^2 + 1}} \in L^2_{\mathbb{R}}(\lambda) \setminus L^1_{\mathbb{R}}(\lambda).$$

所以 $L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ 与 $L^2_{\mathbb{R}}(\lambda)$ 之间没有任何包含关系。

9.2 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式

对每个函数 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{K}$ 以及每个实数 $p > 0$, 定义

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq +\infty, \quad (+\infty)^{1/p} := +\infty.$$

称它为 f 的“ L^p 范数”。在许多情形下, 这一说法并不恰当; 当 $p \geq 1$ 时, 定理 9.2 将说明这一术语为何合理。

注。 $\|\cdot\|_p$ 具有如下单调性:

$$|f| \leq |g| \implies \|f\|_p \leq \|g\|_p.$$

定理 9.1 (Hölder 不等式)。 设 $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ 可测, $p, q > 1$, 并且

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(a) 若 f, g 为非负实值函数, 则

$$0 \leq \int_X fg \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \leq +\infty. \quad (9.1)$$

此外, 当 $\|f\|_p + \|g\|_q < +\infty$ 时, (9.1) 取等号, 当且仅当存在

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

使

$$\alpha f^p = \beta g^q \quad \mu\text{-a.e.}$$

(b) 若 $f \in L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 、 $g \in L_{\mathbb{K}}^q(\mu)$, 则

$$fg \in L_{\mathbb{K}}^1(\mu), \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (9.2)$$

此外, (9.2) 取等号, 当且仅当存在

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

使

$$\alpha |f|^p = \beta |g|^q \quad \mu\text{-a.e.}$$

证明。(a) 第一步：Young 不等式。 对 $\alpha \in (0, 1)$ 、 $x \in \mathbb{R}_+$, 令

$$\varphi_\alpha(x) := x^\alpha - \alpha x.$$

函数 φ_α 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上可导, 而且

$$\varphi'_\alpha(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1).$$

因此它在 $(0, 1)$ 上递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递减。于是对每个 $x \in \mathbb{R}_+$,

$$x^\alpha \leq \alpha x + 1 - \alpha,$$

等号当且仅当 $x = 1$ 。

当 $u \geq 0$ 、 $v > 0$ 时取 $x = u/v$, 得到

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1 - \alpha)v, \quad (9.3)$$

等号当且仅当 $u = v$ 。再直接考察 $v = 0$ 的情形可知, (9.3) 对一切 $u, v \in \mathbb{R}_+$ 都成立。这就是 Young 不等式。

(a) 第二步：Hölder 不等式。

- 若 $\|f\|_p = 0$ 或 $\|g\|_q = 0$, 则 $f = 0$ 或 $g = 0$ 在 μ -几乎处处成立, 因而 $fg = 0$ 几乎处处; 此时显然取等号。
- 若这两个量都非零, 但其中一个为 $+\infty$, 则不等式显然成立。
- 最后设 $\|f\|_p, \|g\|_q \in \mathbb{R}_+^*$ 。令

$$\alpha := \frac{1}{p}, \quad 1 - \alpha = \frac{1}{q}, \quad u := \frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p}, \quad v := \frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q}.$$

由 (9.3), 对每个 $x \in X$,

$$\frac{f(x)g(x)}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q},$$

并且恰在

$$\frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} = \frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q}$$

时取等号。对 μ 积分得到

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_X fg \, d\mu &\leq \|f\|_p \|g\|_q \left(\frac{1}{p} \int_X \frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} \mu(dx) + \frac{1}{q} \int_X \frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q} \mu(dx) \right) \\ &= \|f\|_p \|g\|_q < +\infty. \end{aligned}$$

这里括号中的量等于 $1/p + 1/q = 1$ 。

若 $0 \leq \varphi \leq \psi \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, 则

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_X \psi \, d\mu \iff \varphi = \psi \quad \mu\text{-a.e.}$$

因此, (9.1) 取等号, 当且仅当以下两种情形之一成立:

- $f = 0$ 或 $g = 0$ 在 μ -几乎处处成立;
- 存在 $\alpha, \beta > 0$, 使

$$\alpha f^p = \beta g^q \quad \mu\text{-a.e.}$$

这正是定理中的刻画。

(b) 对 $|f|$ 与 $|g|$ 应用 (a) 即得。 □

定义 9.2. 若 $p, q > 1$ 且

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

则称 p, q 为一对**共轭指数**。

注。

- **直接推广。** 在定理 9.1(a) 中, 可以允许 f, g 取值于 $\overline{\mathbb{R}}_+$, 只须在乘积 $f(x)g(x)$ 中采用

$$0 \times (+\infty) = 0$$

这一约定。

- **再论等号情形。** 若 $\|f\|_p = +\infty$ 或 $\|g\|_q = +\infty$, 则 (9.1) 可能取等号, 但 f^p, g^q 并不成比例。例如在 $X = \mathbb{R}, p = q = 2, \mu = \lambda$ 时, 令

$$f(x) := x^{-3/4} \mathbf{1}_{[1, +\infty)}(x), \quad g(x) := x^{-1/4} \mathbf{1}_{[1, +\infty)}(x).$$

则

$$0 < \|f\|_2 < +\infty, \quad \|g\|_2 = +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) \lambda(dx) = +\infty.$$

所以 (9.1) 取等号, 而 f^2, g^2 显然不成比例。

推论 9.1.

(a) 若 $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 、 $g \in L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ ，则

$$\left| \int_X f \bar{g} d\mu \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(b) 当 $p = q = 2$ 时，得到 Cauchy–Schwarz 不等式：

$$\forall f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu), \quad f \bar{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu), \quad \left| \int_X f \bar{g} d\mu \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2. \quad (9.4)$$

等号成立，当且仅当 $f = 0$ 在 μ -几乎处处成立，或者存在 $c \in \mathbb{C}$ ，使

$$g = cf \quad \mu\text{-a.e.}$$

证明。(a) 由积分的三角不等式与 Hölder 不等式立即得到

$$\left| \int_X f \bar{g} d\mu \right| \leq \int_X |f g| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(b) 对 $f, \bar{g}$ 应用 (a)。下面结合两个不等式的等号情形。假设 f 并非在 μ -几乎处处为零。Hölder 不等式 (9.2) 的等号情形给出

$$|g|^2 = \rho^2 |f|^2 \quad \mu\text{-a.e.},$$

其中 $\rho = \sqrt{\alpha/\beta}$ ，因而

$$|g| = \rho |f| \quad \mu\text{-a.e.}$$

积分三角不等式的等号情形（见命题 7.4(b)）又给出

$$f \bar{g} = e^{i\theta} |f g| \quad \mu\text{-a.e.}$$

所以

$$f \bar{g} = \rho e^{i\theta} |f|^2 = \rho e^{i\theta} f \bar{f} \quad \mu\text{-a.e.}$$

在 $\{f \neq 0\}$ 上可得

$$g = cf, \quad c := \rho e^{-i\theta}.$$

而在 $\{f = 0\}$ 上， $|g| = \rho |f|$ 蕴含 $g = 0$ ，故同一等式仍成立。反过来，若 $g = cf$ ，则 (9.4) 显然取等号。□

注。 直接利用

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \int_X |\lambda f + g|^2 d\mu \geq 0$$

可以更快地证明推论 9.1(b)，包括其等号情形。实值情形的调整是直接的。

推论 9.2。 若 μ 是概率测度，即 $\mu(X) = 1$ ，则对每个可测函数 f ，映射

$$r \mapsto \|f\|_r$$

在 $[1, +\infty)$ 上递增。此外，若存在

$$1 \leq r < s < +\infty$$

使

$$\|f\|_r = \|f\|_s < +\infty,$$

则 $|f|$ 在 μ -几乎处处为常数。

证明。 设 $1 \leq r < s < +\infty$ 。对函数 $|f|^r$ 与 $\mathbf{1}_X$ 应用 Hölder 不等式，取共轭指数

$$p := \frac{s}{r}, \quad q := \frac{s}{s-r}.$$

于是

$$\begin{aligned} \|f\|_r^r &= \int_X |f|^r \mathbf{1}_X \, d\mu \\ &\leq \left(\int_X |f|^{r(s/r)} \, d\mu \right)^{r/s} \left(\int_X \mathbf{1}_X^{s/(s-r)} \, d\mu \right)^{(s-r)/s} \\ &= \|f\|_s^r \mu(X)^{(s-r)/s} = \|f\|_s^r. \end{aligned}$$

若 $\|f\|_r = \|f\|_s \in \mathbb{R}_+$ ，则 Hölder 不等式取等号；它的等号刻画立即说明 $|f|$ 在 μ -几乎处处与常函数 1 成比例。□

Hölder 不等式最重要的应用之一就是 Minkowski 不等式。

定理 9.2 (Minkowski 不等式)。

(a) 若 $p \in [1, +\infty)$ ，则

$$(L_{\mathbb{K}}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$$

是半赋范 $\mathbb{K}$ -向量空间。特别地，

$$\forall f, g \in L_{\mathbb{K}}^p(\mu), \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (9.5)$$

(b) **等号情形。**

- 若 $p > 1$ ，则 (9.5) 取等号，当且仅当 $f = 0$ 在 μ -几乎处处成立，或者存在 $\alpha \geq 0$ ，使

$$g = \alpha f \quad \mu\text{-a.e.}$$

- 若 $p = 1$ ，则 (9.5) 取等号，当且仅当

$$f\bar{g} \geq 0 \quad \mu\text{-a.e.}$$

证明。 (a) 唯一不平凡之处是三角不等式。设 $p \in [1, +\infty)$ 。逐点不等式

$$|f + g|^p \leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1} \quad (9.6)$$

中采用约定 $x^0 = 1$ ($x \geq 0$)。对 μ 积分，得到

$$\|f + g\|_p^p \leq \int_X |f| |f + g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g| |f + g|^{p-1} \, d\mu.$$

若 $p = 1$ ，这已经证明了 (9.5)。否则，对右端两项分别应用 Hölder 不等式，得到

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q}$$

$$+ \|g\|_p \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q},$$

其中 p, q 为共轭指数。特别地, $(p-1)q = p$, 所以

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p-1}.$$

因为 $f+g \in L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$, 有 $\|f+g\|_p < +\infty$. 当 $\|f+g\|_p > 0$ 时约去其 $p-1$ 次幂; 若该量为零, 不等式显然成立。

(b) **等号情形**。

先设 $p > 1$. 对 Hölder 不等式的等号情形应用两次, 可得

$$\beta|f+g|^p = \gamma|f|^p, \quad \delta|f+g|^p = \varepsilon|g|^p \quad \mu\text{-a.e.},$$

其中

$$(\beta, \gamma), (\delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

若 $f=0$ 或 $g=0$ 在 μ -几乎处处成立, 则显然取等号。

现在假设 f, g 都不在 μ -几乎处处为零。若 $f+g=0$ 在 μ -几乎处处成立, 则 $\|f\|_p, \|g\|_p > 0$, 不可能有 $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$. 因此 $f+g$ 并非几乎处处为零, 上式中的四个系数均严格为正。于是

$$|g|^p = \frac{\gamma\delta}{\beta\varepsilon}|f|^p \quad \mu\text{-a.e.},$$

即存在 $\alpha > 0$, 使

$$|g| = \alpha|f| \quad \mu\text{-a.e.}$$

上述两个比例式还说明, 在 $\{f+g=0\}$ 上,

$$f = g = 0 \quad \mu\text{-a.e.}$$

另一方面, 在 (9.6) 中也必须几乎处处取等号; 因此在 $\{f+g \neq 0\}$ 上,

$$|f+g| = |f| + |g| \quad \mu\text{-a.e.}$$

平方后得到

$$|f|^2 + |g|^2 + 2\operatorname{Re}(f\bar{g}) = |f|^2 + |g|^2 + 2|f||g| \quad \mu\text{-a.e.}$$

由于

$$|f||g| = |f\bar{g}|, \quad \operatorname{Re} z = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+,$$

必有

$$f\bar{g} = |f\bar{g}| \geq 0 \quad \text{在 } \{f+g \neq 0\} \text{ 上 } \mu\text{-a.e.}$$

从而

$$f|g|^2 = |f||g|g \quad \text{在 } \{f+g \neq 0\} \text{ 上 } \mu\text{-a.e.}$$

在该集合上 $f, g \neq 0$ 几乎处处, 故

$$g = \frac{|g|}{|f|}f = \alpha f \quad \text{在 } \{f+g \neq 0\} \text{ 上 } \mu\text{-a.e.}$$

在 $\{f+g=0\}$ 上已有 $f=g=0$, 所以同一等式在整个 X 上几乎处处成立。综上, $p > 1$ 时取等号, 当且仅当

$$f=0 \quad \text{或} \quad g=\alpha f \quad \mu\text{-a.e.} \quad (\text{某个 } \alpha \geq 0).$$

最后，若 $p = 1$ ，等号情形就是

$$|f + g| = |f| + |g| \quad \mu\text{-a.e.},$$

根据上面的计算，这等价于

$$f\bar{g} \geq 0 \quad \mu\text{-a.e.}$$

□

应用 9.1 (反向 Hölder 与反向 Minkowski 不等式)。 设 $p \in (0, 1)$ 。对任意严格正的可测函数

$$f, g : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}_+^*,$$

有反向 Hölder 不等式

$$\int_X fg \, d\mu \geq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

注意此时

$$q = \frac{p}{p-1} < 0.$$

同样，Minkowski 不等式反向为

$$\left(\int_X (f+g)^p \, d\mu \right)^{1/p} \geq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X g^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

证明。反向 Hölder 不等式。 令

$$q := \frac{p}{p-1} < 0, \quad p' := \frac{1}{p} \in (1, +\infty), \quad q' := -\frac{q}{p} = 1 - q \in (1, +\infty).$$

p', q' 是一对共轭指数。写成

$$f^p = g^{-p}(fg)^p,$$

再对 g^{-p} 与 $(fg)^p$ 使用指数 p', q' 的 Hölder 不等式，得到

$$\begin{aligned} \int_X f^p \, d\mu &= \int_X g^{-p}(fg)^p \, d\mu \\ &\leq \left(\int_X g^{-pq'} \, d\mu \right)^{1/q'} \left(\int_X (fg)^{pp'} \, d\mu \right)^{1/p'} \\ &= \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{-p/q} \left(\int_X fg \, d\mu \right)^p. \end{aligned}$$

取 p 次方根可得

$$\left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{-1/q} \int_X fg \, d\mu.$$

下面区分三个通常的情形：

- 若

$$\left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{-1/q} = 0,$$

则 $g = 0$ 在 μ -几乎处处成立，因为 $-1/q > 0$ ；在非零测度空间上，这与 $g > 0$ 的假设矛盾。

- 若该量为 $+\infty$ ，则 $\int_X g^q d\mu = +\infty$ ，从而原不等式右端含有的 $(\int_X g^q d\mu)^{1/q}$ 等于 0；结论是直接的。
- 若该量属于 $\mathbb{R}_+^*$ ，则把上式两端乘以

$$\left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}$$

便得到结论。

反向 Minkowski 不等式。 像证明通常的 Minkowski 不等式那样分解

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}.$$

对两项分别应用指数 p, q 的反向 Hölder 不等式，得到

$$\begin{aligned} \int_X (f+g)^p d\mu &\geq \left[\left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p} \right] \\ &\quad \times \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

除以右端最后一个因子即可得到反向 Minkowski 不等式；该因子非零，而当它为无穷时结论是直接的。 $\square$

9.3 Banach 空间 $L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$

9.3.1 半赋范空间预备知识

定义 9.3。 设 E 是 $\mathbb{K}$ -向量空间。若映射

$$N: E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

满足：

(i) $N(0_E) = 0$ ，其中 0_E 是 E 的零向量；

(ii) 对每个 $\lambda \in \mathbb{K}$ 、 $x \in E$ ，

$$N(\lambda x) = |\lambda|N(x);$$

(iii) 对每个 $x, y \in E$ ，

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y),$$

则称 N 是 E 上的**半范数**。

每个范数都是半范数。一个半范数成为范数，当且仅当它还满足

$$N(x) = 0 \implies x = 0_E.$$

此外，(iii) 蕴含完整的三角不等式

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y).$$

定义 9.4. 设 (E, N) 是半赋范 $\mathbb{K}$ -向量空间。集合

$$V := \{x \in E : N(x) = 0\}$$

是 E 的 $\mathbb{K}$ -线性子空间，称为半范数 N 的**核**，有时记作 $\ker N$ 。

事实上 $0_E \in V$ ，且若 $x, y \in V$ 、 $\lambda \in \mathbb{K}$ ，则

$$N(\lambda x + y) \leq |\lambda|N(x) + N(y) = 0.$$

现在希望从半赋范空间 (E, N) 规范地构造一个尽可能接近它的赋范 $\mathbb{K}$ -向量空间。为此，在 E 上定义二元关系

$$\forall x, y \in E, \quad x \sim y \iff x - y \in V.$$

容易验证， $\sim$ 是等价关系，并且与加法、数乘相容：若

$$x \sim x', \quad y \sim y',$$

则对每个 $\lambda \in \mathbb{K}$ ，

$$\lambda x + y \sim \lambda x' + y'.$$

因此，等价类集合

$$\overline{E} := \{\overline{x} : x \in E\},$$

可以自然地赋予商向量空间结构：

$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y}, \quad \lambda \cdot \overline{x} := \overline{\lambda x}.$$

这个集合通常记作 E/V ，称为 E 关于 V 的**商空间**。

在 E/V 上定义

$$\overline{N}(\overline{x}) := N(x).$$

该定义与代表元的选择无关：若 $x \sim y$ ，则 $x - y \in V$ ，因而

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) = 0.$$

于是 $(E/V, \overline{N})$ 是赋范 $\mathbb{K}$ -向量空间。这就是与半赋范空间 (E, N) 规范对应的赋范空间。实际书写时，通常仍用 N 表示商空间上的范数，而省去横线；这是一个明显但几乎不可避免的记号滥用。

9.3.2 构造与性质

当 $p \geq 1$ 时，对半赋范空间

$$(L_{\mathbb{K}}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$$

直接应用上述商空间构造，就得到赋范 L^p 空间。

定义 9.5. 令

$$\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu) := L_{\mathbb{K}}^p(\mu) / \{f : \|f\|_p = 0\}.$$

则

$$(\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$$

是赋范 $\mathbb{K}$ -向量空间；这里仍沿用 $\|\cdot\|_p$ 表示商空间范数。

解释与记号约定。 因为

$$\|f\|_p = 0 \iff |f|^p = 0 \text{ } \mu\text{-a.e.} \iff f = 0 \text{ } \mu\text{-a.e.},$$

所以 $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 的等价类为

$$\bar{f} = \{g \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu) : g = f \text{ } \mu\text{-a.e.}\}.$$

注意。 实际使用中, 符号 f 将既表示函数 $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, 也表示它的等价类 $\bar{f} \in \mathbf{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 。这同样是一种系统而难以避免的记号滥用。

定理 9.3 (Riesz–Fischer 定理)。

(a) 对每个 $p \in [1, +\infty)$, 赋范向量空间

$$(\mathbf{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_p)$$

是完备的; 也就是说, 每个关于 $\|\cdot\|_p$ 的 Cauchy 列都按此范数收敛。

(b) 设 $(f_n)_{n \geq 1} \subset L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, 并且

$$\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0.$$

则存在子列 $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ 和函数 $g \in L^p_{\mathbb{R}^+}(\mu)$, 使

$$|f_{\varphi(n)}| \leq g \quad \mu\text{-a.e.},$$

并且

$$f_{\varphi(n)} \longrightarrow f \quad \mu\text{-a.e.}$$

这个定理建立在下面两个引理上。

引理 9.1 (广义 Minkowski 不等式)。 设 $f_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ($n \geq 1$) 是一列非负可测函数。则对每个 $p \in [1, +\infty)$,

$$\left\| \sum_{n \geq 1} f_n \right\|_p \leq \sum_{n \geq 1} \|f_n\|_p \leq +\infty.$$

证明。 对任意两个非负可测函数 f, g , 都有

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \leq +\infty.$$

若右端有限, 这就是通常的 Minkowski 不等式; 若右端无穷, 则结论显然。归纳可得: 对每个 $N \geq 1$,

$$\left\| \sum_{k=1}^N f_k \right\|_p \leq \sum_{k=1}^N \|f_k\|_p \leq \sum_{k \geq 1} \|f_k\|_p.$$

注意当 $N \rightarrow +\infty$ 时,

$$\left(\sum_{k=1}^N f_k \right)^p \uparrow \left(\sum_{k \geq 1} f_k \right)^p.$$

对左端应用 Beppo Levi 定理便得结论。 □

引理 9.2。 设 $(E, \|\cdot\|)$ 是赋范 $\mathbb{K}$ -向量空间。则 E 是 Banach 空间，当且仅当其中每个绝对收敛级数都收敛。

证明。 $\Rightarrow$ 设 $(u_n)_{n \geq 0} \subset E$ ，并令

$$S_n := u_0 + \cdots + u_n.$$

有

$$\|S_{n+r} - S_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+r} \|u_k\|.$$

所以若数项级数 $\sum_n \|u_n\|$ 收敛，则 (S_n) 是 Cauchy 列；由 E 完备， (S_n) 收敛。

$\Leftarrow$ 设 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 Cauchy 列。只要构造出一个收敛子列，就能由 Cauchy 性推出原列收敛。逐步定义

$$\varphi(0) := 0,$$

以及对 $n \geq 1$,

$$\varphi(n) := \min \{k > \varphi(n-1) : \forall \ell \geq k, \|x_\ell - x_k\| < 2^{-n}\}.$$

由 Cauchy 性，这一定义良好，而且对每个 $n \geq 1$,

$$\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| < 2^{-n}.$$

令

$$u_0 := x_0, \quad u_n := x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n-1)} \quad (n \geq 1).$$

则

$$x_{\varphi(n)} = \sum_{k=0}^n u_k, \quad \|u_k\| < 2^{1-k} \quad (k \geq 2).$$

因此 $\sum_{n \geq 0} \|u_n\| < +\infty$ 。按假设，级数 $\sum_n u_n$ 在 E 中收敛，于是子列 $(x_{\varphi(n)})$ 收敛，原 Cauchy 列也随之收敛。 $\square$

Riesz–Fischer 定理的证明。

(a) 考虑 $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中绝对收敛的级数

$$\sum_{n \geq 0} u_n, \quad \sum_{n \geq 0} \|u_n\|_p < +\infty.$$

由引理 9.1,

$$\left\| \sum_{n \geq 0} |u_n| \right\|_p < +\infty.$$

所以对 μ -几乎每个 x ，数项级数

$$\sum_{n \geq 0} |u_n(x)|$$

收敛。由于 $\mathbb{K}$ 完备， $\sum_n u_n(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 中收敛。令

$$C := \left\{ x \in X : \sum_{n \geq 0} |u_n(x)| < +\infty \right\},$$

并定义

$$U(x) := \begin{cases} \sum_{n \geq 0} u_n(x), & x \in C, \\ 0, & x \in C^c. \end{cases}$$

对每个 $N \geq 0$, 在 μ -几乎处处有

$$\left| U - \sum_{k=0}^N u_k \right| \leq \sum_{k \geq N+1} |u_k|.$$

于是由引理 9.1,

$$\left\| U - \sum_{k=0}^N u_k \right\|_p \leq \left\| \sum_{k \geq N+1} |u_k| \right\|_p \leq \sum_{k \geq N+1} \|u_k\|_p \rightarrow 0.$$

^a 因此 $\sum_{k=0}^N u_k$ 在 μ -几乎处处以及 $\|\cdot\|_p$ 意义下都收敛到 U 。由引理 9.2, $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 完备。

(b) 复用引理 9.2 逆向证明中的子列构造可知: 若

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0,$$

则存在子列 $(f_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$, 使

$$\sum_{n \geq 0} \|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p < +\infty.$$

(a) 的证明于是说明 $f_{\varphi(n)}$ 在 μ -几乎处处和 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 中都收敛。由赋范空间中极限的唯一性, 其 $\mathbf{L}^p$ 极限只能是 f , 从而几乎处处极限也是 f 。最后,

$$|f_{\varphi(n)}| \leq g := |f_{\varphi(0)}| + \sum_{n \geq 0} |f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|,$$

而引理 9.1 表明 $g \in L_{\mathbb{R}^+}^p(\mu)$ 。 □

^a校订注: 原书在第一处把不等式写成了等式 $\left\| U - \sum_{k=0}^N u_k \right\|_p = \left\| \sum_{k \geq N+1} |u_k| \right\|_p$ 。一般只有逐点控制 $|U - \sum_{k=0}^N u_k| \leq \sum_{k \geq N+1} |u_k|$, 所以相应的范数关系也只能写成 “ $\leq$ ”。后续结论不受影响。

推论 9.3. 在 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ 上定义

$$(f, g)_2 := \int_X f \bar{g} d\mu.$$

则 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 Hilbert 空间; 当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时, $\bar{g}$ 表示 g 的复共轭。

证明. 当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时, $(\cdot, \cdot)_2$ 显然双线性、对称且正定; 当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时, 它半双线性、Hermite 对称且正定。并且

$$(f, f)_2 = \|f\|_2^2.$$

$\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ 的完备性由 Riesz-Fischer 定理得到。 □

第 9.6 节将进一步研究 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ 。

最后考察 L^p 收敛与 μ -几乎处处收敛之间的关系。

L^p 收敛但不几乎处处收敛的例子。取

$$X := [0, 1], \quad \mathcal{A} := \mathcal{B}([0, 1]), \quad \mu := \lambda.$$

对 $n \geq 0$ 和 $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, 令

$$f_{2^n+k} := \mathbf{1}_{[k/2^n, (k+1)/2^n]}.$$

这确实定义了一列 $(f_m)_{m \geq 1}$, 并且

$$\|f_{2^n+k}\|_p = 2^{-n/p} \rightarrow 0.$$

另一方面, 固定 $x \in [0, 1)$, 并取它的下方二进逼近:

$$\frac{k_n^x}{2^n} \leq x < \frac{k_n^x + 1}{2^n}, \quad k_n^x \in \{0, \dots, 2^n - 1\}.$$

则对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$f_{2^n+k_n^x}(x) = 1.$$

因此对每个 $p \in [1, +\infty)$,

$$\|f_m\|_p \rightarrow 0,$$

但该函数列并不在任何 $x \in [0, 1)$ 处收敛到 0。

命题 9.3 (L^p -控制收敛)。 设 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 在 μ -几乎处处收敛到函数 f 。

(a) 若

$$\sup_n \|f_n\|_p < +\infty,$$

则 $f \in L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 。

(b) 若存在 $g \in L_{\mathbb{R}_+}^p(\mu)$, 使对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n| \leq g \quad \mu\text{-a.e.},$$

则

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0.$$

证明。 (a) 对函数列 $(|f_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ 应用 Fatou 引理即得。

(b) 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$g_n := |f - f_n|.$$

按假设 $g_n \rightarrow 0$ 在 μ -几乎处处成立。在零测集

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{|f_n| > g\}$$

之外, 有 $|f| \leq g$ 。因此在 μ -几乎处处,

$$g_n^p = |f - f_n|^p \leq (2g)^p = 2^p g^p \in L^1(\mu).$$

Lebesgue 控制收敛定理于是给出

$$\int_X |f - f_n|^p d\mu \rightarrow 0,$$

也就是 $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ 。 □

应用 9.2 (复合映射 $f \mapsto g \circ f$ 的连续性)。 设 $r, s \in [1, +\infty)$, 并设 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续。若 g 满足

$$\exists c \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |g(y)| \leq c|y|^{r/s}, \quad (9.7)$$

则映射

$$\Phi: \begin{cases} \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^r(X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^s(X, \mathcal{A}, \mu), \\ f \longmapsto g \circ f \end{cases}$$

连续。

证明。 设 $f \in L_{\mathbb{R}}^r(X, \mathcal{A}, \mu)$ 。由于 g 连续、 f 可测, $g \circ f$ 可测。由 (9.7),

$$|\Phi(f)(x)|^s = |g(f(x))|^s \leq c^s |f(x)|^r \in L_{\mathbb{R}}^1(\mu).$$

所以 $\Phi(f) \in L_{\mathbb{R}}^s(\mu)$, 且

$$\forall f \in L_{\mathbb{R}}^r(\mu), \quad \|\Phi(f)\|_s \leq c \|f\|_r^{r/s}.$$

下面用连续性的序列刻画。设 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L_{\mathbb{R}}^r(\mu)$ 在 $\|\cdot\|_r$ 下收敛到 f 。由上式,

$$(\|\Phi(f_n) - \Phi(f)\|_s)_{n \in \mathbb{N}}$$

是 $\mathbb{R}_+$ 中的有界数列, 因而至少有一个聚点, 记为 ℓ 。取一个实现该聚点的子列后, 再由 Riesz–Fischer 定理 9.3(b) 抽取子列 $(f_{\varphi(n)})$, 使

$$f_{\varphi(n)} \rightarrow f \quad \mu\text{-a.e.}, \quad |f_{\varphi(n)}| \leq h \quad \mu\text{-a.e.}$$

其中 $h \in L_{\mathbb{R}}^r(\mu)$, 并且

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(f_{\varphi(n)}) - \Phi(f)\|_s.$$

由 g 连续,

$$\Phi(f_{\varphi(n)}) \rightarrow \Phi(f) \quad \mu\text{-a.e.}$$

而且 $|f| \leq h$ 在几乎处处成立, 并有

$$\begin{aligned} |\Phi(f_{\varphi(n)}) - \Phi(f)|^s &\leq c^s (|f_{\varphi(n)}|^{r/s} + |f|^{r/s})^s \\ &\leq c^s 2^s |h|^r \in L_{\mathbb{R}}^1(\mu). \end{aligned}$$

由控制收敛定理 8.3,

$$\|\Phi(f_{\varphi(n)}) - \Phi(f)\|_s \longrightarrow 0,$$

所以 $\ell = 0$ 。原有界数列的唯一聚点为 0, 故它收敛到 0。这就证明了 Φ 在 f 处连续。 □

事实上, 当

$$(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$$

时, 条件 (9.7) 也是必要的; 见练习 9.12。

9.4 $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中的稠密性定理, $1 \leq p < +\infty$ (一)

本节初步讨论稠密性定理。除若干初等结果外, 主要限于实直线上的 Lebesgue 测度。第 9.7 节将给出更完整的论述, 其中包括 Lusin 定理。

我们继续沿用把函数与它在商空间 $\mathbf{L}^p(\mu)$ 中的等价类混为一谈的记号约定。例如, 说某个函数集合 $E \subset L^p(\mu)$ 在 $(\mathbf{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ 中稠密, 实际是说: $\mathbf{L}^p(\mu)$ 中那些拥有 E 中代表元的等价类所成的子集是稠密的。

回顾。 第 7 章已经证明: 一个简单函数 φ (即可测且只取有限多个有限值的函数) 可积, 当且仅当

$$\mu(\{\varphi \neq 0\}) < +\infty.$$

该结论采用约定

$$0 \times \mu(A) = 0, \quad A \in \mathcal{A}.$$

此外, 此时对每个 $p \in [1, +\infty)$, 都有

$$\varphi \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu).$$

命题 9.4。 对每个 $p \in [1, +\infty)$, 可积简单函数的集合在 $\mathbf{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中稠密。

证明。 每个 $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 都可以写成至多四个 $L^p_{\mathbb{R}^+}(\mu)$ 中函数的线性组合, 所以只需考虑 $f \geq 0$ 。由基本逼近引理 5.1, 存在递增到 f 的非负简单函数列 $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ 。于是

$$\varphi_n \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu),$$

并且

$$|f - \varphi_n|^p \leq f^p \in L^1(\mu).$$

控制收敛定理给出

$$\|\varphi_n - f\|_p \rightarrow 0.$$

□

后面还要用到一个并不限于 L^p 空间的初等拓扑引理。

引理 9.3。 设

$$C \subset D \subset L^p_{\mathbb{K}}(\mu).$$

若 C 在 D 中关于 $\|\cdot\|_p$ 稠密, 而 D 在 $\mathbf{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中关于同一范数稠密, 则 C 在 $\mathbf{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中稠密。

证明。 设 $f \in \mathbf{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 、 $n \in \mathbb{N}^*$ 。由 D 的稠密性, 存在 $g_n \in D$, 使

$$\|f - g_n\|_p \leq \frac{1}{2n}.$$

由 C 在 D 中稠密, 存在 $h_n \in C$, 使

$$\|g_n - h_n\|_p \leq \frac{1}{2n}.$$

所以

$$\|f - h_n\|_p \leq \frac{1}{n},$$

结论成立。 □

定理 9.4. 在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 上, λ 为 Lebesgue 测度。

(a) 紧支撑阶梯函数的集合在所有 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\lambda)$ ($1 \leq p < +\infty$) 中稠密。

(b) 紧支撑连续函数空间

$$C_c(\mathbb{R}, \mathbb{K})$$

在所有 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\lambda)$ ($1 \leq p < +\infty$) 中稠密。

证明. (a) 由命题 9.4 与引理 9.3, 只须在半范数 $\|\cdot\|_p$ 下, 用紧支撑阶梯函数逼近一个非负简单函数。利用线性性, 进一步只须逼近

$$\mathbf{1}_A,$$

其中 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 且 $\lambda(A) < +\infty$ 。

Lebesgue 测度外正则 (见第 6.6 节定理 6.10), 所以

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(O) : A \subset O, O \subset \mathbb{R} \text{ 为开集}\}.$$

因此存在开集列 $(\Omega_n)_{n \geq 1}$, 使

$$A \subset \Omega_n, \quad \lambda(\Omega_n) \longrightarrow \lambda(A).$$

令

$$\tilde{\Omega}_n := \Omega_n \cap (-n, n).$$

则 $\mathbf{1}_{\tilde{\Omega}_n}$ 有紧支撑, 并且

$$\begin{aligned} \|\mathbf{1}_{\tilde{\Omega}_n} - \mathbf{1}_A\|_p &= \|\mathbf{1}_{(-n,n)}(\mathbf{1}_{\Omega_n} - \mathbf{1}_A) + \mathbf{1}_{A \cap (-n,n)} - \mathbf{1}_A\|_p \\ &\leq \|\mathbf{1}_{\Omega_n} - \mathbf{1}_A\|_p + \|\mathbf{1}_{A \setminus (-n,n)}\|_p \\ &\leq (\lambda(\Omega_n) - \lambda(A))^{1/p} + (\lambda(A \setminus (-n,n)))^{1/p} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

这里用了

$$A \setminus (-n, n) \downarrow \emptyset, \quad \lambda(A) < +\infty.$$

最后, $\mathbb{R}$ 中每个有界开集 Ω 都可以写成两两不交的有界开区间的可数并:

$$\Omega = \bigsqcup_{n \geq 1} I_n.$$

于是

$$\mathbf{1}_\Omega = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{I_n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{I_k}.$$

由于 Ω 有界, 右侧在 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\lambda)$ 中由控制收敛定理收敛。每个有限和都是紧支撑阶梯函数, 这便证明了 (a)。

(b) 由 (a), 只须在 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\lambda)$ 中, 用紧支撑连续函数逼近有界开区间 $I = (a, b)$ 的示性函数。对

$$n > \frac{2}{b-a},$$

定义 $\varphi_n \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: 它在

$$\left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right]$$

上等于 1, 在

$$\left[a, a + \frac{1}{n} \right] \quad \text{与} \quad \left[b - \frac{1}{n}, b \right]$$

上仿射, 并在 I 外等于 0。直接计算得到

$$\|\mathbf{1}_I - \varphi_n\|_p = \left(\frac{2}{n(p+1)} \right)^{1/p} \rightarrow 0.$$

□

注与补充。

- 定理 9.4 可以推广到 $\mathbb{R}^d$ 。称

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$$

为阶梯函数, 如果

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{1}_{P_k},$$

其中

$$P_k = \prod_{i=1}^d I_{k,i}$$

是长方体, $I_{k,i}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的区间。调整上面的证明可得: 若 μ 是 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上在紧集上有限的测度, 则定理 9.4(a) 仍成立; 特别地, 它适用于 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度 λ_d 。

当 $d \geq 2$ 时, 困难在于 $\mathbb{R}^d$ 中的开集通常不能写成两两不交开长方体的并; 换言之, 它的连通分支未必是开长方体。不过, 每个开集都能写成可数个开长方体的并:

$$\Omega = \bigcup_{n \geq 1} P_n.$$

而每个有限长方体并都能重新写成有限个两两不交长方体的并:

$$\forall n \geq 1, \quad \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^{p_n} P_k^{(n)}.$$

因此

$$\mathbf{1}_\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n P_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{p_n} \mathbf{1}_{P_k^{(n)}}.$$

后面的证明不变。

- 定理 9.4(b) 也能推广到 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上在紧集上有限的测度; 这是第 9.7 节定理 9.10 的一个特例。

- 更一般地可以证明（见练习 9.18）：若 X 是可分局部紧度量空间^a（由命题 3.5，这样的空间有可数开基），且 μ 是 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上在紧集上有限的测度，则函数集合

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{1}_{O_k} : \alpha_k \in \mathbb{K}, O_k \subset X \text{ 开}, \mu(O_k) < +\infty \right\}$$

在所有 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 中稠密。

证明的关键是先说明这样的测度外正则，再重复定理 9.4(a) 证明的开头部分。

^a若拓扑空间中每一点都有一个紧邻域，则称该空间局部紧。

注。 若 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 中唯一的零测集是 $\emptyset$ ，则唯一几乎处处为零的函数就是恒等于零的函数。因此， $\|\cdot\|_p$ 的核退化为 $\{0\}$ ，而函数空间 $L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 与其商空间 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 可以自然等同，因为 $\bar{f} = \{f\}$ 。这并非罕见情形：对任意集合取计数测度时都会出现。特别地，

$$\mathbf{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m) = \ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_{n \geq 0} : \sum_{n \geq 0} |a_n|^p < +\infty \right\}.$$

应用 9.3（周期函数的快速振荡极限）。 设

$$Y := [0, 1]^d, \quad d \geq 1.$$

对 $p \geq 1$ ，用 $L_{\#}^p(Y, \lambda_d)$ 表示所有满足下列条件的 Borel 函数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ ：

- $|f|^p$ 在 $\mathbb{R}^d$ 的每个紧集上 λ_d -可积；
- f 为 Y -周期函数，即对标准基的每个向量 e_i ($1 \leq i \leq d$)，

$$f(y + e_i) = f(y) \quad \lambda_d\text{-a.e.}$$

设 p, q 是两个有限的共轭指数。则对每个

$$f \in L_{\#}^p(Y, \lambda_d)$$

以及每个紧支撑函数 $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ ，都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(nx)g(x) dx = \left(\int_Y f(y) dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \right).$$

证明。第一步：伸缩公式。 设 $\alpha > 0$ 、 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ，并设 $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 在 αA 上非负或可积。则

$$\int_A h(\alpha x) dx = \alpha^{-d} \int_{\alpha A} h(y) dy, \quad \alpha A := \{\alpha x : x \in A\}.$$

这是第 12 章将证明的一般变量代换定理（命题 12.1）的一个特例。

第二步：紧长方体上的周期平均。 设

$$Q := \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$$

是紧长方体, $h \in L^1_{\#}(Y, \lambda_d)$ 。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q h(nx) \, dx = \lambda_d(Q) \int_Y h(y) \, dy.$$

当

$$n > \max_{1 \leq i \leq d} (b_i - a_i)^{-1}$$

时, 考虑 $\mathbb{R}^d$ 的不交网格剖分

$$Y_{\kappa}^{(n)} := \frac{\kappa}{n} + \left[0, \frac{1}{n}\right)^d, \quad \kappa \in \mathbb{Z}^d.$$

令

$$I_n := \{\kappa \in \mathbb{Z}^d : Y_{\kappa}^{(n)} \subset Q\}, \quad J_n := \{\kappa \in \mathbb{Z}^d : Y_{\kappa}^{(n)} \cap \partial Q \neq \emptyset\},$$

并定义

$$Q_n^- := \prod_{i=1}^d \left[a_i + \frac{1}{n}, b_i - \frac{1}{n}\right] \subset Q \subset Q_n^+ := \prod_{i=1}^d \left[a_i - \frac{1}{n}, b_i + \frac{1}{n}\right].$$

若 $\kappa \in J_n$, 则

$$Y_{\kappa}^{(n)} \subset Q_n^+ \setminus Q_n^-.$$

由于这些小长方体两两不交,

$$\lambda_d\left(\bigcup_{\kappa \in J_n} Y_{\kappa}^{(n)}\right) = \sum_{\kappa \in J_n} \lambda_d(Y_{\kappa}^{(n)}) = n^{-d} \text{Card}(J_n) \leq \lambda_d(Q_n^+ \setminus Q_n^-) = O(n^{-1}). \quad (9.8)$$

同理,

$$\begin{aligned} \lambda_d(Q) &= \lambda_d\left(\bigcup_{\kappa \in I_n} Y_{\kappa}^{(n)}\right) + \lambda_d\left(\bigcup_{\kappa \in J_n} (Y_{\kappa}^{(n)} \cap Q)\right) \\ &= n^{-d} \text{Card}(I_n) + O(n^{-1}), \end{aligned}$$

即

$$n^{-d} \text{Card}(I_n) = \lambda_d(Q) + O(n^{-1}). \quad (9.9)$$

另一方面,

$$\int_Q h(nx) \, dx = \sum_{\kappa \in I_n} \int_{Y_{\kappa}^{(n)}} h(nx) \, dx + \sum_{\kappa \in J_n} \int_{Y_{\kappa}^{(n)} \cap Q} h(nx) \, dx.$$

由第一步、 Y -周期性以及 Lebesgue 测度不给超平面赋予正质量,

$$\begin{aligned} \int_{Y_{\kappa}^{(n)}} h(nx) \, dx &= n^{-d} \int_{nY_{\kappa}^{(n)}} h(y) \, dy \\ &= n^{-d} \int_{[0,1)^d + \kappa} h(y) \, dy \\ &= n^{-d} \int_{[0,1)^d} h(y) \, dy = n^{-d} \int_Y h(y) \, dy. \end{aligned} \quad (9.10)$$

同样,

$$\left| \int_{Y_{\kappa}^{(n)} \cap Q} h(nx) \, dx \right| \leq n^{-d} \int_Y |h(y)| \, dy. \quad (9.11)$$

结合 (9.8)–(9.11), 得到

$$\begin{aligned}\int_Q h(nx) \, dx &= n^{-d} \text{Card}(I_n) \int_Y h(y) \, dy + O\left(n^{-d} \text{Card}(J_n)\right) \\ &= \lambda_d(Q) \int_Y h(y) \, dy + O(n^{-1}),\end{aligned}$$

第二步得证。

第三步：一般情形。 设 $g \in L^q_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^d)$ 在紧长方体 Q 外为零, 并设

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1.$$

由定理 9.4 在 $\mathbb{R}^d$ 中的推广, 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在函数 φ , 它是边平行于坐标轴的长方体示性函数的线性组合, 并满足

$$\|g - \varphi\|_q < \varepsilon.$$

把 φ 换成 $\mathbf{1}_Q \varphi$ 后, 可以假设它也在 Q 外为零, 因为

$$\|g - \mathbf{1}_Q \varphi\|_q \leq \|g - \varphi\|_q < \varepsilon.$$

由第一步, $x \mapsto f(nx)$ 仍属于 $L^p_{\#}(Y, \lambda_d)$, 其在 Q 上的限制属于 $L^p(Q)$ 。因为 $g \in L^q(Q)$, Hölder 不等式保证

$$x \mapsto f(nx)g(x)$$

在 Q 上可积。写成

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(nx)g(x) \, dx = \int_Q f(nx)\varphi(x) \, dx + \int_Q f(nx)(g(x) - \varphi(x)) \, dx.$$

令 $h := |f|^p$ 。因为 Y 上的 Lebesgue 测度有限,

$$h \in L^1_{\#}(Y, \lambda_d).$$

对 h 应用第二步可知,

$$\|f(n\cdot)\|_{L^p(Q)}^p = \int_Q |f(nx)|^p \, dx$$

收敛到有限实数, 因而该范数列有界。Hölder 不等式给出

$$\left| \int_Q f(nx)(g(x) - \varphi(x)) \, dx \right| \leq \|f(n\cdot)\|_{L^p(Q)} \|g - \varphi\|_{L^q(Q)} \leq c_1 \varepsilon,$$

以及

$$\left| \int_Q g(x) \, dx - \int_Q \varphi(x) \, dx \right| \leq \lambda_d(Q)^{1/p} \|g - \varphi\|_q \leq c_2 \varepsilon.$$

因此存在与 n, ε 无关的常数 c , 使

$$\begin{aligned}& \left| \int_Q f(nx)g(x) \, dx - \left(\int_Y f(y) \, dy \right) \left(\int_Q g(x) \, dx \right) \right| \\ & \leq \left| \int_Q f(nx)\varphi(x) \, dx - \left(\int_Y f(y) \, dy \right) \left(\int_Q \varphi(x) \, dx \right) \right| + c\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 φ 是有限个长方体示性函数的线性组合，第二步给出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q f(nx) \varphi(x) dx = \left(\int_Y f(y) dy \right) \left(\int_Q \varphi(x) dx \right).$$

所以对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_Q f(nx) g(x) dx - \left(\int_Y f(y) dy \right) \left(\int_Q g(x) dx \right) \right| \leq c\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$ 即得所求极限。 □

9.5 空间 $L^\infty_\mathbb{R}(\mu)$ ($\mu \neq 0$)

本节假设 $(X, \mathcal{A})$ 上的测度 μ 不是零测度。

定义 9.6。 设 $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ 可测。定义 f 的 **本质上确界** 为

$$\text{ess sup}(f) := \inf\{M > 0 : \mu(\{f > M\}) = 0\} \geq 0,$$

并采用通常约定 $\inf \emptyset = +\infty$ 。

命题 9.5。 若 $\text{ess sup}(f) < +\infty$, 则

$$\text{ess sup}(f) = \min\{M : \mu(\{f > M\}) = 0\}.$$

换言之：

- (a) 若 $M \geq \text{ess sup}(f)$, 则 $\mu(\{f > M\}) = 0$;
- (b) 若 $M < \text{ess sup}(f)$, 则 $\mu(\{f > M\}) > 0$ 。

证明。 映射

$$M \mapsto \{f > M\}$$

关于集合包含关系递减，所以

$$M \mapsto \mu(\{f > M\})$$

也是非负递减函数。唯一需要检查的是

$$M = \text{ess sup}(f)$$

时的取值。由测度的从下连续性，

$$\begin{aligned} \mu(\{f > \text{ess sup}(f)\}) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} \{f > \text{ess sup}(f) + 1/n\}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{f > \text{ess sup}(f) + 1/n\}) = 0. \end{aligned}$$

□

定义 9.7。

(a) 对可测函数 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{K}$, 令

$$\|f\|_{\infty} := \operatorname{ess\,sup}(|f|).$$

(b) 记

$$L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu) := \{f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{K} \text{ 可测} : \|f\|_{\infty} < +\infty\}.$$

其中的函数称为 μ -**本质有界函数**。

注。

- 若 $f = g$ 在 μ -几乎处处成立, 则

$$\operatorname{ess\,sup}(f) = \operatorname{ess\,sup}(g).$$

- 若 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ 可测且处处有界, 则

$$f \in L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu), \quad \|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\sup} := \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

因为

$$\mu(\{|f| > \|f\|_{\sup}\}) = \mu(\emptyset) = 0.$$

- 设 X 是拓扑空间, μ 是 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上给每个非空开集赋予正质量的测度。若 $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ 连续, 则

$$\|f\|_{\infty} = \|f\|_{\sup}.$$

事实上, 若 $\|f\|_{\infty} < \|f\|_{\sup}$, 则

$$\{|f| > \|f\|_{\infty}\}$$

是非空开集, 按假设必有正测度, 与本质上确界的定义矛盾。

本质有界函数可以用通常的有界函数刻画。

引理 9.4。 设 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{K}$ 可测。则 $f \in L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu)$, 当且仅当存在有界可测函数 $g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{K}$, 使

$$f = g \quad \mu\text{-a.e.},$$

并且

$$\|g\|_{\infty} = \|g\|_{\sup} = \|f\|_{\infty}.$$

证明。 $\Rightarrow$ 令

$$g := f \mathbf{1}_{\{|f| \leq \|f\|_{\infty}\}}.$$

则 $f = g$ 在 μ -几乎处处成立, 且

$$|g| \leq \|f\|_{\infty}.$$

因此

$$\|g\|_{\sup} \leq \|f\|_{\infty} = \|g\|_{\infty}.$$

另一方面, 由上面的注,

$$\|g\|_{\infty} \leq \|g\|_{\sup}.$$

$\Leftarrow$ 若 $f = g$ 在 μ -几乎处处成立，则 $|f| = |g|$ 几乎处处成立；结论显然。 $\square$

定理 9.5.

(a)

$$(L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu), \|\cdot\|_{\infty})$$

是半赋范 $\mathbb{K}$ -向量空间，而且

$$\{\|\cdot\|_{\infty} = 0\} = \{f : f = 0 \text{ } \mu\text{-a.e.}\}.$$

(b) 商空间

$$\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu) := L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu) / \{\|\cdot\|_{\infty} = 0\},$$

配备 $\|\cdot\|_{\infty}$ 后是完备赋范空间，即 Banach 空间。

证明。(a) 由引理 9.4 很容易验证 $L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu)$ 是 $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ 的线性子空间。再利用有界函数空间上的一致范数 $\|\cdot\|_{\sup}$ ，同样可以验证 $\|\cdot\|_{\infty}$ 是半范数。

具体地，设 $f_1, f_2 \in L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu)$ ，并为 $i = 1, 2$ 选择有界可测代表元 g_i ，使

$$f_i = g_i \quad \mu\text{-a.e.}, \quad \|f_i\|_{\infty} = \|g_i\|_{\sup}.$$

则 $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ 几乎处处，从而

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_{\infty} &= \|g_1 + g_2\|_{\infty} \\ &\leq \|g_1 + g_2\|_{\sup} \\ &\leq \|g_1\|_{\sup} + \|g_2\|_{\sup} \\ &= \|f_1\|_{\infty} + \|f_2\|_{\infty}. \end{aligned}$$

若 $f \in L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu)$ 、 $\lambda \in \mathbb{K}$ ，并取有界可测代表元 $g = f$ 几乎处处，且 $\|f\|_{\infty} = \|g\|_{\sup}$ ，则

$$\|\lambda f\|_{\infty} = \|\lambda g\|_{\sup} = |\lambda| \|g\|_{\sup} = |\lambda| \|f\|_{\infty}.$$

又 $\|0\|_{\infty} = 0$ ，故确为半范数。

下面确定其核。若 $\|f\|_{\infty} = 0$ ，并取引理 9.4 中对应的有界函数 g ，则

$$\|g\|_{\sup} = 0,$$

所以 $g \equiv 0$ ，进而 $f = 0$ 在 μ -几乎处处成立。

(b) 再次借助有界函数空间

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$$

及其一致范数；该空间是完备的。设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 是 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu)$ 中的 Cauchy 列，并选择可测代表元。令

$$A_{\infty} := \bigcup_{n \geq 1} \{|f_n| > \|f_n\|_{\infty}\} \cup \bigcup_{n, m \geq 1} \{|f_n - f_m| > \|f_n - f_m\|_{\infty}\}.$$

由命题 9.5， $\mu(A_{\infty}) = 0$ 。定义有界函数

$$g_n := f_n \mathbf{1}_{A_{\infty}^c}.$$

则

$$|g_n - g_m| = |f_n - f_m| \mathbf{1}_{A_\infty^c} \leq \|f_n - f_m\|_\infty,$$

从而

$$\|g_n - g_m\|_{\sup} \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

所以 (g_n) 在完备空间 $(\mathcal{B}(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\sup})$ 中是 Cauchy 列, 因而一致收敛到某个有界函数 g 。特别地, $g_n \rightarrow g$ 逐点成立, 所以 g 可测。

由于 $f_n = g_n$ 在几乎处处成立,

$$\|f_n - g\|_\infty = \|g_n - g\|_\infty \leq \|g_n - g\|_{\sup} \rightarrow 0.$$

^a 所以商空间完备。 □

^a校订注：原书最后的范数分解把 $(f_n - g_n)$ 乘在 A_∞^c 上, 并据此把该项写成 0, 却没有在等式中表示 A_∞ 上的差。最直接而严格的写法是利用 $f_n = g_n$ μ -几乎处处, 从而两者到 g 的本质确界范数相同。

下面给出两个经典性质。

命题 9.6。

(a) **Hölder 不等式。** 设 $p, q \in [1, +\infty]$ 且

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(约定 $1/\infty = 0$)。若

$$f \in L_{\mathbb{K}}^p(\mu), \quad g \in L_{\mathbb{K}}^q(\mu),$$

则

$$fg \in L_{\mathbb{K}}^1(\mu), \quad \int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q < +\infty.$$

(b) 对每个可测函数 $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{K}$,

$$\|f\|_\infty \leq \liminf_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p.$$

(c) 记号 $\|\cdot\|_\infty$ 还由下列性质得到说明:

$$\forall f \in \bigcup_{r>0} L_{\mathbb{K}}^r(\mu), \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

证明。 (a) 唯一尚未处理的是 $p = 1, q = +\infty$ 的情形。此时

$$|fg| \leq |f| \|g\|_\infty \quad \mu\text{-a.e.},$$

所以

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

(b) 若 $\|f\|_\infty = 0$, 则 $f = 0$ 几乎处处, 因而对每个 $p > 0$, $\|f\|_p = 0$ 。下面设 $\|f\|_\infty > 0$ 。对每个

$$A \in (0, \|f\|_\infty),$$

都有

$$|f|^p \geq A^p \mathbf{1}_{\{|f| \geq A\}}.$$

分两种情形：

- 若存在 $A_0 \in (0, \|f\|_\infty)$ ，使

$$\mu(\{|f| \geq A_0\}) = +\infty,$$

则对每个 $p > 0$ ， $\|f\|_p = +\infty$ ，所以结论显然。

- 若对每个 $A \in (0, \|f\|_\infty)$ ，都有

$$0 < \mu(\{|f| \geq A\}) < +\infty,$$

则

$$\|f\|_p \geq A \mu(\{|f| \geq A\})^{1/p}.$$

当 $p \rightarrow +\infty$ 时，右端趋于 A 。所以

$$\liminf_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \geq A$$

对每个 $A < \|f\|_\infty$ 成立，令 $A \uparrow \|f\|_\infty$ 即得结论。

(c) 设 $f \in L^r_\mathbb{K}(\mu)$ 。由 (b)，只须证明

$$\limsup_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

可以假设

$$0 < \|f\|_\infty < +\infty.$$

因为

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_\infty} \leq 1 \quad \mu\text{-a.e.},$$

所以对每个 $p \geq r$ ，

$$\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_\infty^p} \leq \frac{|f(x)|^r}{\|f\|_\infty^r} \quad \mu\text{-a.e.}$$

于是

$$\|f\|_p \leq \left(\frac{\|f\|_r}{\|f\|_\infty} \right)^{r/p} \|f\|_\infty.$$

令 $p \rightarrow +\infty$ 得到所需上界，再结合 (b) 即得结论。 $\square$

注。

- 在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 上，常函数 $f := 1$ 不属于任何 $L^p(\lambda)$ ($1 \leq p < +\infty$)，即

$$\|f\|_p = +\infty,$$

但 $\|f\|_\infty = 1$ 。所以

$$\liminf_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p > \|f\|_\infty.$$

同样现象出现在每个满足 $\mu(X) = +\infty$ 的测度空间中。

- 在 $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 上取计数测度，则

$$\forall p > 0, \quad \ell^p_\mathbb{K}(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty_\mathbb{K}(\mathbb{N}) := \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}.$$

由命题 9.6(b), 对每个 $x \in \bigcup_{r>0} \ell_{\mathbb{K}}^r(\mathbb{N})$,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n \geq 0} |x_n|^p \right)^{1/p} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

- 若 $\mu(X) < +\infty$, 则对每个 $p > 0$,

$$L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu) \subset L_{\mathbb{K}}^p(\mu).$$

- 第 9.4 节对 $1 \leq p < +\infty$ 所述的稠密性定理, 在 $p = +\infty$ 时不成立。例如在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ 上,

$$\overline{C_c(\mathbb{R}, \mathbb{K})}^{\|\cdot\|_{\infty}} = \left\{ f \in L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu) : \begin{array}{l} \exists g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{K}), f = g \text{ } \mu\text{-a.e.}, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |g(x)| = 0 \end{array} \right\}.$$

在 L^{∞} 中只有下面这个稠密性结论。

定理 9.6. 简单函数的集合在 $L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu)$ 中稠密。

证明. 这是第 5 章基本逼近引理 5.1 的直接推论。 $\square$

最后给出一个同样能清楚展示 $1 \leq p < +\infty$ 与 $p = +\infty$ 差异的结果。为简化表述, 只在 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ 上陈述。

命题 9.7. 赋范空间 $L_{\mathbb{R}}^p(\lambda_d)$ 在 $1 \leq p < +\infty$ 时可分, 而在 $p = +\infty$ 时不可分。

证明. $p < +\infty$ 的情形。考虑 $\mathbb{R}^d$ 上的阶梯函数子空间

$$D := \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{1}_{\prod_{i=1}^d (a_i, b_i)} : \alpha_k, a_i, b_i \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

D 显然是 $L_{\mathbb{R}}^p(\lambda_d)$ 的可数子集。由定理 9.4 在 $\mathbb{R}^d$ 上的推广, D 在 $L_{\mathbb{R}}^p(\lambda_d)$ 中稠密。

$p = +\infty$ 的情形。取 $\mathbb{R}^d$ 中有界、Lebesgue 测度非零的 Borel 集 A 。证明

$$\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{R}^d, \alpha \neq \alpha', \quad B(\mathbf{1}_{\alpha+A}, 1/4) \cap B(\mathbf{1}_{\alpha'+A}, 1/4) = \emptyset,$$

其中 $B(f, r)$ 表示 $L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\lambda_d)$ 中以 f 为中心、 r 为半径的开球。

若存在

$$\varphi \in B(\mathbf{1}_{\alpha+A}, 1/4) \cap B(\mathbf{1}_{\alpha'+A}, 1/4),$$

则由三角不等式,

$$\|\mathbf{1}_{\alpha+A} - \mathbf{1}_{\alpha'+A}\|_{\infty} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1.$$

该范数只能取 0 或 1, 所以必须为 0。又

$$\mathbf{1}_{\alpha+A}(x) = \mathbf{1}_A(x - \alpha).$$

由 L^{∞} 范数的平移不变性, 对每个 $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{1}_{n(\alpha'-\alpha)+A} - \mathbf{1}_{(n-1)(\alpha'-\alpha)+A}\|_{\infty} \\ &= \|\mathbf{1}_{\alpha'-\alpha+A} - \mathbf{1}_A\|_{\infty} = \|\mathbf{1}_{\alpha'+A} - \mathbf{1}_{\alpha+A}\|_{\infty} = 0. \end{aligned}$$

所以对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathbf{1}_{n(\alpha' - \alpha) + A} - \mathbf{1}_A\|_\infty \leq \sum_{k=1}^n \|\mathbf{1}_{k(\alpha' - \alpha) + A} - \mathbf{1}_{(k-1)(\alpha' - \alpha) + A}\|_\infty = 0.$$

由于 A 有界, 存在 n_0 , 使

$$A \cap (n_0(\alpha' - \alpha) + A) = \emptyset.$$

两个不交集的示性函数却在几乎处处相等, 只可能二者都几乎处处为零; 这与 $\lambda_d(A) \neq 0$ 矛盾。因此上述开球确实两两不交。

现在反设存在可数稠密集

$$D = \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{L}_\mathbb{R}^\infty(\lambda_d).$$

对每个 $\alpha \in \mathbb{R}^d$, 令 $n(\alpha)$ 是满足

$$f_{n(\alpha)} \in B(\mathbf{1}_{\alpha+A}, 1/4)$$

的最小自然数。由开球两两不交, 映射

$$\alpha \mapsto n(\alpha)$$

从 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{N}$ 是单射。这与 $\mathbb{R}^d$ 不可数矛盾。 □

注。 上面的证明实际上说明: 由平移示性函数族

$$\{\mathbf{1}_{\alpha+A} : \alpha \in \mathbb{R}^d\}$$

张成的 $\mathbf{L}_\mathbb{R}^\infty(\lambda_d)$ 的实线性子空间已经不可分; 而这个子空间显然远小于整个 $\mathbf{L}_\mathbb{R}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ 。

应用 9.4 ($L_\mathbb{R}^1(\mu)$ 上的局部连续线性算子)。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是有限测度空间, Φ 是

$$\mathbf{L}_\mathbb{R}^1(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}_\mathbb{R}^1(\mu)$$

的连续线性映射。再假设 Φ 是局部的: 对每个 $f \in L_\mathbb{R}^1(\mu)$ 、 $A \in \mathcal{A}$,

$$\mathbf{1}_A f = 0 \text{ } \mu\text{-a.e.} \implies \mathbf{1}_A \Phi(f) = 0 \text{ } \mu\text{-a.e.}$$

则存在 $\varphi \in \mathbf{L}_\mathbb{R}^\infty(\mu)$, 使对每个 $f \in L_\mathbb{R}^1(\mu)$,

$$\Phi(f) = \varphi f.$$

证明。第一步。 若 $A \in \mathcal{A}$ 、 $f \in L_\mathbb{R}^1(\mu)$, 则

$$\Phi(\mathbf{1}_A f) = \mathbf{1}_A \Phi(f).$$

事实上, 令

$$g := \Phi(\mathbf{1}_A f) - \mathbf{1}_A \Phi(f), \quad h := \Phi(\mathbf{1}_{A^c} f) - \mathbf{1}_{A^c} \Phi(f).$$

Φ 的局部性给出

$$\mathbf{1}_A h = \mathbf{1}_{A^c} g = 0 \quad \mu\text{-a.e.},$$

因而

$$gh = (\mathbf{1}_A g + \mathbf{1}_{A^c} g)h = 0 \quad \mu\text{-a.e.}$$

另一方面，由线性性，

$$g + h = \Phi(\mathbf{1}_A f + \mathbf{1}_{A^c} f) - (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{A^c})\Phi(f) = 0 \quad \mu\text{-a.e.}$$

所以

$$g^2 = -gh = 0 \quad \mu\text{-a.e.},$$

第一步得证。

第二步。 令

$$\varphi := \Phi(\mathbf{1}_X).$$

则

$$\varphi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mu), \quad \|\varphi\|_{\infty} \leq \|\Phi\|.$$

由第一步，对每个 $A \in \mathcal{A}$,

$$\Phi(\mathbf{1}_A) = \Phi(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_A \varphi.$$

所以

$$\int_A |\varphi| d\mu = \|\mathbf{1}_A \varphi\|_1 = \|\Phi(\mathbf{1}_A)\|_1 \leq \|\Phi\| \|\mathbf{1}_A\|_1 = \|\Phi\| \mu(A).$$

特别地，取

$$A := \{|\varphi| > \|\Phi\|\},$$

便有

$$\int_A (|\varphi| - \|\Phi\|) d\mu \leq 0.$$

被积函数在 A 上严格为正，故 $\mu(A) = 0$ 。这说明

$$|\varphi| \leq \|\Phi\| \quad \mu\text{-a.e.},$$

从而第二步成立。

第三步。 对每个 $f \in L_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ ，证明

$$\Phi(f) = \varphi f.$$

第一步已经给出

$$\Phi(\mathbf{1}_A) = \varphi \mathbf{1}_A, \quad A \in \mathcal{A}.$$

由线性性，该等式对每个可积简单函数成立。可积简单函数在 $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ 中稠密（命题 9.4），再结合 Φ 的连续性以及乘法映射

$$f \mapsto \varphi f$$

在 $\mathbf{L}^1$ 上的连续性，就得到所有 $f \in L_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ 的结论。 □

9.6 空间 $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\mu)$ 的 Hilbert 空间性质

本节的目的并不是发展完整的 Hilbert 空间理论，而主要是证明 $\mathbf{L}^2$ 上连续线性泛函的表示定理；下一节证明 Radon–Nikodym 定理时将会用到它。

9.6.1 Hilbert 空间 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$

在 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu) \times \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ 上定义

$$(f, g)_2 := \int_X f \bar{g} \, d\mu.$$

这是一个半双线性型，即满足：

(i) 对任意 $f_1, f_2, g \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ 与 $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda f_1 + f_2, g)_2 = \lambda(f_1, g)_2 + (f_2, g)_2;$$

(ii) 对任意 $f, g \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$,

$$(f, g)_2 = \overline{(g, f)_2};$$

(iii) 对任意 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$,

$$(f, f)_2 \geq 0, \quad (f, f)_2 = 0 \iff f = 0.$$

于是

$$\|f\|_2 := \sqrt{(f, f)_2}$$

定义了一个范数，称为 Hilbert 范数。由 Riesz–Fischer 定理， $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ 关于这个范数完备，因而它是一个 Hilbert 空间。

注。正如本章开头所说，我们不在一般框架下系统研究 Hilbert 空间，而只给出 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ 情形下的若干基本性质。不过，这个看似特殊的框架并不造成真正的限制：可以证明，每个 Hilbert 空间都等距同构于某个 $\ell_{\mathbb{K}}^2(I)$ ；若该 Hilbert 空间可分，则指标集 I 可取为可数集。

9.6.2 正交投影定理

定理 9.7 (正交投影)。设 F 是 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ 的闭线性子空间。则每个 $g \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ 都能唯一地分解为

$$g = f + h, \quad f \in F, \quad (\varphi, h)_2 = 0 \quad (\forall \varphi \in F). \quad (9.12)$$

换言之，

$$\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu) = F \oplus F^\perp, \quad F^\perp := \{u \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu) : (\varphi, u)_2 = 0, \forall \varphi \in F\}. \quad (9.13)$$

函数 f 称为 g 在 F 上的正交投影，它还由下式刻画：

$$\|g - f\|_2 = \min_{\varphi \in F} \|g - \varphi\|_2. \quad (9.14)$$

证明要用到下面的经典恒等式。

引理 9.5 (平行四边形恒等式)。对任意 $f, g \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$,

$$\|f + g\|_2^2 + \|f - g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2). \quad (9.15)$$

证明。只需注意

$$\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2 \operatorname{Re}(f, g)_2,$$

并对 $f - g$ 写出同样的展开式。 □

定理 9.7 的证明。 令

$$d := \inf_{\varphi \in F} \|g - \varphi\|_2 \in \mathbb{R}_+.$$

存在一个渐近极小列 $(\varphi_n)_{n \geq 0} \subset F$, 即

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g - \varphi_n\|_2.$$

证明它是 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ 中的 Cauchy 列。由式 (9.15),

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\varphi_m + \varphi_n}{2} - g \right\|_2^2 + \left\| \frac{\varphi_m - \varphi_n}{2} \right\|_2^2 \\ = \frac{1}{2} \|\varphi_m - g\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\varphi_n - g\|_2^2. \end{aligned}$$

由于 $(\varphi_m + \varphi_n)/2 \in F$, 故

$$\|\varphi_m - \varphi_n\|_2^2 \leq 2\|\varphi_m - g\|_2^2 + 2\|\varphi_n - g\|_2^2 - 4d^2.$$

结合渐近极小列的定义, 立刻得到 Cauchy 性质。

因为 F 闭, 而 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ 完备, 所以 (φ_n) 收敛到某个 $f \in F$ 。由构造立即有式 (9.14)。

下面证明正交性 (9.12)。令 $h := g - f$, 并取 $\varphi \in F$ 。对每个 $t > 0$, 有 $f + t\varphi \in F$, 于是

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 &= \|g - f\|_2^2 \leq \|g - (f + t\varphi)\|_2^2 \\ &= \|h - t\varphi\|_2^2 = \|h\|_2^2 + t^2 \|\varphi\|_2^2 - 2t \operatorname{Re}(h, \varphi)_2. \end{aligned}$$

所以

$$0 \leq t \|\varphi\|_2^2 - 2 \operatorname{Re}(h, \varphi)_2.$$

令 $t \downarrow 0$, 得 $\operatorname{Re}(h, \varphi)_2 \leq 0$ 。再以 $-\varphi$ 代替 φ , 得到 $\operatorname{Re}(h, \varphi)_2 = 0$ 。当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时, 这就是式 (9.12)。当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时, 取 $i\varphi$ 还得到

$$\operatorname{Im}(h, \varphi)_2 = \operatorname{Re}(-i(h, \varphi)_2) = \operatorname{Re}(h, i\varphi)_2 = 0,$$

故式 (9.12) 仍成立。

最后证明唯一性。若式 (9.12) 也对另一对 (f', h') 成立, 则 $f' - f = h - h'$ 。又因 $f', f \in F$,

$$(f' - f, f')_2 = (f' - f, f)_2 = 0,$$

从而

$$(f' - f, f' - f)_2 = 0.$$

故 $f' = f$, 进而 $h' = h$ 。 □

9.6.3 连续线性泛函的表示

定理 9.8 (Riesz–Fischer 引理)。 设

$$\Phi : \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu) \longrightarrow \mathbb{K}$$

是连续线性泛函。则存在唯一的 $g \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ ，使得

$$\Phi(f) = \int_X f \bar{g} d\mu \quad (\forall f \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)). \quad (9.16)$$

证明。 令 $F := \Phi^{-1}(\{0\})$ 。因为 Φ 连续，所以 F 是 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ 的闭线性子空间。若 $\Phi = 0$ ，取零函数即可。否则，由定理 9.7 的分解 (9.13)，存在 $h \in F^\perp \setminus \{0\}$ 。令

$$g := \frac{\overline{\Phi(h)}}{\|h\|_2^2} h \in F^\perp.$$

取 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ 。因为 $\Phi(g) \neq 0$ ，可以令

$$\lambda := \frac{\Phi(f)}{\Phi(g)} \in \mathbb{K}.$$

于是 $\Phi(f - \lambda g) = 0$ ，故 $f - \lambda g \in F$ 。由 $g \in F^\perp$ ，

$$(f - \lambda g, g)_2 = 0, \quad \lambda = \frac{(f, g)_2}{\|g\|_2^2}.$$

另一方面，由 g 的定义直接算得

$$\Phi(g) = \|g\|_2^2.$$

因此

$$\Phi(f) = \frac{\Phi(g)}{\|g\|_2^2} (f, g)_2 = (f, g)_2 = \int_X f \bar{g} d\mu.$$

若 g_1, g_2 都满足该表示式，则对所有 f 都有 $(f, g_1 - g_2)_2 = 0$ 。取 $f = g_1 - g_2$ ，即得 $g_1 = g_2$ 。
□

9.7 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 中的稠密性定理 (II), $p < +\infty$

在进入主题之前，先给出一个在度量空间中用 Lipschitz 函数逼近开集示性函数的方法。它依赖第一部分第 3.6 节介绍的“点到集合的距离”，是下面各个稠密性定理的基本工具。

引理 9.6。 设 $O \in \mathcal{O}(X) \setminus \{X\}$ 为开集。对每个 $k \in \mathbb{N}^*$ ，定义

$$\varphi_k(x) := \min(kd(x, O^c), 1), \quad x \in X.$$

则 φ_k 是 k -Lipschitz 函数，并且

$$0 \leq \varphi_k \leq \varphi_{k+1} \leq \mathbf{1}_O, \quad \varphi_k \uparrow \mathbf{1}_O.$$

证明。 函数 $u \mapsto \min(ku, 1)$ 从 $\mathbb{R}_+$ 到 $[0, 1]$ 是 k -Lipschitz 的，且只在 $u = 0$ 时取零；若 $u \neq 0$ ，则 $\min(ku, 1) \uparrow 1$ 。而 $x \mapsto d(x, O^c)$ 是 1-Lipschitz 的。因此 φ_k 是 k -Lipschitz 函数，并且

$$\varphi_k \uparrow \mathbf{1}_{\{x: d(x, O^c) > 0\}} = \mathbf{1}_O.$$

□

9.7.1 Lipschitz 函数在 $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中的稠密性

记

$$\text{Lip}_b(X, \mathbb{K}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ 是有界 Lipschitz 函数}\}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ 或 } \mathbb{C}.$$

定理 9.9. 设 (X, d) 是度量空间, μ 是 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上的测度, 并且 μ 外正则, 即

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : A \subset O, O \text{ 为开集}\}, \quad A \in \mathcal{B}(X).$$

则对每个 $p \in [1, +\infty)$,

$$\text{Lip}_b(X, \mathbb{K}) \cap L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$$

在 $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中关于 $\|\cdot\|_p$ 稠密。

证明. 先回忆

$$\mathbf{1}_A \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu) \iff \mu(A) < +\infty \iff \mathbf{1}_A \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu).$$

由命题 9.4, 对每个 $p \in [1, +\infty)$, 可积简单函数在 $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中稠密, 因此只需逼近这类函数。又由于每个可积简单函数都是至多四个非负可积简单函数的线性组合, 只需证明非负情形。

第一步：示性函数。 令 $f := \mathbf{1}_A \in L^p(\mu)$, 并取 $\varepsilon > 0$ 。因为 $\mu(A) < +\infty$, 由外正则性可取开集 $O_\varepsilon \supset A$, 使

$$\mu(O_\varepsilon \setminus A) \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

若 $O_\varepsilon = X$, 令 $\varphi_n \equiv 1$; 否则对 O_ε 使用引理 9.6 得到函数 φ_n 。它们满足^a

$$|\mathbf{1}_{O_\varepsilon} - \varphi_n|^p \leq \mathbf{1}_{O_\varepsilon} \in L^1(\mu), \quad |\mathbf{1}_{O_\varepsilon} - \varphi_n|^p \rightarrow 0.$$

由控制收敛定理, 存在 $n_\varepsilon \geq 1$, 使

$$\|\mathbf{1}_{O_\varepsilon} - \varphi_{n_\varepsilon}\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\|\varphi_{n_\varepsilon} - \mathbf{1}_A\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu(O_\varepsilon \setminus A)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

第二步：非负简单函数。 设

$$f = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{1}_{A_i} \in L^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$$

为非负简单函数。可以假定每个 $\lambda_i \neq 0$, 于是 $\mu(A_i) < +\infty$ 。由第一步, 可取

$$f_{i,\varepsilon} \in \text{Lip}_b(X, [0, 1]) \cap L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$$

使

$$\|\mathbf{1}_{A_i} - f_{i,\varepsilon}\|_p \leq \frac{\varepsilon}{N\lambda_i}.$$

从而

$$\left\| f - \sum_{i=1}^N \lambda_i f_{i,\varepsilon} \right\|_p \leq \varepsilon.$$

而 $\sum_i \lambda_i f_{i,\varepsilon}$ 是有界 Lipschitz 函数, 并属于 $L^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ 。□

^a**校订注：**引理 9.6 明确排除了开集等于整个 X 的情形, 但原书在定理 9.9、推论 9.5 与定理 9.10 的证明中三次直接调用该引理而没有处理相应开集等于 X 的可能性。此时以常函数 1 代替即可; 若 X 紧, 它仍具有紧支撑。

注。 当然也可把 $\text{Lip}_b(X, \mathbb{K})$ 换成

$$C_b(X, \mathbb{K}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ 连续且有界}\}.$$

a

校订注：原书此处定义 $C_b(X, \mathbb{K})$ 时误写成“有界 Lipschitz 函数”，与前面的 $\text{Lip}_b(X, \mathbb{K})$ 完全相同，也不符合“更进一步可替换为 C_b ”的论述；这里按标准记号改为“有界连续函数”。

结合上述结果与定理 6.9(b) 关于测度外正则性的结论，可以得到下面关于沿一系列递增开集 σ -有限的测度的结论。

推论 9.4。 设测度 μ 满足：存在一系列递增开集 $(E_n)_{n \geq 1}$ ，使

$$\mu(E_n) < +\infty \quad (\forall n \geq 1), \quad X = \bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} E_n. \quad (9.17)$$

则对每个 $p \in [1, +\infty)$,

$$\text{Lip}_b(X, \mathbb{K}) \cap L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$$

在 $L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 中关于 $\|\cdot\|_p$ 稠密。

应用 9.5。

- (a) 最重要的例子无疑是 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的 Lebesgue 测度 λ_d ；可取超立方体 $E_n = (-n, n)^d$ 。
- (b) 更一般地，定理 6.10 关于 Borel 测度正则性的证明表明：局部紧、可分度量空间 (X, d) 上的每个 Borel 测度都满足条件 (9.17)。

推论 9.5。 设 μ, μ' 是两个都满足条件 (9.17) 的测度。若

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \, d\mu'$$

对每个

$$f \in \text{Lip}_b(X, \mathbb{R}) \cap L_{\mathbb{R}}^1(\mu) \cap L_{\mathbb{R}}^1(\mu')$$

都成立，则 $\mu = \mu'$ 。

证明。 取开集 $O \in \mathcal{O}(X)$ 与 $n \geq 1$ 。若 $O \cap E_n = X$ ，令 $\varphi_k \equiv 1$ ；否则对开集 $O \cap E_n$ 使用引理 9.6 得到函数 φ_k 。它们同时属于 $L_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ 与 $L_{\mathbb{R}}^1(\mu')$ 。由单调收敛定理以及测度的下连续性， μ 与 μ' 在所有开集上相同。再由推论 6.2，利用二者的 σ -有限性，便有 $\mu = \mu'$ 。 $\square$

9.7.2 紧支撑 Lipschitz 函数的稠密性

现在考虑 X 局部紧且可分的情形。此时，若 μ 是 Borel 测度，便可把前面的逼近函数进一步限制为紧支撑 Lipschitz 函数。记

$$\text{Lip}_K(X, \mathbb{K}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ 是紧支撑 Lipschitz 函数}\}.$$

定理 9.10。 设 (X, d) 是局部紧可分度量空间, μ 是 Borel 测度。则对每个 $p \in [1, +\infty)$, $\text{Lip}_K(X, \mathbb{K})$ 在 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 中关于 $\|\cdot\|_p$ 稠密。

证明。 若 $f \in \text{Lip}_K(X, \mathbb{K})$, 则 f 连续且具有紧支撑, 故

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \|f\|_{\infty}^p \mu(\text{supp } f) < +\infty.$$

所以

$$\text{Lip}_K(X, \mathbb{K}) \subset L_{\mathbb{K}}^p(\mu).$$

下面只需逼近 $\text{Lip}_b(X, \mathbb{K}) \cap L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 中的函数。为此, 取一系列紧集 $(L_n)_{n \geq 1}$, 使

$$X = \bigcup_{n \geq 1} L_n, \quad L_n \subset \overset{\circ}{L}_{n+1}.$$

对固定的 n , 若 $\overset{\circ}{L}_n = X$, 令 $\varphi_{n,k} \equiv 1$; 否则令

$$\varphi_{n,k}(x) := \min(kd(x, (\overset{\circ}{L}_n)^c), 1).$$

当 $k \rightarrow +\infty$ 时,

$$\varphi_{n,k} \uparrow \mathbf{1}_{\overset{\circ}{L}_n}.$$

又因为 μ 是 Borel 测度且 $\overset{\circ}{L}_n \subset L_n$ 相对紧,

$$\mu(\overset{\circ}{L}_n) < +\infty.$$

所以

$$\varphi_{n,k} \longrightarrow \mathbf{1}_{\overset{\circ}{L}_n} \quad \text{于 } \mathbf{L}^p(\mu).$$

于是对每个 $n \geq 1$, 可取 $\tilde{\varphi}_n \in \text{Lip}_K(X, \mathbb{K})$, 使

$$\|\mathbf{1}_{\overset{\circ}{L}_n} - \tilde{\varphi}_n\|_p \leq \frac{1}{n}.$$

这里 $\tilde{\varphi}_n$ 的支撑包含于 L_n , 因而是紧的。

现在取

$$f \in \text{Lip}_b(X, \mathbb{K}) \cap L_{\mathbb{K}}^p(\mu).$$

则

$$\begin{aligned} \|f - f\tilde{\varphi}_n\|_p &\leq \|f - f\mathbf{1}_{\overset{\circ}{L}_n}\|_p + \|f\mathbf{1}_{\overset{\circ}{L}_n} - f\tilde{\varphi}_n\|_p \\ &\leq \left(\int_{(\overset{\circ}{L}_n)^c} |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \|f\|_{\infty} \|\mathbf{1}_{\overset{\circ}{L}_n} - \tilde{\varphi}_n\|_p \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

最后, $f\tilde{\varphi}_n$ 仍是紧支撑 Lipschitz 函数, 于是结论成立。 $\square$

应用 9.6。 最重要的情形当然是 $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$), 其上取任意赋范向量空间范数所诱导的度量, 并配备 Lebesgue 测度 λ_d ; 更一般地, 也可以配备任意 Borel 测度。

9.7.3 Lusin 定理

若 μ 是度量空间 (X, d) 上的正则 Borel 测度，定理 9.9 可加强为下面的 Lusin 定理。

定理 9.11 (Lusin 定理)。设 μ 是度量空间 (X, d) 上的正则 Borel 测度，并且 $p \in [1, +\infty)$ 。则对任意 $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 与 $\varepsilon > 0$ ，存在

$$\varphi_\varepsilon \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu) \cap C(X, \mathbb{K})$$

使得

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{\sup} \leq \|f\|_\infty, \quad \mu(\{f \neq \varphi_\varepsilon\}) \leq \varepsilon, \quad \|f - \varphi_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon. \quad (9.18)$$

此外，若 $f \geq 0$ ，则还可取 $\varphi_\varepsilon \geq 0$ 。

证明建立在下面这个经典的分离引理上。它在度量空间中可利用点到集合的距离函数 $x \mapsto d(x, A)$ 初等地证明。

引理 9.7 (Urysohn 引理)。设 O 是开集， K 是包含于 O 的非空紧集，并且 $O \neq X$ 。定义

$$\rho_{K,O}(x) := \frac{d(x, O^c)}{d(x, O^c) + d(x, K)}.$$

则 $\rho_{K,O}$ 在整个 X 上有定义且连续，并满足

$$\mathbf{1}_K \leq \rho_{K,O} \leq \mathbf{1}_O.$$

若 $K = \emptyset$ ，可直接取 $\rho_{K,O} = 0$ ；若 $O = X$ ，可直接取 $\rho_{K,O} = 1$ 。^a

^a**校订注**：原书公式使用到 $d(x, O^c)$ 与 $d(x, K)$ ，但没有排除 $O^c = \emptyset$ 或 $K = \emptyset$ ，此时通常定义下“到空集的距离”没有意义。这里补齐非空条件，并把两个边界情形单独说明。

证明。函数 $x \mapsto d(x, O^c)$ 在紧集 K 上取得最小值，而且这个最小值严格为正：否则某个 $x_\infty \in K$ 属于闭集 O^c ，与 $K \subset O$ 矛盾。另一方面，对 X 的每个非空子集 A ，函数

$$x \mapsto d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$$

是 1-Lipschitz 的。并且对任意两个非空子集 $A, B \subset X$ 及 $x \in X$ ，

$$d(A, B) := \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b) \leq d(x, A) + d(x, B).$$

因此 $\rho_{K,O}$ 是两个连续函数之商，且分母处处不为零，所以它连续。由定义直接看出 $\mathbf{1}_K \leq \rho_{K,O} \leq \mathbf{1}_O$ 。□

注。函数 $\rho_{K,O}$ 是 Lipschitz 函数，其 Lipschitz 常数可取不超过

$$\frac{1}{d(O^c, K)}.$$

Lusin 定理的证明。 证明分若干步进行。

第一步： $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ 中的示性函数。 设 $A \in \mathcal{B}(X)$, $f := \mathbf{1}_A$ 。 有

$$f \in L^p(\mu) \iff \mu(A) < +\infty.$$

若 $\mu(A) = 0$, 直接取 $\varphi_\varepsilon = 0$ 。 下面设 $\mu(A) \neq 0$ 。 由 μ 的正则性, 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 K_ε 与开集 O_ε , 使

$$K_\varepsilon \subset A \subset O_\varepsilon, \quad \mu(O_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon^p.$$

也就是说,

$$\|\mathbf{1}_{O_\varepsilon} - \mathbf{1}_{K_\varepsilon}\|_p \leq \varepsilon.$$

令

$$\varphi_\varepsilon := \rho_{K_\varepsilon, O_\varepsilon}.$$

因为 $\varphi_\varepsilon \leq \mathbf{1}_{O_\varepsilon}$, 所以 $\varphi_\varepsilon \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ 。 又有

$$|\varphi_\varepsilon - \mathbf{1}_A| \leq |\mathbf{1}_{O_\varepsilon} - \mathbf{1}_{K_\varepsilon}|,$$

故

$$\|\varphi_\varepsilon - \mathbf{1}_A\|_p \leq \varepsilon.$$

此外,

$$\{f \neq \varphi_\varepsilon\} \subset O_\varepsilon \setminus K_\varepsilon,$$

从而

$$\mu(\{f \neq \varphi_\varepsilon\}) \leq \varepsilon^p.$$

把 ε 换成 $\varepsilon \wedge 1$, 总可假设 $\varepsilon \leq 1$, 于是 $\varepsilon^p \leq \varepsilon$ 。 最后,

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{\sup} \leq 1 = \|\mathbf{1}_A\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

第二步：取值于 $[0, 1]$ 的 $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ 函数。 设

$$f : X \longrightarrow [0, 1]$$

非负, $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$, 并且 $\|f\|_\infty = 1$ 。 基本逼近引理 (定理 5.1) 的一个直接变式表明, 对每个 $n \geq 1$, 令

$$f_n := \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{\{\frac{k}{2^n} < f \leq \frac{k+1}{2^n}\}},$$

则

$$f_n \longrightarrow f \quad (n \rightarrow +\infty).$$

令 $f_0 := 0$, 并对 $n \geq 1$ 定义

$$\psi_n := 2^n(f_n - f_{n-1}).$$

于是

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi_n}{2^n}.$$

容易验证, ψ_n 只能取值 0 或 1。事实上, 令

$$A_n := \{\psi_n = 1\} = \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left\{ \frac{2k+1}{2^n} < f \leq \frac{2(k+1)}{2^n} \right\},$$

则

$$\psi_n = \mathbf{1}_{A_n}, \quad f = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{A_n}.$$

因为 $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ 且 $\mathbf{1}_{A_n} \leq 2^n f$, 所以 $\psi_n \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ 。

固定 $\varepsilon > 0$ 。由第一步, 对每个 $n \geq 1$, 存在

$$\psi_{n,\varepsilon} \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu) \cap C(X, [0, 1])$$

使

$$\|\psi_{n,\varepsilon} - \psi_n\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad \mu(\{\psi_{n,\varepsilon} \neq \psi_n\}) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad \|\psi_{n,\varepsilon}\|_{\sup} \leq 1.$$

令

$$\varphi_\varepsilon := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi_{n,\varepsilon}}{2^n}.$$

则

$$\|\varphi_\varepsilon - f\|_p \leq \varepsilon,$$

$$\mu(\{\varphi_\varepsilon \neq f\}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

并且

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{\sup} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 = \|f\|_{\infty}.$$

定义 φ_ε 的级数一致收敛, 而各 $\psi_{n,\varepsilon}$ 连续, 所以 φ_ε 也连续。^a

第三步：非负且本质有界的 $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ 函数。 设 $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ 非负且本质有界。若 $f = 0$ μ -a.e., 结论显然。否则令

$$M := \|f\|_{\infty} > 0, \quad f_M := \frac{f}{M}.$$

则 $f_M \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ 、 $0 \leq f_M \leq 1$ μ -a.e., 并且 $\|f_M\|_{\infty} = 1$ 。固定 $\varepsilon > 0$, 令

$$\varepsilon' := \min \left\{ \varepsilon, \frac{\varepsilon}{M} \right\}.$$

由第二步, 存在 $\psi_\varepsilon \in C(X, [0, 1]) \cap L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$, 使

$$\|\psi_\varepsilon - f_M\|_p \leq \varepsilon', \quad \mu(\{\psi_\varepsilon \neq f_M\}) \leq \varepsilon', \quad \|\psi_\varepsilon\|_{\sup} \leq 1.$$

令 $\varphi_\varepsilon := M\psi_\varepsilon$ 。则

$$\{\varphi_\varepsilon \neq f\} = \{\psi_\varepsilon \neq f_M\},$$

$$\mu(\{\varphi_\varepsilon \neq f\}) \leq \varepsilon' \leq \varepsilon,$$

$$\|\varphi_\varepsilon - f\|_p = M \|\psi_\varepsilon - f_M\|_p \leq M\varepsilon' \leq \varepsilon,$$

并且

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{\sup} \leq M = \|f\|_{\infty}.$$

b

第四步：任意符号的本质有界 $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ 函数。 第三步的结论显然也适用于仅在 μ -a.e. 意义下非负的函数，因为式 (9.18) 的三个条件都不受零测集上修改函数的影响。现在设 $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ 本质有界但符号任意。写成

$$f = f^+ - f^-, \quad 0 \leq f^{\pm} \leq \|f\|_{\infty}.$$

分别对 f^+ 与 f^- 使用第三步，误差参数取 $\varepsilon/2$ ，得到连续非负函数 φ_{ε}^+ 与 φ_{ε}^- 。令

$$\varphi_{\varepsilon} := \varphi_{\varepsilon}^+ - \varphi_{\varepsilon}^-.$$

则

$$\begin{aligned} \mu(\{f \neq \varphi_{\varepsilon}\}) &\leq \mu(\{f^+ \neq \varphi_{\varepsilon}^+\}) + \mu(\{f^- \neq \varphi_{\varepsilon}^-\}) \leq \varepsilon, \\ \|f - \varphi_{\varepsilon}\|_p &\leq \|f^+ - \varphi_{\varepsilon}^+\|_p + \|f^- - \varphi_{\varepsilon}^-\|_p \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

又因为

$$0 \leq \varphi_{\varepsilon}^{\pm} \leq \|f\|_{\infty},$$

所以

$$\|\varphi_{\varepsilon}\|_{\sup} \leq \|f\|_{\infty}.$$

c

第五步：一般的 $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ 函数。 对 $A > 0$ ，令

$$f^{(A)} := f \mathbf{1}_{\{|f| \leq A\}}.$$

由于

$$\|f - f^{(A)}\|_p \longrightarrow 0, \quad \mu(\{|f| > A\}) \longrightarrow 0 \quad (A \rightarrow +\infty),$$

可以选取 $A_{\varepsilon} > 0$ ，使

$$\|f - f^{(A_{\varepsilon})}\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu(\{|f| > A_{\varepsilon}\}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

对本质有界函数 $f^{(A_{\varepsilon})}$ 使用第四步，误差参数取 $\varepsilon/2$ 。注意

$$\{f \neq f^{(A_{\varepsilon})}\} = \{|f| > A_{\varepsilon}\}.$$

由三角不等式和不相等集合的并集估计，即得式 (9.18)。^d

第六步： $L^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ 函数。 设

$$f = u + iv \in L^p_{\mathbb{C}}(\mu).$$

分别对 $u = \operatorname{Re} f$ 与 $v = \operatorname{Im} f$ 使用第五步，误差参数取 $\varepsilon/2$ ，得到连续实函数 $u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}$ 。令

$$\tilde{\varphi}_{\varepsilon} := u_{\varepsilon} + iv_{\varepsilon}.$$

则

$$\mu(\{f \neq \tilde{\varphi}_{\varepsilon}\}) \leq \varepsilon, \quad \|f - \tilde{\varphi}_{\varepsilon}\|_p \leq \varepsilon.$$

若 $\|f\|_{\infty} = +\infty$ ，取 $\varphi_{\varepsilon} = \tilde{\varphi}_{\varepsilon}$ 即可。若 $M := \|f\|_{\infty} < +\infty$ ，定义闭圆盘上的径向收缩

$$P_M(z) := \begin{cases} z, & |z| \leq M, \\ Mz/|z|, & |z| > M. \end{cases}$$

这是 $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ 到闭圆盘 $\{z : |z| \leq M\}$ 的正交投影，因而是 1-Lipschitz 的。令

$$\varphi_\varepsilon := P_M \circ \tilde{\varphi}_\varepsilon.$$

因为 $P_M(f) = f$ μ -a.e., 所以

$$\{f \neq \varphi_\varepsilon\} \subset \{f \neq \tilde{\varphi}_\varepsilon\},$$

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|_p \leq \|f - \tilde{\varphi}_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon, \quad \|\varphi_\varepsilon\|_{\sup} \leq M.$$

这就证明了复值情形。^e

□

^a**校订注：**原书把本步限制为严格正函数，但上述二进逼近对允许取零值的 $[0, 1]$ -值函数同样成立；集合 A_n 与估计 $\mathbf{1}_{A_n} \leq 2^n f$ 在 $f = 0$ 处仍然有效。这里采用这个必要的加强，以避免下一步在无限测度空间上加入不可积正常数。

^b**校订注：**原书令 $f_\delta = (f + \delta)/(\|f\|_\infty + \delta)$ 。当 $\mu(X) = +\infty$ 时，即使 $f \in L^p(\mu)$ ，加入正常数 δ 后也通常不再属于 $L^p(\mu)$ ，因此不能应用第二步。这里直接用 $f/\|f\|_\infty$ 归一化；第二步允许取零后，证明完整成立。

^c**校订注：**原书在本步误引“第二步”（应为第三步），并将本应“符号任意”的 f 写成“正函数”。更重要的是，原书以 $f + \|f\|_\infty$ 平移；当 $\mu(X) = +\infty$ 时，这个函数通常不属于 $L^p(\mu)$ 。这里改用 $f = f^+ - f^-$ 分别逼近的论证。

^d**校订注：**原书只要求 $\|f - f^{(A_\varepsilon)}\|_p \leq \varepsilon/2$ ，但为了同时得到 $\mu(\{f \neq \varphi_\varepsilon\}) \leq \varepsilon$ ，还必须让截断集合 $\{|f| > A_\varepsilon\}$ 的测度不超过 $\varepsilon/2$ 。这里补上这一必要条件；它由 $\{|f| > A\} \downarrow \emptyset$ （除去零测集）得到。

^e**校订注：**原书把 $g = f|f|^{-1}\mathbf{1}_{\{f \neq 0\}}$ 直接交给第四步处理，但一般 $g \notin L^p(\mu)$ （例如 $f(x) = e^{-x}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上时， $g \equiv 1$ ），所以该论证并不成立；原书还在 $\{f = 0\}$ 上误写 $(\operatorname{Re} g)^2 + (\operatorname{Im} g)^2 = 1$ 。这里改用实部、虚部分别逼近，再投影到闭圆盘的标准论证。

练习（复值情形的另一种证明）。 利用任意复可测函数的可测三角表示

$$f(x) = \rho(x)e^{2i\pi\theta(x)},$$

其中 $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ 、 $\theta : X \rightarrow (0, 1]$ 都可测，重新证明 Lusin 定理的复值情形。

9.8 习题

本节中， $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 表示一个测度空间。

练习 9.1。 设 $\mathbb{K}^d$ 是维数 $d \in \mathbb{N}^*$ 的标准 $\mathbb{K}$ -向量空间。

(a) 设 $p, q \in [1, +\infty]$, $p \leq q$ 。求最优常数 a, b ，使

$$a \| \cdot \|_p \leq \| \cdot \|_q \leq b \| \cdot \|_p.$$

(b) 直接证明

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \| \cdot \|_p = \| \cdot \|_\infty.$$

(c) 设 $p \in (1, +\infty)$ 。证明

$$x \neq y, \quad \|x\|_p = \|y\|_p = 1 \implies \|x + y\|_p < 2.$$

当 $p = 1$ 或 $p = +\infty$ 时，这个结论还成立吗？

练习 9.2。

(a) 设 $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ 是非负可测函数，并且 $fg \geq 1$ 。证明

$$\left(\int_X f \, d\mu \right) \left(\int_X g \, d\mu \right) \geq \mu(X)^2.$$

(b) 若存在 $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ，使 f 与 $1/f$ 都 μ -可积，可以对测度 μ 得出什么结论？

练习 9.3。 设 $p, q \in [1, +\infty]$, $p \leq q$ 。

(a) 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 的总质量有限。证明标准嵌入

$$i: \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu) \hookrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$$

是连续线性映射，并计算它的算子范数。哪些函数能使相应不等式取等号？

(b) 证明标准嵌入

$$i: \ell_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{N}) \hookrightarrow \ell_{\mathbb{K}}^q(\mathbb{N})$$

是连续线性映射，并计算它的算子范数。

练习 9.4。 考虑下面两个命题：

(i) 对任意 $p, q \in [1, +\infty)$ ，若 $p \neq q$ ，则

$$L_{\mathbb{K}}^p(\mu) \neq L_{\mathbb{K}}^q(\mu);$$

(ii) 存在一列两两不交的集合 $(A_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{A}$ ，使

$$0 < \mu(A_n) < +\infty.$$

(a) 证明 (i) 蕴含 (ii)。

(b) 设 $p, q \in [1, +\infty)$ 、 $p \neq q$ ，并且 $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}_+^*$ 。证明存在 $(b_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}_+$ ，使级数

$$\sum_{n \geq 0} b_n^p a_n, \quad \sum_{n \geq 0} b_n^q a_n$$

中恰有一个收敛，另一个发散。

(c) 利用 (b) 证明 (ii) 蕴含 (i)。

练习 9.5。 设 $p, q \in [1, +\infty]$, $p \neq q$ 。构造一列

$$(f_n)_{n \geq 1} \subset C_K(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

使它在 $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\lambda)$ 中有界，但在 $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^q(\lambda)$ 中无界。^a

^a校订注：原书此题把 $\mathbb{R}$ 上的积分测度写成了前文任意的 μ ；在没有给 μ 加任何条件时，所要求的构造并不成立。题目的标准缩放构造以 Lebesgue 测度为背景，故这里把 μ 改为 λ 。

练习 9.6。 设 $p, q \in [1, +\infty]$ ，并设

$$(f_n)_{n \geq 0} \subset L_{\mathbb{K}}^p(\mu) \cap L_{\mathbb{K}}^q(\mu).$$

若 f_n 在 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 中收敛到 0, 并且在 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ 中是 Cauchy 列, 证明 f_n 在 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ 中也收敛到 0.

练习 9.7. 设 $p \in (1, +\infty)$, 并设 $(f_n)_{n \geq 0} \subset L_{\mathbb{R}^+}^p(\mu)$ 在 $\mathbf{L}_{\mathbb{R}^+}^p(\mu)$ 中收敛到 f . 证明: 对每个 $r \in [1, p]$, 函数列 $(f_n^r)_{n \geq 0}$ 在 $\mathbf{L}_{\mathbb{R}^+}^{p/r}(\mu)$ 中收敛到 f^r .

练习 9.8. 设 $p \in [1, +\infty)$, 并设 $(f_n)_{n \geq 0} \subset L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 在 μ -a.e. 意义下收敛到 $f \in L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

练习 9.9. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 的总质量有限, $p \in (1, +\infty]$, 并设 $(f_n)_{n \geq 0}$ 是 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 中的有界列, 在 μ -a.e. 意义下收敛到函数 f .

- (a) 证明 $f \in L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$.
- (b) 证明: 对每个 $r \in [1, p)$, f_n 在 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^r(\mu)$ 中收敛到 f .
- (c) 若 $\mu(X) = +\infty$, (b) 的结论还成立吗?

练习 9.10. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 的总质量有限, $r, s \in [1, +\infty)$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 并在 $L_{\mathbb{R}}^r(\mu)$ 上定义

$$\Phi(f) := g \circ f.$$

- (a) 假设 g 满足

$$\exists c > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad |g(y)| \leq c(|y|^{r/s} + 1). \quad (*)$$

证明

$$\Phi: \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^r(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^s(\mu)$$

连续.

- (b) 在测度空间 $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ 上, 假设 g 不满足条件 (*). 证明存在 $f \in L_{\mathbb{R}}^r(\lambda)$, 使

$$g \circ f \notin L_{\mathbb{R}}^s(\lambda).$$

练习 9.11. 证明: λ -a.e. 收敛不能由某个度量刻画.

练习 9.12. 设 $p \in [1, +\infty]$. 对 $a \in \mathbb{R}$, 在 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{R}, \lambda)$ 上定义平移算子

$$\tau_a(f) := f(\cdot + a).$$

- (a) 证明: 对每个 $a \in \mathbb{R}$, τ_a 是 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\lambda)$ 上的等距映射.
- (b) 设 $f \in L_{\mathbb{K}}^p(\lambda)$ 且 $p < +\infty$. 证明

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a(f) - f\|_p = 0,$$

并且

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \|\tau_a(f) - f\|_p = 2^{1/p} \|f\|_p.$$

- (c) (b) 的结论能推广到 $p = +\infty$ 吗?

a

^a校订注：原书 (a) 的量词是 a ，结论中却误写成了 τ_h ；这里统一为 τ_a 。

练习 9.13. 设 $p \in [1, +\infty]$ 。对每个 $N \in \mathbb{N}$ ，在 $\ell_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{N})$ 上定义

$$s_N((a_n)_{n \geq 0}) := (a_{n+N})_{n \geq 0}.$$

称 s_N 为移位算子 (shift)。

(a) 证明：对每个 $N \in \mathbb{N}$ ， s_N 是 $\ell_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{N})$ 上的连续线性映射，并计算其算子范数。

(b) 设 $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{N})$ ， $p \in [1, +\infty)$ 。计算

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|s_N(a)\|_p.$$

当 $p = +\infty$ 时，这个极限等于什么？

练习 9.14. 设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 可测且不在 μ -a.e. 意义下恒为零。对 $p \in \mathbb{R}_+^*$ ，定义

$$\theta(p) := \int_X |f|^p d\mu, \quad I := \{p \in \mathbb{R}_+^* : \theta(p) < +\infty\}.$$

(a) 证明 I 是区间，并给出一个 I 为单点集的例子。

(b) 证明 $\ln \theta$ 在 I 上凸，并且 θ 在 I 上连续。

(c) 设 $p, q \in I$ 、 $p \leq q$ ，并且 $r \in [p, q]$ 。证明

$$\theta(r)^{1/r} \leq \max\{\theta(p)^{1/p}, \theta(q)^{1/q}\}.$$

练习 9.15. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是概率空间，即 $\mu(X) = 1$ 。设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 可测，并且对某个 $q_0 \in \mathbb{R}_+^*$ ，

$$\theta(q_0) := \int_X |f|^{q_0} d\mu \in (0, +\infty).$$

(a) 证明：对每个 $p \in (0, +\infty]$ ，

$$\theta(p)^{1/p} \geq \exp\left(\int_X \ln |f| d\mu\right).$$

约定

$$\exp(-\infty) := 0, \quad \theta(+\infty)^{1/(+\infty)} := \|f\|_{\infty}.$$

(b) 证明

$$\lim_{p \downarrow 0} \theta(p) = \mu(\{f \neq 0\}).$$

(c) 证明

$$\lim_{p \downarrow 0} \int_X \frac{|f|^p - 1}{p} d\mu = \int_X \ln |f| d\mu \in [-\infty, +\infty).$$

(d) 推出

$$\lim_{p \downarrow 0} \theta(p)^{1/p} = \exp\left(\int_X \ln |f| d\mu\right).$$

练习 9.16 (Hardy 不等式)。设 $p \in (1, +\infty)$ 。对每个 $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ ，在 $\mathbb{R}_+^*$ 上定义

$$F(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

(a) 说明 F 的定义是良好的，并证明每个 $f \in C_K(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$ 都在下式中取等号：

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p dx \leq \frac{p}{p-1} \int_0^{+\infty} f(x) F(x)^{p-1} dx. \quad (\text{H}+)$$

进而证明 Hardy 不等式

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p. \quad (\text{H})$$

(b) 证明每个 $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ 都满足 Hardy 不等式。

(c) 证明每个非负 $f \in L^p_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}_+)$ 都满足不等式 (H+)。

(d) 证明： f 在 Hardy 不等式中取等号，当且仅当 $f = 0$ λ -a.e.

(e) 证明 Hardy 不等式中的常数 $p/(p-1)$ 是最优的。

(f) 研究 $p = 1$ 与 $p = +\infty$ 的情形。

(g) 设 $r \in (-\infty, p-1)$ 。证明每个 $f \in C_K(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$ 都满足

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p x^r dx = \frac{p}{p-r-1} \int_0^{+\infty} f(x) F(x)^{p-1} x^r dx.$$

推出每个 Lebesgue 可测非负函数 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 都满足

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p x^r dx \leq \left(\frac{p}{p-r-1} \right)^p \int_0^{+\infty} f(x)^p x^r dx.$$

^a

^a校订注：原书 (d) 突然把前文一直使用的函数记作 g ，这里统一改回 f 。

练习 9.17 (Weyl 不等式)。设 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ ，并固定 $c \in \mathbb{R}$ 。在 $\mathbb{R}_+$ 上定义

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt + c.$$

(a) 本问再假设

$$f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+), \quad (x \mapsto xF(x)) \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+).$$

证明 $F \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ ，并且

$$\int_0^{+\infty} F(x)^2 dx = -2 \int_0^{+\infty} xF(x)f(x) dx.$$

(b) 在 (a) 的假设下证明 Weyl 不等式

$$\left(\int_0^{+\infty} F(x)^2 dx \right)^2 \leq 4 \left(\int_0^{+\infty} x^2 F(x)^2 dx \right) \left(\int_0^{+\infty} f(x)^2 dx \right). \quad (\text{W})$$

(c) 在 (a) 的假设下证明：式 (W) 取等号，当且仅当存在 $b \in \mathbb{R}$ ，使

$$F(x) = ce^{-bx^2}.$$

a

校订注：原书 (b) 声称上述不等式对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 成立，却没有要求式中三个二次积分有意义；例如 $f=0, c=1$ 就使左端为 $+\infty$ ，而右端含未定义的 $0 \cdot +\infty$ 。这里明确沿用 (a) 的假设，这也正是由 (a) 的恒等式应用 Cauchy-Schwarz 不等式所需的条件。

练习 9.18。 设 $p, q > 1$ ，并且

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(a) 证明 Young 不等式

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a, b \geq 0,$$

并证明取等号当且仅当 $a^p = b^q$ 。

(b) 设 $h \in L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ ，并设 f, g 是两个非负可测函数，满足

$$f^p \leq h, \quad g^q \leq h \quad \mu\text{-a.e.}$$

证明

$$\int_X (h - fg) d\mu \geq \left(\int_X (h - f^p) d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X (h - g^q) d\mu \right)^{1/q},$$

并证明取等号当且仅当

$$f^p = g^q \quad \mu\text{-a.e.}$$

练习 9.19。

(a) 设 $p \in [1, +\infty)$ 。证明 $\ell^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ 可分。

(b) 证明 $\ell^{\infty}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ 不可分。

练习 9.20。 设 X 是局部紧可分度量空间， μ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Borel 测度（即在紧集上有限），并且 $p \in (1, +\infty)$ 。

(a) 证明： X 存在一个由相对紧开集构成、且对有限交封闭的可数基

$$\mathcal{U} := \{U_n : n \geq 0\}.$$

记 D 为示性函数族

$$\{\mathbf{1}_{U_n} : n \geq 0\}$$

所张成的 $\mathbb{K}$ -向量空间。

(b) 证明：对每个满足 $\mu(\Omega) < +\infty$ 的开集 $\Omega \in \mathcal{O}(X)$ ，都有

$$\mathbf{1}_{\Omega} \in \overline{D},$$

其中 $\overline{D}$ 表示 D 在 $\mathbf{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中的闭包。

(c) 更一般地，证明：对每个满足 $\mu(A) < +\infty$ 的 $A \in \mathcal{B}(X)$ ，都有 $\mathbf{1}_A \in \overline{D}$ 。

(d) 推出 D 在 $\mathbf{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 中稠密，并进一步推出 $\mathbf{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 可分。

练习 9.21。 证明练习 6.18 中的度量空间

$$(\mathcal{A}/\mathcal{R}, d)$$

是完备的。

练习 9.22。 在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 上工作。对每个 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ ，或仅为非负 Borel 可测的 f ，以及每个 $h > 0$ ，定义

$$M_h(f)(x) := \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt.$$

(a) 证明：对每个 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ ，

$$\|M_h(f)\|_1 \leq \|f\|_1.$$

(b) 设 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ 。证明当 $h \downarrow 0$ 时， $M_h(f)$ 在 $L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ 中收敛到 f 。

练习 9.23 (Marcinkiewicz 空间)。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间， $p > 1$ 。若可测函数 f 满足：存在 $c > 0$ ，使对每个 $t > 0$ ，

$$\mu(\{|f| > t\}) \leq \frac{c}{t^p},$$

则称 f 属于 Marcinkiewicz 空间或弱 L^p 空间，记作

$$f \in L^p_{\text{weak}}(\mu).$$

(a) 设 $f \in L^p_{\text{weak}}(\mu)$ 、 $A \in \mathcal{A}$ 且 $t > 0$ 。令

$$A_n := A \cap \{|f| > tn\}, \quad B_n := A_n \setminus A_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

证明存在实常数 $C > 0$ ，使

$$\int_A |f| d\mu \leq \sum_{n \geq 0} t(n+1)\mu(B_n) = \sum_{n \geq 0} t\mu(A_n) \leq t\mu(A) + Ct^{1-p}.$$

(b) 推出： $f \in L^p_{\text{weak}}(\mu)$ 当且仅当存在 $c > 0$ ，使对每个 $A \in \mathcal{A}$ ，

$$\int_A |f| d\mu \leq c\mu(A)^{1-1/p}.$$

(c) 假设 $\mu(X) < +\infty$ 。证明：若 $f \in L^p_{\text{weak}}(\mu)$ ，则对每个 $q \in [1, p)$ ，

$$f \in L^q(\mu).$$

(d) 给出一个测度空间的例子，使

$$L^p_{\text{weak}}(\mu) \neq L^p(\mu).$$

练习 9.24 (反向 Minkowski 不等式)。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 满足 $\mu(X) > 0$ 。本题中， f^{-1} 表示函数 $1/f$ 。设 $p \geq 1$ ，并且

$$f, g \in L^p_{\mathbb{R}^+}(\mu),$$

其中 f, g 在 μ -a.e. 意义下非零。

(a) 利用 (b) 证明：对任意满足

$$a, b \geq 0, \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

的 a, b , 都有

$$\|(f+g)^{-1}\|_p^p \leq \|(f+g)^{-1}\|_p^{p-1} (a \|f^{-1}\|_p + b \|g^{-1}\|_p).$$

(b) 验证：若

$$\|(f+g)^{-1}\|_p = +\infty,$$

则

$$\|f^{-1}\|_p = \|g^{-1}\|_p = +\infty.$$

(c) 推出反向 Minkowski 不等式

$$\frac{1}{\|f^{-1}\|_p} + \frac{1}{\|g^{-1}\|_p} \leq \frac{1}{\|(f+g)^{-1}\|_p}.$$

第十章 表示定理及其应用

10.1 Riesz 表示定理

到目前为止，我们采用“抽象测度”的方式介绍 Lebesgue 积分并构造 Lebesgue 测度。这并不是唯一的途径。这种方法一方面以一种看似矛盾的方式凸显了测度概念的具体性，另一方面却仿佛在 Lebesgue 积分与 Riemann 积分之间挖出了一道鸿沟：前者虽然更强，却完全不依赖后者而建立。这在数学中颇为特殊，因为一种工具或理论的改进通常来自对已有结果与概念的深化，而不是另辟道路。

事实上，还有一种“泛函方法”：它把 Lebesgue 积分看成 Riemann 积分从紧支撑连续函数向更广泛函数类的自然延拓。这个方法的核心就是 Riesz 表示定理。

10.1.1 正线性泛函的情形

定理 10.1 (Riesz 表示定理)。设 (X, d) 是局部紧可分度量空间， Φ 是紧支撑连续实值函数空间

$$C_K(X, \mathbb{R})$$

上的正线性泛函。则存在定义在 Borel σ -代数 $\mathcal{B}(X)$ 上的唯一测度 μ ，使得

$$\Phi(f) = \int_X f \, d\mu, \quad f \in C_K(X, \mathbb{R}). \quad (10.1)$$

此外， μ 是 Borel 测度，并且由下式刻画：

$$\mu(\Omega) = \sup\{\Phi(f) : f \in C_K(X, [0, 1]), f \leq \mathbf{1}_\Omega\}, \quad \Omega \in \mathcal{O}(X), \quad (10.2)$$

或等价地，

$$\mu(K) = \inf\{\Phi(f) : f \in C_K(X, \mathbb{R}), \mathbf{1}_K \leq f\}, \quad K \subset X \text{ 紧}. \quad (10.3)$$

注。

- 事实上，只假设 X 局部紧，就足以得到满足 (10.1)–(10.3) 的测度 μ 的存在性。相反，测度的唯一性确实需要可分性；下面的反例会说明这一点。
- 在局部紧度量空间中，可分性与 σ -紧性等价；见拓扑补充第 6.6.3 段。

不可分度量空间上的非唯一性例。 令 $X := \mathbb{R}$ ，并赋予离散超度量

$$d_u(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

空间 $(\mathbb{R}, d_u)$ 局部紧，因为每个单点集既开又紧；但它不可分，因为每个子集都闭，因而只有 $\mathbb{R}$ 本身在 $(\mathbb{R}, d_u)$ 中稠密，不可能存在可数稠密子集。此外，

$$\mathcal{B}_{d_u}(\mathbb{R}) = \mathcal{O}(\mathbb{R}, d_u) = \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

$(\mathbb{R}, d_u)$ 的紧集恰为有限集, 所以 $C_K((\mathbb{R}, d_u), \mathbb{R})$ 由仅在有限多个点上非零的函数组成。定义两个测度

$$\mu(A) := \text{Card}(A \cap \mathbb{N}), \quad \nu(A) := \mu(A) + m(A \setminus \mathbb{N}), \quad A \subset \mathbb{R},$$

其中

$$m(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ 可数}, \\ +\infty, & A \text{ 不可数}. \end{cases}$$

测度 μ, ν 在所有有限集, 也就是 $(\mathbb{R}, d_u)$ 的所有紧集上相同; 但是

$$\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = 0, \quad \nu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = +\infty.$$

所以 $\mu \neq \nu$, 而且 ν 不满足式 (10.2)。尽管如此, 对每个 $f \in C_K(X, \mathbb{R})$, 都有

$$\Phi(f) := \int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\nu = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

10.1.2 Radon 测度

定义 10.1. 设 X 是局部紧度量空间。称赋范空间

$$(C_K(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\sup})$$

上的连续线性泛函为 X 上的 **Radon 测度**。

这不是最一般的定义。在目前这个定义下, 只要 X 还是可分的, 所得表示测度必为有限测度 (见定理 10.2)。本节末尾会简要回到这一点。

定理 10.2.

(a) 设 X 是局部紧度量空间, $\Phi : C_K(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续线性泛函。则存在两个有限 Borel 测度 μ^+, μ^- , 使

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu^+ - \int_X f d\mu^-, \quad f \in C_K(X, \mathbb{R}). \quad (10.9)$$

(b) 设 $\Phi : C_K(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ 是连续线性泛函。则存在四个有限 Borel 测度 $\mu_r^\pm, \mu_i^\pm$, 使

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu_r^+ - \int_X f d\mu_r^- + i \int_X f d\mu_i^+ - i \int_X f d\mu_i^-, \quad f \in C_K(X, \mathbb{C}). \quad (10.10)$$

注。 在实值情形, 可以把式 (10.9) 简记为

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu, \quad \mu := \mu^+ - \mu^-,$$

并称 μ 为符号测度。在复值情形, 可以类似地记

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu, \quad \mu := \mu_r + i\mu_i,$$

其中 $\mu_r := \mu_r^+ - \mu_r^-$ 、 $\mu_i := \mu_i^+ - \mu_i^-$ 。

定理 10.2 的证明。 先假设实值情形 (a) 已经成立，证明 (b)。在 $C_K(X, \mathbb{R})$ 上定义

$$\Phi_r(g) := \operatorname{Re} \Phi(g), \quad \Phi_i(g) := \operatorname{Im} \Phi(g).$$

它们都是连续实线性泛函。由 (a)，存在四个有限 Borel 测度 $\mu_r^\pm, \mu_i^\pm$ ，使对每个 $g \in C_K(X, \mathbb{R})$ ，

$$\Phi_r(g) = \int_X g d\mu_r^+ - \int_X g d\mu_r^-,$$

$$\Phi_i(g) = \int_X g d\mu_i^+ - \int_X g d\mu_i^-.$$

若 $f = u + iv \in C_K(X, \mathbb{C})$ ，则复线性性给出

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \Phi(u) + i\Phi(v) \\ &= \Phi_r(u) - \Phi_i(v) + i(\Phi_i(u) + \Phi_r(v)). \end{aligned}$$

把 Φ_r, Φ_i 的测度表示代入，便得到式 (10.10)。^a

下面证明 (a)。它由正线性泛函的 Riesz 表示定理 10.1 与下述定理 10.3 推出。把定理 10.3 应用于

$$(C_K(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$$

和 Φ ，得到两个正连续线性泛函 Φ^+, Φ^- ，满足

$$\Phi = \Phi^+ - \Phi^-.$$

由定理 10.1 的存在性部分，它们分别由两个 Borel 测度 μ^+, μ^- 表示。再在式 (10.2) 中取开集 X ，得到

$$\mu^\pm(X) = \sup\{\Phi^\pm(\varphi) : \varphi \in C_K(X, [0, 1])\} \leq \|\Phi^\pm\| < +\infty.$$

所以 $\mu^\pm$ 是有限测度，式 (10.9) 成立。^b □

^a**校订注：**原书展开 $\Phi(u) + i\Phi(v)$ 时把 $i^2\Phi_i(v)$ 误写成 $+i\Phi_i(v)$ ，随后一行又继续保留了错误符号。这里改为正确的实部 $\Phi_r(u) - \Phi_i(v)$ 与虚部 $\Phi_i(u) + \Phi_r(v)$ ；原书最终的积分表示式 (10.10) 本身是正确的。

^b**校订注：**原书最后一个上确界无故附加了未定义的条件 $0 \leq \varphi \leq \mathbf{1}_{K_n}$ 。这里直接按式 (10.2) 对开集 X 取上确界；由 $\|\varphi\|_{\sup} \leq 1$ 即得有限性。

定理 10.3。 设 $Y \neq \emptyset$ ， E 是函数空间 $\mathcal{F}(Y, \mathbb{R})$ 的实线性子空间，并赋有范数 $\|\cdot\|$ 。记

$$E_+ := \{f \in E : f \geq 0\}.$$

假设：

(i) E 对绝对值稳定，而且

$$|f| \in E_+, \quad \| |f| \| = \|f\| \quad (f \in E);$$

(ii) 范数单调：

$$f, g \in E_+, \quad f \leq g \implies \|f\| \leq \|g\|.$$

若 $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续线性泛函，则它可以分解为

$$\Phi = \Phi^+ - \Phi^-, \tag{10.11}$$

其中 Φ^+, Φ^- 是正连续线性泛函；对每个 $f \in E_+$ ，它们由

$$\begin{cases} \Phi^+(f) = \sup\{\Phi(\varphi) : \varphi \in E_+, \varphi \leq f\}, \\ \Phi^-(f) = -\inf\{\Phi(\varphi) : \varphi \in E_+, \varphi \leq f\} \end{cases} \quad (10.12)$$

定义，分别称为 Φ 的正部与负部。

此外，对 $f \in E_+$ ，

$$\begin{cases} \Phi^+(f) = \min\{\Psi(f) : \Psi, \Psi - \Phi \text{ 是 } E \text{ 上的正线性泛函}\}, \\ \Phi^-(f) = \min\{\Psi(f) : \Psi, \Psi + \Phi \text{ 是 } E \text{ 上的正线性泛函}\}. \end{cases} \quad (10.13)$$

a

^a**校订注：**原书把 (10.13) 第二式写成“最大值”。这不可能成立：例如 $\Phi \geq 0$ 时 $\Phi^- = 0$ ，而满足 $\Psi \geq 0$ 、 $\Psi + \Phi \geq 0$ 的 Ψ 可以任意放大。正确结论与正部完全平行，是最小值；原书证明末尾相应也出现了两处符号颠倒。

注。 赋范空间

$$(C_K(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup}), \quad (\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu), \|\cdot\|_p), \quad p \in [1, +\infty),$$

都满足定理 10.3 的假设。

定理 10.3 的证明。 先在

$$E_+ = \{f \in E : f \geq 0\}$$

上用式 (10.12) 定义 Φ^+ 。

第一步： Φ^+ 在 E_+ 上非负且有限。若 $f \in E_+$ ，因为 $0 \in E_+$ ，有 $\Phi^+(f) \geq 0$ 。若

$$0 \leq \varphi \leq f,$$

则由 Φ 的连续性及范数的单调性，

$$\Phi(\varphi) \leq \|\Phi\| \|\varphi\| \leq \|\Phi\| \|f\|.$$

取上确界得

$$0 \leq \Phi^+(f) \leq \|\Phi\| \|f\| < +\infty. \quad (10.14)$$

第二步： Φ^+ 在 E_+ 上可加。设 $f_1, f_2 \in E_+$ ，并取 $\varphi \in E_+$ 满足 $\varphi \leq f_1 + f_2$ 。分解

$$\varphi = \min(f_1, \varphi) + \max(\varphi - f_1, 0).$$

其中

$$\min(f_1, \varphi) \leq f_1, \quad \max(\varphi - f_1, 0) \leq f_2.$$

而且

$$\min(f_1, \varphi) = \frac{1}{2}(f_1 + \varphi - |f_1 - \varphi|) \in E_+,$$

$$\max(\varphi - f_1, 0) = \varphi - \min(f_1, \varphi) \in E_+.$$

所以

$$\Phi(\varphi) \leq \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2).$$

对 φ 取上确界, 得到

$$\Phi^+(f_1 + f_2) \leq \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2).$$

反过来, 固定 $\varepsilon > 0$. 可取 $\varphi_1, \varphi_2 \in E_+$, 使

$$0 \leq \varphi_i \leq f_i, \quad \Phi^+(f_i) \leq \Phi(\varphi_i) + \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

因为 $0 \leq \varphi_1 + \varphi_2 \leq f_1 + f_2$,

$$\begin{aligned} \Phi^+(f_1 + f_2) &\geq \Phi(\varphi_1 + \varphi_2) \\ &\geq \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 得到反向不等式。

第三步：把 Φ^+ 延拓到 E , 并证明可加性。 对 $f \in E$, 令

$$f^\pm := \frac{1}{2}(|f| \pm f) = \max(\pm f, 0) \in E_+,$$

并定义

$$\Phi^+(f) := \Phi^+(f^+) - \Phi^+(f^-).$$

对 $f, g \in E$, 恒等式

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$$

以及 Φ^+ 在 E_+ 上的可加性给出

$$\Phi^+(f + g) = \Phi^+(f) + \Phi^+(g).$$

第四步： Φ^+ 在 E 上连续。 正性给出

$$\Phi^+(|f| \pm f) \geq 0,$$

故

$$|\Phi^+(f)| \leq \Phi^+(|f|).$$

又有

$$(-f)^\pm = f^\mp, \quad \Phi^+(-f) = -\Phi^+(f).$$

对 $f_1, f_2 \in E$, 由式 (10.14),

$$\begin{aligned} |\Phi^+(f_1) - \Phi^+(f_2)| &= |\Phi^+(f_1 - f_2)| \\ &\leq \Phi^+(|f_1 - f_2|) \\ &\leq \|\Phi\| \|f_1 - f_2\| \\ &= \|\Phi\| \|f_1 - f_2\|. \end{aligned}$$

所以 Φ^+ 连续。

第五步： Φ^+ 是线性泛函。 由可加性与 $\Phi^+(-f) = -\Phi^+(f)$,

$$\Phi^+(nf) = n\Phi^+(f), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

进而对每个 $r \in \mathbb{Q}$,

$$\Phi^+(rf) = r\Phi^+(f).$$

再由连续性及 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，该等式对所有 $r \in \mathbb{R}$ 成立。因此 Φ^+ 是实线性泛函。

第六步：验证 (10.12) 与 (10.13)。 定义

$$\Phi^- := \Phi^+ - \Phi.$$

对 $f \in E_+$,

$$\begin{aligned}\Phi^-(f) &= \sup_{\substack{\psi \in E_+ \\ \psi \leq f}} \Phi(\psi) - \Phi(f) \\ &= \sup_{\substack{\psi \in E_+ \\ \psi \leq f}} \Phi(\psi - f) \\ &= - \inf_{\substack{\varphi \in E_+ \\ \varphi \leq f}} \Phi(\varphi),\end{aligned}$$

其中最后令 $\varphi = f - \psi$ 。这就是 (10.12) 的第二式。

若 Ψ 与 $\Psi - \Phi$ 都是正线性泛函，则对 $0 \leq \varphi \leq f$,

$$\Psi(f) \geq \Psi(\varphi) \geq \Phi(\varphi).$$

取上确界，得

$$\Psi(f) \geq \Phi^+(f).$$

而 Φ^+ 本身满足这些条件，故 (10.13) 第一式成立。

若 Ψ 与 $\Psi + \Phi$ 都是正线性泛函，则

$$\Psi(f) \geq \Psi(\varphi) \geq -\Phi(\varphi)$$

对每个 $0 \leq \varphi \leq f$ 成立。取上确界，

$$\Psi(f) \geq - \inf_{0 \leq \varphi \leq f} \Phi(\varphi) = \Phi^-(f).$$

而 Φ^- 本身满足这些条件，故第二式也成立。 □

更一般的 Radon 测度。 当 X 是 σ -紧空间时，可在 $C_K(X, \mathbb{R})$ 上考虑如下拓扑： $f_n \rightarrow f$ 当且仅当存在固定紧集 $K \subset X$ ，使

$$\{f_n \neq 0\} \subset K \quad (n \geq 1),$$

并且 $f_n|_K$ 一致收敛到 $f|_K$ 。这不再是由单个范数诱导的拓扑，所以不能直接应用定理 10.3；但是，对一系列满足

$$X = \bigcup_{n \geq 1} K_n, \quad K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$$

的紧集穷竭，可在每个子空间

$$C_{K_n}(X, \mathbb{R})$$

上应用定理，再利用表示的唯一性把局部测度粘合起来。

若把对上述拓扑连续的线性泛函称为 Radon 测度，就会得到式 (10.9) 形式的表示，但 $\mu^\pm$ 不必是有限测度，只需在紧集上有限。这是 Riesz 表示定理最一般的常用形式；复值情形同样成立。

Riesz 表示定理的证明部分依赖 Carathéodory 定理第三步中介绍的外测度概念（见第 6.5 节）。下面重述所需结论。另一个重要工具是 Urysohn 引理，即用连续函数分离闭集的经典引理；它又建立在第 3.6 节的点到集合距离函数之上。

命题 10.1. 设 $X \neq \emptyset$, μ^* 是 X 上的外测度。^a 则满足

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \leq \mu^*(B), \quad B \subset X, \quad (10.4)$$

的所有集合 $A \subset X$ 构成一个 σ -代数；在这个 σ -代数上， μ^* 的限制是测度，并且式 (10.4) 实际取等号。

^a即 $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ 单调且 σ -次可加，并满足 $\mu^*(\emptyset) = 0$ 。

引理 10.1 (Urysohn 引理). 设 (X, d) 是局部紧度量空间。

(a) 设 F, F' 是 X 中两个不交闭集。则存在两个不交开集 U, V ，使

$$F \subset U, \quad F' \subset V.$$

此外，若 F, F' 中至少一个是紧集，则还可使

$$\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset.$$

(b) 设 $K \subset X$ 紧， Ω 是包含 K 的开集。则存在 $\varphi \in C_K(X, [0, 1])$ ，使

$$\mathbf{1}_K \leq \varphi \prec \mathbf{1}_\Omega.$$

这里 $\varphi \prec \mathbf{1}_\Omega$ 表示

$$\varphi \leq \mathbf{1}_\Omega, \quad \text{supp } \varphi \subset \Omega.$$

(c) 设 $K \subset X$ 紧， $(\Omega_k)_{1 \leq k \leq n}$ 是有限开覆盖：

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n \Omega_k.$$

则存在 $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n} \subset C_K(X, [0, 1])$ ，使

$$\varphi_k \prec \mathbf{1}_{\Omega_k} \quad (1 \leq k \leq n), \quad \mathbf{1}_K \leq \sum_{k=1}^n \varphi_k \leq 1.$$

证明. (a) 若某个闭集为空，结论显然。下面假设二者均非空。开集

$$U := \{x \in X : d(x, F') > d(x, F)\}, \quad V := \{x \in X : d(x, F) > d(x, F')\}$$

满足第一部分结论。

若例如 F 紧，则连续函数 $x \mapsto d(x, F')$ 在 F 上取得严格正的最小值

$$\varepsilon_0 = d(F, F') > 0.$$

此时取

$$U := \{x : d(x, F) < \varepsilon_0/3\}, \quad V := \{x : d(x, F') < \varepsilon_0/3\}.$$

若 $\bar{U} \cap \bar{V} \neq \emptyset$, 三角不等式将给出

$$d(F, F') \leq \frac{2\varepsilon_0}{3},$$

矛盾。因此 $\bar{U}, \bar{V}$ 不交。^a

(b) 若 $K = \emptyset$, 取 $\varphi = 0$ 。下面设 $K \neq \emptyset$ 。局部紧性保证每个 $x \in X$ 都有一个紧邻域 K_x 。由 K 的紧性, 可取 $x_1, \dots, x_n \in K$, 使

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{K}_{x_i}.$$

对紧集 K 与闭集 Ω^c 使用 (a), 取开集 U, V , 使

$$K \subset U, \quad \Omega^c \subset V, \quad \bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset.$$

令

$$O := U \cap \bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{K}_{x_i}.$$

则 O 开, $K \subset O$, 而且 $\bar{O}$ 是紧集, 并满足

$$\bar{O} \subset \bar{U} \subset \Omega.$$

因此对每个 $x \in X$,

$$d(x, K) + d(x, O^c) > 0.$$

定义

$$\varphi(x) := \frac{d(x, O^c)}{d(x, K) + d(x, O^c)}. \quad (10.5)$$

则 φ 连续, 在 K 上恒为 1, 并且

$$\text{supp } \varphi = \bar{O} \subset \Omega.$$

故 $\mathbf{1}_K \leq \varphi \prec \mathbf{1}_\Omega$ 。

(c) 若 $K = \emptyset$, 取所有 $\varphi_k = 0$ 。下面设 $K \neq \emptyset$ 。对每个 $x \in K$, 选取一个含 x 的开集 U_x , 使 $\bar{U}_x$ 紧且包含在某个覆盖成员 Ω_k 中。由紧性, 可取

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m U_{x_j}.$$

对每个 $k \in \{1, \dots, n\}$, 令 K_k 为所有满足 $\bar{U}_{x_j} \subset \Omega_k$ 的 $\bar{U}_{x_j}$ 的并。由 (a), 可取相对紧开集 O_k , 使

$$K_k \subset O_k \subset \bar{O}_k \subset \Omega_k.$$

因为

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n K_k \subset \bigcup_{k=1}^n O_k,$$

所以

$$d(x, K) + \sum_{\ell=1}^n d(x, O_\ell^c) > 0, \quad x \in X.$$

定义

$$\varphi_k(x) := \frac{d(x, O_k^c)}{d(x, K) + \sum_{\ell=1}^n d(x, O_\ell^c)}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

这些函数属于 $C_K(X, [0, 1])$, 并且

$$\text{supp } \varphi_k \subset \overline{O_k} \subset \Omega_k, \quad \sum_{k=1}^n \varphi_k = 1 \text{ 于 } K, \quad \sum_{k=1}^n \varphi_k \leq 1 \text{ 于 } X.$$

□

^a**校订注：**原书在紧集情形取 $U = \{d(x, F') > \varepsilon_0/3\}$ 与 $V = \{d(x, F') < \varepsilon_0/3\}$ 。这只能保证 U, V 不交, 不能保证其闭包不交, 因为两个闭包都可能含有水平集 $\{d(x, F') = \varepsilon_0/3\}$ 。这里改用两个闭集各自的 $\varepsilon_0/3$ -邻域; 同时补上空闭集情形, 避免使用到空集的距离。

Riesz 表示定理的证明。 对每个开集 $\Omega \in \mathcal{O}(X)$, 先定义

$$\mu^*(\Omega) := \sup\{\Phi(f) : f \in C_K(X, [0, 1]), f \prec \mathbf{1}_\Omega\}, \quad (10.6)$$

这与式 (10.2) 略有不同。再对任意 $E \subset X$ 定义

$$\mu^*(E) := \inf\{\mu^*(\Omega) : E \subset \Omega, \Omega \in \mathcal{O}(X)\}. \quad (10.7)$$

第一步: μ^* 是外测度。 由构造立即有

$$\mu^*(\emptyset) = 0,$$

并且 μ^* 关于集合包含关系单调。只需证明 σ -次可加性。先考虑有限个开集:

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n \Omega_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mu^*(\Omega_k), \quad \Omega_1, \dots, \Omega_n \in \mathcal{O}(X). \quad (10.8)$$

只需证明 $n = 2$, 一般情形由归纳得到。取

$$f \in C_K(X, [0, 1]), \quad f \prec \mathbf{1}_{\Omega_1 \cup \Omega_2},$$

并令 $K := \text{supp } f$ 。由引理 10.1(c), 存在 $\varphi_1, \varphi_2 \in C_K(X, [0, 1])$, 使

$$\varphi_k \prec \mathbf{1}_{\Omega_k} \quad (k = 1, 2), \quad \mathbf{1}_K \leq \varphi_1 + \varphi_2 \leq 1.$$

因为 $f \geq 0$ 且 $f = f\mathbf{1}_K$, 所以

$$f \leq \varphi_1 f + \varphi_2 f.$$

正线性泛函 Φ 单调, 故

$$\Phi(f) \leq \Phi(\varphi_1 f) + \Phi(\varphi_2 f) \leq \mu^*(\Omega_1) + \mu^*(\Omega_2).$$

对 f 取上确界, 得到式 (10.8). ^a

现在取任意集合列 $(E_n)_{n \geq 1}$ 。若某个 $\mu^*(E_k) = +\infty$, 次可加不等式显然成立。否则固定 $\varepsilon > 0$ 。由式 (10.7), 对每个 $n \geq 1$, 可取开集 $\Omega_n \supset E_n$, 使

$$\mu^*(\Omega_n) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

令

$$\Omega := \bigcup_{n \geq 1} \Omega_n.$$

取 $f \in C_K(X, [0, 1])$ 且 $f \prec \mathbf{1}_\Omega$ 。因为 $\text{supp } f$ 紧，存在 $n_\varepsilon \geq 1$ ，使

$$\text{supp } f \subset \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} \Omega_k.$$

由式 (10.8)，

$$\begin{aligned} \Phi(f) &\leq \mu^* \left(\bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} \Omega_k \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \mu^*(\Omega_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \left(\mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(E_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

所以

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \geq 1} E_n \right) \leq \mu^*(\Omega) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$ ，即得 σ -次可加性。

第二步： μ^* 在 $B(X)$ 上的限制是测度。由命题 10.1，只需证明每个开集 A 都满足 Carathéodory 条件 (10.4)。

若 $\mu^*(B) = +\infty$ ，结论显然。先设 $B \in \mathcal{O}(X)$ 且 $\mu^*(B) < +\infty$ 。固定 $\varepsilon > 0$ 。由式 (10.6)，可取

$$f \in C_K(X, [0, 1]), \quad f \prec \mathbf{1}_{A \cap B},$$

使

$$\mu^*(A \cap B) \leq \Phi(f) + \varepsilon.$$

闭集 $\text{supp } f$ 与 A^c 不交。由引理 10.1(a)，可取不交开集 U, V ，使

$$\text{supp } f \subset U, \quad A^c \subset V.$$

再取 $g \in C_K(X, [0, 1])$ ，使

$$g \prec \mathbf{1}_{V \cap B}, \quad \mu^*(V \cap B) \leq \Phi(g) + \varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) &\leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(V \cap B) \\ &\leq \Phi(f) + \Phi(g) + 2\varepsilon \\ &= \Phi(f + g) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

由于

$$\text{supp } f \subset U, \quad \text{supp } g \subset V, \quad U \cap V = \emptyset,$$

且 $0 \leq f, g \leq 1$, 所以

$$0 \leq f + g \leq 1.$$

又因为二者的支撑都包含于 B , 故

$$f + g \prec \mathbf{1}_B.$$

因此

$$\Phi(f + g) \leq \mu^*(B),$$

从而

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \leq \mu^*(B) + 2\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 得到式 (10.4)。^b

最后设 $B \subset X$ 任意且 $\mu^*(B) < +\infty$ 。固定 $\varepsilon > 0$, 由式 (10.7) 取开集 $\Omega \supset B$, 使

$$\mu^*(\Omega) \leq \mu^*(B) + \varepsilon.$$

由开集情形,

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) &\leq \mu^*(A \cap \Omega) + \mu^*(A^c \cap \Omega) \\ &\leq \mu^*(\Omega) \leq \mu^*(B) + \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 式 (10.4) 对任意 B 成立。

所以所有开集都是 μ^* -可测的。命题 10.1 中的可测集族是包含 $\mathcal{O}(X)$ 的 σ -代数, 因而包含 $\mathcal{B}(X)$ 。因此

$$\mu := \mu^*|_{\mathcal{B}(X)}$$

是 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上的测度, 并满足式 (10.6)。

第三步: μ 在紧集上有限。 设 $K \subset X$ 紧。由局部紧性, 可取具有紧闭包的开集 Ω , 使 $K \subset \Omega$ 。由引理 10.1(b), 存在 $\varphi \in C_K(X, [0, 1])$, 使

$$\mathbf{1}_K \leq \varphi \prec \mathbf{1}_\Omega.$$

若

$$f \in C_K(X, [0, 1]), \quad f \prec \mathbf{1}_K,$$

则

$$f \leq \mathbf{1}_K \leq \mathbf{1}_\Omega \leq \varphi.$$

由式 (10.6) 以及 Φ 的单调性,

$$\mu(\overset{\circ}{K}) = \sup\{\Phi(f) : f \in C_K(X, [0, 1]), f \prec \mathbf{1}_K\} \leq \Phi(\varphi) < +\infty.$$

把这一结论应用于紧集 $\overline{\Omega}$ 。由于

$$\Omega \subset \overset{\circ}{\overline{\Omega}},$$

得到

$$\mu(K) \leq \mu(\Omega) \leq \mu(\overset{\circ}{\overline{\Omega}}) < +\infty.$$

第四步: 相对紧开集的单调逼近。 设 $\Omega \in \mathcal{O}(X)$ 且 $\overline{\Omega}$ 紧。我们构造递增列

$$(\varphi_n)_{n \geq 1} \subset C_K(X, [0, 1])$$

使

$$0 \leq \varphi_n \uparrow \mathbf{1}_\Omega, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\varphi_n) \geq \mu(\Omega).$$

若 $\Omega = X$, 则 X 紧, 取 $\varphi_n \equiv 1$ 即可。下面设 $\Omega \neq X$, 并令

$$K_n := \{x \in X : d(x, \Omega^c) \geq 1/n\}.$$

则每个 K_n 都是包含于 Ω 的紧集, 而且

$$K_n \uparrow \Omega.$$

由引理 10.1(b), 对每个 n 可取 $\psi_n \in C_K(X, [0, 1])$, 使

$$\mathbf{1}_{K_n} \leq \psi_n \prec \mathbf{1}_\Omega.$$

令

$$\varphi_n := \max_{1 \leq k \leq n} \psi_k.$$

于是 φ_n 递增, $\varphi_n \prec \mathbf{1}_\Omega$, 并且在 K_n 上恒为 1。因此

$$0 \leq \varphi_n \uparrow \mathbf{1}_\Omega.$$

c

下面研究 $(\Phi(\varphi_n))$ 。由第三步, $\mu(\Omega) < +\infty$ 。固定 $\varepsilon > 0$ 。由式 (10.6), 存在

$$f \in C_K(X, [0, 1]), \quad f \prec \mathbf{1}_\Omega,$$

使

$$\mu(\Omega) \leq \Phi(f) + \varepsilon.$$

令

$$\theta_n := \min(f, \varphi_n).$$

则 $\theta_n \in C_K(X, [0, 1])$ 。因为 $\varphi_n = 1$ 于 K_n , $\theta_n = f$ 于 K_n 。对 $n \geq 2$, 又有

$$K_{n-1} \subset \overset{\circ}{K}_n,$$

所以

$$f - \theta_n \prec \mathbf{1}_{\Omega \setminus K_{n-1}}.$$

由单调性及式 (10.6),

$$\Phi(f) = \Phi(\theta_n) + \Phi(f - \theta_n) \leq \Phi(\varphi_n) + \mu(\Omega \setminus K_{n-1}).$$

而 $K_n \uparrow \Omega$ 且 $\mu(\Omega) < +\infty$, 故

$$\mu(\Omega \setminus K_{n-1}) \longrightarrow 0.$$

所以

$$\mu(\Omega) - \varepsilon \leq \Phi(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\varphi_n).$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 得到所需结论。

第五步：证明表示公式 (10.1)。 先设 $f \in C_K(X, \mathbb{R}_+)$, 证明

$$\Phi(f) \leq \int_X f \, d\mu.$$

把 f 除以 $1 + \|f\|_{\sup}$, 可假设

$$f(X) \subset [0, 1].$$

令 $K := \text{supp } f$. 固定 $n \geq 1$, 并对 $k = 0, \dots, n-1$ 定义

$$E_k := \left\{ \frac{k}{n} \leq f < \frac{k+1}{n} \right\} \cap K.$$

这些 Borel 集两两不交, 并组成 K . 由于 $E_k \subset K$, $\mu(E_k) < +\infty$. 由外正则性, 可取开集 Ω_k , 使

$$E_k \subset \Omega_k \subset \left\{ f < \frac{k+1}{n} \right\},$$

并且

$$\mu(\Omega_k) \leq \mu(E_k) + \frac{\mu(K) + 1}{n^2}.$$

开集族 $(\Omega_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ 覆盖 K . 由引理 10.1(c), 存在 $\varphi_k \in C_K(X, [0, 1])$, 使

$$\varphi_k \prec \mathbf{1}_{\Omega_k}, \quad \mathbf{1}_K \leq \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k \leq 1.$$

在 K 上, 上式之和恰为 1, 故

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k f.$$

又因 $\Omega_k \subset \{f < (k+1)/n\}$,

$$0 \leq \varphi_k f \leq \frac{k+1}{n} \varphi_k.$$

所以

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(\varphi_k f) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \Phi(\varphi_k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \mu(\Omega_k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \mu(E_k) + \frac{\mu(K) + 1}{n}. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\mu &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{E_k} f \, d\mu \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \mu(E_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \mu(E_k) - \frac{\mu(K)}{n}. \end{aligned}$$

因此

$$\Phi(f) \leq \int_X f \, d\mu + \frac{2\mu(K) + 1}{n}.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 便有

$$\Phi(f) \leq \int_X f \, d\mu.$$

缩放回来后, 该结论对所有非负 $f \in C_K(X, \mathbb{R})$ 成立。^d

现在设 $f \in C_K(X, \mathbb{R})$ 符号任意, $K := \text{supp } f$. 取相对紧开集 $\Omega \supset K$, 以及第四步构造的 (φ_n) . 由于 $K \subset \Omega$ 紧, 存在 n_0 , 使对每个 $n \geq n_0$,

$$K \subset K_n, \quad \varphi_n = 1 \text{ 于 } K.$$

取 $c \geq \|f\|_{\text{sup}}$. 则

$$f + c\varphi_n \geq 0, \quad n \geq n_0.$$

由已证的非负情形,

$$\Phi(f) + c\Phi(\varphi_n) \leq \int_X f \, d\mu + c \int_X \varphi_n \, d\mu.$$

第四步给出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\varphi_n) \geq \mu(\Omega),$$

而单调收敛定理给出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n \, d\mu = \mu(\Omega).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$\Phi(f) \leq \int_X f \, d\mu.$$

对 $-f$ 应用同一不等式, 得到反向不等式, 从而式 (10.1) 成立。^e

第六步：由 (10.1) 推出 (10.3), 并证明唯一性。 设 ν 是 $\mathcal{B}(X)$ 上满足 (10.1) 的测度。若 $K \subset X$ 紧, 且 $f \in C_K(X, \mathbb{R})$ 满足 $\mathbf{1}_K \leq f$, 则 $f \geq 0$, 并且

$$\nu(K) = \int_X \mathbf{1}_K \, d\nu \leq \int_X f \, d\nu = \Phi(f).$$

因此

$$\nu(K) \leq \inf\{\Phi(f) : f \in C_K(X, \mathbb{R}), \mathbf{1}_K \leq f\}.$$

特别地, 由引理 10.1(b) 可选这样的 f , 故 ν 在紧集上有限。

反过来, 取具有紧闭包的开集 $\Omega \supset K$, 并令

$$\Omega_n := \{x : d(x, K) < 1/n\} \cap \Omega.$$

则 $\Omega_n \downarrow K$, 且

$$\nu(\Omega_n) \leq \nu(\overline{\Omega}) < +\infty.$$

所以

$$\nu(\Omega_n \setminus K) \downarrow 0.$$

由引理 10.1(b), 对每个 n 可取 $\varphi_n \in C_K(X, [0, 1])$, 使

$$\mathbf{1}_K \leq \varphi_n \prec \mathbf{1}_{\Omega_n}.$$

于是

$$\Phi(\varphi_n) = \int_X \varphi_n d\nu \leq \nu(\Omega_n) = \nu(K) + \nu(\Omega_n \setminus K).$$

从而

$$\nu(K) \geq \inf\{\Phi(\varphi) : \varphi \in C_K(X, [0, 1]), \mathbf{1}_K \leq \varphi\} - \nu(\Omega_n \setminus K).$$

令 $n \rightarrow \infty$ 。又对任意 $f \in C_K(X, \mathbb{R})$ 且 $\mathbf{1}_K \leq f$ ，函数 $\min(f, 1)$ 属于 $C_K(X, [0, 1])$ 、仍大于等于 $\mathbf{1}_K$ ，并且 $\Phi(\min(f, 1)) \leq \Phi(f)$ 。因此把下确界限制在 $[0, 1]$ -值函数上并不改变其值。于是 ν 满足式 (10.3)。^f

特别地，前面构造的 μ 也满足式 (10.3)。若 ν 是另一满足 (10.1) 的测度，则由 (10.3)， μ, ν 在所有紧集上相同。因为 X 局部紧且可分，定理 6.12(b) 给出

$$\mu = \nu.$$

第七步：证明定义 (10.2) 与 (10.6) 等价。 显然，对每个开集 Ω ，

$$\begin{aligned} \mu(\Omega) &= \sup\{\Phi(f) : f \in C_K(X, [0, 1]), f \prec \mathbf{1}_\Omega\} \\ &\leq \sup\{\Phi(f) : f \in C_K(X, [0, 1]), f \leq \mathbf{1}_\Omega\}. \end{aligned}$$

反过来，若

$$f \in C_K(X, [0, 1]), \quad f \leq \mathbf{1}_\Omega,$$

则由第五步，

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu \leq \int_X \mathbf{1}_\Omega d\mu = \mu(\Omega).$$

对 f 取上确界，即得反向不等式。因此式 (10.2) 成立。□

^a**校订注：**原书在这里由 $f \leq \varphi_1 f + \varphi_2 f$ 错误地写出 $\Phi(f) = \Phi(\varphi_1 f) + \Phi(\varphi_2 f)$ ；一般只能由正性得到“ $\leq$ ”。原书还把同一个 f 连续引入了两次，这里删除重复句。

^b**校订注：**原书在本步第一种情形误写 $\mu(B) = +\infty$ ，但测度 μ 此时尚未定义，应为 $\mu^*(B)$ 。此外，原书用 $\mathbf{1}_{A \cap B} + \mathbf{1}_{V \cap B} = \mathbf{1}_{(A \cup V) \cap B}$ 说明 $f + g \leq 1$ ，该等式要求 $A \cap V = \emptyset$ ，而构造只保证 $U \cap V = \emptyset$ 。正确理由是 $\text{supp } f \subset U, \text{supp } g \subset V$ ，故二者不在同一点同时非零。

^c**校订注：**原书对每个 K_n 分别应用 Urysohn 引理后，直接断言所得 φ_n 递增；该引理并不保证不同 n 的选择彼此相容。这里用 $\varphi_n = \max_{k \leq n} \psi_k$ 补出单调性，并单独处理 $\Omega = X$ 时到空集距离无定义的问题。

^d**校订注：**原书只要求 $\Omega_k \supset E_k$ ，却随后使用 $\varphi_k f \leq ((k+1)/n)\varphi_k$ 。这还需要 $\Omega_k \subset \{f < (k+1)/n\}$ 。这里把外正则开邻域与这个开子水平集相交，并把误差写成即使 $\mu(K) = 0$ 也可选取的正数。

^e**校订注：**原书声称对所有 $n \geq 1$ 都有 $K \subset K_n$ 。一般紧集 $K \subset \Omega$ 只保证从某个 n_0 起成立；这里把论证限制到 $n \geq n_0$ 。

^f**校订注：**原书把引理 10.1(b) 的有序对误写为 (Ω_n, K) ，实际应为 (K, Ω_n) ；紧接着的下确界中又把条件 $\mathbf{1}_K \leq \varphi$ 的右端变量误植为 f 。这里一并改正，并补出将下确界限制为 $[0, 1]$ -值函数的截断理由。

正如本章开头所说，从这个定理的一个略作改写的版本出发，可以在局部紧可分空间上重建整套 Lebesgue 测度与积分理论。这里我们只说明：它能够从 Riemann 积分出发，给出 Lebesgue 测度的另一种构造。

应用：Lebesgue 测度的一种新构造。 在 $C_K(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 上定义

$$\Phi(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

其中右端是在第 1 章勾勒的、Riemann 意义下的广义积分。显然 Φ 是正线性泛函。由 Riesz

表示定理，存在唯一的 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的 Borel 测度 μ ，满足 (10.1)–(10.3)。
对任意 $a \in \mathbb{R}$ ，作初等变量替换便有

$$\Phi(f) = \Phi(f(\cdot + a)).$$

表示测度的唯一性因此推出 μ 的平移不变性。

对每个 $n \geq 2$ ，定义紧支撑连续函数

$$f_n(x) := [\min\{nx, 1, n(1-x)\}]^+, \quad u^+ := \max(u, 0).$$

则

$$0 \leq f_n \leq \mathbf{1}_{(0,1)}, \quad \Phi(f_n) = 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow 1.$$

由式 (10.2)，

$$\mu((0,1)) \geq 1.$$

同样，定义

$$g_n(x) := [\min\{n(x+1/n), 1, n(1-x+1/n)\}]^+.$$

这些函数满足

$$\mathbf{1}_{[0,1]} \leq g_n, \quad \Phi(g_n) \longrightarrow 1.$$

由式 (10.3)，

$$\mu([0,1]) \leq 1.$$

所以

$$\mu((0,1)) = \mu([0,1]) = 1.$$

由第 6.1 节 Lebesgue 测度的唯一性， μ 正是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度：

$$\mu = \lambda.$$

10.2 Radon–Nikodym 定理

第 8 章已经说明：若

$$f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

是可测函数，则

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

定义了一个测度；而且 ν 有限当且仅当 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^1(\mu)$ 。称 f 为 ν 关于 μ 的**密度**或 **Radon–Nikodym 导数**，常记为

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

由这种方式定义的 ν 显然满足

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0, \quad A \in \mathcal{A}. \quad (10.15)$$

这个性质称为 ν 关于 μ 的**绝对连续性**，记作

$$\nu \ll \mu.$$

由密度 f 得到的测度 ν 也常写成 $f \cdot \mu$ 。

Radon–Nikodym 定理要回答上述构造的逆问题：若 $\nu \ll \mu$ ，是否一定存在 ν 关于 μ 的密度？在完全一般的情形下，答案是否定的。

反例。 在可测空间

$$([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$$

上，分别考虑计数测度 m 与 Lebesgue 测度 λ 。若 $m(A) = 0$ ，则 $A = \emptyset$ ，因而 $\lambda(A) = 0$ 。所以

$$\lambda \ll m.$$

假设存在 Borel 可测函数

$$f : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

使得

$$\lambda(A) = \int_A f \, dm, \quad A \in \mathcal{B}([0, 1]).$$

由 $\lambda([0, 1]) = 1$ 可知 $f \in \mathbf{L}_+^1(m)$ 。于是集合

$$D := \{f > 0\}$$

至多可数。故 $D^c = [0, 1] \setminus D$ 是 Borel 集，且 $\lambda(D^c) = 1$ ；但 $f = 0$ 于 D^c ，所以

$$\lambda(D^c) = \int_{D^c} f \, dm = 0,$$

矛盾。^a

^a**校订注：**原书先把可测空间固定为 $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ ，随后却把假设中的函数写成 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ，并令 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。这里将定义域与 σ -代数统一改回 $[0, 1]$ 上的对象。

这个反例说明必须对参考测度 μ 加入适当条件。在证明 Radon–Nikodym 定理之前，先给出绝对连续性的一个等价刻画。

命题 10.2。 设 μ, ν 是可测空间 $(X, \mathcal{A})$ 上的两个测度。

(a) 若 μ, ν 满足

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) < \eta \implies \nu(A) < \varepsilon, \quad (10.16)$$

则 $\nu \ll \mu$ 。

(b) 反之，若 ν 是有限测度且 $\nu \ll \mu$ ，则条件 (10.16) 成立。

证明。 (a) 若 $\mu(A) = 0$ ，则对条件 (10.16) 中与任意 $\varepsilon > 0$ 对应的 η ，都有 $\mu(A) < \eta$ ，从而 $\nu(A) < \varepsilon$ 。令 $\varepsilon \downarrow 0$ ，得到 $\nu(A) = 0$ 。

(b) 用反证法。若 (10.16) 不成立，则存在 $\varepsilon_0 > 0$ ，使对每个 $n \geq 1$ ，都能取 $A_n \in \mathcal{A}$ 满足

$$\mu(A_n) < \frac{1}{n^2}, \quad \nu(A_n) \geq \varepsilon_0.$$

令

$$A := \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

对每个 $n \geq 1$,

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^2}.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得到 $\mu(A) = 0$ 。另一方面, 记 $B_n := \bigcup_{k \geq n} A_k$, 则 $B_n \downarrow A$, 且

$$\nu(B_n) \geq \nu(A_n) \geq \varepsilon_0.$$

因为 ν 有限, 测度的上连续性给出

$$\nu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(B_n) \geq \varepsilon_0.$$

所以 $\nu \not\ll \mu$, 与假设矛盾。 □

10.2.1 参考测度有限的情形

定理 10.4 (Radon–Nikodym 定理)。设 μ, ν 是可测空间 $(X, \mathcal{A})$ 上的两个有限测度。则下列条件等价:

(i) 对每个 $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0;$$

(ii) 存在 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^1(\mu)$, 使对每个 $A \in \mathcal{A}$,

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

此外, f 在 $L_{\mathbb{R},+}^1(\mu)$ 中唯一, 也就是在 μ -几乎处处相等的意义下唯一。

定理 10.4 的证明。只需证明 (i) 推出 (ii)。

第一步: $\nu \leq \mu$ 的情形。这里 $\nu \leq \mu$ 是指

$$\nu(A) \leq \mu(A), \quad A \in \mathcal{A};$$

等价地, 对每个非负可测函数 g ,

$$\int_X g \, d\nu \leq \int_X g \, d\mu.$$

定义线性泛函

$$\Phi : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(g) := \int_X g \, d\nu.$$

由 Cauchy–Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned} |\Phi(g)| &\leq \int_X |g| \, d\nu \\ &\leq \left(\int_X |g|^2 \, d\nu \right)^{1/2} \nu(X)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_X |g|^2 \, d\mu \right)^{1/2} \nu(X)^{1/2}. \end{aligned}$$

所以 Φ 连续。由定理 9.8, 存在 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\mu)$, 使

$$\int_X g \, d\nu = \int_X g f \, d\mu, \quad g \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\mu).$$

由于 μ 有限,

$$\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mu) \subset \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\mu),$$

故取 $g = \mathbf{1}_A$ 得

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}. \quad (10.17a)$$

又因 $1 \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\mu)$, 有 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ 。

下面证明 $0 \leq f \leq 1$ 在 μ -几乎处处成立。若 $\mu(\{f < 0\}) > 0$, 则对某个 $n_0 \geq 1$,

$$\mu\left(\left\{f \leq -\frac{1}{n_0}\right\}\right) > 0.$$

由 (10.17a),

$$0 \leq \nu\left(\left\{f \leq -\frac{1}{n_0}\right\}\right) \leq -\frac{1}{n_0} \mu\left(\left\{f \leq -\frac{1}{n_0}\right\}\right) < 0,$$

矛盾。因此 $f \geq 0$ 几乎处处。若 $\mu(\{f > 1\}) > 0$, 则对某个 $n_0 \geq 1$, 集合

$$A_0 := \left\{f \geq 1 + \frac{1}{n_0}\right\}$$

有正测度, 于是

$$\nu(A_0) = \int_{A_0} f \, d\mu \geq \left(1 + \frac{1}{n_0}\right) \mu(A_0) > \mu(A_0),$$

这与 $\nu \leq \mu$ 矛盾。故 $f \leq 1$ 几乎处处。

第二步：一般情形。 对有限测度 ν 与 $\mu + \nu$ 使用第一步。因为 $\nu \leq \mu + \nu$, 存在

$$f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^1(\mu + \nu), \quad 0 \leq f \leq 1 \quad (\mu + \nu)\text{-几乎处处},$$

使

$$\nu(A) = \int_A f \, d(\mu + \nu), \quad A \in \mathcal{A}.$$

因此有测度恒等式

$$(1 - f) \cdot \nu = f \cdot \mu. \quad (10.17b)$$

a

令 $N := \{f = 1\}$ 。由 (10.17b),

$$\mu(N) = \int_N f \, d\mu = \int_N (1 - f) \, d\nu = 0.$$

再由 $\nu \ll \mu$, 有 $\nu(N) = 0$ 。因此对任意 $A \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu(A \cap N) + \int_{A \cap N^c} \frac{1}{1 - f} (1 - f) \, d\nu \\ &= \int_A \mathbf{1}_{N^c} \frac{f}{1 - f} \, d\mu. \end{aligned}$$

于是

$$h := \mathbf{1}_{N^c} \frac{f}{1-f}$$

就是所求密度，并且

$$\int_X h \, d\mu = \nu(X) < +\infty.$$

第三步：唯一性。 若 $f, \tilde{f} \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^1(\mu)$ 都满足 (ii)，则

$$\int_{\{f>\tilde{f}\}} f \, d\mu = \nu(\{f>\tilde{f}\}) = \int_{\{f>\tilde{f}\}} \tilde{f} \, d\mu.$$

故

$$\int_{\{f>\tilde{f}\}} (f - \tilde{f}) \, d\mu = 0,$$

从而 $\mu(\{f>\tilde{f}\}) = 0$ 。交换二者，便得 $f = \tilde{f}$ 在 μ -几乎处处成立。 $\square$

校订注：原书在这里把 $0 \leq f \leq 1$ 写成“ μ -几乎处处”，但第一步应用于参考测度 $\mu + \nu$ ，故正确的表述是“ $(\mu + \nu)$ -几乎处处”。这也同时保证后面对 μ 与 ν 的积分均可使用该界。

注 (Lebesgue 分解)。 上面的证明事实上给出了更一般的结论：若 μ, ν 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的两个有限测度，则存在 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^1(\mu)$ 与 μ -零集 $N \in \mathcal{A}$ ，使

$$\nu(A) = \nu(A \cap N) + \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}. \quad (10.17)$$

若 $\tilde{f}, \tilde{N}$ 也满足 (10.17)，则

$$f = \tilde{f} \quad \mu\text{-几乎处处}, \quad \mathbf{1}_N = \mathbf{1}_{\tilde{N}} \quad \mu\text{-几乎处处},$$

亦即 $\mu(N \triangle \tilde{N}) = 0$ 。

10.2.2 推广到 σ -有限情形

在 μ, ν 都为 σ -有限测度时，定理 10.4 仍然成立；只是 Radon–Nikodym 导数不再必然可积。

定理 10.5 (Radon–Nikodym 定理)。 设 μ, ν 是可测空间 $(X, \mathcal{A})$ 上的两个 σ -有限测度。则下列条件等价：

(i) 对每个 $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0;$$

(ii) 存在可测函数 $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ，使

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

此外， f 在 μ -几乎处处相等的意义下唯一。

证明。 只需证明 (i) 推出 (ii)。由 σ -有限性，可取两列可测分割 $(F_n)_{n \geq 0}$ 、 $(G_n)_{n \geq 0}$ ，使

$$\mu(F_n) < +\infty, \quad \nu(G_n) < +\infty, \quad n \geq 0.$$

集合族

$$F_k \cap G_\ell, \quad k, \ell \geq 0,$$

仍构成 X 的可测分割，而且每个集合对 μ 与 ν 都具有有限测度。由于 $\mathbb{N}^2$ 与 $\mathbb{N}$ 等势，可把这些交集重新编号为 $(E_n)_{n \geq 0}$ 。

对每个 $n \geq 0$ ，定义有限测度

$$\mu_n(A) := \mu(A \cap E_n), \quad \nu_n(A) := \nu(A \cap E_n).$$

显然 $\nu_n \ll \mu_n$ 。由定理 10.4，存在 $f_n \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^1(\mu_n)$ ，使

$$\nu_n = f_n \cdot \mu_n = (f_n \mathbf{1}_{E_n}) \cdot \mu.$$

令

$$f := \sum_{n \geq 0} f_n \mathbf{1}_{E_n}.$$

由 Beppo Levi 定理，对任意 $A \in \mathcal{A}$ ，

$$\begin{aligned} \int_A f \, d\mu &= \sum_{n \geq 0} \int_X \mathbf{1}_A f_n \mathbf{1}_{E_n} \, d\mu \\ &= \sum_{n \geq 0} \nu(A \cap E_n) = \nu(A). \end{aligned}$$

唯一性与有限测度情形完全相同。 □

10.3 L^p – L^q 对偶

设 $p, q \in [1, +\infty]$ 互为共轭指数，即

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Hölder 不等式立即表明：对每个 $g \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^q(\mu)$ ，映射

$$f \mapsto \int_X f \bar{g} \, d\mu$$

是 $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu)$ 上的连续线性泛函，其算子范数不超过 $\|g\|_q$ 。本节要证明：当 $1 \leq p < +\infty$ 时， $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu)$ 上的每个连续线性泛函都以这种方式得到。

10.3.1 正实线性泛函

定理 10.6。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是 σ -有限测度空间， $p \in [1, +\infty)$ ， q 是其共轭指数。设

$$\Phi : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$$

是正的连续线性泛函；这里“正”是指对每个 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^p(\mu)$ ，都有 $\Phi(f) \geq 0$ 。则存在唯一的 $g \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^q(\mu)$ ，使

$$\Phi(f) = \int_X fg \, d\mu, \quad f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu).$$

此外，

$$\|g\|_q = \|\Phi\|.$$

定理 10.6 的证明。 先注意，对 $A \in \mathcal{A}$ ，

$$\mathbf{1}_A \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu) \iff \mu(A) < +\infty, \quad \|\mathbf{1}_A\|_p = \mu(A)^{1/p}.$$

由 σ -有限性，可取递增可测集列 $(E_n)_{n \geq 1}$ ，使

$$X = \bigcup_{n \geq 1} E_n, \quad \mu(E_n) < +\infty.$$

令

$$F_1 := E_1, \quad F_n := E_n \setminus E_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

第一步：构造 g 。 对 $n \geq 1$ 、 $A \in \mathcal{A}$ ，定义

$$\nu_n(A) := \Phi(\mathbf{1}_{A \cap F_n}).$$

下面验证 ν_n 是关于 μ 绝对连续的有限测度。由 Φ 的正性， $\nu_n(A) \geq 0$ ，并且

$$\nu_n(X) = \Phi(\mathbf{1}_{F_n}) \leq \|\Phi\| \mu(F_n)^{1/p} < +\infty.$$

显然 $\nu_n(\emptyset) = 0$ 。若 $(A_k)_{k \geq 1}$ 两两不交，则

$$\sum_{k=1}^m \mathbf{1}_{A_k \cap F_n} \longrightarrow \mathbf{1}_{(\bigcup_{k \geq 1} A_k) \cap F_n} \quad \text{于 } \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu).$$

事实上，该差的 p 次方积分就是有限测度集合 F_n 中相应尾集的测度，并趋于零。利用 Φ 的连续性和有限可加性，得到

$$\nu_n \left(\bigcup_{k \geq 1} A_k \right) = \sum_{k \geq 1} \nu_n(A_k).$$

若 $\mu(A) = 0$ ，则

$$0 \leq \nu_n(A) \leq \|\Phi\| \mu(A \cap F_n)^{1/p} = 0.$$

故 $\nu_n \ll \mu$ 。

由定理 10.4，存在 $g_n \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^1(\mu)$ ，使

$$\nu_n(A) = \int_A g_n \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

因为 $\nu_n(A) = \nu_n(A \cap F_n)$ ，可把 g_n 换成 $g_n \mathbf{1}_{F_n}$ ，从而假定它在 F_n^c 上为零。^a

第二步：证明表示公式。 由于 (F_n) 两两不交，可以定义非负可测函数

$$g := \sum_{n \geq 1} g_n.$$

先设 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^p(\mu)$ 。对支撑在 E_n 上的非负简单函数，Radon–Nikodym 表示式与线性性给出

$$\Phi(f\mathbf{1}_{E_n}) = \int_X f g_n \, d\mu.$$

再用递增的有界简单函数逼近任意 $f\mathbf{1}_{E_n}$ ，同时使用 Φ 的连续性与 Beppo Levi 定理，可知该等式对一般非负 $f \in \mathbf{L}^p$ 仍成立。

又因为

$$\sum_{n=1}^N f\mathbf{1}_{E_n} \longrightarrow f \quad \text{于 } \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu),$$

所以由 Φ 的连续性 & Beppo Levi 定理，

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \sum_{n \geq 1} \Phi(f\mathbf{1}_{E_n}) \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_X f g_n \, d\mu = \int_X f g \, d\mu. \end{aligned}$$

把任意实函数写成 $f = f^+ - f^-$ ，表示公式便推广到所有 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu)$ 。

第三步：证明 $g \in \mathbf{L}^q$ 及范数等式。 先设 $p > 1$ ，于是 $q < +\infty$ 。对 $m, n \geq 1$ ，令

$$f_{m,n} := g^{q-1} \mathbf{1}_{E_n \cap \{g \leq m\}}.$$

因为 $\mu(E_n) < +\infty$ ，有 $f_{m,n} \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^p(\mu)$ 。记

$$I_{m,n} := \int_{E_n} |g|^q \mathbf{1}_{\{g \leq m\}} \, d\mu.$$

由 $p(q-1) = q$ 与表示公式，

$$I_{m,n} = \Phi(f_{m,n}) \leq \|\Phi\| \|f_{m,n}\|_p = \|\Phi\| I_{m,n}^{1/p}.$$

若 $I_{m,n} > 0$ ，约去 $I_{m,n}^{1/p}$ ；若它为零，结论显然。于是

$$I_{m,n}^{1/q} \leq \|\Phi\|.$$

先令 $m \rightarrow \infty$ ，再令 $n \rightarrow \infty$ ，Beppo Levi 定理给出

$$\|g\|_q \leq \|\Phi\|.$$

若 $p = 1$ ，则 $q = +\infty$ 。设存在 $t > \|\Phi\|$ 使 $A := \{g > t\}$ 具有正测度。由于 $E_n \uparrow X$ ，对某个 n ，

$$0 < \mu(A \cap E_n) < +\infty.$$

取 $f = \mathbf{1}_{A \cap E_n}$ ，便有

$$t\mu(A \cap E_n) < \int_X f g \, d\mu = \Phi(f) \leq \|\Phi\| \mu(A \cap E_n),$$

矛盾。因此 $g \leq \|\Phi\|$ 几乎处处，即

$$\|g\|_\infty \leq \|\Phi\|.$$

b

反过来, 无论 $p = 1$ 还是 $p > 1$, Hölder 不等式都给出

$$|\Phi(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p,$$

所以 $\|\Phi\| \leq \|g\|_q$ 。综上,

$$\|\Phi\| = \|g\|_q.$$

第四步：唯一性。 若 $g' \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^q(\mu)$ 也表示 Φ , 则对每个 $A \in \mathcal{A}$,

$$\nu_n(A) = \Phi(\mathbf{1}_{A \cap F_n}) = \int_A g' \mathbf{1}_{F_n} d\mu.$$

Radon–Nikodym 导数的唯一性给出

$$g' \mathbf{1}_{F_n} = g \mathbf{1}_{F_n} \quad \mu\text{-几乎处处}$$

对每个 n 成立。由于 $X = \bigcup_{n \geq 1} F_n$, 故 $g' = g$ 几乎处处。 $\square$

^a**校订注：**原书在验证有限性时写成 $\nu_n(X) = \mu(F_n) < +\infty$ 。左边实际等于 $\Phi(\mathbf{1}_{F_n})$, 并不等于 $\mu(F_n)$; 这里用连续性给出正确估计 $\nu_n(X) \leq \|\Phi\| \mu(F_n)^{1/p}$ 。

^b**校订注：**原书在 $p = 1$ 时声称把前面的论证改取 $p_0 = r/(r-1)$ 、 $q = r$, 即可得到 $\|g\|_r \leq \|\Phi\|$ 。但 Φ 只已知在 L^1 上连续, 不能直接用其 L^1 算子范数控制 L^{p_0} 范数; 在一般 σ -有限空间上该推导缺少依据。这里改用有限测度子集上的示性函数, 直接得到本质上界。

10.3.2 实或复线性泛函

借助定理 10.3 的正负部分分解, 可以把定理 10.6 推广到任意实或复连续线性泛函。

定理 10.7 (L^p – L^q 对偶定理)。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是 σ -有限测度空间, $p \in [1, +\infty)$, q 是其共轭指数。则 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 的拓扑对偶与 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ 等距同构。更明确地说, 对每个连续线性泛函

$$\Phi : \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu) \longrightarrow \mathbb{K},$$

存在唯一的 $g \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$, 使

$$\Phi(f) = \int_X f \bar{g} d\mu, \quad f \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu), \quad (10.17c)$$

并且

$$\|\Phi\| = \|g\|_q.$$

当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时, 式 (10.17c) 中的共轭当然可以省略。

定理 10.7 的证明。 先考虑实数情形。由定理 10.3,

$$\Phi = \Phi^+ - \Phi^-,$$

其中 Φ^+, Φ^- 是正连续线性泛函。定理 10.6 分别给出 $g^+, g^- \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^q(\mu)$, 使

$$\Phi^\pm(f) = \int_X f g^\pm d\mu.$$

令 $g := g^+ - g^-$, 便得到所需表示。

现在考虑复数情形。把 Φ 限制到实函数，并定义实线性泛函

$$\Psi_1(u) := \operatorname{Re} \Phi(u), \quad \Psi_2(u) := \operatorname{Im} \Phi(u), \quad u \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu).$$

由实数情形，存在 $a, b \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^q(\mu)$ ，使

$$\Phi(u) = \int_X u(a + ib) d\mu \quad (u \text{ 为实函数}).$$

令 $g := a - ib$ 。若 $f = u + iv$ ，复线性性给出

$$\Phi(f) = \Phi(u) + i\Phi(v) = \int_X (u + iv)\bar{g} d\mu,$$

故 (10.17c) 成立。

Hölder 不等式给出

$$\|\Phi\| \leq \|g\|_q.$$

若 $p > 1$ ，令

$$f_g := \mathbf{1}_{\{g \neq 0\}} \frac{g}{|g|} |g|^{q-1}.$$

则 $f_g \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu)$ ，并且

$$\|f_g\|_p^p = \|g\|_q^q, \quad \Phi(f_g) = \int_X |g|^q d\mu = \|g\|_q^q.$$

当 $g \neq 0$ 时，

$$\|g\|_q^q \leq \|\Phi\| \|f_g\|_p = \|\Phi\| \|g\|_q^{q/p},$$

因而 $\|g\|_q \leq \|\Phi\|$ ；当 $g = 0$ 时结论显然。

若 $p = 1$ ，记 $M := \|g\|_{\infty}$ 。给定 $\varepsilon > 0$ 。当 $M > 0$ 时，集合

$$A_{\varepsilon} := \{|g| > M - \varepsilon\}$$

具有正测度。由 σ -有限性，可取可测集 $B \subset A_{\varepsilon}$ ，满足

$$0 < \mu(B) < +\infty.$$

令

$$f := \frac{1}{\mu(B)} \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\{g \neq 0\}} \frac{g}{|g|}.$$

则 $\|f\|_1 = 1$ ，且

$$\|\Phi\| \geq |\Phi(f)| = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| d\mu \geq M - \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$ ，得到 $\|g\|_{\infty} \leq \|\Phi\|$ 。因此所有情形下都有

$$\|\Phi\| = \|g\|_q.$$

a

最后证明唯一性。设 g' 也满足 (10.17c)，并令 $h := g - g'$ 。若 $p > 1$ ，取

$$f_h := \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}} \frac{h}{|h|} |h|^{q-1},$$

则

$$0 = \int_X f_h \bar{h} d\mu = \int_X |h|^q d\mu,$$

故 $h = 0$ 几乎处处。若 $p = 1$ 且 $h \neq 0$ 于一个正测度集合，则对某个 $\varepsilon > 0$ ，集合 $\{|h| > \varepsilon\}$ 有正测度；再取其有限正测度子集 B ，并用

$$f = \mathbf{1}_B \frac{h}{|h|}$$

代入表示式，得到

$$0 = \int_B |h| d\mu > 0,$$

矛盾。故 $g = g'$ 几乎处处。 □

^a**校订注：**原书用 $f_g = \mathbf{1}_{\{g \neq 0\}}(g/|g|)|g|^{q-1}$ 同时处理 $1 \leq p < +\infty$ ，但在 $p = 1, q = +\infty$ 时 $|g|^{q-1}$ 没有意义。这里把端点 $p = 1$ 单独处理。

注。

- 当 $1 < p < +\infty$ 时，即使测度空间不是 σ -有限的，上述对偶定理仍然成立；这将在练习 10.8 中证明。
- 当 $p = 1$ 且测度空间不是 σ -有限的，表示性质可能失效（见练习 10.6）。
- $p = +\infty$ 的情形最不理想。只要 $\mathcal{A}$ 中存在两两不交的集合列 $(A_n)_{n \geq 1}$ ，满足

$$0 < \mu(A_n) < +\infty,$$

就存在 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu)$ 上不能由可积函数表示的正连续线性泛函。抽象证明依赖 Hahn-Banach 定理（见练习 10.14）。因此，这种表示性质在

$$\ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mathbb{N}, m) \quad \text{和} \quad \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$$

上都会失效，其中 m 是计数测度。

10.4 L^p 空间上的插值

本节研究作用在 L^p 空间上的算子。

定理 10.8 (Marcinkiewicz 插值定理)。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 与 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 是两个 σ -有限测度空间。设 T 是从

$$\mathbf{L}_{\mathbb{C}}^1(X, \mu) + \mathbf{L}_{\mathbb{C}}^{\infty}(X, \mu)$$

到 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 上复可测函数空间的算子，它不必线性，但满足

$$\exists k \in \mathbb{R}_+, \quad |T(f+g)| \leq k(|T(f)| + |T(g)|) \quad (f, g \text{ 属于定义域}). \quad (10.18)$$

假设存在 $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, +\infty]$ ，使

$$p_1 \neq p_2, \quad q_1 \neq q_2, \quad p_i \leq q_i \quad (i = 1, 2), \quad (10.19)$$

并且存在 $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_+$ ，使对 $i = 1, 2$ ，

$$\|T(f)\|_{L^{q_i}(\nu)} \leq M_i \|f\|_{L^{p_i}(\mu)}, \quad f \in \mathbf{L}_{\mathbb{C}}^{p_1}(\mu) \cap \mathbf{L}_{\mathbb{C}}^{p_2}(\mu). \quad (10.20)$$

则对每个 $\theta \in (0, 1)$, 存在只依赖于 $k, \theta, p_1, p_2, q_1, q_2$ 的常数 $C \geq 0$, 使

$$\|T(f)\|_{L^q(\nu)} \leq CM_1^\theta M_2^{1-\theta} \|f\|_{L^p(\mu)}, \quad f \in \mathbf{L}_\mathbb{C}^{p_1}(\mu) \cap \mathbf{L}_\mathbb{C}^{p_2}(\mu), \quad (10.21)$$

其中 p, q 由

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2} \quad (10.22)$$

定义。^a

^a**校订注：**原书把 T 的定义域写成 L^1 , 但 (10.20)–(10.21) 中的函数未必属于 L^1 , 证明中的截断函数也未必属于 L^1 . 这里按插值定理的标准定义域改为 $L^1 + L^\infty$, 它包含所有 L^r ($1 \leq r \leq \infty$). 此外, 原书声称 C 不依赖 (10.18) 中的 k , 而其公式 (10.31) 明含因子 $(2k)^q$; 这里把 k 正确列入依赖参数。

注 (Riesz–Thorin 定理)。 当 T 是线性算子时, 对所有 $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, +\infty]$ 与 $\theta \in [0, 1]$, (10.21) 中都可取 $C = 1$. 这就是 Riesz–Thorin 定理. 其证明需要复分析工具, 例如最大模原理与 Phragmén–Lindelöf 定理, 超出了本书范围。

定理 10.8 的证明。 证明采用 Zygmund 在文献 [15] 第 XII 章中的思路, 其核心是 L^p – L^q 对偶。

第一步：用分布函数 $\mu(\{|f| > t\})$ 作估计。 取

$$f \in \mathbf{L}_\mathbb{C}^{p_1}(\mu) \cap \mathbf{L}_\mathbb{C}^{p_2}(\mu).$$

由 p 位于 p_1, p_2 之间及练习 9.14, $f \in \mathbf{L}_\mathbb{C}^p(\mu)$. 固定 $u \geq 0$, 令

$$\text{ph}(f) := \mathbf{1}_{\{f \neq 0\}} \frac{f}{|f|},$$

并分解

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 := \mathbf{1}_{\{|f| \leq u\}} f + \mathbf{1}_{\{|f| > u\}} u \text{ph}(f), \quad f_2 := f - f_1.$$

于是

$$|f_1| = \min(|f|, u), \quad |f| = |f_1| + |f_2|.$$

先假设 $q_1, q_2 < +\infty$; 端点情形留到第四步. 交换下标后可设 $p_2 < p_1$. 由 (10.18), 对每个 $s \geq 0$,

$$\{|T(f)| > 2ks\} \subset \{|T(f_1)| > s\} \cup \{|T(f_2)| > s\}.$$

结合 Chebyshev 不等式与 (10.20), 得到

$$\begin{aligned} \nu(\{|T(f)| > 2ks\}) &\leq s^{-q_1} \|T(f_1)\|_{q_1}^{q_1} + s^{-q_2} \|T(f_2)\|_{q_2}^{q_2} \\ &\leq M_1^{q_1} s^{-q_1} \|f_1\|_{p_1}^{q_1} + M_2^{q_2} s^{-q_2} \|f_2\|_{p_2}^{q_2}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

^a

对非负可测函数 h 和 $r > 0$, 层蛋糕公式给出

$$\int_Y h^r d\nu = r \int_0^{+\infty} t^{r-1} \nu(\{h > t\}) dt.$$

将其用于 $h = |T(f)|$, 再作变量替换 $t = 2ks$, 得到

$$\|T(f)\|_q^q = q(2k)^q \int_0^{+\infty} s^{q-1} \nu(\{|T(f)| > 2ks\}) ds. \quad (10.24)$$

对 f_1, f_2 也使用同一公式，并注意

$$\mu(\{|f_1| > t\}) \leq \mathbf{1}_{[0,u]}(t)\mu(\{|f| > t\}),$$

$$\mu(\{|f_2| > t\}) = \mu(\{|f| > t+u\}),$$

便由 (10.23)–(10.24) 得到

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_q^q &\leq q(2k)^q M_1^{q_1} p_1^{q_1/p_1} \int_0^{+\infty} s^{q-q_1-1} \left(\int_0^u t^{p_1-1} \mu(\{|f| > t\}) dt \right)^{q_1/p_1} ds \\ &\quad + q(2k)^q M_2^{q_2} p_2^{q_2/p_2} \int_0^{+\infty} s^{q-q_2-1} \left(\int_u^{+\infty} (t-u)^{p_2-1} \mu(\{|f| > t\}) dt \right)^{q_2/p_2} ds. \end{aligned} \quad (10.25)$$

第二步：由 $L^r-L^{r'}$ 对偶得到一个积分不等式。 在 σ -有限测度空间上，对 $r \in (1, +\infty)$ 及 $r' = r/(r-1)$ ，定理 10.6 的对偶等式可写为

$$\|h\|_{L^r(\mu)} = \sup \left\{ \int_X h\varphi d\mu : \varphi \geq 0, \int_X \varphi^{r'} d\mu = 1 \right\}. \quad (10.26)$$

这个等式对任意非零非负可测函数 h 都成立，允许两边同为 $+\infty$ 。Hölder 不等式给出“ $\leq$ ”方向。反向不等式可如下得到：取递增有限测度集合 $H_n \uparrow X$ ，令

$$E_n := H_n \cap \{h \leq n\}, \quad \varphi_n := \frac{h^{r-1} \mathbf{1}_{E_n}}{\|h \mathbf{1}_{E_n}\|_r^{r-1}}$$

(忽略分母为零的项)。则 $\|\varphi_n\|_{r'} = 1$ ，并且

$$\int_X h\varphi_n d\mu = \|h \mathbf{1}_{E_n}\|_r \longrightarrow \|h\|_r.$$

b

下面设 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 、 $a > 0$ 、 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 、 $r \in [1, +\infty)$ ，并设 $G: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ 、 $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 可测，且

$$0 \leq G(s, t) \leq \begin{cases} \mathbf{1}_{[0, at^\gamma]}(s)h(t), & \alpha > 0, \\ \mathbf{1}_{[at^\gamma, +\infty)}(s)h(t), & \alpha < 0. \end{cases}$$

对测度 $s^{\alpha-1} ds$ 使用 (10.26)，再依次应用 Fubini–Tonelli 定理与 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} G(s, t) dt \right)^r s^{\alpha-1} ds \\ &\leq \left[\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} G(s, t)^r s^{\alpha-1} ds \right)^{1/r} dt \right]^r. \end{aligned}$$

按 α 的正负分别计算内层积分，得到

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} G(s, t) dt \right)^r s^{\alpha-1} ds \leq \frac{a^\alpha}{|\alpha|} \left(\int_0^{+\infty} h(t) t^{\alpha\gamma/r} dt \right)^r. \quad (10.27)$$

当 $r = 1$ 时，同一结论直接由 Fubini–Tonelli 定理得到。

第三步： $q_1, q_2 < +\infty$ 时的估计。先考虑 $q_2 < q_1$ ，于是 $q_2 < q < q_1$ 。另一个情形完全类似，相应的 γ 为负。记

$$r_i := \frac{q_i}{p_i} \geq 1, \quad i = 1, 2.$$

在 (10.25) 中令

$$\alpha = q - q_i, \quad u = u(s) := \left(\frac{s}{a}\right)^{1/\gamma}, \quad h(t) := t^{p_i-1} \mu(\{|f| > t\}), \quad (10.28)$$

并对两个积分分别使用 (10.27)，得到

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_q^q &\leq q(2k)^q M_1^{q_1} p_1^{r_1} \frac{a^{q-q_1}}{q_1 - q} \left[\int_0^{+\infty} t^{p_1-1+(q-q_1)\gamma/r_1} \mu(\{|f| > t\}) dt \right]^{r_1} \\ &\quad + q(2k)^q M_2^{q_2} p_2^{r_2} \frac{a^{q-q_2}}{q - q_2} \left[\int_0^{+\infty} t^{p_2-1+(q-q_2)\gamma/r_2} \mu(\{|f| > t\}) dt \right]^{r_2}. \end{aligned}$$

选择

$$\gamma := r_1 \frac{p_1 - p}{q_1 - q} = \frac{p}{q} \frac{1/p_1 - 1/p_2}{1/q_1 - 1/q_2} = r_2 \frac{p_2 - p}{q_2 - q}, \quad (10.29)$$

则两个积分中的 t 的幂都化为 $p-1$ 。再用

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{|f| > t\}) dt = \frac{1}{p} \|f\|_p^p,$$

得到

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_q^q &\leq q(2k)^q \left[\frac{(p_1/p)^{r_1}}{q_1 - q} M_1^{q_1} a^{q-q_1} \|f\|_p^{pr_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p_2/p)^{r_2}}{q - q_2} M_2^{q_2} a^{q-q_2} \|f\|_p^{pr_2} \right]. \end{aligned}$$

在非平凡情形下取

$$a := M_1^{q_1/(q_1-q_2)} M_2^{q_2/(q_2-q_1)} \|f\|_p^{p(r_2-r_1)/(q_2-q_1)}. \quad (10.30)$$

结合 (10.22)，即得 (10.21)，其中可以取

$$C^q = q(2k)^q \left[\frac{(p_1/p)^{r_1}}{q_1 - q} + \frac{(p_2/p)^{r_2}}{q - q_2} \right]. \quad (10.31)$$

若 $M_1 M_2 \|f\|_p = 0$ ，结论由直接逼近或令相应参数趋于零得到。

第四步： $q_1 = +\infty$ 或 $q_2 = +\infty$ 的情形。只证 $q_1 = +\infty$ ；另一情形交换下标即可。这里的关键是选择 $u = u(s)$ ，使

$$\nu(\{|T(f_1)| > s\}) = 0,$$

从而 (10.23) 中只剩含 f_2 的一项。

若 $p_1 = +\infty$ ，取 $u(s) := s/M_1$ ($M_1 = 0$ 时结论直接)。则

$$\|T(f_1)\|_\infty \leq M_1 \|f_1\|_\infty \leq M_1 u(s) = s.$$

于是所需超水平集为零。沿用第三步对剩余一项的估计，得到 (10.21)，且可取

$$C^q = q(2k)^q \frac{(p_2/p)^{r_2}}{q - q_2}.$$

现在设 $p_1 < +\infty$ 。此时 $p < p_1$ 。令

$$u = u(s) := \left(\frac{s}{a}\right)^{p_1/(p_1-p)}, \quad a := \beta M_1 \|f\|_p^{p/p_1}, \quad (10.32)$$

其中 $\beta > 0$ 稍后确定。由端点估计和层蛋糕公式，若

$$p_1 M_1^{p_1} \int_0^{+\infty} t^{p_1-1} \mu(\{|f_1| > t\}) dt \leq s^{p_1},$$

则 $\|T(f_1)\|_\infty \leq s$ 。因为 $|f_1| = \min(|f|, u)$ 且 $p < p_1$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^{p_1-1} \mu(\{|f_1| > t\}) dt &\leq \int_0^u \left(\frac{u}{t}\right)^{p_1-p} t^{p_1-1} \mu(\{|f_1| > t\}) dt \\ &\leq \frac{1}{p} \|f\|_p^p u^{p_1-p}. \end{aligned}$$

另一方面，由 (10.32)，

$$s^{p_1} = a^{p_1} u^{p_1-p} = \beta^{p_1} M_1^{p_1} \|f\|_p^p u^{p_1-p}.$$

因此只要

$$\beta^{p_1} \geq \frac{p_1}{p},$$

就有 $\|T(f_1)\|_\infty \leq s$ 。删除 (10.23) 中第一项后，再按第三步估计第二项，便得到 (10.21)。^c $\square$

^a校订注：原书定义 f_1 时把阈值的一处 u 误写为未定义的 z ，并在 (10.23) 最后一项把 $\|f_2\|_{p_2}$ 误写成 $\|f_1\|_{p_2}$ 。这里均按分解及上一行估计改正。

^b校订注：原书要求有限测度集合 E_n 满足 $\{|h| \leq n\} \subset E_n \uparrow X$ ，这在例如 $h = 0$ 、 $\mu(X) = +\infty$ 时不可能。这里改为标准截断 $E_n = H_n \cap \{h \leq n\}$ 。

^c校订注：原书在 $q_1 = +\infty$ 、 $p_1 = +\infty$ 的子情形中说“取 $\gamma = 0$ ”，但此前规定 $u(s) = (s/a)^{1/\gamma}$ ，而本处实际使用 $u = s/M_1$ ，对应 $\gamma = 1$ 。在 $p_1 < +\infty$ 的子情形中，原书又把 $\|f_1\|_{L^{p_1}(\mu)}$ 的测度误写成 ν ，并在一处写入未定义的 z 。这里按 (10.32) 的实际计算全部改正。

10.5 练习

除非另有说明，本节中 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 表示 σ -有限测度空间，即存在递增可测集列 $(E_n)_{n \geq 1}$ ，使

$$X = \bigcup_{n \geq 1} E_n, \quad \mu(E_n) < +\infty.$$

并且 $p, q \in [1, +\infty]$ 表示一对共轭指数：

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

练习 10.1。 设 $g \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ ，并在 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 上定义

$$\Phi(f) := \int_X f \bar{g} d\mu.$$

直接计算 $\|\Phi\|$ ，并确定单位球中满足 $|\Phi(f)| = \|\Phi\|$ 的函数 f 。

练习 10.2. 设 $(a_n)_{n \geq 0}$ 是 $\mathbb{K}$ 中的数列，并且对每个 $(b_n)_{n \geq 0} \in \ell_{\mathbb{K}}^q(\mathbb{N})$ ，级数

$$\sum_{n \geq 0} a_n b_n$$

都在 $\mathbb{K}$ 中收敛。证明

$$(a_n)_{n \geq 0} \in \ell_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{N}).$$

练习 10.3. 设 $p \in [1, +\infty)$ ， $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ 可测。

(a) 假设 $f \notin \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 。证明存在 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ ，使对每个 $n \geq 1$ ，

$$a_n := \|f \mathbf{1}_{A_n}\|_p \quad \text{满足} \quad n \leq a_n < +\infty.$$

(b) 假设对每个 $g \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ ，都有 $f\bar{g} \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ 。证明 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 。

练习 10.4. 本题用更高阶的方法重新证明练习 10.3。设 $p \in [1, +\infty)$ ， $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ 可测，并且对每个 $g \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ ，都有 $f\bar{g} \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ 。定义

$$\Phi : \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \Phi(g) := \int_X f\bar{g} \, d\mu.$$

(a) 设 $h : X \rightarrow \mathbb{K}$ 可测，对每个 $g \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ ，都有 $h\bar{g} \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ ，并且

$$\int_X h\bar{g} \, d\mu = 0.$$

证明 $h = 0$ 在 μ -几乎处处成立。

(b) 对每个 $n \in \mathbb{N}^*$ ，令

$$A_n := E_n \cap \{|f| \leq n\}, \quad \Phi_n(g) := \Phi(g \mathbf{1}_{A_n}).$$

证明 $(\Phi_n)_{n \geq 1}$ 是 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ 上逐点收敛到 Φ 的连续线性泛函列。由此推出

$$\sup_{n \geq 1} \|\Phi_n\| < +\infty,$$

并证明 Φ 本身也是连续线性泛函。

(c) 证明 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 。

^a

^a**校订注：**原书 (a) 的假设写成 “ $h\bar{g} \in L^1$ 且 $\Phi(g) = 0$ ”，但此处 Φ 由 f 定义，与待判定的 h 没有关系，因而无法推出结论。这里按该小问的目标改为标准条件 $\int h\bar{g} \, d\mu = 0$ 。

练习 10.5. 在 $p = +\infty$ 时重新完成练习 10.3。

练习 10.6. 令 $X := \{a, b\}$ ，并在 $\mathcal{P}(X)$ 上定义测度

$$\mu(\{a\}) = 1, \quad \mu(\{b\}) = +\infty$$

(因而 $\mu(X) = +\infty$)。刻画 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^\infty(\mu)$ 与 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ 的对偶，并作出结论。

练习 10.7. 考虑定义在 $C_K(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ 上的线性泛函

$$\Phi(\varphi) := \varphi(0).$$

证明 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mathbb{R})$ 的对偶严格包含 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{R})$ 。

练习 10.8. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是任意测度空间, $1 < p < +\infty$, Φ 是 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 上的连续线性泛函。

(a) 证明: 对每个有限测度集合 $A \in \mathcal{A}$, 存在唯一的 $g_A \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$, 它在 A^c 上为零, 并满足

$$\Phi(f\mathbf{1}_A) = \int_X f \overline{g_A} d\mu \quad (f \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)), \quad \|g_A\|_q \leq \|\Phi\|.$$

(b) 若 $A, B \in \mathcal{A}$ 且 $A \subset B$, 证明

$$g_A = g_B \mathbf{1}_A,$$

以及

$$\int_{B \setminus A} |g_B|^q d\mu = \int_X |g_B|^q d\mu - \int_X |g_A|^q d\mu.$$

(c) 证明存在递增的有限测度集合列 $(X_n)_{n \geq 1}$, 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_{X_n}\|_q = \sup\{\|g_A\|_q : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < +\infty\},$$

并且 $(g_{X_n})_{n \geq 1}$ 在 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ 中收敛到某个函数 g 。

(d) 证明对每个 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$,

$$\Phi(f) = \int_X f \overline{g} d\mu.$$

练习 10.9 (L^p 的可分性, $p < +\infty$). 设 X 是局部紧可分度量空间, 并且

$$X = \bigcup_{n \geq 1} X_n,$$

其中 $(X_n)_{n \geq 1}$ 是递增的、闭包紧的开集列。

(a) 证明存在可数开集基

$$\mathcal{U} := \{U_n : n \geq 0\},$$

它包含 X 及所有 X_n , 并且对有限交封闭。

设 μ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Borel 测度, $1 \leq p < +\infty$, 并令 D 为由 $\{\mathbf{1}_{U_n} : n \geq 0\}$ 生成的 $\mathbb{Q}$ -向量空间。

(b) 设 $g \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^q(\mu)$, 并且对每个 $f \in D \cap \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu)$,

$$\int_X fg d\mu = 0.$$

证明 $g = 0$ 几乎处处。

(c) 证明 $D \cap \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu)$ 在 $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu)$ 中稠密。

(d) 推出 $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu)$ 可分。

^a

^a校订注: 原书 (c) 直接说“ D 在 L^p 中稠密”, 但 D 可能包含不属于 L^p 的开集示性函数; 严格表述应为 $D \cap L^p$ 在 L^p 中稠密。

练习 10.10 (L^p 中的弱收敛, $p > 1$). 设 $p \in (1, +\infty]$, q 为共轭指数, 并假设 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ 可分. 设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 是 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 中的有界列, 即 $(\|f_n\|_p)_{n \geq 1}$ 有界.

(a) 设 D 是 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ 的可数稠密子集. 证明存在子列 $(f_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$, 使对每个 $h \in D$, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_{\varphi(n)} \bar{h} \, d\mu$$

在 $\mathbb{K}$ 中存在.

(b) 证明对每个 $g \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$, 极限

$$\Phi(g) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_{\varphi(n)} \bar{g} \, d\mu$$

在 $\mathbb{K}$ 中存在.

(c) 推出存在 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$, 使 $(f_{\varphi(n)})$ 弱收敛到 f , 即

$$\int_X f_{\varphi(n)} \bar{g} \, d\mu \longrightarrow \int_X f \bar{g} \, d\mu \quad (g \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)).$$

(d) 当 $p = 1$ 时, 上述结论是否仍然成立?

练习 10.11 (Vitali–Saks 定理). 若测度族 $(\nu_i)_{i \in I}$ 满足以下两条, 则称它关于 μ **一致绝对连续**:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{A}, \quad \mu(A_\varepsilon) < +\infty, \quad \nu_i(A_\varepsilon^c) < \varepsilon \quad (i \in I),$$

并且

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) < \delta \implies \nu_i(A) < \varepsilon \quad (i \in I).$$

假设 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, 其中 $\mathcal{C}$ 是 π -系统, 即 $X \in \mathcal{C}$, 且 $\mathcal{C}$ 对有限交封闭. 本题要证明如下 Vitali–Saks 定理:

设 $(\nu_n)_{n \geq 1}$ 是 $\mathcal{A}$ 上关于 μ 一致绝对连续的有限测度列, 并且对每个 $C \in \mathcal{C}$, 极限 $\lim_n \nu_n(C)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 中存在. 则对每个 $A \in \mathcal{A}$, 极限

$$\nu(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(A)$$

都存在于 $\mathbb{R}_+$, 而且 ν 是关于 μ 绝对连续的测度.

(a) 令

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : \lim_n \nu_n(A) \text{ 在 } \mathbb{R}_+ \text{ 中存在}\}.$$

证明 $\mathcal{D}$ 对真差封闭.

(b) 设 $(B_k)_{k \geq 1}$ 是 $\mathcal{D}$ 中两两不交的集合列, $B := \bigcup_{k \geq 1} B_k$. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(B) = \sum_{k \geq 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(B_k).$$

(c) 推出 $\mathcal{D}$ 是 λ -系统, 进而由 π - λ 定理得到 $\mathcal{D} = \mathcal{A}$.

(d) 证明 ν 是 $\mathcal{A}$ 上关于 μ 绝对连续的测度.

练习 10.12 (L^1 中的弱收敛). 假设 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, 其中 $\mathcal{C}$ 是可数 π -系统.

(a) 证明: 若 X 是可分度量空间并赋予 Borel σ -代数, 则上述假设成立.

设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 是 $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ 中的有界且一致可积的函数列；这里有界是指 $(\|f_n\|_1)$ 有界，一致可积是指测度列 $(\|f_n\| \cdot \mu)_{n \geq 1}$ 关于 μ 一致绝对连续。

(b) 证明存在子列 $(f_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ ，使两列测度

$$\nu_n^{\pm} := f_n^{\pm} \cdot \mu$$

满足：对每个 $C \in \mathcal{C}$ ，极限 $\lim_n \nu_{\varphi(n)}^{\pm}(C)$ 都在 $\mathbb{R}$ 中存在。

(c) 证明存在 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ ，使对每个 $A \in \mathcal{A}$ ，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_{\varphi(n)} d\mu = \int_A f d\mu.$$

(d) 推出 $(f_{\varphi(n)})$ 在 $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ 中弱收敛到 f ，即对每个 $g \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mu)$ ，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_{\varphi(n)} g d\mu = \int_X f g d\mu.$$

(e) 若函数列 (f_n) 本身按 (d) 的意义弱收敛到 f ，它是否必然在 μ -几乎处处意义下收敛到 f ，或在 $\|\cdot\|_1$ 范数下收敛到 f ？

练习 10.13. 设 $\theta \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ，并满足下列两种情形之一：

$$\begin{cases} \theta([0, 1)) \subset [0, 1), \\ \theta((1, +\infty)) \subset (1, +\infty), \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \theta([0, 1)) \subset (1, +\infty), \\ \theta((1, +\infty)) \subset [0, 1). \end{cases}$$

令 E 为函数族

$$\left\{ x \mapsto \theta\left(\frac{p}{q}x\right)^n : n \in \mathbb{N}, p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

生成的实向量空间。

(a) 设 Φ 是 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上的连续线性泛函。由 Riesz 表示定理（见定理 10.2），存在 $[0, 1]$ 上的 Borel 测度 μ^+, μ^- ，使

$$\Phi(f) = \int_{[0, 1]} f d\mu^+ - \int_{[0, 1]} f d\mu^-.$$

假设 $\Phi|_E = 0$ 。证明对每个 $n \in \mathbb{N}$ 及 $p, q \in \mathbb{N}^*$ ，

$$\int_{[0, 1]} e^{-n\theta((p/q)x)^n} \mu^+(dx) = \int_{[0, 1]} e^{-n\theta((p/q)x)^n} \mu^-(dx).$$

(b) 推出对每个 $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ，

$$\mu^+([0, r]) = \mu^-([0, r]),$$

并进一步证明 $\mu^+ = \mu^-$ 。

(c) 证明 E 在 $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ 中稠密。

(d) 特别地，证明：对每个 $a > 0$ ，函数族

$$\{x \mapsto x^{na} : n \in \mathbb{N}\}$$

生成的实向量空间在 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 中稠密；而对每个 $a > 0, a \neq 1$ ，函数族

$$\{x \mapsto a^{nx} : n \in \mathbb{N}\}$$

生成的实向量空间也在其中稠密。

a

校订注：原书 (d) 对第二个函数族也写成 “任意 $a > 0$ ”。当 $a = 1$ 时所有函数都恒等于 1，其线性张成只有常数函数，不可能稠密；因此第二个结论必须排除 $a = 1$ 。

练习 10.14 (L^∞ 的对偶)。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是任意测度空间，并假设存在两两不交的 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ ，满足

$$0 < \mu(A_n) < +\infty.$$

令

$$A := \bigcup_{n \geq 1} A_n,$$

并令 M 为 $\{1_A\} \cup \{1_{A_n} : n \geq 1\}$ 生成的 $\mathbb{K}$ -向量空间。

(a) 令

$$f_n := \frac{1_{A_n}}{\mu(A_n)}.$$

证明存在子列 $(f_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ ，使对每个 $g \in M$ ，极限

$$\Phi(g) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_{\varphi(n)} g \, d\mu$$

都在 $\mathbb{K}$ 中存在。

(b) 假设 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^\infty(\mu)$ 的对偶可与 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ 等同。由 (a) 推出存在 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ ，使对每个 $g \in M$ ，

$$\Phi(g) = \int_X f g \, d\mu.$$

(c) 证明

$$\int_A f \, d\mu = 1, \quad \int_{A_k} f \, d\mu = 0 \quad (k \geq 1).$$

(d) 推出矛盾，并据此说明 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^\infty(\mu)$ 的对偶不能与 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ 等同。

练习 10.15。 设 X 是度量空间， μ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的 σ -有限测度，并且每个非空开集 $\Omega \subset X$ 都满足

$$\mu(\Omega) > 0.$$

证明： $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^\infty(\mu)$ 的对偶可与 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ 等同，当且仅当 X 是有限集。

练习 10.16。 令

$$\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / (2\pi\mathbb{Z})^d$$

为 $d \geq 1$ 维环面，并把它视为立方体 $[-\pi, \pi]^d$ 。对 $p \in [1, +\infty)$ ， $L^p(\mathbb{T}^d)$ 表示以 $[-\pi, \pi]^d$ 为周期、满足

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} := \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < +\infty$$

的复 Borel 函数空间。对 $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ ，定义 Fourier 系数

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} f(x) e^{-i(n|x)} \, dx, \quad n \in \mathbb{Z}^d,$$

其中 $(n|x)$ 是 $n, x \in \mathbb{R}^d$ 的 Euclidean 内积。

(a) 证明

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}.$$

(b) 证明 Bessel 不等式

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}.$$

(c) 推出：对每个 $p \in [1, 2]$ ，存在常数 $C_p \geq 0$ ，使

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}, \quad q := \frac{p}{p-1}.$$

(d) 证明：对每个 $p \in [1, 2]$ ，存在常数 $D_p \geq 0$ ，使对每个 $c = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$ ，级数

$$f(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} c_n e^{i(n|x)}$$

按适当的极限意义定义一个 $L^q(\mathbb{T}^d)$ 元素，并满足

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{T}^d)} \leq D_p \|c\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)}.$$

^a

^a校订注：原书 (d) 把数列空间误写成 $\ell^p(\mathbb{T}^d)$ ，又把 f 的范数误写成 $L^q(\mathbb{Z}^d)$ ，并把 c 的范数下标也写成 $\mathbb{T}^d$ 。这里分别改为 $c \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$ 、 $f \in L^q(\mathbb{T}^d)$ 及相应范数。

练习 10.17。

(a) 设 $(a_n)_{n \geq 1}$ 是趋于零的正递减数列，并令

$$A_n := \sum_{k=1}^n a_k.$$

证明对每个 $n \geq 1$ 、 $N > n$ 与 $x \in (0, \pi]$ ，

$$\left| \sum_{k=n+1}^N \cos(kx) \right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x}.$$

推出级数

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

在 $(0, \pi]$ 上有定义，并满足

$$|f(x)| \leq A_n + \frac{\pi a_n}{x} \quad (n \geq 1, x \in (0, \pi]).$$

(b) 设 $p \in (2, +\infty)$ 。证明存在常数 $c > 0$ ，使

$$\int_0^\pi |f(x)|^p dx \leq c \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^p n^{-2}.$$

从现在起假设

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^p n^{p-2} < +\infty.$$

(c) 定义 $a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为

$$a(x) := a_n \quad \text{当 } x \in [n-1, n), \quad n \geq 1,$$

并令

$$A(x) := \int_0^x a(t) dt.$$

借助练习 9.16(g) 证明

$$\int_0^{+\infty} a(x)^p x^{p-2} dx < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} A(x)^p x^{-2} dx < +\infty.$$

推出

$$f \in L^p([-\pi, \pi]).$$

(d) 令 $q = p/(p-1)$, 并取

$$a_n := b_n := n^{-1/q} (\ln(n+1))^{-1/2}, \quad n \geq 1.$$

证明 $\hat{f} \notin \ell^q(\mathbb{Z})$ 。这对练习 10.16 的结论说明了什么?

^a

^a**校订注：**原书 (d) 把对数因子印成 $(\ln(n+1))^{1/2}$ 。这样 $a_n^p n^{p-2} = n^{-1} (\ln(n+1))^{p/2}$, 不满足 (b) 后明确规定的可和性假设, 因而不能由 (c) 得到 $f \in L^p$ 。正确的经典反例取 $(\ln(n+1))^{-1/2}$: 此时因 $p/2 > 1$, 前述级数收敛; 而因 $q/2 < 1$, $\sum_n |a_n|^q = \sum_n [n(\ln(n+1))^{q/2}]^{-1}$ 发散。

第十一章 乘积测度与 Fubini 定理

本章要从定义在 X 与 Y 上的“长度测度”出发，在乘积空间 $X \times Y$ 上严格定义“面积测度”。关于这种面积测度——也就是乘积测度——的积分，为多重积分提供自然且严谨的框架。此类积分的运算与计算规则由两个 Fubini 定理支配。

11.1 乘积 σ -代数

11.1.1 定义与初步性质

定义 11.1。 设 $(X, \mathcal{A})$ 、 $(Y, \mathcal{B})$ 是两个可测空间。称

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\})$$

为 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的**乘积 σ -代数**。它由所有“边可测的矩形”生成。

本章以下记

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\},$$

即边可测矩形的全体。因此

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}).$$

还要注意，每个边可测矩形都可写成

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B).$$

下面的命题说明， $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 是使两个典范投影都可测的最小 σ -代数。

命题 11.1。 设

$$\pi_X : X \times Y \rightarrow X, \quad \pi_X(x, y) = x, \quad \pi_Y : X \times Y \rightarrow Y, \quad \pi_Y(x, y) = y.$$

- (a) π_X 是从 $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ 到 $(X, \mathcal{A})$ 的可测映射， π_Y 是从 $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ 到 $(Y, \mathcal{B})$ 的可测映射。
- (b) 若 $\mathcal{T}$ 是 $X \times Y$ 上的 σ -代数，并使 π_X, π_Y 分别成为 $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ -可测与 $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ -可测映射，则

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{T}.$$

^a

^a**校订注：**原书 (a) 把 π_X, π_Y 的可测性分别写成 “ $(\mathcal{A}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ -可测” 与 “ $(\mathcal{B}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ -可测”，颠倒了定义域和到达域的 σ -代数；证明本身使用的是这里的正确次序。

证明。 对任意 $A \in \mathcal{A}$,

$$\pi_X^{-1}(A) = A \times Y \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B},$$

故 π_X 可测； π_Y 同理。

若 $\mathcal{T}$ 满足 (b) 的假设, 则对任意 $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$,

$$A \times B = \pi_X^{-1}(A) \cap \pi_Y^{-1}(B) \in \mathcal{T}.$$

所以 $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, 进而

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subset \mathcal{T}.$$

□

命题 11.2. 映射

$$f : (Z, \mathcal{C}) \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}), \quad f(z) = (f_X(z), f_Y(z)),$$

可测, 当且仅当 $f_X : (Z, \mathcal{C}) \rightarrow (X, \mathcal{A})$ 与 $f_Y : (Z, \mathcal{C}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ 都可测。

证明. 若 f 可测, 则

$$f_X^{-1}(A) = f^{-1}(A \times Y) \in \mathcal{C} \quad (A \in \mathcal{A}),$$

故 f_X 可测; 同理 f_Y 可测。

反之, 若两个分量都可测, 则由 Hausdorff 公式,

$$f^{-1}(A \times B) = f_X^{-1}(A) \cap f_Y^{-1}(B) \in \mathcal{C}$$

对每个边可测矩形成立。因为这些矩形生成 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 命题 5.1 推出 f 可测。

□

上述定义与结论可以立即推广到 d 个可测空间: 令

$$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_d := \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_d : A_i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq d\}).$$

接下来验证运算 $\otimes$ 的结合性。

命题 11.3. 设 $(X_i, \mathcal{A}_i)$ ($i = 1, 2, 3$) 是三个可测空间, 则

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3.$$

证明. 只证第一个等式。边可测长方体 $A_1 \times A_2 \times A_3$ 全都属于 $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3$, 故

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3 \subset (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3.$$

反过来, 固定 $A_3 \in \mathcal{A}_3$, 令

$$\mathcal{T}_{A_3} := \{D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : D \times A_3 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3\}.$$

它是 $X_1 \times X_2$ 上的 σ -代数: 空集的结论显然; 若 $D \in \mathcal{T}_{A_3}$, 则

$$D^c \times A_3 = (X_1 \times X_2 \times A_3) \cap (D \times A_3)^c$$

仍属于三重乘积 σ -代数; 可数并的情形也由

$$\left(\bigcup_{n \geq 1} D_n \right) \times A_3 = \bigcup_{n \geq 1} (D_n \times A_3)$$

得到。又因为 $\mathcal{T}_{A_3}$ 包含所有 $A_1 \times A_2$ ，所以

$$\mathcal{T}_{A_3} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2.$$

这对每个 $A_3 \in \mathcal{A}_3$ 成立，故

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \times \mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3.$$

对左端取生成的 σ -代数即得反向包含。另一个等式同理。 $\square$

11.1.2 Borel σ -代数的情形

若 X, Y 是度量空间（或拓扑空间），则可在 $X \times Y$ 上考虑两种自然的 σ -代数：Borel σ -代数的乘积 $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ ，以及乘积拓扑对应的 $\mathcal{B}(X \times Y)$ 。下面比较二者。

命题 11.4。 设 X, Y 是两个度量空间。

(a) 总有

$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y).$$

(b) 若 X, Y 都有可数开集基，则

$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y).$$

证明。 乘积拓扑的定义保证 π_X, π_Y 连续，因而关于 Borel σ -代数可测。命题 11.1(b) 给出 (a)。设

$$\mathcal{U} = \{U_m : m \geq 1\}, \quad \mathcal{V} = \{V_n : n \geq 1\}$$

分别为 X, Y 的可数开集基。则

$$\mathcal{U} \times \mathcal{V} := \{U_m \times V_n : m, n \geq 1\}$$

是 $X \times Y$ 的可数开集基。每个开集都是其中元素的可数并，故

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(X \times Y) &= \sigma(\mathcal{O}(X \times Y)) \\ &\subset \sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \\ &\subset \sigma(\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y). \end{aligned}$$

结合 (a) 即得等号。 $\square$

注。

- $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ 是使两个典范投影可测的最小 σ -代数；而 $\mathcal{B}(X \times Y)$ 来自使这两个投影连续的最小拓扑。
- 对两个以上空间的乘积，结论可由归纳或直接论证得到。

应用 11.1。 以下 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 。

(a) 因为

$$\{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha < \beta\}$$

给出的开区间族是 $\mathbb{R}$ 的可数开集基，故

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}.$$

更一般地，若 X, Y 是可分度量空间，则

$$\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y).$$

特别地，

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+d'}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'}),$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{C}^{d+d'}) = \mathcal{B}(\mathbb{C}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d'}).$$

(b) 加法与乘法映射

$$(x, y) \mapsto x + y, \quad (x, y) \mapsto xy$$

从 $\mathbb{K}^2$ 到 $\mathbb{K}$ 连续，因此是 $(\mathcal{B}(\mathbb{K}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{K}), \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ -可测的。

(c) 若 $f, g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{K}$ 可测，则命题 11.2 说明 (f, g) 可测；再与上面的加法、乘法复合，得到 $f + g$ 与 fg 可测。

(d) 更一般地，只要 $\Psi : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ 连续，甚至只要它 Borel 可测，那么对可测函数 $f, g, \Psi(f, g)$ 都可测。

注。 在技术上，直接证明 Ψ 关于 $(\mathcal{B}(\mathbb{K}^2), \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ 可测，通常比关于 $(\mathcal{B}(\mathbb{K}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{K}), \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ 可测更容易；但命题 11.4 表明二者最终是同一件事。

11.1.3 乘积可测集的截面

设 $C \subset X \times Y$ 。对 $x \in X, y \in Y$ ，定义

$$C_x := \{y' \in Y : (x, y') \in C\}, \quad C^y := \{x' \in X : (x', y) \in C\}.$$

命题 11.5。 若 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ，则对每个 $x \in X, C_x \in \mathcal{B}$ ；对每个 $y \in Y, C^y \in \mathcal{A}$ 。

证明。 固定 $x \in X$ ，令

$$\mathcal{T}_x := \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : C_x \in \mathcal{B}\}.$$

由于

$$(\emptyset)_x = \emptyset, \quad \left(\bigcup_n C_n\right)_x = \bigcup_n (C_n)_x, \quad (C^c)_x = (C_x)^c,$$

$\mathcal{T}_x$ 是 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 的子 σ -代数。若 $C = A \times B$ ，则

$$C_x = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \emptyset, & x \notin A, \end{cases}$$

故每个边可测矩形都属于 $\mathcal{T}_x$ 。因此 $\mathcal{T}_x = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 。另一个方向同理。 $\square$

推论 11.1。 设

$$f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R} \text{ 或 } \mathbb{C}$$

可测。则对每个 $x \in X$ ，函数

$$f_x(y) := f(x, y)$$

是 $\mathcal{B}$ -可测的；对每个 $y \in Y$ ，函数

$$f^y(x) := f(x, y)$$

是 $\mathcal{A}$ -可测的。

证明。 若 $f = \mathbf{1}_C$ ，其中 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ，则

$$f_x = \mathbf{1}_{C_x},$$

结论由命题 11.5 得到。若

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{C_i}$$

是简单函数，则

$$f_x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{(C_i)_x}$$

可测。最后，用基本逼近引理把一般乘积可测函数逐点逼近为简单函数，并注意

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)_x = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n)_x,$$

即得结论。纵截面完全同理。 □

11.2 σ -有限测度的乘积测度

11.2.1 构造与刻画

定义 11.2。 若可测空间 $(X, \mathcal{A})$ 上的测度 μ 存在递增可测集列 $(E_n)_{n \geq 1}$ ，满足

$$X = \bigcup_{n \geq 1} E_n, \quad \mu(E_n) < +\infty \quad (n \geq 1),$$

则称 μ 是 σ -**有限测度**。也称测度空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是 σ -有限的。

定理 11.1 (乘积测度)。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 、 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 是两个 σ -有限测度空间。

(a) 在 $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ 上存在唯一测度 m ，使

$$m(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad (A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}). \quad (11.1)$$

这个测度也是 σ -有限的，通常记为

$$\mu \otimes \nu.$$

(b) 对每个 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ，

$$m(C) = \int_X \nu(C_x) \mu(dx) = \int_Y \mu(C^y) \nu(dy).$$

定理 11.1 的证明。(a) 唯一性。 设 m, m' 都满足 (11.1)。由 σ -有限性, 可取递增集列 $(A_n) \subset \mathcal{A}$ 、 $(B_n) \subset \mathcal{B}$, 使

$$X = \bigcup_n A_n, \quad Y = \bigcup_n B_n, \quad \mu(A_n) < +\infty, \quad \nu(B_n) < +\infty.$$

令 $E_n := A_n \times B_n$ 。则

$$E_n \uparrow X \times Y, \quad m(E_n) = m'(E_n) = \mu(A_n)\nu(B_n) < +\infty.$$

矩形族 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 含 $X \times Y$, 且对有限交封闭, 因为

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B').$$

由推论 6.2 的 σ -有限测度唯一性判据, $m = m'$ 。

(b) 构造。 对 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 拟定义

$$m(C) := \int_X \nu(C_x) \mu(dx).$$

第一步：验证 (11.2) 有意义。 命题 11.5 已说明 $C_x \in \mathcal{B}$, 故 $\nu(C_x)$ 对每个 x 都有定义。先设 ν 有限, 并令

$$\Lambda := \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : x \mapsto \nu(C_x) \text{ 是 } \mathcal{A}\text{-可测函数}\}.$$

利用截面对补集及不交可数并的运算规则, 以及 $\nu(Y) < +\infty$, 容易验证 Λ 是一个 λ -系统。它包含 π -系统 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, 因为

$$\nu((A \times B)_x) = \mathbf{1}_A(x)\nu(B).$$

由 π - λ 定理,

$$\Lambda = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

一般情形下, 取 $B_n \uparrow Y$ 、 $\nu(B_n) < +\infty$, 并令

$$\nu_n(D) := \nu(D \cap B_n).$$

由有限测度情形, $x \mapsto \nu_n(C_x)$ 可测; 又

$$\nu_n(C_x) = \nu(C_x \cap B_n) \uparrow \nu(C_x),$$

故 $x \mapsto \nu(C_x)$ 也是非负可测函数。因此 (11.2) 有意义。

第二步： m 是测度。 显然

$$m(\emptyset) = \int_X \nu(\emptyset) \mu(dx) = 0.$$

若 $(C_n)_{n \geq 1}$ 是乘积 σ -代数中两两不交的集合列, 则对每个 x , $((C_n)_x)_{n \geq 1}$ 也两两不交, 且

$$\left(\bigcup_n C_n \right)_x = \bigcup_n (C_n)_x.$$

由 ν 的可数可加性与 Beppo Levi 定理,

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_n C_n\right) &= \int_X \nu\left(\bigcup_n (C_n)_x\right) \mu(dx) \\ &= \int_X \sum_{n \geq 1} \nu((C_n)_x) \mu(dx) \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_X \nu((C_n)_x) \mu(dx) = \sum_{n \geq 1} m(C_n). \end{aligned}$$

第三步：矩形上的取值与积分次序交换。 若 $C = A \times B$ ，则

$$\nu(C_x) = \mathbf{1}_A(x)\nu(B).$$

所以

$$m(A \times B) = \int_X \mathbf{1}_A(x)\nu(B)\mu(\mathrm{d}x) = \mu(A)\nu(B),$$

其中采用正测度积分的通常约定 $0 \cdot (+\infty) = 0$ 。因此 m 满足 (11.1)。特别地，对前面选取的 A_n, B_n ，

$$m(A_n \times B_n) < +\infty,$$

故 m 是 σ -有限测度。

交换 μ, ν 的角色，完全相同的构造给出

$$m'(C) := \int_Y \mu(C^y)\nu(\mathrm{d}y).$$

两个测度在所有边可测矩形上都取值 $\mu(A)\nu(B)$ ，由 (a) 的唯一性可知 $m' = m$ 。这同时完成构造并证明 (b)。 $\square$

关于 σ -有限性的注。

- 若 μ 或 ν 不是 σ -有限的，定理一般会失效，甚至两个迭代积分可能给出不同结果。令 $X = Y = \mathbb{R}$ ，在 X 上取 Borel σ -代数与 Lebesgue 测度 λ ，在 Y 上取幂集 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 与计数测度 $\nu(B) = \text{Card}(B)$ 。考虑对角线

$$\Delta := \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

它是 $\mathbb{R}^2$ 的闭集，故

$$\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

由于 $\Delta_x = \{x\}$ 、 $\Delta^y = \{y\}$ ，

$$\int_{\mathbb{R}} \nu(\Delta_x)\lambda(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} 1\lambda(\mathrm{d}x) = +\infty,$$

而

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(\Delta^y)\nu(\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}} 0\nu(\mathrm{d}y) = 0.$$

- 在某些非 σ -有限情形中，乘积测度仍然存在。例如任取集合 X, Y ，在幂集上分别赋予计数测度 m_X, m_Y ，则 $X \times Y$ 上的计数测度是满足

$$m(\{x\} \times \{y\}) = m_X(\{x\})m_Y(\{y\}) = 1$$

的自然乘积测度。

定理 11.1 可直接推广到 d 个 σ -有限测度的乘积。测度

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_d$$

由

$$(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_d)(A_1 \times \cdots \times A_d) = \prod_{i=1}^d \mu_i(A_i)$$

完全刻画。

命题 11.6. σ -有限测度的乘积运算满足结合律：

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3) = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3. \quad (11.2)$$

证明。 命题 11.3 表明三个测度都定义在同一个乘积 σ -代数 $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$ 上。它们在每个边可测长方体 $A_1 \times A_2 \times A_3$ 上都取值

$$\mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\mu_3(A_3).$$

由乘积测度的唯一性，三者相等。 $\square$

应用 11.2 (层蛋糕公式)。 设 μ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的 σ -有限测度， $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ 可测。则

$$\int_X f \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\}) \, dt.$$

事实上，令

$$C := \{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times X : f(x) > t\}.$$

由于

$$C = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_+^*} [0, r) \times \{f \geq r\},$$

有 $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{A}$ 。它的截面为

$$C_t = \{x \in X : f(x) > t\}, \quad C^x = [0, f(x)).$$

对 $\lambda \otimes \mu$ 使用定理 11.1(b)，一方面

$$\begin{aligned} (\lambda \otimes \mu)(C) &= \int_X \left(\int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\{f(x) > t\}} \lambda(dt) \right) \mu(dx) \\ &= \int_X \left(\int_0^{f(x)} dt \right) \mu(dx) = \int_X f(x) \mu(dx), \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} (\lambda \otimes \mu)(C) &= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_X \mathbf{1}_{\{f(x) > t\}} \mu(dx) \right) \lambda(dt) \\ &= \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\}) \, dt. \end{aligned}$$

两式比较即得结论。

11.2.2 高维 Lebesgue 测度 λ_d 的构造

设 $d \geq 2$ 。定义

$$\lambda_d := \underbrace{\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_1}_{d \text{ 次}},$$

其中 λ_1 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的一维 Lebesgue 测度。由于

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d},$$

λ_d 确实是 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的测度。

引理 11.1。 设 $f: (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ 为 Borel 可测函数。则对每个 $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(u-a) \lambda_1(du) = \int_{\mathbb{R}} f(u) \lambda_1(du).$$

证明。 对任意 Borel 集 $A \subset \mathbb{R}$, Lebesgue 测度的平移不变性 $\lambda_1(A+a) = \lambda_1(A)$ 等价于

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(u-a) \lambda_1(du) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(u) \lambda_1(du).$$

由线性性, 该等式先推广到非负简单函数; 再用基本逼近引理和 Beppo Levi 定理推广到所有非负 Borel 可测函数。□

命题 11.7。 乘积测度

$$\lambda_d = \lambda_1^{\otimes d}$$

就是 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的 Lebesgue 测度。

证明。 只需验证定理 6.1 中 Lebesgue 测度存在唯一性刻画的两个条件。由命题 11.6,

$$\lambda_d = \lambda_1 \otimes \lambda_{d-1} \quad (d \geq 2).$$

对 d 归纳。假设 λ_{d-1} 已是 $\mathbb{R}^{d-1}$ 上的 Lebesgue 测度, 因而

$$\lambda_{d-1}([0, 1]^{d-1}) = 1$$

并且平移不变。首先

$$\lambda_d([0, 1]^d) = \lambda_1([0, 1]) \lambda_{d-1}([0, 1]^{d-1}) = 1.$$

再设 $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d-1})$ 。对每个 $x_1 \in \mathbb{R}$,

$$(a + C)_{x_1} = (a_2, \dots, a_d) + C_{x_1 - a_1}.$$

于是依次使用乘积测度公式、 λ_{d-1} 的平移不变性和引理 11.1,

$$\begin{aligned} \lambda_d(a + C) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{d-1}((a_2, \dots, a_d) + C_{x_1 - a_1}) \lambda_1(dx_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{d-1}(C_{x_1 - a_1}) \lambda_1(dx_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{d-1}(C_{x_1}) \lambda_1(dx_1) = \lambda_d(C). \end{aligned}$$

所以 λ_d 归一化且平移不变, 由定理 6.1 的唯一性, 它就是 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度。□

11.3 Fubini 定理

通常所说的 Fubini 定理有两个版本：一个用于非负函数，另一个用于可积函数。在实际应用中，通常先用第一个版本验证第二个版本的假设。

定理 11.2 (Fubini–Tonelli 定理)。 设

$$f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

可测， μ, ν 分别是 $(X, \mathcal{A})$ 、 $(Y, \mathcal{B})$ 上的 σ -有限测度。

(a) 处处定义的函数

$$x \longmapsto \int_Y f(x, y) \nu(dy), \quad y \longmapsto \int_X f(x, y) \mu(dx)$$

分别是 $\mathcal{A}$ -可测与 $\mathcal{B}$ -可测的。

(b) 在 $\mathbb{R}_+$ 中有

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy). \end{aligned}$$

证明。 推论 11.1 表明，对每个 x ，截面 $f_x(y) = f(x, y)$ 是非负 $\mathcal{B}$ -可测函数，所以关于 ν 的积分处处有定义。若 $f = \mathbf{1}_C$ ，其中 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ，则定理 11.1 证明第一步已经说明

$$x \longmapsto \nu(C_x) = \int_Y \mathbf{1}_C(x, y) \nu(dy)$$

是 $\mathcal{A}$ -可测函数。若 f 是有限值非负简单函数，结论由积分的线性性与有限和保持可测性得到。最后，用递增非负简单函数列逼近一般 f ，并应用 Beppo Levi 定理，即得 (a)。另一个积分同理。

由 (a)，(b) 中的三个积分均有意义。对示性函数 $f = \mathbf{1}_C$ ，所需等式正是定理 11.1(b)：

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_X \nu(C_x) \mu(dx) = \int_Y \mu(C^y) \nu(dy).$$

再由线性性推广到非负简单函数，最后用递增逼近与 Beppo Levi 定理推广到任意非负可测函数。 $\square$

应用 11.3。 设 $f \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \lambda)$ ，并定义

$$F(x) := \int_{[0, x]} f(t) dt, \quad x \geq 0.$$

则对每个 $a > 0$ ，

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{F(ax) - F(x)}{x} dx = \ln(a) \int_{\mathbb{R}_+} f(x) dx.$$

先证明一个初等变量替换公式。对 $\alpha > 0$ 、 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ，

$$\lambda(\alpha A) = \alpha \lambda(A).$$

事实上,

$$\eta(A) := \alpha^{-1} \lambda(\alpha A)$$

是 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上平移不变且满足 $\eta([0, 1]) = 1$ 的测度, 故由 Lebesgue 测度的唯一性, $\eta = \lambda$ 。先对示性函数, 再对非负简单函数, 最后由 Beppo Levi 定理对所有非负 Borel 函数 g , 得到

$$\int_A g(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha A} g(u) du.$$

先设 $a > 1$ 且 $f \geq 0$ 。在 $[1, a] \times \mathbb{R}_+$ 上令

$$\Psi(t, x) := f(tx).$$

映射 $(t, x) \mapsto tx$ 连续, 而 f Borel 可测, 所以 Ψ 关于 $\mathcal{B}([1, a]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 可测。由 Fubini-Tonelli 定理,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_1^a f(tx) dt \right) dx = \int_1^a \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(tx) dx \right) dt.$$

利用上述缩放公式, 左边为

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{x} \left(\int_x^{ax} f(u) du \right) dx = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{F(ax) - F(x)}{x} dx,$$

右边为

$$\int_1^a \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{R}_+} f(u) du = \ln(a) \int_{\mathbb{R}_+} f(u) du.$$

对一般实值 f , 分别应用于 f^+ 、 f^- 后作差即可。

当 $a = 1$ 时结论显然。若 $0 < a < 1$, 令 $b = 1/a > 1$, 并在 $a > 1$ 的结论中作变量替换, 可得

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{F(bx) - F(x)}{x} dx = -\int_{\mathbb{R}_+} \frac{F(ay) - F(y)}{y} dy.$$

又 $\ln b = -\ln a$, 故结论仍成立。^a

^a校订注: 原书的结论陈述为所有 $a > 0$, 但证明直接在 $[1, a] \times \mathbb{R}_+$ 上使用正测度积分, 只覆盖 $a \geq 1$ 。这里补上 $0 < a < 1$ 时由 $b = 1/a$ 归约的论证。

定理 11.3 (Fubini-Lebesgue 定理)。仍采用定理 11.2 的测度空间。设

$$f \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu \otimes \nu), \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ 或 } \mathbb{C}.$$

则:

- (a) 对 μ -几乎每个 x , 函数 $y \mapsto f(x, y)$ 属于 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^1(\nu)$; 对 ν -几乎每个 y , 函数 $x \mapsto f(x, y)$ 属于 $\mathbf{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ 。
- (b) 在任意零测异常集上把积分定义为零后,

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) \nu(dy) \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu),$$

$$y \mapsto \int_X f(x, y) \mu(dx) \in \mathbf{L}_{\mathbb{K}}^1(\nu).$$

(c) 有

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx)$$

$$= \int_Y \left(\int_X f(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

证明。 先设 f 为实值函数。对非负可测函数 f^+, f^- 使用 Fubini–Tonelli 定理，得到

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_Y f^\pm(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) &= \int_{X \times Y} f^\pm d(\mu \otimes \nu) \\ &\leq \int_{X \times Y} |f| d(\mu \otimes \nu) < +\infty. \end{aligned} \quad (11.3)$$

因此集合

$$\left\{ x \in X : \int_Y f^\pm(x, y) \nu(dy) = +\infty \right\}$$

是 $\mathcal{A}$ -可测的 μ -零集。这说明对 μ -几乎每个 x , $f_x \in L^1(\nu)$ 。交换 X, Y 即得 (a) 的另一半。对几乎每个 x ,

$$\left| \int_Y f(x, y) \nu(dy) \right| \leq \int_Y |f(x, y)| \nu(dy).$$

而右边由 Fubini–Tonelli 定理和 $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$ 可知属于 $L^1_+(\mu)$ ，故得到 (b)。对称结论同理。最后，把 Fubini–Tonelli 定理分别用于 f^+, f^- ，并逐项作差，得到 (c)。若 f 为复值函数，则分别对 $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ 应用实值结论。□

注。 Fubini–Lebesgue 定理中 f 关于乘积测度可积的假设至关重要。即使定理 11.3(b) 中的两个中间函数都可积，两个迭代积分也未必相等；反过来，即使两个中间函数都可积且两个迭代积分相等，也不能推出 f 关于乘积测度可积。下面给出两个反例。

反例 1：两个迭代积分不相等。 在 $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ 上定义

$$f(x, y) := 2e^{-2xy} - e^{-xy}.$$

它连续，因而关于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}([0, 1])$ 可测。对每个 $y > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x, y) dx = \left[-\frac{e^{-2xy}}{y} + \frac{e^{-xy}}{y} \right]_{x=0}^{+\infty} = 0.$$

对每个 $x > 0$,

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \left[-\frac{e^{-2xy}}{x} + \frac{e^{-xy}}{x} \right]_{y=0}^1 = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}.$$

右端在 $x = 0$ 处适当延拓后是正的连续可积函数。由应用 11.3,

$$\int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(x, y) dx \right) dy = 0,$$

而

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \ln 2.$$

因此不能交换积分次序。

反例 2：两个迭代积分相等仍不能推出乘积可积。 在 $[-1, 1]^2$ 上定义

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

该函数在 $[-1, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上连续，因而在整个方形上 Borel 可测。对每个固定 $x \in [-1, 1]$ ，函数 $y \mapsto f(x, y)$ 可积且为奇函数，所以积分为零；固定 y 时同理。因此两个迭代积分都存在且都等于零。

然而，对非负函数 $|f|$ 使用 Fubini–Tonelli 定理可验证

$$\int_{[-1, 1]^2} |f(x, y)| \, dx \, dy = +\infty.$$

所以 $f \notin L^1([-1, 1]^2)$ ，不能由 Fubini–Lebesgue 定理解释上述等式。

常用书写约定。 为了避免过多括号，常把测度紧接在积分号之后，例如把定理 11.2(b) 与 11.3(c) 的公式写成

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} (\mu \otimes \nu)(dx, dy) f(x, y) &= \int_X \mu(dx) \int_Y \nu(dy) f(x, y) \\ &= \int_Y \nu(dy) \int_X \mu(dx) f(x, y). \end{aligned}$$

本讲义仍优先使用“被积函数在前、测度在后”的标准写法，但读者应能识别上述等价记号。

当 f 的非负性或可积性已经确认时，也常写

$$\int_X \mu(dx) \int_Y \nu(dy) f(x, y).$$

本书不另引入二重、三重或更高重积分号。又因 $\lambda_d = \lambda_1^{\otimes d}$ ，常把 $\lambda_d(dx)$ 写成 $dx_1 \cdots dx_d$ ，例如

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \lambda_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

应用 11.4 (广义分部积分公式)。 设 f, g 在 $\mathbb{R}$ 上局部可积，并按通常约定定义

$$F(x) := \int_0^x f(t) \, dt, \quad G(x) := \int_0^x g(t) \, dt.$$

则

$$\int_0^x f(t) G(t) \, dt = F(x) G(x) - \int_0^x F(t) g(t) \, dt.$$

只证 $x \geq 0$ ；负数情形类似。在 $[0, x]^2$ 上定义

$$\Phi(t, s) := \mathbf{1}_{\{0 \leq s \leq t \leq x\}} f(t) g(s).$$

集合 $\{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq x\}$ 是闭集，故 Φ 乘积可测。又

$$|\Phi(t, s)| \leq |f(t)| |g(s)|,$$

而 Fubini–Tonelli 定理给出

$$\int_{[0, x]^2} |f(t)| |g(s)| \, dt \, ds = \left(\int_0^x |f(t)| \, dt \right) \left(\int_0^x |g(s)| \, ds \right) < +\infty.$$

所以 Φ 可积, Fubini–Lebesgue 定理允许交换积分次序:

$$\int_0^x \left(\int_0^x \Phi(t, s) ds \right) dt = \int_0^x \left(\int_0^x \Phi(t, s) dt \right) ds. \quad (11.4)$$

左端等于

$$\int_0^x f(t) \left(\int_0^t g(s) ds \right) dt = \int_0^x f(t) G(t) dt.$$

右端等于

$$\begin{aligned} \int_0^x g(s) \left(\int_s^x f(t) dt \right) ds &= \int_0^x g(s) (F(x) - F(s)) ds \\ &= F(x)G(x) - \int_0^x F(s)g(s) ds. \end{aligned}$$

比较两端即得结论。

应用 11.5 (双重级数)。 设 $(a_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}}$ 是以 $\mathbb{N}^2$ 为指标的数族。称双重级数绝对收敛, 是指函数 $(p, q) \mapsto a_{p,q}$ 关于 $\mathbb{N}^2$ 上的计数测度 m_2 可积; 此时定义

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} a_{p,q} := \int_{\mathbb{N}^2} a_{p,q} m_2(dp, dq).$$

因为 $m_2 = m_1 \otimes m_1$, 且 m_1 是 σ -有限的, Fubini–Tonelli 定理给出

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} |a_{p,q}| = \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} |a_{p,q}| \right) = \sum_{q \in \mathbb{N}} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} |a_{p,q}| \right).$$

若上述值有限, 则 Fubini–Lebesgue 定理进一步给出

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} a_{p,q} = \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} a_{p,q} \right) = \sum_{q \in \mathbb{N}} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} a_{p,q} \right).$$

11.4 无限多个概率测度的乘积

定理 11.4 (Ionescu–Tulcea–Kolmogorov 定理)。 设

$$(X_n, \mathcal{A}_n, \mu_n), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

是一列概率空间, 即 $\mu_n(X_n) = 1$ 。在乘积集合

$$X := \prod_{n \geq 1} X_n = \{(x_n)_{n \geq 1} : x_n \in X_n\}$$

上考虑柱集代数

$$\mathcal{C} := \left\{ A \times \prod_{k \geq n+1} X_k : A \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

对 $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$, 规定

$$\nu \left(A \times \prod_{k \geq n+1} X_k \right) := (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)(A). \quad (11.5)$$

则这在 $\mathcal{C}$ 上定义了一个概率测度, 并且它唯一延拓为

$$\mathcal{A} := \bigotimes_{n \geq 1} \mathcal{A}_n := \sigma(\mathcal{C})$$

上的概率测度。

这个结论是一般 Ionescu-Tulcea 定理的一个特例; 后者可用于在典范路径空间上构造 Markov 链。

定理 11.4 的证明。第一步：定义相容。 若 $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$, 则

$$\begin{aligned} & \nu \left(A \times X_{n+1} \times \prod_{k \geq n+2} X_k \right) \\ &= (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n+1})(A \times X_{n+1}) \\ &= (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)(A) \mu_{n+1}(X_{n+1}) \\ &= (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)(A). \end{aligned}$$

所以用更多坐标表示同一柱集, 不会改变 (11.5) 的值。

第二步：有限可加性。 任意有限多个柱集都可以提升到同一个有限坐标层级, 即写成

$$A \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \cdots, \quad A \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n.$$

因此 $\mathcal{C}$ 是集合代数, 而 ν 的有限可加性直接来自有限乘积测度的可加性; 同时 $\nu(X) = 1$ 。

第三步：验证 Carathéodory 延拓条件。 对 $p \in \mathbb{N}$ 及固定前缀 $(x_1, \dots, x_p) \in X_1 \times \cdots \times X_p$, 在柱集上定义辅助概率测度 $\nu^{(x_1, \dots, x_p)}$ 。若

$$C = A \times \prod_{k \geq n+1} X_k, \quad A \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n,$$

则令

$$\nu^{(x_1, \dots, x_p)}(C) := \begin{cases} \mathbf{1}_A(x_1, \dots, x_n), & p \geq n, \\ \int_{X_{p+1} \times \cdots \times X_n} \mathbf{1}_A(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=p+1}^n \mu_j(dx_j), & p < n. \end{cases}$$

约定 $p = 0$ 时 $\nu^{(0)} = \nu$ 。这些辅助概率满足: 若 $p \geq n$,

$$\nu^{(x_1, \dots, x_p)}(C) = \mathbf{1}_A(x_1, \dots, x_n),$$

并且对每个 $p \in \mathbb{N}$ 、每个柱集 C , 由 Fubini-Tonelli 定理,

$$\nu^{(x_1, \dots, x_p)}(C) = \int_{X_{p+1}} \nu^{(x_1, \dots, x_p, x_{p+1})}(C) \mu_{p+1}(dx_{p+1}). \quad (11.6)$$

设 $(C_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}$ 关于包含关系递减。数列 $(\nu(C_n))$ 递减，故趋于某个 $\ell \geq 0$ 。假设 $\ell > 0$ 。由 (11.6)，

$$\nu(C_n) = \int_{X_1} \nu^{(x_1)}(C_n) \mu_1(dx_1).$$

若对每个 x_1 ，都有 $\nu^{(x_1)}(C_n) \downarrow 0$ ，则因这些函数被 1 控制，控制收敛定理将给出 $\nu(C_n) \rightarrow 0$ ，矛盾。因此存在 $x_1 \in X_1$ ，使

$$\inf_n \nu^{(x_1)}(C_n) > 0.$$

再次使用 (11.6)，可选 $x_2 \in X_2$ ，使

$$\inf_n \nu^{(x_1, x_2)}(C_n) > 0.$$

如此递推，得到序列 $(x_p)_{p \geq 1}$ ，满足

$$\inf_n \nu^{(x_1, \dots, x_p)}(C_n) > 0 \quad (p \geq 1).$$

固定 n ，把柱集写成

$$C_n = A_{r_n} \times \prod_{k \geq r_n+1} X_k, \quad A_{r_n} \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{r_n}.$$

对每个 $p \geq r_n$ ，

$$\mathbf{1}_{A_{r_n}}(x_1, \dots, x_{r_n}) = \nu^{(x_1, \dots, x_p)}(C_n) > 0.$$

所以 $(x_p)_{p \geq 1} \in C_n$ 。这对每个 n 成立，因而

$$\bigcap_{n \geq 1} C_n \neq \emptyset.$$

我们已经证明：若递减柱集列的交为空，则 $\nu(C_n) \downarrow 0$ 。这正是有限测度在集合代数上的 Carathéodory 连续性条件。故 ν 唯一延拓为 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的概率测度。□

11.5 练习

本节中，除非另有说明， $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 表示 σ -有限测度空间。

练习 11.1。 考虑测度空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 与 $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$ ，其中

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ 可数}, \\ +\infty, & A \text{ 不可数}. \end{cases}$$

设 $K \subset \mathbb{R}$ 是不可数且 Lebesgue 测度为零的紧集，例如第 13 章的 Cantor 集，并令

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in K\}.$$

(a) 证明 $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 。

(b) 计算

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(dx) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_C(x, y) \mu(dy), \quad \int_{\mathbb{R}} \mu(dy) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_C(x, y) \lambda(dx),$$

并作出结论。

练习 11.2. 在 $\mathbb{R}$ 上定义

$$f(x) := \sum_{n \geq 1} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{n^2 + x^2} \right).$$

- (a) 证明广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 条件收敛, 并求其值。
 (b) 计算

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{n^2 + x^2} \right) dx,$$

并与 (a) 比较。

练习 11.3. 在 $[0, 1]^2$ 上定义

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0)), \quad f(0, 0) := 0.$$

- (a) 计算

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx.$$

- (b) 推出 $f \notin \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1([0, 1]^2)$ 。

练习 11.4. 设 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^1(\mu)$, 并设 $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 是递增的 C^1 函数, 且 $g(0) = 0$ 。证明

$$\int_X g(f) d\mu = \int_0^{+\infty} g'(t) \mu(\{f \geq t\}) dt.$$

练习 11.5. 设 μ, ν 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的两个 σ -有限测度。

- (a) 证明

$$D := \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$$

至多可数。

- (b) 设 $\Delta := \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ 。证明

$$(\mu \otimes \nu)(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\}) \nu(\{x\}).$$

练习 11.6. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是非负 Borel 函数。

- (a) 证明下图集合

$$A_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 的 Borel 集, 并计算 $\lambda_2(A_f)$ 。

- (b) 对图像

$$G_f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

回答同样的问题。

- (c) 推出

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}) = 0 \quad \text{对 } \lambda(dy)\text{-几乎每个 } y.$$

练习 11.7。 设 $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ 是概率空间, $f, g \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^1(\mu)$, 并且 $fg \in \mathbf{L}_{\mathbb{R},+}^1(\mu)$ 。若 f, g 同向单调, 证明

$$\int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g \, d\mu \right).$$

练习 11.8 (Schwarz 定理)。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为开集, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 并且混合偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

都在 Ω 上存在且连续。证明它们在 Ω 上相等。

练习 11.9。 设 $a < b$, $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1([a, b]^2)$ 。

(a) 证明

$$I := \int_a^b dx \int_a^x f(x, y) \, dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) \, dx.$$

(b) 若

$$f(x, y) = f(y, x) \quad \lambda_2\text{-几乎处处},$$

证明

$$I = \frac{1}{2} \int_{[a,b]^2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

练习 11.10 (Basel 问题, 第七种方法)。

(a) 用两种不同方法计算

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dx \, dy}{(1+y)(1+x^2y)}.$$

由此求出

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \, dx.$$

(b) 结合 (a) 与幂级数展开证明

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

再把偶数项和奇数项分开, 重新得到

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

练习 11.11。

(a) 借助函数

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{1 + y \cos x}$$

计算

$$\int_0^\pi \frac{\ln(1 + \cos x)}{\cos x} \, dx.$$

(b) 证明对每个 $y \geq 0$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{1 + y \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2(1 + y + \sqrt{1 + y})}.$$

(c) 推出

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 + \cos^2 x) dx$$

的值。

练习 11.12。 对 $t \geq 0$, 定义

$$f(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx, \quad g(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} e^{-tx} dx.$$

(a) 证明 f 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上连续, g 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续。

(b) 从恒等式

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(xy) dy$$

出发, 求出所有 $t > 0$ 时的 $f(t)$ 。

(c) 从恒等式

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} = \int_0^1 \frac{\sin(2xy)}{x} dy$$

出发, 求出所有 $t > 0$ 时的 $g(t)$ 。

(d) 推出 $g(0)$ 的值。

练习 11.13。 回忆: 对 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R})$, Fourier 变换定义为

$$\widehat{f}(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-itx} dx.$$

(a) 对 $a > 0$, 求函数 $x \mapsto e^{-a|x|}$ 的 Fourier 变换。

(b) 对 $a > 0$, 令

$$f_a(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx}}{1 + x^2} e^{-a|x|} dx.$$

证明

$$f_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + (y + t)^2} e^{-a|y|} dy.$$

(c) 推出函数 $x \mapsto (1 + x^2)^{-1}$ 的 Fourier 变换。

练习 11.14 (Hardy 不等式)。

(a) 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 、 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 是 σ -有限测度空间, $p \in [1, +\infty)$, $\varphi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu \otimes \nu)$, 并定义

$$F(x) := \int_Y \varphi(x, y) \nu(dy) \quad \mu\text{-几乎处处}.$$

证明

$$\|F\|_{L^p(\mu)} \leq \int_Y \|\varphi(\cdot, y)\|_{L^p(\mu)} \nu(dy).$$

(b) 推出：对 $p \in (1, +\infty)$ 、 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}_+, \lambda)$ ，函数

$$F(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

满足 Hardy 不等式

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p.$$

^a

^a校订注：原书 (b) 沿用 (a) 的 $p \in [1, +\infty)$ ，但结论常数 $p/(p-1)$ 在 $p=1$ 时无定义，且 Hardy 不等式的该形式在端点 $p=1$ 不成立。这里明确改为 $1 < p < +\infty$ 。

练习 11.15 (Hardy–Littlewood–Pólya 不等式)。设 φ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的递减函数，且 $\varphi(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$)。

(a) 设 f 是 $\mathbb{R}_+$ 上的非负 Borel 函数，

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt.$$

证明 Stieltjes 分部积分公式

$$\int_{\mathbb{R}_+} f \varphi d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} F d(-\varphi),$$

其中 $d(-\varphi)$ 是递增函数 $-\varphi$ 对应的 Stieltjes 测度。

(b) 设 $p > 1$ 、 $1/p + 1/q = 1$ ，且 $pa + 1 > 0$ 、 $qb + 1 > 0$ 。证明

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{a+b} \varphi(x) dx &\leq \frac{(pa+1)^{1/p} (qb+1)^{1/q}}{a+b+1} \\ &\times \left(\int_0^{+\infty} x^{pa} \varphi(x) dx \right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} x^{qb} \varphi(x) dx \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

(c) 假设所有积分有限且 $pa \neq qb$ 。证明等号成立，当且仅当存在 $c, x_0 \geq 0$ ，使 $\varphi = c$ 于 $(0, x_0)$ ，且 $\varphi = 0$ 于 $(x_0, +\infty)$ 。

练习 11.16 (Pólya–Szegő 不等式)。设 φ 在 $[0, 1]$ 上递增。

(a) 假设 φ 非常值。对非负 Borel 函数 f ，令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 。证明

$$\int_0^1 f \varphi d\lambda = \int_0^1 (c_\varphi F(1) - F) d\varphi, \quad c_\varphi := \frac{\varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi(0)}.$$

(b) 在练习 11.15(b) 的参数条件下证明

$$\int_0^1 x^{a+b} \varphi(x) dx \geq \frac{(pa+1)^{1/p} (qb+1)^{1/q}}{a+b+1} \left(\int_0^1 x^{pa} \varphi(x) dx \right)^{1/p} \left(\int_0^1 x^{qb} \varphi(x) dx \right)^{1/q}.$$

(c) 若 $pa \neq qb$ ，证明等号成立，当且仅当 φ 在 $(0, 1)$ 上为常数。

练习 11.17。 在 $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ 上工作。

(a) 对 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\lambda)$, 定义

$$\tilde{f}(t) := \int_{[0, t]} f \, d\lambda.$$

证明 $\tilde{f} \in C([0, 1], \mathbb{R})$, 且映射

$$f \mapsto \tilde{f}$$

从 $(L_{\mathbb{R}}^2, \|\cdot\|_2)$ 到 $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ 连续。

(b) 若 μ 是 $[0, 1]$ 上的有限测度, 证明 $\tilde{f} \in L^1(\mu)$, 并求出一个递减函数 $P(\mu)$, 使

$$\int_{[0, 1]} \tilde{f} \, d\mu = \int_{[0, 1]} f P(\mu) \, d\lambda.$$

(c) 若 μ, ν 都是 $[0, 1]$ 上的有限测度, 证明

$$\int_{[0, 1]} P(\mu) P(\nu) \, d\lambda = \int_{[0, 1]^2} \min(s, t) \, d(\mu \otimes \nu)(s, t).$$

练习 11.18 (Mellin 变换)。 设 $f \in \mathbf{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}_+, \lambda)$, 定义余弦 Fourier 变换

$$\mathcal{F}(f)(y) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(xy) \, dx.$$

若 Borel 函数 $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ 满足 $y \mapsto g(y)y^{s-1}$ 对每个 $s \in (0, 1)$ 可积 (或具有条件收敛积分), 定义

$$\mathcal{M}(g)(s) := \int_0^{+\infty} g(y)y^{s-1} \, dy, \quad \Gamma(s) := \mathcal{M}(y \mapsto e^{-y})(s).$$

固定 $s \in (0, 1)$ 。

(a) 令 $P := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$. 证明

$$z \mapsto z^s \mathcal{M}(y \mapsto e^{-zy})(s), \quad z^s = e^{s \operatorname{Log} z},$$

在 $P \setminus \{0\}$ 上连续、在其内部全纯, 并推出它恒等于 $\Gamma(s)$ 。这里 Log 是主值对数。

(b) 假设

$$x \mapsto f(x)x^{-s} \in L^1(\mathbb{R}_+), \quad y \mapsto \mathcal{F}(f)(y)y^{s-1} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

证明

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}(f))(s) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)x^{-s} \mathcal{M}(\mathbf{1}_{[0, ax]} \cos)(s) \, dx.$$

(c) 推出

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}(f))(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \mathcal{M}(f)(1-s).$$

a

(d) 取 $f(x) = e^{-x}$, 并使用 $(\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(f) = f$, 证明余元公式

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

^a校订注：原文此式漏写因子 $\Gamma(s)$ 。由 (a) 中的 Laplace–Mellin 计算可直接得到该因子；补入后才能在 (d) 中推出 Euler 余元公式。

练习 11.19 (Schur 不等式与 Hilbert 不等式)。设 Borel 函数 $K: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ 为 -1 次齐次, 即

$$K(tx, ty) = t^{-1} K(x, y),$$

并假设 $t \mapsto K(1, t) + K(t, 1)$ 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上有界。设 $p, q > 1$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in L_{\mathbb{R},+}^p(\mathbb{R}_+)$, $g \in L_{\mathbb{R},+}^q(\mathbb{R}_+)$ 。

(a) 证明

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f(x)g(y)K(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{+\infty} K(1, t) \left(\int_0^{+\infty} f(x)g(tx) \, dx \right) dt.$$

(b) 推出 Schur 不等式

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f(x)g(y)K(x, y) \, dx \, dy \leq I(q) \|f\|_p \|g\|_q,$$

其中

$$I(q) := \int_0^{+\infty} t^{-1/q} K(1, t) \, dt < +\infty.$$

(c) 设 $\varphi, \psi \in L_{\mathbb{R},+}^1(\mathbb{R}_+)$, 并且对几乎每个 $t > 0$, 存在 $\alpha(t) \geq 0$, 使

$$\psi(tx) = \alpha(t)\varphi(x) \quad \text{对几乎每个 } x > 0.$$

证明 $\varphi = 0$ 几乎处处。

(d) 推出: 若 f, g 都不几乎处处为零, 则 Schur 不等式严格。

(e) 证明 (S) 中的常数 $I(q)$ 最优。^a

(f) 对 $(a_n) \in \ell_{\mathbb{R},+}^p$, $(b_n) \in \ell_{\mathbb{R},+}^q$, 利用练习 11.18(d) 与练习 12.7(b) 的公式证明 Hilbert 不等式

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \left(\sum_{m \geq 1} a_m^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n \geq 1} b_n^q \right)^{1/q}.$$

^a校订注: 原文此处写成 $I(p)$, 与 (S) 中常数 $I(q)$ 的定义不一致; 在未假设核 K 对称时, 二者一般不相等, 故改为 $I(q)$ 。

练习 11.20。 对 $0 \leq a < b$, $n \geq 1$, 令

$$I_n := \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right)^n dx.$$

(a) 证明

$$I_n = \int_{[a,b]^n} \frac{dt_1 \cdots dt_n}{t_1 + \cdots + t_n}.$$

(b) 求 I_2 与 I_3 。

练习 11.21。 令

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2 x}{x^2} dx.$$

(a) 证明

$$I = \int_0^{+\infty} \arctan^2(1/x) dx < +\infty.$$

(b) 推出

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx.$$

(c) 证明对 $x > 0$,

$$\frac{\arctan^2 x}{x^2} = \left(\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2} \right) \left(\int_0^1 \frac{dz}{1+x^2 z^2} \right).$$

(d) 推出

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{+\infty} \frac{dx dy dz}{(1+x^2 y^2)(1+x^2 z^2)}.$$

(e) 对 $x \geq 0, y \neq z \in (0, 1]$, 证明

$$\frac{1}{(1+x^2 y^2)(1+x^2 z^2)} = \frac{1}{y^2 - z^2} \left(\frac{y^2}{1+x^2 y^2} - \frac{z^2}{1+x^2 z^2} \right).$$

(f) 利用

$$\arctan x = x \int_0^1 \frac{dt}{1+(tx)^2}$$

和 Fubini–Tonelli 定理, 重新求出 I 。

练习 11.22。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是有限测度空间, $(f_n)_{n \geq 1}$ 是非负可积函数列, 并假设对每个 $t \geq 0$, 数列 $(\mu(\{f_n > t\}))_{n \geq 1}$ 递减。

(a) 证明

$$\{(x, t) \in X \times \mathbb{R}_+ : f_1(x) > t\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

(b) 推出 $t \mapsto \mu(\{f_1 > t\})$ 是 Borel 可测函数, 且

$$\int_0^{+\infty} \mu(\{f_1 > t\}) dt = \int_X f_1 d\mu.$$

(c) 令 $g_n := \max_{1 \leq k \leq n} f_k$ 。证明 g_n 可测, 且

$$\mu(\{g_n > t\}) \leq n\mu(\{f_1 > t\}).$$

(d) 证明

$$\frac{1}{n} \int_X g_n d\mu \leq \int_0^{+\infty} \min \left(\frac{\mu(X)}{n}, \mu(\{f_1 > t\}) \right) dt.$$

(e) 推出

$$\frac{1}{n} \int_X g_n d\mu \longrightarrow 0.$$

练习 11.23 (Lebesgue 测度的刻画)。 设 μ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 Borel 测度, 并假设存在常数 c_d , 使对任意中心 $x \in \mathbb{R}^d$ 、半径 $r > 0$ 的球都有

$$\mu(B(x, r)) = c_d r^d.$$

记

$$v_d := \lambda_d(B(0, 1)).$$

(a) 证明对每个 $\varphi \in C_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \lambda_d(dx) = \frac{v_d}{c_d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \mu(dy).$$

(b) 推出

$$\mu = \frac{c_d}{v_d} \lambda_d.$$

第十二章 像测度与变量替换

本章的主要目标，是在 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ 上的多重积分中建立一般变量替换定理。它与 Fubini 定理一道，构成显式计算多重积分的基本工具。

在此之前，我们先研究像测度。它可看成一种抽象的变量替换：给定从可测空间 $(X, \mathcal{A})$ 到 $(Y, \mathcal{B})$ 的可测映射 h ，可以借助 h 把 X 上的测度搬运到 Y 上。这个概念在概率论中尤其重要，因为随机变量的分布正是一个像测度。

12.1 像测度

定义 12.1。 设 $(X, \mathcal{A})$ 、 $(Y, \mathcal{B})$ 是两个可测空间， $h : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ 可测， μ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的测度。对 $B \in \mathcal{B}$ 定义

$$\nu(B) := \mu(h^{-1}(B)).$$

则 ν 是 $(Y, \mathcal{B})$ 上与 μ 具有相同总质量的测度，称为 μ 在 h 下的**像测度**，记作 $h(\mu)$ 、 μ_h ，有时也记作 $\mu \circ h^{-1}$ 。

证明。 首先 $\nu(\emptyset) = \mu(h^{-1}(\emptyset)) = 0$ 。若 $(B_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{B}$ 两两不交，则 Hausdorff 公式给出

$$h^{-1}(B_i) \cap h^{-1}(B_j) = \emptyset \quad (i \neq j), \quad h^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) = \bigcup_{n \geq 1} h^{-1}(B_n).$$

因此

$$\nu\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} h^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(h^{-1}(B_n)) = \sum_{n \geq 1} \nu(B_n).$$

所以 ν 确为测度，而且 $\nu(Y) = \mu(h^{-1}(Y)) = \mu(X)$ 。 □

注。

- ν 实际上可以定义在一个可能比 $\mathcal{B}$ 更大的 σ -代数上，即第 4 章第 4.2.2 节定义的像 σ -代数

$$\{B \subset Y : h^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

这是使 h 从 $(X, \mathcal{A})$ 出发可测的最大 σ -代数。

- 像测度是概率论的基本概念：随机变量的分布就是原概率测度在该随机变量下的像。

定理 12.1 (转移定理)。 设 μ_h 是 μ 在 h 下的像测度， $f : (Y, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ 可测。则 f 关于 μ_h 可积，当且仅当 $f \circ h$ 关于 μ 可积；此时

$$\int_Y f \, d\mu_h = \int_X f \circ h \, d\mu.$$

若 $f \geq 0$ ，上述等式总是成立，等式两边允许取 $+\infty$ 。

证明。 先设 $f = \mathbf{1}_B$, 其中 $B \in \mathcal{B}$ 。则

$$\int_Y f \, d\mu_h = \mu_h(B) = \mu(h^{-1}(B)) = \int_X \mathbf{1}_{h^{-1}(B)} \, d\mu.$$

而 $\mathbf{1}_{h^{-1}(B)} = \mathbf{1}_B \circ h$, 故结论对示性函数成立。由线性性, 等式推广到非负简单函数; 再利用基本逼近引理与 Beppo Levi 定理, 推广到任意非负可测函数。最后分别对实值函数的正、负部以及复值函数的实部、虚部应用所得结论, 即得可积性等价关系及积分公式。 $\square$

应用 12.1。 设 $h: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, \mathcal{A})$, 并且测度 μ 在 h 下不变, 即 $\mu_h = \mu$ 。则

$$\forall f \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu), \quad \int_X f \, d\mu = \int_X f \circ h \, d\mu.$$

这就是第一种变量替换公式。

例。 按 $\mathbb{R}^d$ 上 Lebesgue 测度 λ_d 的定义, 它在每个平移 $\tau_a: x \mapsto x - a$ 下不变。事实上, 对任意 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\lambda_d(a + B) = \lambda_d(B)$, 亦即 $\lambda_d(\tau_a^{-1}(B)) = \lambda_d(B)$ 。因此

$$\forall a \in \mathbb{R}^d, \forall f \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(x \pm a) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, dx.$$

命题 12.1。 设 $A \in GL(d, \mathbb{R})$ 、 $b \in \mathbb{R}^d$ 。则

$$\forall f \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(Ax + b) \, dx = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, dx. \quad (12.1)$$

该等式也适用于非负可测函数, 并允许两边取 $+\infty$ 。等价地,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(Au + b) |\det A| \, du. \quad (12.2)$$

推论 12.1。 设 $A \in GL(d, \mathbb{R})$ 、 $b \in \mathbb{R}^d$ 。Lebesgue 测度在映射 $x \mapsto Ax + b$ 下的像为 $|\det A|^{-1} \lambda_d$ 。

证明。 把平移不变性应用于 $x \mapsto f(Ax)$ 与 $a = A^{-1}b$, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Ax + b) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(A(x + A^{-1}b)) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(Ax) \, dx.$$

因此只需考虑 $b = 0$ 。令 $\nu := A(\lambda_d)$ 。对任意 $a \in \mathbb{R}^d$ 、 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\nu(a + B) = \lambda_d(A^{-1}a + A^{-1}B) = \lambda_d(A^{-1}B) = \nu(B),$$

故 ν 平移不变。

此外, $0 < \nu([0, 1]^d) < +\infty$ 。有限性来自 $A^{-1}([0, 1]^d)$ 的紧性。若它等于零, 则

$$\nu(\mathbb{R}^d) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \nu(n + [0, 1]^d) = 0,$$

与 $\nu(\mathbb{R}^d) = \lambda_d(\mathbb{R}^d) = +\infty$ 矛盾。于是归一化测度 $\nu' := \nu / \nu([0, 1]^d)$ 平移不变, 且 $\nu'([0, 1]^d) = 1$ 。由 Lebesgue 测度的刻画, 存在 $c > 0$, 使 $\nu = c\lambda_d$ 。以下确定 c 。

若 A 正交，则它保持 Euclid 单位球不变，而单位球的 Lebesgue 测度为正（例如它包含 $[0, 1/\sqrt{d}]^d$ ，其测度为 $d^{-d/2} > 0$ ），故 $c = 1 = |\det A|^{-1}$ 。

若 A 对称正定，则可写成 $A = PDP^T$ ，其中 $P \in O(d, \mathbb{R})$ ， $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ ， $\alpha_i > 0$ 。取 $B = PD([0, 1]^d)$ ；由于 PD 是线性同胚， $B = ((PD)^{-1})^{-1}([0, 1]^d)$ 是 Borel 集。由正交情形可得

$$\nu(B) = 1, \quad \lambda_d(B) = \prod_{i=1}^d \alpha_i = \det A.$$

所以 $c = (\det A)^{-1} = |\det A|^{-1}$ 。

一般情形使用极分解 $A = PS$ ，其中 $P \in O(d, \mathbb{R})$ 、 $S = (A^T A)^{1/2}$ 对称正定。于是

$$\nu(B) = \lambda_d(S^{-1}P^{-1}B) = (\det S)^{-1}\lambda_d(P^{-1}B) = (\det S)^{-1}\lambda_d(B).$$

又 $|\det A| = \det S$ ，故 $\nu = |\det A|^{-1}\lambda_d$ 。转移定理随即给出 (12.1)，而 (12.2) 只是同一公式的改写。 $\square$

12.2 一般变量替换定理

我们希望计算

$$\int_D f(x_1, \dots, x_d) \lambda_d(dx),$$

其中 $D \subset \mathbb{R}^d$ 是开集， $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 为非负或可积的 Borel 函数。除了上一章的 Fubini 定理，另一个核心工具就是变量替换定理：它把积分区域 D 搬运到与之微分同胚的另一个开集 Δ 。

回顾与记号。

- 若 $D \subset \mathbb{R}^d$ 为开集，则

$$\mathcal{B}(D) = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : B \subset D\}.$$

记 $\lambda_D := \mathbf{1}_D \lambda_d$ ，即 λ_d 在 D 上的限制。

- 若 $\varphi: \Delta \rightarrow D$ 在开集 $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ 上可微，则 $\varphi'(u)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的线性映射，称

$$J_\varphi(u) := \det \varphi'(u)$$

为 φ 在 u 处的 Jacobian。

- 映射 $\varphi: \Delta \rightarrow D$ 称为 C^1 -微分同胚，是指它双射、在 Δ 上属于 C^1 ，并且 φ^{-1} 在 D 上也属于 C^1 。在 $\mathbb{R}^d$ 的开集上，连续可微等价于所有一阶偏导数处处存在且连续。

以下两个微分学结果将在本章直接使用。

定理 12.2 (局部反函数定理)。 设 $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ 为开集， $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ 属于 C^1 。若 $x \in \Delta$ 且 $\varphi'(x)$ 可逆，则存在 x 在 Δ 中的开邻域 V_x ，使 $\varphi|_{V_x}$ 是从 V_x 到开集 $\varphi(V_x)$ 的微分同胚。

定理 12.3。 设 $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ 为开集。映射 $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ 是从 Δ 到其像 $D := \varphi(\Delta)$ 的 C^1 -微分同胚，当且仅当：

- (i) φ 在 Δ 上单射；
- (ii) $\varphi \in C^1(\Delta)$ ；
- (iii) 对每个 $u \in \Delta$ ， $\varphi'(u)$ 可逆，等价地 $J_\varphi(u) \neq 0$ 。

此时 D 是 $\mathbb{R}^d$ 的开集，并且对每个 $x \in D$,

$$(\varphi^{-1})'(x) = (\varphi'(\varphi^{-1}(x)))^{-1}.$$

定理 12.4 (变量替换定理)。设 φ 是开集 $\Delta, D \subset \mathbb{R}^d$ 之间的 C^1 -微分同胚。则以下三个命题等价且成立：

(a)

$$\lambda_D = \varphi(|J_\varphi| \lambda_\Delta),$$

即 λ_D 是密度测度 $|J_\varphi| \lambda_\Delta$ 在 φ 下的像。

(b) 对每个 Borel 函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\int_D f(x) dx = \int_\Delta f(\varphi(u)) |J_\varphi(u)| du \leq +\infty.$$

(c) 对每个 Borel 函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, f 在 D 上可积，当且仅当 $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ 在 Δ 上可积；此时

$$\int_D f(x) dx = \int_\Delta f(\varphi(u)) |J_\varphi(u)| du. \quad (12.3)$$

命题 (a) 与 (c) 的等价性由定理 12.1 立即得到。真正困难的是证明其中任一命题；核心做法是把 Δ 细分为足够小的超立方体，再用有限增量公式把 φ 在局部替换成其微分。

应用变量替换时，必须认真验证 φ 确实是微分同胚，尤其要验证单射性。区域 Δ 的选择往往正由这一点决定。仅有 $\varphi \in C^1(\Delta)$ 及 $J_\varphi \neq 0$ 并不足以推出全局微分同胚；例如 $\varphi(u) = u^2$ 在 $\mathbb{R}^*$ 上处处 Jacobian 非零，却不是单射。

若待积区域是闭集或紧集 F ，通常先寻找开集 D ，使 $F = \overline{D}$ 且 $\lambda_d(F \setminus D) = 0$ ，再应用定理。一般闭集的边界当然未必为零测集。实际计算中也经常把变量替换定理与 Fubini 定理结合使用，后面的应用将反复展示这一点。

启发式说明。下面先从几何直观解释公式。用两两不交、边长很小的半开超立方体 $(C_i)_i$ 覆盖 Δ ，记 u_i 为 C_i 的中心。由于 φ 双射， $D = \varphi(\Delta)$ 是 $\varphi(C_i)$ 的不交并。对非负或有界的 Borel 函数 f ，形式上有

$$\int_D f(x) dx \approx \sum_i f(\varphi(u_i)) \lambda_d(\varphi(C_i)).$$

当 C_i 足够小时，有限增量公式给出

$$\varphi(C_i) \approx \{\varphi(u_i) + \varphi'(u_i)(u - u_i) : u \in C_i\}.$$

令 $A_i = (\varphi'(u_i))^{-1}$ 。由平移不变性和推论 12.1，

$$\begin{aligned} \lambda_d(\varphi(C_i)) &\approx \lambda_d(\varphi'(u_i)(C_i - u_i)) \\ &= A_i(\lambda_d)(C_i - u_i) \\ &= |\det A_i|^{-1} \lambda_d(C_i - u_i) = |\det \varphi'(u_i)| \lambda_d(C_i). \end{aligned}$$

因此

$$\int_D f(x) dx \approx \sum_i f(\varphi(u_i)) |\det \varphi'(u_i)| \lambda_d(C_i) \approx \int_\Delta (f \circ \varphi)(u) |J_\varphi(u)| du.$$

严格证明所做的，正是把这段局部线性化与求和过程精确化。

定理 12.4(a) 的证明。 对 $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ，本证明使用最大范数

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|,$$

并记

$$Q_{a,\delta} := \{u \in \mathbb{R}^d : \|u - a\|_\infty \leq \delta\}$$

为中心 a 、边长 2δ 的闭超立方体。若 $A \subset \mathbb{R}^d$ ，记 $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$ 。

由于 φ^{-1} 是 Borel 映射，可以定义像测度 $\varphi^{-1}(\lambda_D)$ 。只需证明

$$\varphi^{-1}(\lambda_D) = |J_\varphi| \lambda_\Delta. \quad (12.4a)$$

事实上，对等式两边再取 φ 下的像，左端变成 $(\varphi \circ \varphi^{-1})(\lambda_D) = \lambda_D$ 。令 $\mu := \varphi^{-1}(\lambda_D)$ ，则对 $A \in \mathcal{B}(\Delta)$ ，

$$\mu(A) = \lambda_D(\varphi(A)).$$

所以目标等价于

$$\forall A \in \mathcal{B}(\Delta), \quad \mu(A) = \int_A |J_\varphi(u)| \, du. \quad (12.4b)$$

步骤 1：局部体积比。 对任意 $u_0 \in \Delta$ 与 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使每个满足 $u_0 \in Q_{a,\eta} \subset \Delta$ 、 $0 < \eta < \delta$ 的超立方体都有

$$\left| \frac{\mu(Q_{a,\eta})}{\lambda_d(Q_{a,\eta})} - |J_\varphi(u_0)| \right| < \varepsilon. \quad (12.4c)$$

先考虑 $u_0 = 0$ 、 $\varphi(0) = 0$ 、 $\varphi'(0) = I_d$ 的情形。选 $\varepsilon_0 > 0$ ，使 $(1 + \varepsilon_0)^d < 1 + \varepsilon$ 。由有限增量公式作用于 φ 与 φ^{-1} ，可取 $\delta > 0$ ，使

$$\|\varphi(u) - u\|_\infty \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \|u\|_\infty, \quad \|\varphi^{-1}(u) - u\|_\infty \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \|u\|_\infty$$

在相应的 δ -邻域内成立。若 $0 \in Q_{a,\eta} \subset \Delta$ 、 $\eta < \delta$ ，则

$$\|\varphi(u) - a\|_\infty \leq (1 + \varepsilon_0)\eta \quad (u \in Q_{a,\eta}),$$

从而

$$Q_{a,\eta/(1+\varepsilon_0)} \subset \varphi(Q_{a,\eta}) \subset Q_{a,(1+\varepsilon_0)\eta}.$$

因为 $\lambda_d(Q_{a,\eta}) = (2\eta)^d$ ，所以

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{(1 + \varepsilon_0)^d} \leq \frac{\lambda_d(\varphi(Q_{a,\eta}))}{\lambda_d(Q_{a,\eta})} \leq (1 + \varepsilon_0)^d < 1 + \varepsilon.$$

这就证明了标准化情形。

一般情形令

$$\psi(u) := \varphi'(u_0)^{-1}(\varphi(u + u_0) - \varphi(u_0)).$$

它是从 $\Delta_0 = -u_0 + \Delta$ 到 $D_0 = \varphi'(u_0)^{-1}(-\varphi(u_0) + D)$ 的微分同胚，并满足 $\psi(0) = 0$ 、 $\psi'(0) = I_d$ 。由命题 12.1，

$$\frac{\mu(Q_{a,\eta})}{\lambda_d(Q_{a,\eta})} = |J_\varphi(u_0)| \frac{\lambda_d(\psi(-u_0 + Q_{a,\eta}))}{\lambda_d(-u_0 + Q_{a,\eta})}.$$

对 ψ 应用标准化情形，便得到 (12.4c)。

步骤 2：超立方体上的一个方向不等式。 对每个 $Q \subset \Delta$ ，证明

$$\mu(Q) \leq \int_Q |J_\varphi(u)| \, du. \quad (12.4d)$$

记

$$m(Q) := \mu(Q) - \int_Q |J_\varphi(u)| \, du.$$

反设存在 $Q^{(0)} \subset \Delta$ 使 $m(Q^{(0)}) > 0$ 。把它等分成 2^d 个边长减半的闭超立方体 $Q_k^{(0)}$ 。因为 μ 次可加，而不同小立方体的交集是 Lebesgue 零测集，故

$$m(Q^{(0)}) \leq \sum_{k=1}^{2^d} m(Q_k^{(0)}).$$

于是其中至少有一个，记作 $Q^{(1)}$ ，满足

$$m(Q^{(1)}) \geq \frac{m(Q^{(0)})}{2^d}, \quad \lambda_d(Q^{(1)}) = \frac{\lambda_d(Q^{(0)})}{2^d}.$$

迭代可得闭超立方体降链 $(Q^{(n)})_{n \geq 0}$ ，满足

$$m(Q^{(n+1)}) \geq \frac{m(Q^{(n)})}{2^d}, \quad \lambda_d(Q^{(n+1)}) = \frac{\lambda_d(Q^{(n)})}{2^d}. \quad (12.4)$$

其直径趋于零，故由闭集套定理 $\bigcap_n Q^{(n)} = \{u_\infty\}$ 。步骤 1 与 J_φ 的连续性分别给出

$$\frac{\mu(Q^{(n)})}{\lambda_d(Q^{(n)})} \longrightarrow |J_\varphi(u_\infty)|, \quad \frac{1}{\lambda_d(Q^{(n)})} \int_{Q^{(n)}} |J_\varphi(u)| \, du \longrightarrow |J_\varphi(u_\infty)|.$$

所以 $m(Q^{(n)})/\lambda_d(Q^{(n)}) \rightarrow 0$ 。但 (12.4) 又说明该比值序列递增，且首项为正，矛盾。故 (12.4d) 成立。

步骤 3： μ 不给超立方体边界赋质量。 边界 $\partial Q_{a,\delta}$ 是 $2d$ 个超平面片

$$C_{i,\epsilon} := \{u : u_i = a_i + \epsilon\delta, \max_{j \neq i} |u_j - a_j| \leq \delta\}, \quad \epsilon \in \{-1, 1\},$$

的并。对每个 $n \geq 1$ ， $C_{i,\epsilon}$ 包含于厚度为 $1/n$ 的长方体片中；该片最多可由 $O(n^{d-1})$ 个体积为 n^{-d} 的小超立方体覆盖。步骤 2 与 $|J_\varphi|$ 在固定紧邻域上的有界性给出

$$\mu(C_{i,\epsilon}) = O(n^{-1}).$$

令 $n \rightarrow \infty$ ，得到 $\mu(C_{i,\epsilon}) = 0$ ，因而

$$\mu(\partial Q_{a,\delta}) = 0, \quad \mu(Q_{a,\delta}) = \mu(Q_{a,\delta}^\circ). \quad (12.4e)$$

步骤 4：超立方体上取等。 若某个 $Q^{(0)} \subset \Delta$ 满足 $m(Q^{(0)}) < 0$ ，仍使用步骤 2 的二分构造。由步骤 3，各小立方体的内部关于 μ 可加，从而

$$m(Q^{(0)}) \geq \sum_{k=1}^{2^d} m(Q_k^{(0)}).$$

因此可取 $Q^{(1)} \subset Q^{(0)}$ ，使

$$m(Q^{(1)}) \leq \frac{m(Q^{(0)})}{2^d}, \quad \lambda_d(Q^{(1)}) = \frac{\lambda_d(Q^{(0)})}{2^d}.$$

如步骤 2 一样迭代，又会与步骤 1 矛盾。所以

$$\mu(Q) = \int_Q |J_\varphi(u)| \, du$$

对每个 $Q \subset \Delta$ 成立。

步骤 5: 推广到任意 Borel 集。 取一族逐级细分的网格，使第 n 层由边长 2^{-n} 的闭超立方体 $(Q_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ 构成；其内部两两不交，每个第 n 层立方体都由有限个第 $n+1$ 层立方体组成。对开集 $O \subset \Delta$ ，令

$$A_n := \bigcup_{Q_k^{(n+1)} \subset O} Q_k^{(n+1)}.$$

则 $A_n \uparrow O$ 。由步骤 3、4 及测度从下连续性，

$$\mu(O) = \int_O |J_\varphi(u)| \, du.$$

最后以开集族作为决定类，并用 $(-p, p)^d \cap \Delta \uparrow \Delta$ 提供有限测度穷竭，由测度唯一性定理得到 (12.4b) 对所有 $A \in \mathcal{B}(\Delta)$ 成立。定理得证。 $\square$

应用 12.2 ($\mathbb{R}^2$ 上的极坐标)。 极坐标变换是微分同胚

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}_+^* \times (-\pi, \pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}), \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned} \tag{12.5}$$

其逆映射为

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \operatorname{Arg}(x_1 + ix_2) \right),$$

其中主辐角取值于 $[-\pi, \pi)$ 。并且

$$\varphi'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad J_\varphi(r, \theta) = r.$$

由于 $\lambda_2(\mathbb{R}_- \times \{0\}) = 0$ ，对每个 $f \in L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{R}^2)$ ，

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) \, dx = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, d\theta \, dr.$$

由 Fubini–Lebesgue 定理，两种积分次序均可使用。

注。 若把 (12.5) 的同一公式扩展到 $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ，那么 $\varphi \in C^1$ 且 $J_\varphi = r \neq 0$ ，但 φ 因角度的周期性而不是单射。这再次说明定理 12.3 中全局单射假设不可省略。为了使主辐角连续，(12.5) 的像中必须删去负实半轴。

应用 12.3。

(a) **Gaussian 积分**。由 Fubini-Tonelli 定理与极坐标变换,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

更一般地, 若 $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, 则

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}},$$

其中 $\sqrt{\alpha}$ 取主值。事实上, 若 $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$, 同样的二维计算给出 $F(\alpha)^2 = \pi/(4\alpha)$ 。在右半平面的任意闭子区域 $\{\operatorname{Re} \alpha \geq a\}$ 上, 被积函数都由 e^{-ax^2} 控制, 故参数积分连续性定理说明 F 在连通的右半平面连续。由 $F(1) > 0$ 选定正确的平方根分支, 便得到所述公式。

(b) **Euclid 单位球的体积**。令

$$B_d := \{x \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + \cdots + x_d^2 \leq 1\}, \quad v_d := \lambda_d(B_d).$$

对 $d \geq 2$, 先对前 $d-2$ 个变量积分, 再对最后两个变量用极坐标, 得到

$$\begin{aligned} v_d &= v_{d-2} \int_{x_{d-1}^2 + x_d^2 \leq 1} (1 - x_{d-1}^2 - x_d^2)^{(d-2)/2} dx_{d-1} dx_d \\ &= 2\pi v_{d-2} \int_0^1 (1-r^2)^{(d-2)/2} r dr = \frac{2\pi}{d} v_{d-2}. \end{aligned}$$

取约定 $v_0 = 1$, 又 $v_1 = 2$, 可得

$$v_d = \begin{cases} \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!}, & d \text{ 为偶数}, \\ \frac{2^d \pi^{(d-1)/2} ((d-1)/2)!}{d!}, & d \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

(c) **微分同胚像的体积**。若 $\varphi: \Delta \rightarrow D$ 是 C^1 -微分同胚, 则

$$\operatorname{Vol}(\varphi(\Delta)) = \int_{\Delta} |J_{\varphi}(u)| du.$$

(d) **Guldin 第一公式**。在 $\mathbb{R}^3$ 中, 设 $P = \{(u, v, 0) : u, v \in \mathbb{R}\}$, 并令 $S \subset \{(u, v, 0) : u > 0\}$ 为 Borel 集, 满足 $0 < \lambda_2(S) < \infty$ 。把 S 绕 v -轴旋转所得立体记为 V 。均匀薄片 S 的重心 $G = (u_G, v_G, 0)$ 定义为

$$(u_G, v_G, 0) = \frac{1}{\lambda_2(S)} \int_S (u, v, 0) du dv.$$

则

$$\lambda_3(V) = 2\pi u_G \lambda_2(S).$$

也就是说, 旋转体体积等于生成平面图形的面积乘以重心所走圆周的长度。

确实，柱坐标映射

$$\Phi(\theta, u, v) = (u \cos \theta, u \sin \theta, v)$$

是从 $(-\pi, \pi) \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ 到删去一个半平面的 C^1 -微分同胚，且 $J_\Phi = u$ 。端面 $\{\pi\} \times S$ 的像是零测集，故变量替换与 Fubini–Tonelli 定理给出

$$\lambda_3(V) = \int_{(-\pi, \pi) \times S} u \, d\theta \, du \, dv = 2\pi \int_S u \, du \, dv = 2\pi u_G \lambda_2(S).$$

注。 一维紧区间上的初等变量替换公式，本质上是定理 12.4 的特例。若 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续， $\varphi : [\beta, \alpha] \rightarrow [a, b]$ 是 C^1 -微分同胚，且 $\varphi(\alpha) = a$ 、 $\varphi(\beta) = b$ ，则 φ 递减， $\varphi' \leq 0$ ，并且

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du = \int_\beta^\alpha f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| \, du.$$

定理 12.4 也显然包含命题 12.1：对仿射微分同胚 $\varphi(u) = Au + b$ 应用公式即可。

12.3 应用：Brouwer 拓扑度

极坐标的例子说明，Jacobian 处处非零并不保证映射单射；不过在那个例子中，删去一个 Lebesgue 零测集后便得到微分同胚。本节用拓扑度进一步研究 Jacobian 非退化与单射性的关系。这里不发展拓扑度的一般理论，只讨论它与变量替换直接相关的部分；完整理论可参阅原书文献 [29]。

本节中 $|\cdot|$ 始终表示 $\mathbb{R}^d$ 上的 Euclid 范数， $\lambda_d(dx)$ 简写为 dx 。若 $O \subset \mathbb{R}^d$ 为开集、 E 是有限维实向量空间，记

$$C_K^n(O, E) := \{\phi \in C^n(O, E) : \text{supp } \phi \text{ 是包含于 } O \text{ 的紧集}\}.$$

以下除非另有说明， $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是非空有界开集，

$$f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \quad 0 \notin f(\partial\Omega),$$

并记

$$\varepsilon_f := \text{dist}(0, f(\partial\Omega)) > 0.$$

命题—定义 12.2。 对每个 $\phi \in C_K((0, \varepsilon_f), \mathbb{R})$ ，定义

$$d_\Omega(f, \phi) := \int_\Omega \phi(|f(x)|) J_f(x) \, dx.$$

则

$$d_\Omega(f, \phi) = d_\Omega(f) \int_{\mathbb{R}^d} \phi(|x|) \, dx, \quad (12.6)$$

其中数 $d_\Omega(f)$ 与 ϕ 无关，称为映射 f 关于开集 Ω 的**拓扑度**。

证明该命题要用到下面这个 Stokes 公式的特例。

引理 12.1。 若 $\psi \in C_K^1(\Omega, \mathbb{R})$, 则

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) dx = 0, \quad 1 \leq i \leq d. \quad (12.7)$$

^a

^a**校订注：**原文把指标上界写成 n , 但本节空间维数记作 d , 且 C_K^1 中不存在可充当上界的 n ; 故改为 $1 \leq i \leq d$ 。

证明。 偏导数 $\partial_i \psi$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积。由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_i \psi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_i \psi(x) dx_i \right) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_d \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} [\psi(x)]_{x_i=-\infty}^{x_i=+\infty} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_d = 0, \end{aligned}$$

因为 ψ 具有紧支撑。 □

命题 12.2 的证明。 为避免与本章主旨无关的多重线性代数技术, 原书只证明 $d = 2$ 的情形; 一般证明见 [29]。只需证明

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi(|x|) dx = 0 \implies d_{\Omega}(f, \phi) = 0. \quad (12.6a)$$

这会说明, 只要分母不为零, 比值

$$\frac{d_{\Omega}(f, \phi)}{\int_{\mathbb{R}^2} \phi(|x|) dx}$$

与 ϕ 无关。

设 $\phi \in C_K(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\text{supp } \phi \subset [a, b] \subset (0, \varepsilon_f)$, 且 $\int_{\mathbb{R}^2} \phi(|x|) dx = 0$ 。证明分四步。

步骤 1: $\text{supp}(\phi \circ |f|)$ 紧含于 Ω 。由 f 在 $\bar{\Omega}$ 上的一致连续性, 存在 $\delta > 0$, 使当 $x \in \Omega$, $\text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta$ 时,

$$\text{dist}(f(x), f(\partial\Omega)) < \varepsilon_f - b.$$

三角不等式给出

$$|f(x)| \geq \text{dist}(0, f(\partial\Omega)) - \text{dist}(f(x), f(\partial\Omega)) > b,$$

故此时 $\phi(|f(x)|) = 0$ 。所以

$$\text{supp}(\phi \circ |f|) \subset \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \delta\},$$

右端为 Ω 中的紧集。

步骤 2: 把径向函数写成散度。 极坐标变换给出

$$2\pi \int_a^b \phi(r)r dr = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(|x|) dx = 0.$$

定义

$$\theta(r) := \frac{1}{r^2} \int_0^r u \phi(u) du.$$

则 $\theta \in C_K^1(\mathbb{R}_+)$, 其支撑包含于 $[a, b]$, 并满足

$$r\theta'(r) + 2\theta(r) = \phi(r).$$

令 $\Psi(y) = \theta(|y|)y$ 。它属于 $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ，而且

$$\operatorname{div} \Psi(y) = |y|\theta'(|y|) + 2\theta(|y|) = \phi(|y|).$$

步骤 3：先设 $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ 。写 $f = (f_1, f_2)$ 、 $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ ，并令

$$\Phi := (\partial_2 f_2 \Psi_1(f) - \partial_2 f_1 \Psi_2(f), \partial_1 f_1 \Psi_2(f) - \partial_1 f_2 \Psi_1(f)).$$

利用混合偏导相等和链式法则，直接计算得

$$\operatorname{div} \Phi = (\operatorname{div} \Psi)(f)J_f = (\phi \circ |f|)J_f.$$

由步骤 1、2， $\Phi \in C_K^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ 。因此引理 12.1 给出

$$d_\Omega(f, \phi) = \int_\Omega \operatorname{div} \Phi(x) \, dx = 0.$$

步骤 4：推广到 $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ 。由步骤 1，可取开集 ω ，使

$$\operatorname{supp}(\phi \circ |f|) \subset \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega.$$

用卷积正则化（见定理 14.8）构造 $f_k \in C_K^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ，使

$$\operatorname{supp}(\phi \circ |f_k|) \subset \omega, \quad \|f_k - f\|_{L^\infty(\omega)} + \|Df_k - Df\|_{L^\infty(\omega)} \rightarrow 0.$$

步骤 3 给出 $d_\Omega(f_k, \phi) = 0$ 。而 $(\phi \circ |f_k|)J_{f_k}$ 在 ω 上一致收敛于 $(\phi \circ |f|)J_f$ ，故令 $k \rightarrow \infty$ 即得 (12.6a)。□

在附加条件下，拓扑度可由 Jacobian 简单表示。

命题 12.3。

(a) 若 J_f 在 Ω 上保持同号，或者 $\mathbf{1}_{\{0 < |f| < \varepsilon_f\}} J_f \in L^1(\Omega)$ ，则

$$d_\Omega(f) = \frac{1}{\varepsilon_f^d v_d} \int_\Omega \mathbf{1}_{\{0 < |f| < \varepsilon_f\}}(x) J_f(x) \, dx, \quad (12.8)$$

其中 v_d 是 $\mathbb{R}^d$ 中 Euclid 单位球的体积。

(b) 若 $0 \notin f(\bar{\Omega})$ ，则 $d_\Omega(f) = 0$ 。

(c) 令 $S := \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$ 。若 $0 \notin f(S)$ ，则 $f^{-1}(\{0\})$ 为有限集，并且

$$d_\Omega(f) = \sum_{x \in f^{-1}(\{0\})} \operatorname{sgn}(J_f(x)), \quad (12.9)$$

空和约定为 0。

注。 由 (c) 立刻得到：若 J_f 在 Ω 上处处非零且保持同号，则

$$|d_\Omega(f)| = \frac{1}{\varepsilon_f^d v_d} \int_\Omega \mathbf{1}_{\{0 < |f| < \varepsilon_f\}}(x) |J_f(x)| \, dx = \operatorname{Card}(f^{-1}(\{0\})).$$

换言之， f 在 Ω 中恰有 $|d_\Omega(f)|$ 个零点。

证明。(a) 先设 $J_f \geq 0$ 。取 $\phi_k \in C_K((0, \varepsilon_f), \mathbb{R}_+)$, 使 $0 \leq \phi_k \leq 1$ 且 $\phi_k \uparrow 1$ 于 $(0, \varepsilon_f)$ 。由 Beppo Levi 定理,

$$\int_{\Omega} \phi_k(|f(x)|) J_f(x) dx \longrightarrow \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{0 < |f| < \varepsilon_f\}} J_f dx,$$

同时

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_k(|x|) dx \longrightarrow \lambda_d(\{0 < |x| < \varepsilon_f\}) = \varepsilon_f^d v_d.$$

结合 (12.6) 即得 (12.8)。若 $J_f \leq 0$ 时同理；若只假设相应函数可积，则以控制收敛定理代替 Beppo Levi 定理。

(b) 因 $f(\overline{\Omega})$ 紧且不含 0, 令 $\delta := \text{dist}(0, f(\overline{\Omega})) > 0$ 。取非零的 $\phi \in C_K((0, \delta), \mathbb{R}_+)$, 则 $\phi(|f|) = 0$ 于 Ω 。由 (12.6),

$$0 = d_{\Omega}(f) \int_{\mathbb{R}^d} \phi(|x|) dx.$$

右端第二个因子为正, 故 $d_{\Omega}(f) = 0$ 。

(c) 若零点集为空, 结论由 (b) 得到。否则, 对每个 $x \in f^{-1}(\{0\})$, 有 $J_f(x) \neq 0$ 。局部反函数定理给出以 x 为中心的小开球, 在其中 f 是微分同胚。因此各零点孤立; 又零点不能在边界附近聚集, 所以零点集有限, 记为 $\{x_1, \dots, x_p\}$ 。

可取闭包两两不交的小开球 $\omega_i \Subset \Omega$, 使 $f|_{\omega_i}$ 是微分同胚, 并且 $f(\partial\omega_i) \cap f(\omega_i) = \emptyset$ 。每个 $f(\omega_i)$ 都包含以 0 为心、半径 $\varepsilon_i > 0$ 的开球。令

$$\delta := \min(\varepsilon_f, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p),$$

并取 $\phi \in C_K^1((0, \delta), \mathbb{R})$, 使 $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(|x|) dx = 1$ 。

在每个 ω_i 上应用变量替换定理。因为 J_f 在该连通小球上不变号, 且 $\phi(|y|)$ 在 $f(\omega_i)$ 外为零, 所以

$$\int_{\omega_i} \phi(|f(x)|) J_f(x) dx = \text{sgn}(J_f(x_i)) \int_{\mathbb{R}^d} \phi(|y|) dy = \text{sgn}(J_f(x_i)). \quad (12.9a)$$

令 $\Omega_0 := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^p \overline{\omega_i}$ 。这是开集, 且 $0 \notin f(\overline{\Omega_0})$ 。又 $\text{dist}(0, f(\partial\Omega_0)) \geq \delta$, 故由 (b) 与 (12.6),

$$\int_{\Omega_0} \phi(|f(x)|) J_f(x) dx = 0. \quad (12.9b)$$

各球面是 Lebesgue 零测集。把 (12.9a)、(12.9b) 相加, 即得 (12.9)。^a □

^a**校订注：**原文在此直接把拓扑度写在 $\Omega \setminus \omega$ 上, 其中 ω 是开球之并; 该差集一般不是开集, 而拓扑度此前只对开集定义。这里改用开集 $\Omega \setminus \bigcup_i \overline{\omega_i}$, 球面零测性保证积分分解与原论证相同。

推论 12.2。

(a) 设 $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$, J_f 在 Ω 上处处非零且保持同号。则

$$y \longmapsto \text{Card}(f^{-1}(\{y\}))$$

在开集 $\mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$ 的每个连通分支上为有限常数。

(b) 再假设 $f(\Omega)$ 包含于 $\mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$ 的某个连通分支 Λ , 并且存在 $y_0 \in \Lambda$ 使 $f^{-1}(\{y_0\})$ 为单点集。则 f 是从 Ω 到 Λ 的 C^1 -微分同胚。

证明。 对 $y \in \mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$, 令

$$\varepsilon_{f-y} := \text{dist}(0, f(\partial\Omega) - y).$$

该函数在此开集上连续且严格为正。固定 y_0 , 可取其紧邻域 V_0 与 $\varepsilon_0 > 0$, 使 $\varepsilon_{f-y} \geq \varepsilon_0$ 对 $y \in V_0$ 成立。再取 $\phi_0 \in C_K^1((0, \varepsilon_0), \mathbb{R})$, 满足 $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_0(|x|) dx = 1$ 。

所有 $y \in V_0$ 对应的 $\text{supp}(\phi_0 \circ |f - y|)$ 都包含于某个固定紧集 $K_0 \Subset \Omega$ 。由 (12.6),

$$d_\Omega(f - y) = \int_{K_0} \phi_0(|f(x) - y|) J_f(x) dx.$$

被积函数在紧集 $K_0 \times V_0$ 上连续有界, 所以参数积分连续性定理说明 $y \mapsto d_\Omega(f - y)$ 连续。由 (12.9) 及 J_f 保持同号,

$$|d_\Omega(f - y)| = \text{Card}(f^{-1}(\{y\})) < \infty.$$

因此这个整数值函数连续, 必在每个连通分支上为常数, 证明了 (a)。

在 (b) 的假设下, 对每个 $y \in \Lambda$, (a) 给出

$$\text{Card}(f^{-1}(\{y\})) = \text{Card}(f^{-1}(\{y_0\})) = 1.$$

结合 $f(\Omega) \subset \Lambda$, 可知 $f: \Omega \rightarrow \Lambda$ 双射; 再由 $J_f \neq 0$ 与定理 12.3, f 是 C^1 -微分同胚。 $\square$

应用 12.4。 设 $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$, 并满足

$$\min_{x \in \partial\Omega} |f(x)| = 1, \quad 0 < J_f(x) \leq 1 \quad (x \in \Omega).$$

令闭单位球 $B_d = \{x : |x| \leq 1\}$, 开单位球 $B_d^\circ = \{x : |x| < 1\}$ 。

(a) 若 $\lambda_d(\Omega) < \lambda_d(B_d)$, 则 $|f(x)| \geq 1$ 对所有 $x \in \overline{\Omega}$ 成立。

(b) 若 $\lambda_d(\Omega) = \lambda_d(B_d)$, 且存在 $x_0 \in \Omega$ 使 $|f(x_0)| < 1$, 则 f 是从 Ω 到 B_d° 的 C^1 -微分同胚, 且 $J_f \equiv 1$ 于 Ω 。

a

校订注：原文 (b) 写“微分同胚到 B_d ”, 但本章前面把 B_d 定义为闭单位球; 开集 Ω 不可能与闭球微分同胚。原证明实际使用 $f(\Omega) \subset B_d^\circ$, 故结论明确改为开单位球。

证明。 这里 $\varepsilon_f = 1$ 。命题 12.3 的 (12.8)、(12.9) 给出

$$d_\Omega(f) = \text{Card}(f^{-1}(\{0\})) = \frac{1}{\lambda_d(B_d)} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{0 < |f| < 1\}}(x) J_f(x) dx \leq \frac{\lambda_d(\Omega)}{\lambda_d(B_d)}. \quad (12.10)$$

若 $\lambda_d(\Omega) < \lambda_d(B_d)$, (12.10) 左端是非负整数, 故只能为零。于是 $\lambda_d(\{0 < |f| < 1\}) = 0$ 。结合 $J_f > 0$ 给出的局部开映射性质及 f 的连续性, 可得 $|f| \geq 1$ 于 $\overline{\Omega}$ 。

现在设两体积相等, 且某个内点满足 $|f(x_0)| < 1$ 。由局部开映射性质, $\{0 < |f| < 1\}$ 是非空开集, 故 (12.10) 中

$$1 \leq \text{Card}(f^{-1}(\{0\})) \leq 1.$$

所有不等式均取等。于是 $\mathbf{1}_{\{0 < |f| < 1\}} J_f = 1$ 几乎处处; 由连续性, $J_f \equiv 1$, 并且 $f(\Omega) \subset B_d^\circ$ 。开球 B_d° 是 $\mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$ 的连通分支, 其中 0 的原像恰有一个点。推论 12.2(b) 因而说明 $f: \Omega \rightarrow B_d^\circ$ 是微分同胚。 $\square$

应用 12.5. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是非空有界连通开集, 满足 $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ 连通且 $(\overline{\Omega})^\circ = \Omega$. 若

$$f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \quad f(\partial\Omega) \subset \partial\Omega, \quad J_f \neq 0 \text{ 于 } \Omega,$$

并且存在 $y_0 \in \mathbb{R}^d$ 使 $f^{-1}(\{y_0\})$ 为单点集, 则 f 是 Ω 到自身的 C^1 -微分同胚。

证明. 因 Ω 连通且 J_f 连续不为零, J_f 在 Ω 上保持同号。由 $f(\partial\Omega) \subset \partial\Omega$ 及推论 12.2(a), $y \mapsto \text{Card}(f^{-1}(\{y\}))$ 在 $\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$ 的两个连通分支 Ω 与 $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ 上分别为常数。

因为 $f(\overline{\Omega})$ 有界, 而 $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ 无界, 外部连通分支不可能全含于 $f(\Omega)$, 故其每一点的原像数都为零。因此 $f(\Omega) \subset \overline{\Omega}$. 又 $f(\Omega)$ 是开集, 且 $(\overline{\Omega})^\circ = \Omega$, 所以 $f(\Omega) \subset \Omega$. 假设中的 y_0 因而属于 Ω . 推论 12.2(a) 再给出

$$\text{Card}(f^{-1}(\{y\})) = 1 \quad (y \in \Omega).$$

所以 $f: \Omega \rightarrow \Omega$ 双射; 由定理 12.3, 它是 C^1 -微分同胚。 □

12.4 练习

以下 Δ, D 均表示 $\mathbb{R}^d$ 中的开集, $d \geq 1$, 并配备 Lebesgue 测度 λ_d 。

练习 12.1. 设 $\varphi: \overline{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^d$ 连续, 并且 $\varphi|_{\Delta}$ 是 Δ 到 D 的同胚。

(a) 证明 $\varphi(\partial\Delta) \subset \partial D$ 。

(b) 证明: 若 Δ 有界, 则 $\varphi(\partial\Delta) = \partial D$ 。

练习 12.2. 设 φ 是 Δ 到 D 的 C^1 -微分同胚, Jacobian 为 J_φ 。

(a) 证明 J_φ 在 Δ 上可积, 当且仅当 $\lambda_d(D) < +\infty$ 。

(b) 证明 J_φ 在 Δ 上有界, 当且仅当存在 $c > 0$, 使对每个开集 $\Omega \subset \Delta$,

$$\lambda_d(\varphi(\Omega)) \leq c\lambda_d(\Omega).$$

练习 12.3 (Basel 问题, 第八种方法). 本题取自 T. M. Apostol 的文章 “A proof that Euler missed. Evaluating $\zeta(2)$ the easy way”, *Math. Intelligencer* 5 (1983), 59–60。

(a) 证明

$$\int_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{1-xy} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

(b) 作变量替换 $(x, y) = (\cos \theta - t, \cos \theta + t)$, 证明

$$\int_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{1-xy} = 4 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\min(\cos \theta, 1-\cos \theta)} \frac{dt}{t^2 + \sin^2 \theta} \right) \sin \theta d\theta.$$

(c) 由此推出

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

练习 12.4。 给定 $a, b \in \mathbb{R}$, 定义

$$\varphi_{a,b}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_{a,b}(u, v) = (u + a \sin v, v + b \sin u).$$

- (a) 给出 a, b 的充要条件, 使 $\varphi_{a,b}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 到其像的 C^1 -微分同胚。
 (b) 证明在该条件下, $\varphi_{a,b}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ 。
 (c) 若 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为开集, 计算

$$\lim_{|(a,b)| \rightarrow 0} \lambda_2(\varphi_{a,b}(\Omega)).$$

练习 12.5。 令

$$\Delta = (0, 1)^2 \times (-\pi, \pi), \quad \varphi(u, v, w) = (u, uv \cos w, v \sin w).$$

- (a) 证明 φ 是 Δ 到其像的 C^1 -微分同胚。
 (b) 计算 $\lambda_3(\varphi(\Delta))$ 。

练习 12.6。

- (a) 对映射

$$\varphi(u, v) = (u^2 + v^2, 2uv),$$

求 $(\mathbb{R}_+^*)^2$ 中最大的连通开集 Δ, D , 使 φ 是 Δ 到 D 的 C^1 -微分同胚。

- (b) 由此计算

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |u^4 - v^4| e^{-(u+v)^2} du dv.$$

练习 12.7 (广义余元公式)。 对 $a, b > 0$, 定义

$$\Gamma(a) := \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \quad B(a, b) := \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt.$$

- (a) 证明

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 4 \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(u^2+v^2)} u^{2a-1} v^{2b-1} du dv.$$

- (b) 推出广义余元公式

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

练习 12.8。 利用变量替换

$$(x, y, z) = (\sqrt{vw}, \sqrt{uw}, \sqrt{uv}),$$

计算下列区域的 Lebesgue 测度:

- (a)

$$\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u, v, w > 0, uv < 1, uw < 1, vw < 1\};$$

- (b)

$$\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u, v, w > 0, uv + uw + vw < 1\}.$$

练习 12.9 (应用 12.3 的推广). 设 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $d \geq 1$, 且 A 为实对称半正定矩阵, 即 $Ax \cdot x \geq 0$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 成立.

(a) 证明

$$I_A := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-Ax \cdot x} dx = \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\det A}} \in [0, +\infty],$$

其中当 $\det A = 0$ 时右端按 $+\infty$ 理解.

(b) 给出 $I_A < +\infty$ 的充要条件.

(c) 若 A 正定、 $z \in \mathbb{C}$ 且 $\operatorname{Re} z > 0$, 证明

$$I_A(z) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-zAx \cdot x} dx = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}} \right)^d \frac{1}{\sqrt{\det A}},$$

其中 $\sqrt{z}$ 取主值.

练习 12.10. 设 $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*)$ 为凸函数, 即 $f'' \geq 0$. 对 $d \geq 3$, 定义

$$I(y) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f''(|x-y|)}{|x-y| |x|^{d-2}} dx,$$

其中 $|\cdot|$ 表示 Euclid 范数.

(a) 证明下列极限存在, 并满足

$$\ell := \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) > -\infty, \quad \ell' := \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) > -\infty.$$

(b) 给定 $\rho \geq 0$, 用 ℓ, ℓ' 和 $f(\rho)$ 表示

$$\int_0^{+\infty} (f'(r+\rho) - f'(|r-\rho|)) dr.$$

(c) 证明 $I(y)$ 只依赖于 $|y|$.

(d) 由此求出 $I(y)$.

练习 12.11. 在 $\mathbb{R}^d$ 上使用最大范数 $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$, 记 $Q_{a,r}$ 为该范数下中心 a 、半径 r 的球. 设 $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ 为有界开集, $\varphi \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^d)$.

(a) 证明对每个开集 $\Omega \subset \Delta$, $\varphi(\Omega)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的 Borel 集.

(b) 设 $A \in M_d(\mathbb{R})$ 且 $\det A = 0$. 证明存在 $c_A > 0$, 使对每个紧集 $K \subset \mathbb{R}^d$ 与每个 $r > 0$,

$$\lambda_d(AK + Q_{0,r}) \leq c_A(\operatorname{diam} K + r)^{d-1}r.$$

a

(c) 固定 $u_0 \in \Delta$. 由定理 12.4 证明的步骤 1 与 (a) 推出

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall r \in (0, \delta), \quad u_0 \in Q_{a,r} \implies \frac{\lambda_d(\varphi(Q_{a,r}))}{\lambda_d(Q_{a,r})} \leq |J_\varphi(u_0)| + \varepsilon.$$

(d) 从 (c) 出发, 仿照定理 12.4 证明的步骤 2、3、5, 证明

$$\forall \Omega \in \mathcal{O}(\Delta), \quad \lambda_d(\varphi(\Omega)) \leq \int_\Omega |J_\varphi(u)| du.$$

(e) 证明 (d) 的不等式对 Δ 的每个紧子集也成立.

^a校订注：原文在本项量化的是 $r > 0$ ，但右端两处突然写成未定义的 δ 。这里统一改回 r 。

练习 12.12。 设 $\Delta, D \subset \mathbb{R}^d$ 为开集， D 有界；设 $\varphi: \Delta \rightarrow D$ 是 C^1 双射，且 φ^{-1} 为 Borel 映射，对 J_φ 不作非退化假设。证明

$$\varphi^{-1}(\lambda_D) = |J_\varphi| \lambda_\Delta \iff \lambda_d(\varphi(\Delta)) = \int_\Delta |J_\varphi(u)| \, du.$$

^a

^a校订注：原文等价式左端把密度写成 J_φ ，右端却使用 $|J_\varphi|$ 。由于左端是正测度，其密度也必须非负；故补上绝对值。

练习 12.13 (Sard 定理)。 设 $f \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^d)$ ，并令

$$S := \{x \in \Delta : J_f(x) = 0\}.$$

证明 $f(S)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的 Borel 零测集。请使用练习 12.11(d)、(e) 中的不等式。

练习 12.14。 设 B_d 是 $\mathbb{R}^d$ 的 Euclid 单位球， $f \in C^1(\overline{B_d}, \mathbb{R}^d)$ 。利用拓扑度证明：当实数 a 的绝对值充分小时，映射 af 在 B_d 中有唯一不动点。

练习 12.15。 令

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x+1)}{x^2} \, dx.$$

(a) 证明对每个 $x > 0$,

$$\frac{\ln^2(x+1)}{x^2} = \int_{[0,1]^2} \frac{ds \, dt}{(1+sx)(1+tx)}.$$

并说明两边在 $x = 0$ 处都有连续延拓值 1。^a

(b) 对 $(s, t) \in [0, 1]^2$ 、 $s \neq t$ ，计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+sx)(1+tx)}.$$

(c) 证明

$$I = \int_{[0,1]^2} \frac{\ln t - \ln s}{t - s} \, ds \, dt = 2 \int_{\{0 \leq s < t \leq 1\}} \frac{\ln t - \ln s}{t - s} \, ds \, dt.$$

(d) 证明映射

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{uv}{1-u}, \frac{v}{1-u} \right)$$

是从 $\{0 < v < 1-u < 1\}$ 到 $\{0 < s < t < 1\}$ 的 C^1 -微分同胚。

(e) 利用 φ 作变量替换，推出

$$I = 2 \int_0^1 \frac{\ln u}{u-1} \, du.$$

^a校订注：原文把等式直接写为对 $x \geq 0$ 成立，但左端在 $x = 0$ 按通常定义是 $0/0$ 。这里先写 $x > 0$ ，再明确给出其可去奇点。

练习 12.16。(a) 已知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$, 计算

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^4} dx.$$

(b) 计算

$$I := \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{xy}{x^2 + y^2} e^{-(x^4+y^4)} dx dy.$$

(c) 证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \geq \sqrt{2} I.$$

练习 12.17。 设 λ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 Lebesgue 测度。对 $\alpha > 0$, 令

$$B_\alpha := \{(x, y) : x, y > 0, x^\alpha + y^\alpha < 1\}.$$

(a) 计算 $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \lambda(B_\alpha)$ 。(b) 把 $\lambda(B_\alpha)$ 写成一重积分。

(c) 由此计算

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \int_0^\pi (\sin \theta)^{2/\alpha-1} d\theta.$$

练习 12.18。

(a) 计算

$$I := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\{x^2+y^2 < R^2\}} \left| \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right| dx dy.$$

(b) 已知

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2},$$

计算

$$J := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\{x^2+y^2 < R^2\}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy.$$

练习 12.19。 计算下列积分：(a) 对 $a \in \mathbb{R}$,

$$I_a := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^a};$$

(b)

$$I := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2 e^{-(x^2+y^2)}}{x^2 + y^2} dx dy.$$

练习 12.20 (Basel 问题, 第九种方法)。 本题取自 F. Beukers、E. Calabi 与 J. A. C. Kolk 的文章 “Sums of generalized harmonic series and volumes”, *Nieuw Arch. Wisk.* (4) 11 (1993), no. 3, 217–224.

(a) 证明

$$I := \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1 - x^2 y^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(b) 证明映射

$$\varphi(u, v) = (x, y) := \left(u \sqrt{\frac{1+v^2}{1+u^2}}, v \sqrt{\frac{1+u^2}{1+v^2}} \right)$$

是从

$$\Delta := \{u, v > 0 : uv < 1\}$$

到 $D = (0, 1)^2$ 的 C^1 -微分同胚，其 Jacobian 为

$$J_\varphi(u, v) = \frac{1 - x^2 y^2}{(1 + u^2)(1 + v^2)}.$$

(c) 推出 $I = \pi^2/8$ 。

第十三章 完备测度、Lebesgue σ -代数与 Cantor 集

13.1 测度的完备化

设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间。按定义，函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 可测，是指 $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ 对每个 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 成立。因此 $\mathcal{A}$ 中的集合越多，可测函数通常也越多。

另一方面，某些未必属于 $\mathcal{A}$ 的集合，从 μ -积分的观点看却应当视为“可忽略”：它们包含于某个 μ -零测集。自然的问题是，能否把 $\mathcal{A}$ 扩大为包含所有这类集合的 σ -代数，同时把 μ 典范地延拓过去。答案是肯定的。

定义 13.1。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为测度空间。

- (a) 若 $N \subset X$ ，且存在 $A \in \mathcal{A}$ 满足 $N \subset A$ 、 $\mu(A) = 0$ ，则称 N 是**可忽略集** 或 μ -可忽略集。记

$$\mathcal{N}_\mu := \{N \subset X : N \text{ 是 } \mu\text{-可忽略集}\}.$$

- (b) 若 $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{A}$ ，则称测度空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **完备**。这里的“完备”不要与度量空间或赋范空间的完备性混淆。

定理 13.1。

- (a) $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu$ 生成的 σ -代数为

$$\mathcal{A}^\mu := \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

- (b) 对 $A \in \mathcal{A}$ 、 $N \in \mathcal{N}_\mu$ ，定义

$$\bar{\mu}(A \cup N) := \mu(A).$$

该定义与分解的选取无关，并在 $\mathcal{A}^\mu$ 上给出一个测度； $\bar{\mu}$ 在 $\mathcal{A}$ 上与 μ 一致， $(X, \mathcal{A}^\mu, \bar{\mu})$ 完备，而且 $\bar{\mu}|_{\mathcal{N}_\mu} = 0$ 。

证明。 证明分四步。

步骤 1：用 $\mathcal{A}$ 中的集合从内外夹住。 对任意 $E \subset X$ ，

$$E \in \mathcal{A}^\mu \iff \exists A_0, A_1 \in \mathcal{A}, \quad A_0 \subset E \subset A_1, \quad \mu(A_1 \setminus A_0) = 0. \quad (13.1)$$

若 $E = A_0 \cup N$ ，其中 $N \subset C \in \mathcal{A}$ 、 $\mu(C) = 0$ ，取 $A_1 = A_0 \cup C$ 即得右端。反之，若右端成立，令 $N = E \setminus A_0$ 。由于 $N \subset A_1 \setminus A_0$ 且后者为 μ -零测集， $N \in \mathcal{N}_\mu$ ，从而 $E = A_0 \cup N \in \mathcal{A}^\mu$ 。

步骤 2： $\mathcal{A}^\mu$ 是包含 $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu$ 的 σ -代数。 因为 $\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$ ，有 $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^\mu$ ；再取 $A = \emptyset$ ，得到 $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{A}^\mu$ 。

若 $A_0 \subset E \subset A_1$ 满足 (13.1)，则

$$A_1^c \subset E^c \subset A_0^c, \quad A_0^c \setminus A_1^c = A_1 \setminus A_0,$$

故 $E^c \in \mathcal{A}^\mu$ 。若 $E_n = A_n \cup N_n \in \mathcal{A}^\mu$ ，为每个 N_n 取 $C_n \in \mathcal{A}$ 使 $N_n \subset C_n$ 、 $\mu(C_n) = 0$ 。则

$$\bigcup_{n \geq 1} N_n \subset \bigcup_{n \geq 1} C_n, \quad \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} C_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(C_n) = 0.$$

所以 $\bigcup_n N_n \in \mathcal{N}_\mu$ ，进而

$$\bigcup_{n \geq 1} E_n = \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n \geq 1} N_n\right) \in \mathcal{A}^\mu.$$

这也顺便证明了 $\mathcal{N}_\mu$ 对可数并封闭。

步骤 3: $\bar{\mu}$ 定义良好且是 μ 的延拓。 若 $A_0 \subset E \subset A_1$ 如 (13.1)，又有 $E = B \cup N$ ，其中 $B \in \mathcal{A}$ 、 $N \subset C \in \mathcal{A}$ 、 $\mu(C) = 0$ ，则

$$A_0 \subset B \cup C, \quad B \subset A_1.$$

因此

$$\mu(A_0) \leq \mu(B \cup C) \leq \mu(B) \leq \mu(A_1) = \mu(A_0),$$

这里最后一个等号来自 $\mu(A_1 \setminus A_0) = 0$ 。故 $\mu(B) = \mu(A_0) = \mu(A_1)$ ，说明 $\bar{\mu}(E)$ 与分解无关。显然 $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ ，且 $\bar{\mu}(N) = 0$ 对 $N \in \mathcal{N}_\mu$ 成立。若 $(E_n) \subset \mathcal{A}^\mu$ 两两不交，写 $E_n = A_n \cup N_n$ ，并令 $N = \bigcup_n N_n \in \mathcal{N}_\mu$ 。由定义的一致性，

$$\begin{aligned} \bar{\mu}\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) &= \bar{\mu}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \cup N\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \bar{\mu}(E_n). \end{aligned}$$

其中即使 A_n 本身不两两不交，它们的交集也包含于可忽略部分；等价地，可用 (13.1) 的内逼近集合把它们不交化。于是 $\bar{\mu}$ 是 $\mathcal{A}^\mu$ 上的测度。

步骤 4: 完备性。 若 N 是 $\bar{\mu}$ -可忽略集，则存在 $E \in \mathcal{A}^\mu$ ，使 $N \subset E$ 、 $\bar{\mu}(E) = 0$ 。写 $E = A \cup N_0$ ，其中 $A \in \mathcal{A}$ 、 $N_0 \in \mathcal{N}_\mu$ 。于是 $\mu(A) = 0$ ，从而 $E \in \mathcal{N}_\mu$ ，故 $N \in \mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{A}^\mu$ 。这就证明了完备性。 $\square$

注。 由证明步骤 3，对 $E \in \mathcal{A}^\mu$ 还可等价地写成

$$\bar{\mu}(E) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset E\} = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, E \subset B\}.$$

定义 13.2。 称 $\mathcal{A}^\mu$ 为 $\mathcal{A}$ 关于 μ 的 **完备化 σ -代数**，称 $\bar{\mu}$ 为 μ 的 **完备化测度**。若参考测度不会引起歧义，也可省略上标 μ 。

在很多论证中，假设底层测度空间完备很方便，但通常并非必需。尤其在乘积空间中，必须谨慎：两个完备测度空间的乘积一般并不完备。第 13.4 节将详细说明这一点。

13.2 Lebesgue σ -代数

定义 13.3. 称

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) := \mathcal{B}(\mathbb{R})^\lambda$$

为 $\mathbb{R}$ 上的 **Lebesgue σ -代数**，即 Borel σ -代数关于 Lebesgue 测度的完备化。相应的完备化 Lebesgue 测度记作 $\bar{\lambda}$ ；在不致混淆时仍简记为 λ 。

定理 13.2.

- (a) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 与 $\mathbb{R}$ 等势。
- (b) $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ 与 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 等势，但

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

因此 $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ 是 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 的真子集。

命题 (a) 依赖超限归纳，这里不证，可参阅 [6] 的练习 2.6.11。命题 (b) 中存在非 Lebesgue 可测集的结论要用到选择公理。

公理 13.1 (选择公理). 设 X, Y 是非空集合， $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ 。则存在函数 $f : X \rightarrow Y$ ，使

$$f(x) \in F(x) \quad (x \in X).$$

也就是说，可以从每个非空集合 $F(x)$ 中同时选出一个代表元。

注. 选择公理看似朴素，却通过与之等价的 Zorn 引理等形式深刻影响分析学。在通常的 Zermelo–Fraenkel 集合论公理体系中，选择公理既不能被证明也不能被否定（在相应的一致性假设下）。^a

^a**校订注：**原文把“不可由集合论证明”笼统归因于 Y 不可数；准确说法是选择公理相对于 ZF 的独立性，而不是仅由某个固定到达集合是否可数决定。

定理 13.2(b) 中 $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 的证明。 在 $[-1, 1]$ 上定义等价关系

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

记 $[x]$ 为 x 的等价类，商集记作 $[-1, 1]/\mathbb{Q}$ 。选择公理允许我们从每个等价类中选取一个代表。于是存在 $f : [-1, 1]/\mathbb{Q} \rightarrow [-1, 1]$ ，满足 $f([x]) \in [x]$ 。令

$$A := \{f([x]) : x \in [-1, 1]\}, \quad L := \bigcup_{r \in [-2, 2] \cap \mathbb{Q}} (r + A).$$

若 $r, s \in \mathbb{Q}$ 、 $r \neq s$ ，则 $(r + A) \cap (s + A) = \emptyset$ 。事实上，若 $z = r + f([x]) = s + f([y])$ ，则 $f([x]) - f([y]) = s - r \in \mathbb{Q}$ ，所以 $[x] = [y]$ ，进而 $f([x]) = f([y])$ ，与 $r \neq s$ 矛盾。

给定 $x \in [-1, 1]$ ，令 $a = f([x])$ 。则 $r = x - a \in \mathbb{Q} \cap [-2, 2]$ ，故 $x = r + a \in L$ 。另一方面 $A \subset [-1, 1]$ ，所以

$$[-1, 1] \subset L \subset [-3, 3]. \quad (13.2a)$$

反设 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ 。写 $A = B \cup N$ ，其中 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 、 $N \in \mathcal{N}_\lambda$ 。平移保持 Borel 集、可忽略集及 Lebesgue 测度，因此对每个 $r \in \mathbb{Q}$ ，

$$r + A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}), \quad \bar{\lambda}(r + A) = \bar{\lambda}(A).$$

集合 $[-2, 2] \cap \mathbb{Q}$ 可数，而这些平移两两不交，故

$$\bar{\lambda}(L) = \sum_{r \in [-2, 2] \cap \mathbb{Q}} \bar{\lambda}(A) = \begin{cases} 0, & \bar{\lambda}(A) = 0, \\ +\infty, & \bar{\lambda}(A) > 0. \end{cases}$$

这与 (13.2a) 所给出的 $2 \leq \bar{\lambda}(L) \leq 6$ 矛盾。所以 $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$ ，更不可能是 Borel 集。

最后说明 $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ 与 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 等势。下一节将构造一个与 $\mathbb{R}$ 等势、Lebesgue 测度为零的 Borel 集 K 。于是 $\mathcal{P}(K) \subset \mathcal{N}_\lambda \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$ ，而 $\mathcal{P}(K)$ 与 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 等势。结合显然的包含 $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ，由 Cantor–Bernstein 定理即得结论。 $\square$

13.3 Cantor 集、Lebesgue 函数及其应用

Cantor 集按如下递归过程构造：

$$A_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad A_{n+1} := \frac{A_n}{3} \cup \frac{2+A_n}{3} \quad (n \geq 1). \quad (13.2)$$

归纳可知， A_n 是 2^n 个两两不交、长度为 3^{-n} 的闭区间之并，其端点恰为

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^k} + \frac{\varepsilon_n}{3^n}, \quad x_k \in \{0, 2\}, \quad \varepsilon_n \in \{0, 1\}.$$

这些端点在以后每个 A_m ($m \geq n$) 中仍是某个区间的端点，因为

$$\frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}.$$

因而

$$A_{n+1} \subset A_n, \quad \partial A_n \subset \partial A_{n+1}.$$

定义。 Cantor 集定义为

$$K := \bigcap_{n \geq 1} A_n. \quad (13.3)$$

集合 K 是闭集，而且测度从上连续性给出

$$\lambda(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

由于 $\partial A_n \subset A_{n+p}$ 对每个 $p \geq 0$ 成立， $\partial A_n \subset K$ 。特别地，

$$\tilde{K} := \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k} : x_k \in \{0, 2\} \right\} \subset K.$$

这个参数表示是单射。若

$$\sum_{k \geq 1} \frac{x_k}{3^k} = \sum_{k \geq 1} \frac{y_k}{3^k}, \quad x_k, y_k \in \{0, 2\},$$

而两序列不同，令 k_0 为第一个不同指标。不妨 $x_{k_0} = 0, y_{k_0} = 2$ ，则

$$\sum_{k \geq 1} \frac{y_k - x_k}{3^k} \geq \frac{2}{3^{k_0}} - \sum_{k > k_0} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^{k_0}} > 0,$$

与两和相等矛盾。所以 $\tilde{K}$ 与 $\{0, 2\}^{\mathbb{N}^*}$ 等势，也就与 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ 、 $[0, 1]$ 及 $\mathbb{R}$ 等势。由 $\tilde{K} \subset K \subset [0, 1]$ 和 Cantor–Bernstein 定理， K 与 $\mathbb{R}$ 等势。

命题 13.1. Cantor 集满足

$$K = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{3^n} : x_n \in \{0, 2\} \right\}, \quad \text{Card } K = \text{Card } \mathbb{R}, \quad \lambda(K) = 0.$$

此外, K 是紧集、 $K^\circ = \emptyset$, 因而

$$K = \partial K.$$

证明. 紧性与零测性已经证明。若 K 含有非空开区间, 该区间的 Lebesgue 测度为正, 与 $\lambda(K) = 0$ 矛盾, 故 $K^\circ = \emptyset$ 。又 K 闭, 所以 $\partial K = K$ 。

只需证明 $K \subset \tilde{K}$ 。固定 $x \in K$ 。对每个 n , x 属于构成 A_n 的某个闭区间, 记该区间左端点为

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^{(n)}}{3^k}, \quad x_k^{(n)} \in \{0, 2\}.$$

于是 $0 \leq x - x^{(n)} \leq 3^{-n}$ 。由于第 $n+1$ 层区间嵌在第 n 层的唯一父区间中, 前 n 个数字保持不变; 亦可直接由 $|x^{(n+1)} - x^{(n)}| \leq 3^{-n}$ 和第一个不同数字的上述估计看出这一点。因此对每个固定 k , $x_k^{(n)}$ 在 $n \geq k$ 时恒定, 记极值为 $x_k \in \{0, 2\}$ 。令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k} \in \tilde{K}.$$

□

注. 表示式允许通常所说的“非正常”三进制展开; 例如

$$1 = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{3^n}.$$

命题 13.2 (Lebesgue 函数的构造). 存在连续递增函数 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, 使

$$f(0) = 0, \quad \text{qqquad} f(1) = 1, \quad \text{qqquad} f' = 0 \quad \lambda\text{-几乎处处}.$$

特别地,

$$\int_0^1 f'(x) dx = 0 < f(1) - f(0) = 1.$$

证明. 沿用 Cantor 集构造中的记号, 定义

$$f_n(x) := \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x \mathbf{1}_{A_n}(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad n \geq 1. \quad (13.4)$$

因为 $\lambda(A_n) = (2/3)^n$, 有 $f_n(0) = 0$ 、 $f_n(1) = 1$ 。每个 f_n 都连续递增。

若 I 是构成 A_n 的一个闭区间, 则 $\lambda(I) = 3^{-n}$, 且 $\lambda(I \cap A_{n+1}) = (2/3)\lambda(I)$ 。所以

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \int_I \mathbf{1}_{A_n}(t) dt = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_I \mathbf{1}_{A_{n+1}}(t) dt = 2^{-n}. \quad (13.4a)$$

函数 f_n 在组成 A_n^c 的每个开区间上为常数; 由于 $A_n^c \subset A_{n+1}^c$, f_{n+1} 也在这些区间上为常数。

由 (13.4a)，两函数在各个端点取相同值。故对每个构成 A_n 的区间 I 与 $x \in I$,

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| &\leq f_{n+1}(x) - f_{n+1}(\min I) + f_n(x) - f_n(\min I) \\ &\leq 2^{-n} + 2^{-n} = 2^{-n+1}. \end{aligned}$$

该估计也适用于 A_n^c 。于是 (f_n) 在 $[0, 1]$ 上一致 Cauchy，因而一致收敛于某个连续递增函数 f ，并且 $f(0) = 0$ 、 $f(1) = 1$ 。

若 $x \in A_n^c$ ，则对所有 $m \geq n$ ， f_m 在 x 所属的开区间上相同且为常数，故极限 f 也在该区间上为常数。于是

$$f'(x) = 0 \quad \left(x \in \bigcup_{n \geq 1} A_n^c = K^c \right).$$

因为 $\lambda(K) = 0$ ，故 $f' = 0$ 几乎处处。 □

术语提醒。 这里的“Lebesgue 函数”主要与 Cantor 集有关，不要把它误解为 Lebesgue 测度本身所定义的函数。它也常称为 **Cantor 函数** 或 **魔鬼阶梯**。

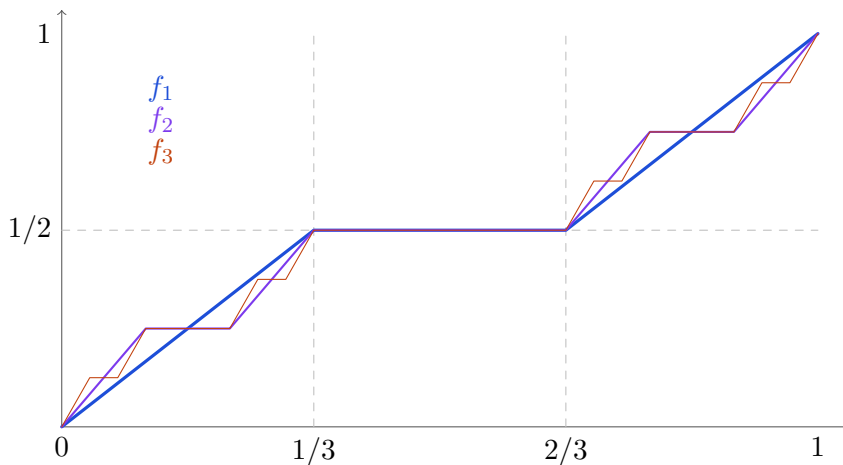


图 13.1: Lebesgue 函数的前三个逼近：魔鬼阶梯。

最后给出两个基于 Cantor 集的应用：第一个构造 Lebesgue 可测但非 Borel 的集合，第二个构造 Riemann 可积但非 Borel 可测的函数。

例：Lebesgue 可测但非 Borel 的集合。 用正常二进制展开定义映射

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1], \\ 1 &\longmapsto 1, \\ x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n} &\longmapsto \varphi(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x_n}{3^n}, \quad x_n \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

这里对 $x < 1$ 取不以无限多个 1 结尾的正常二进制展开。

映射 φ 严格递增。事实上，若 $x < y < 1$ ，令 n_0 为两个二进制展开第一次不同的位置，则 $x_{n_0} = 0$ 、 $y_{n_0} = 1$ ，且

$$\varphi(y) - \varphi(x) \geq \frac{2}{3^{n_0}} - \sum_{n > n_0} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^{n_0}} > 0.$$

因此 φ 是 $[0, 1]$ 到其像的双射，而命题 13.1 表明 $\varphi([0, 1]) \subset K$ 。

令 $A \subset [-1, 1]$ 为定理 13.2 证明中构造的非 Lebesgue 可测集，并令

$$A_0 := \left\{ \frac{x+1}{2} : x \in A \right\} \subset [0, 1].$$

仿射变换保持 Lebesgue 可测性，故 A_0 仍非 Lebesgue 可测。另一方面， $\varphi(A_0) \subset K$ ，所以 $\varphi(A_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ 。它却不是 Borel 集：若它是 Borel 集，由于单调函数 φ 是 Borel 可测的，

$$A_0 = \varphi^{-1}(\varphi(A_0))$$

将是 $[0, 1]$ 中的 Borel 集，矛盾。

例：Riemann 可积但非 Borel 可测的函数。 对 Cantor 集的任意子集 $C \subset K$ ，示性函数 $\mathbf{1}_C$ 都在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积，积分为零。因为

$$0 \leq \mathbf{1}_C \leq \mathbf{1}_K \leq \mathbf{1}_{A_n}, \quad \int_0^1 \mathbf{1}_{A_n}(x) dx = \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0,$$

而 $\mathbf{1}_{A_n}$ 是阶梯函数。

另一方面， $\mathbf{1}_C$ 是 Borel 可测的，当且仅当 C 是 Borel 集。取上一例中的 $C = \varphi(A_0)$ ，便得到一个 Riemann 可积却非 Borel 可测的函数 $\mathbf{1}_{\varphi(A_0)}$ 。这样的函数有无穷多个；事实上

$$\text{Card } \mathcal{B}(K) \leq \text{Card } \mathcal{B}(\mathbb{R}) < \text{Card } \mathcal{P}(K) = \text{Card } \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

13.4 完备测度的乘积与乘积的完备化

本节最重要的结论是否定性的：一般而言，两个完备测度空间的乘积并不完备。

命题 13.3. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 、 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 是 σ -有限完备测度空间。

(a)

$$(\mathcal{P}(X) \times \mathcal{N}_\nu) \cup (\mathcal{N}_\mu \times \mathcal{P}(Y)) \subset \mathcal{N}_{\mu \otimes \nu},$$

其中集合族的乘积表示相应矩形的全体。

(b) 若

$$(\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X) \text{ 且 } \mathcal{N}_\nu \neq \{\emptyset\})$$

或

$$(\mathcal{N}_\mu \neq \{\emptyset\} \text{ 且 } \mathcal{B} \neq \mathcal{P}(Y)),$$

则乘积空间 $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ 不完备。特别地，即使两个因子空间本身完备，也会出现这种现象。

证明。 若 $A \subset X$ 、 $B \in \mathcal{N}_\nu$ ，则

$$A \times B \subset X \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \quad (\mu \otimes \nu)(X \times B) = \mu(X)\nu(B) = 0,$$

这里采用通常约定 $(+\infty) \cdot 0 = 0$ 。因此 $A \times B \in \mathcal{N}_{\mu \otimes \nu}$ ；另一项对称。

若 $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{A}$ 、 $B \in \mathcal{N}_\nu \setminus \{\emptyset\}$ ，则 $A \times B \notin \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 。否则固定 $y \in B$ ，由截面定理

$$A = (A \times B)^y \in \mathcal{A},$$

矛盾。但 (a) 又说明 $A \times B$ 是乘积测度的可忽略集，所以乘积空间不完备。另一种情形同理。
□

重要例子。 因为 $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ，且 $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}} \neq \{\emptyset\}$ ，所以

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(\mathbb{R})^{\otimes 2}, \bar{\lambda}^{\otimes 2})$$

不完备。更一般地，

$$(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R})^{\otimes d}, \bar{\lambda}^{\otimes d})$$

也不完备。

下面精确说明“先完备化再取乘积”与“先取乘积再完备化”的关系。

定理 13.3。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 、 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 为 σ -有限测度空间，完备化分别记为 $(\mathcal{A}^\mu, \bar{\mu})$ 、 $(\mathcal{B}^\nu, \bar{\nu})$ 。则

$$(\mathcal{A}^\mu \otimes \mathcal{B}^\nu)^{\bar{\mu} \otimes \bar{\nu}} = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^{\mu \otimes \nu}, \quad (13.5a)$$

并且

$$\mathcal{N}_{\bar{\mu} \otimes \bar{\nu}} = \mathcal{N}_{\mu \otimes \nu}.$$

在 (13.5a) 的公共 σ -代数上，两边相应的完备化测度也相同。

证明。步骤 1：比较 σ -代数与可忽略集。 显然

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{A}^\mu \otimes \mathcal{B}^\nu \subset (\mathcal{A}^\mu \otimes \mathcal{B}^\nu)^{\bar{\mu} \otimes \bar{\nu}}.$$

而 $\bar{\mu} \otimes \bar{\nu}$ 与 $\mu \otimes \nu$ 在 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 上相同：两者 σ -有限，并在所有可测矩形上取同样的值。因此，每个 $(\mu \otimes \nu)$ -可忽略集也是 $(\bar{\mu} \otimes \bar{\nu})$ -可忽略集，得到 (13.5a) 的一个方向。

反过来，取 $A \cup M \in \mathcal{A}^\mu$ 、 $B \cup N \in \mathcal{B}^\nu$ ，其中 $A \in \mathcal{A}$ 、 $B \in \mathcal{B}$ 、 $M \in \mathcal{N}_\mu$ 、 $N \in \mathcal{N}_\nu$ 。则

$$(A \cup M) \times (B \cup N) = A \times B \cup ((A \times N) \cup (M \times B) \cup (M \times N)). \quad (13.5)$$

括号内的集合由命题 13.3(a) 可忽略，所以

$$\mathcal{A}^\mu \otimes \mathcal{B}^\nu \subset (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^{\mu \otimes \nu}. \quad (13.5b)$$

还需证明反向的可忽略集包含。设 $C \in \mathcal{A}^\mu \otimes \mathcal{B}^\nu$ ，且 $(\bar{\mu} \otimes \bar{\nu})(C) = 0$ 。由 (13.5b) 和完备化刻画 (13.1)，存在 $C^0, C^1 \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ，使

$$C^0 \subset C \subset C^1, \quad (\mu \otimes \nu)(C^1 \setminus C^0) = 0.$$

由于两种乘积测度在 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 上一致， $(\bar{\mu} \otimes \bar{\nu})(C^1 \setminus C^0) = 0$ 。又 $(\bar{\mu} \otimes \bar{\nu})(C^0) = 0$ ，故

$$(\mu \otimes \nu)(C^1) = (\bar{\mu} \otimes \bar{\nu})(C^1) = 0.$$

而 $C \subset C^1$ ，所以 $C \in \mathcal{N}_{\mu \otimes \nu}$ 。至此， σ -代数与可忽略集的结论都已证明。

步骤 2：比较测度。 由 (13.5)，矩形 $(A \cup M) \times (B \cup N)$ 与 $A \times B$ 只相差一个可忽略集。所以 $\bar{\mu} \otimes \bar{\nu}$ 与 $\mu \otimes \nu$ 在生成矩形族 $\mathcal{A}^\mu \times \mathcal{B}^\nu$ 上一致。由 σ -有限测度唯一性，它们在 $\mathcal{A}^\mu \otimes \mathcal{B}^\nu$ 上一致，因此其完备化测度也一致。
□

应用 13.1. 对任意 $p, q \geq 1$, 有

$$(\mathcal{L}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^q))^{\bar{\lambda}_p \otimes \bar{\lambda}_q} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^{p+q}).$$

事实上, 由定理 13.3 以及

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q), \quad \lambda_p \otimes \lambda_q = \lambda_{p+q},$$

两边都是 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q})$ 关于 λ_{p+q} 的完备化。

13.5 完备化与可测函数

以下 $\mathbb{K}$ 表示 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 。显然, 每个 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ -可测函数也关于 $(\mathcal{A}^\mu, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ 可测。下面给出一种几乎处处意义下的逆命题。

命题 13.4. 若

$$f : (X, \mathcal{A}^\mu, \bar{\mu}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$$

可测, 则存在 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ -可测函数 $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{K}$, 使

$$f = \tilde{f} \quad \bar{\mu}\text{-几乎处处}.$$

等价地, $\{f \neq \tilde{f}\} \in \mathcal{N}_\mu$ 。若 f 为非负实值函数, 还可以要求

$$0 \leq \tilde{f} \leq f.$$

证明. 沿用通常的简单函数逼近。

若 $f = \mathbf{1}_E$, $E \in \mathcal{A}^\mu$, 写 $E = A \cup N$, 其中 $A \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{N}_\mu$, 令 $\tilde{f} = \mathbf{1}_A$ 。于是 $\tilde{f} \leq f$, 且两者只在可忽略集上不同。对非负简单函数的每个互不相交水平集分别这样处理, 即得同样结论。若 $f \geq 0$, 取非负简单函数 $f_n \uparrow f$ 。对每个 n , 由上一步取 $\mathcal{A}$ -可测简单函数 u_n , 使

$$0 \leq u_n \leq f_n \leq f, \quad \bar{\mu}(\{u_n \neq f_n\}) = 0.$$

为保证极限存在, 令

$$v_n := \max_{1 \leq k \leq n} u_k, \quad \tilde{f} := \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

则 v_n 递增、 $\mathcal{A}$ -可测且 $0 \leq v_n \leq f$ 。此外 $v_n = f_n$ 几乎处处, 所以

$$\{f \neq \tilde{f}\} \subset \bigcup_{n \geq 1} \{f_n \neq u_n\} \in \mathcal{N}_\mu.$$

a

对一般实值函数, 分别处理 f^+ 、 f^- , 再令 $\tilde{f} = \tilde{f}^+ - \tilde{f}^-$ 。复值情形再分别处理实部与虚部。□

^a**校订注:** 原文直接令 $\tilde{f} = \lim_n \tilde{f}_n$, 但逐项选出的 $\tilde{f}_n$ 未必递增, 极限未必存在; 随后还出现未定义的 g_n 。这里用有限最大值 v_n 单调化, 并统一所有符号。

定义 13.4. 若

$$f : (\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)) \longrightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$$

可测，则称 f **Lebesgue 可测**。

每个 Borel 函数当然 Lebesgue 可测。命题 13.4 还给出刻画：

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K} \text{ Lebesgue 可测} \iff f \text{ 与某个 Borel 函数 } \lambda_d\text{-几乎处处相等.}$$

注。也许会想到同时给定义域和到达域都配备 Lebesgue σ -代数；但这样并不能达到扩大可测函数类的目的，也会失去大量实用的可测性判据。

上述定义也有代价：两个 Lebesgue 可测函数的复合 $g \circ f$ ，即使代数上有意义，一般仍未必 Lebesgue 可测；若外层函数 g 是 Borel 函数则没有这个问题。反例可见 [7] 第 165 页练习 12。

下面回到乘积空间，给出 Fubini 定理对乘积 σ -代数完备化上的函数的推广。可先把两个因子空间分别完备化，所以假设它们 σ -有限且完备并不构成实质限制。

命题 13.5。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 、 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 是 σ -有限完备测度空间。若

$$h: (X \times Y, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^{\mu \otimes \nu}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

可测且 $h = 0$ $(\mu \otimes \nu)$ -几乎处处，则：

- 对 μ -几乎每个 x ，截面 $h_x: y \mapsto h(x, y)$ 是 $\mathcal{B}$ -可测的，且 $h_x = 0$ ν -几乎处处；
- 对 ν -几乎每个 y ，截面 $h^y: x \mapsto h(x, y)$ 是 $\mathcal{A}$ -可测的，且 $h^y = 0$ μ -几乎处处。

证明。 令 $N = \{h \neq 0\}$ 。由假设，存在 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ，使

$$N \subset C, \quad (\mu \otimes \nu)(C) = 0.$$

乘积测度构造定理说明，对每个 $x \in X$ ， $C_x \in \mathcal{B}$ ，映射 $x \mapsto \nu(C_x)$ 是 $\mathcal{A}$ -可测的，且

$$\int_X \nu(C_x) \mu(dx) = (\mu \otimes \nu)(C) = 0.$$

所以对 μ -几乎每个 x ， $\nu(C_x) = 0$ 。又 $\{y: h(x, y) \neq 0\} \subset C_x$ ，而 $\mathcal{B}$ 完备，故这个集合属于 $\mathcal{B}$ ，且为 ν -零测集；于是 h_x 可测并几乎处处为零。交换 X, Y 即得另一结论。 $\square$

定理 13.4 (Fubini)。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 、 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 是 σ -有限完备测度空间，并且

$$f: (X \times Y, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^{\mu \otimes \nu}) \rightarrow \mathbb{R}$$

为可测函数；非负情形也允许 f 取值于 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 。

(a) 若 $f \geq 0$ ，则对 μ -几乎每个 x ， f_x 是 $\mathcal{B}$ -可测的；对 ν -几乎每个 y ， f^y 是 $\mathcal{A}$ -可测的。令

$$\phi(x) := \int_Y f_x(y) \nu(dy), \quad \psi(y) := \int_X f^y(x) \mu(dx).$$

在异常零测集上任意取值后， ϕ 与 ψ 分别为 $\mathcal{A}$ -可测和 $\mathcal{B}$ -可测，并且

$$\int_X \phi d\mu = \int_Y \psi d\nu = \int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu. \quad (13.6)$$

(b) 若 $f \in L^1(X \times Y, \overline{\mu \otimes \nu})$ ，则 $f_x \in L^1(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 对 μ -几乎每个 x 成立， $f^y \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ 对 ν -几乎每个 y 成立；并且

$$\phi \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu), \quad \psi \in L^1(Y, \mathcal{B}, \nu),$$

同时 (13.6) 成立。

^a

^a**校订注：**原文 (b) 把 ψ 的空间误写成 $L^1(X, \mathcal{B}, \nu)$ ；但 ψ 的变量属于 Y ，故改为 $L^1(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 。

证明。 设 $f \geq 0$ 。由命题 13.4，存在 $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ -可测函数 g ，使

$$0 \leq g \leq f, \quad f = g \quad (\mu \otimes \nu)\text{-几乎处处}.$$

经典 Fubini–Tonelli 定理适用于 g 。定义

$$h(x, y) := \begin{cases} f(x, y) - g(x, y), & g(x, y) < +\infty, \\ 0, & g(x, y) = +\infty. \end{cases}$$

则 $h = 0$ 几乎处处。由命题 13.5，对 μ -几乎每个 x ， $f_x = g_x$ ν -几乎处处；对 ν -几乎每个 y ， $f^y = g^y$ μ -几乎处处。因此对 g 成立的截面可测性、迭代积分与 (13.6)，也对 f 成立。^a 可积情形像经典 Fubini 定理一样，对 $|f|$ 、正负部（或实部、虚部）应用非负情形即可。 $\square$

^a**校订注：**原文写 $(f - g)\mathbf{1}_{\{g < +\infty\}}$ 。在 $f = g = +\infty$ 处， $f - g$ 未定义，不能再形式地乘以零；这里用分段定义明确消除 $+\infty - (+\infty)$ 。

第四部分

卷积、Fourier 与 Laplace 变换

第十四章 卷积及其应用

卷积是作用在“具有适当可积性”的函数上的一种新运算。它在正则化逼近中具有基础地位：借助卷积，可以用比原函数更光滑的函数逼近原函数。

记号与回顾。 对 $A, B \subset \mathbb{R}^d$, 记

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\},$$

并记 $a + B := \{a\} + B$ 。符号 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的一个范数；必须使用 Euclid 范数时会明确说明。函数 $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ 具有紧支撑，是指它在某个紧集外恒为零，等价地

$$\text{supp } g := \overline{\{g \neq 0\}}$$

是紧集。记 $C_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ 为紧支撑连续函数空间。我们会反复使用

$$C_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}) \text{ 在 } L_{\mathbb{K}}^p(\lambda_d) \text{ 中关于 } \|\cdot\|_p \text{ 稠密, } 1 \leq p < +\infty.$$

一维结论见第 7 章，一般结论见定理 9.10。

14.1 函数的平移算子

定义 14.1。 设 $a \in \mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ 为 Borel 函数。定义 f 的 a -平移为

$$(\tau_a f)(x) := f(x - a), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (14.1)$$

注。 第 6.1 节还用 τ_a 表示点的平移 $x \mapsto x - a$ 。两者满足 $\tau_a f = f \circ \tau_a$ ，但

$$(\tau_a f)(x) = f(x - a) \neq f(x) - a = \tau_a(f(x))$$

一般成立。因为点平移连续， $\tau_a f$ 仍是 Borel 函数。

定理 14.1。

(a) 若 Borel 函数 $f = g$ λ_d -几乎处处，则 $\tau_a f = \tau_a g$ λ_d -几乎处处。因此 (14.1) 在 $L_{\mathbb{K}}^p(\lambda_d)$ 上定义了线性算子 τ_a ，且对 $1 \leq p \leq +\infty$,

$$\|\tau_a f\|_p = \|f\|_p.$$

(b) 若 $1 \leq p < +\infty$ 、 $f \in L_{\mathbb{K}}^p(\lambda_d)$ ，则

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0.$$

证明。有

$$\{\tau_a f \neq \tau_a g\} = a + \{f \neq g\}.$$

Lebesgue 测度的平移不变性说明两边同时为零测集。对 $1 \leq p < \infty$ ，变量替换给出

$$\|\tau_a f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-a)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx.$$

而 $p = \infty$ 时， $\{|\tau_a f| > u\} = a + \{|f| > u\}$ ，故本质上确界不变。

先设 $f \in C_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ 。它一致连续。若 $|a|$ 足够小，使 $|f(x-a) - f(x)| \leq \varepsilon$ 对所有 x 成立，则

$$\begin{aligned} \|\tau_a f - f\|_p^p &\leq (\lambda_d(a + \{f \neq 0\}) + \lambda_d(\{f \neq 0\}))\varepsilon^p \\ &\leq 2\lambda_d(\text{supp } f)\varepsilon^p. \end{aligned}$$

所以结论对紧支撑连续函数成立。

一般地，取 $f_n \in C_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ ，使 $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ 。由 (a)，

$$\|\tau_a f - f\|_p \leq 2\|f_n - f\|_p + \|\tau_a f_n - f_n\|_p.$$

先固定足够大的 n ，再令 $a \rightarrow 0$ ，即得结论。 □

由

$$\|\tau_a f - \tau_b f\|_p = \|\tau_{a-b} f - f\|_p$$

立即得到：

推论 14.1。 若 $1 \leq p < +\infty$ 、 $f \in L_{\mathbb{K}}^p(\lambda_d)$ ，则

$$a \mapsto \tau_a f$$

是从 $\mathbb{R}^d$ 到 $L_{\mathbb{K}}^p(\lambda_d)$ 的一致连续映射。

注。 当 $p = \infty$ 时，定理 14.1(b) 一般不成立；事实上 C_K 在 L^∞ 中并不关于 $\|\cdot\|_\infty$ 稠密。结论也强烈依赖 Lebesgue 测度的平移不变性。例如对 $\mu = \delta_0$ ， $\tau_a f \rightarrow f$ 于 $L^p(\mu)$ 当且仅当 f 在 0 连续。

14.2 $\mathbb{R}^d$ 上的卷积

14.2.1 非负函数情形

定义 14.2。 设 $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ 为非负 Borel 函数，定义

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (14.2)$$

命题 14.1。

(a) $f * g$ 是良定义的非负 Borel 函数, 并且

$$\int_{\mathbb{R}^d} f * g \, d\lambda_d = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda_d \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g \, d\lambda_d \right).$$

(b) 非负 Borel 函数的卷积满足交换律与结合律:

$$f * g = g * f, \quad (f * g) * h = f * (g * h).$$

(c)

$$\{f * g \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}.$$

证明。 映射 $(x, y) \mapsto (x - y, y)$ 连续, 而 $(u, v) \mapsto f(u)g(v)$ 关于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 可测; 所以 $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$ 可测。Fubini-Tonelli 定理说明 $x \mapsto (f * g)(x)$ 可测, 并给出

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) \, dx \right) dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f \, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g \, dy \right). \end{aligned}$$

固定 x , 作仿射变量替换 $y = x - u$, 得到

$$(f * g)(x) = \int f(u)g(x - u) \, du = (g * f)(x).$$

结合律由 Fubini-Tonelli 定理与 $y = u + z$ 得到:

$$\begin{aligned} f * (g * h)(x) &= \int \int f(x - y)g(y - u)h(u) \, du \, dy \\ &= \int \int f(x - u - z)g(z)h(u) \, dz \, du = ((f * g) * h)(x). \end{aligned}$$

若 $x \notin \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$, 则对每个 y , $g(y) = 0$ 或 $f(x - y) = 0$, 所以 $(f * g)(x) = 0$. $\square$

例。

1. $f * 0 = 0$.

2.

$$(f * 1)(x) = (1 * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda_d.$$

3. 在一维中,

$$(\mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]})(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 2], \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

等价地, 在 $[0, 2]$ 上其值为 $(x \wedge 1) - ((x - 1) \vee 0)$.

14.2.2 一般情形

设 $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ 为 Borel 函数。函数 $y \mapsto f(x - y)g(y)$ 可积, 当且仅当

$$(|f| * |g|)(x) < +\infty.$$

在这种情形下定义

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \, dy.$$

定义 14.3. 上述数 $(f * g)(x)$ 称为 f 与 g 在 x 处的卷积。

命题 14.2.

(a) 只要 $(f * g)(x)$ 、 $(g * f)(x)$ 中有一个存在，另一个也存在，并且

$$(f * g)(x) = (g * f)(x), \quad |(f * g)(x)| \leq (|f| * |g|)(x).$$

(b) 若 $|f| * |g| < +\infty$ 处处成立，则 $f * g$ 是处处定义的 Borel 函数。

(c)

$$\{f * g \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}.$$

(d) 若 $f_1 = f_2$ 、 $g_1 = g_2$ 几乎处处，则两对卷积在每个点同时存在，且存在时取值相同。

证明。(a) 来自仿射变量替换和积分三角不等式。实值情形下写 $f = f^+ - f^-$ 、 $g = g^+ - g^-$ ，若 $|f| * |g| < \infty$ ，则四个非负卷积都有限，且

$$f * g = f^+ * g^+ + f^- * g^- - f^+ * g^- - f^- * g^+.$$

命题 14.1 给出 Borel 可测性；复值情形分解实部、虚部同理。支撑包含关系对 $|f|, |g|$ 应用命题 14.1(c) 即得。

最后固定 x 。有

$$\{y : f_1(x-y)g_1(y) \neq f_2(x-y)g_2(y)\} \subset (x - \{f_1 \neq f_2\}) \cup \{g_1 \neq g_2\},$$

右端为零测集，证明了 (d)。 □

注意：在上述最一般框架中，卷积不满足结合律。例如在一维取

$$f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}, \quad g = \mathbf{1}_{[-1,0]} - \mathbf{1}_{[0,1]}, \quad h = 1.$$

有 $|f| * |g| \leq 2$ ，并且

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^x g(y) \, dy = \begin{cases} 0, & x \notin [-1, 1], \\ x + 1, & x \in [-1, 0], \\ 1 - x, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

因此

$$(f * g) * h = \int_{\mathbb{R}} f * g \, d\lambda = 1, \quad f * (g * h) = f * 0 = 0.$$

14.3 存在条件与性质

定义 14.4. 记 $L^1_{\text{loc}, \mathbb{K}}(\lambda_d)$ 为局部可积 Borel 函数空间：

$$f \in L^1_{\text{loc}, \mathbb{K}}(\lambda_d) \iff \int_K |f| d\lambda_d < +\infty \quad \text{对每个紧集 } K \subset \mathbb{R}^d.$$

这是一个 $\mathbb{K}$ -向量空间，并对有限次 $\min, \max$ 封闭（实值情形）。Hölder 不等式给出

$$L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d) \subset L^1_{\text{loc}, \mathbb{K}}(\lambda_d), \quad 1 \leq p \leq +\infty.$$

命题 14.3. 若 $f \in L^1_{\text{loc}, \mathbb{K}}$ ，而 $g \in L^\infty_{\mathbb{K}}$ 具有紧支撑，则 $(f * g)(x)$ 对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ 都存在，且 $(f, g) \mapsto f * g$ 双线性。

证明. 对每个 x ，

$$(|f| * |g|)(x) \leq \|g\|_\infty \int_{x - \text{supp } g} |f(y)| dy < +\infty,$$

因为 $x - \text{supp } g$ 是紧集。双线性来自积分的线性。 $\square$

定理 14.2 (L^p - L^q 卷积). 设 $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ 、 $g \in L^q_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ ，其中

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q \in [1, +\infty].$$

(a) $(f * g)(x)$ 对每个 x 存在， $f * g$ 一致连续，且

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

映射 $(f, g) \mapsto f * g$ 双线性。

(b) 若 $1 < p, q < +\infty$ ，则

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f * g)(x) = 0.$$

证明. Hölder 不等式与平移不变性给出

$$(|f| * |g|)(x) \leq \left(\int |f(x-y)|^p dy \right)^{1/p} \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q.$$

因为 p, q 至少有一个有限，不妨设 $p < \infty$ 。有

$$(f * g)(x+a) - (f * g)(x) = ((\tau_{-a}f - f) * g)(x),$$

从而

$$|(f * g)(x+a) - (f * g)(x)| \leq \|\tau_{-a}f - f\|_p \|g\|_q.$$

右端与 x 无关，并由定理 14.1 在 $a \rightarrow 0$ 时趋于零，所以 $f * g$ 一致连续。

为证 (b)，先设 $f \in C_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ ，记 $K = \text{supp } f$ 。Hölder 不等式给出

$$|(f * g)(x)| \leq \lambda_d(K)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|^q dy \right)^{1/q}.$$

对每个固定 y , 当 $|x| \rightarrow \infty$ 时 $f(x-y) \rightarrow 0$, 而

$$|f(x-y)g(y)|^q \leq \|f\|_\infty^q |g(y)|^q \in L^1.$$

控制收敛定理说明右端趋于零。

一般地, 取 $f_n \in C_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$, 使 $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. 由 (a),

$$\|f * g - f_n * g\|_\infty \leq \|f - f_n\|_p \|g\|_q.$$

先取 n 使这一项足够小, 再令 $|x| \rightarrow \infty$, 即得结论。 $\square$

推论 14.2. 若 $f, g \in C_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$, 则

$$f * g \in C_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}).$$

推论 14.3. 若 f, g 为非负 Borel 函数, 则 $f * g$ 下半连续, 即

$$\{f * g \leq a\} \text{ 对每个 } a \in \mathbb{R} \text{ 都是闭集.}$$

证明. 令 $K_n = [-n, n]^d$,

$$f_n = (f \wedge n) \mathbf{1}_{K_n}, \quad g_n = (g \wedge n) \mathbf{1}_{K_n}.$$

则 $f_n \uparrow f$, $g_n \uparrow g$, Beppo Levi 定理给出

$$f_n * g_n(x) \uparrow f * g(x).$$

每个 $f_n, g_n \in L^2$, 所以定理 14.2(a) 说明 $f_n * g_n$ 连续。因此

$$\{f * g \leq a\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n * g_n \leq a\}$$

为闭集。 $\square$

应用 14.1 (Steinhaus 定理). 若 Borel 集 $A \subset \mathbb{R}^d$ 的 Lebesgue 测度为正, 则

$$A - A = \{a - a' : a, a' \in A\}$$

是 0 在 $\mathbb{R}^d$ 中的一个邻域。

校订注: 原文结论末尾写成 “ $\mathbb{R}$ 中的邻域”, 但本应用从头到尾在 $\mathbb{R}^d$ 上, 故改为 $\mathbb{R}^d$ 。

证明. 令 $\phi_A = \mathbf{1}_A * \mathbf{1}_{-A}$. 推论 14.3 说明 ϕ_A 下半连续, 故 $\{\phi_A > 0\}$ 是开集。又

$$\phi_A(0) = \int \mathbf{1}_{-A}(-y) \mathbf{1}_A(y) dy = \lambda_d(A) > 0,$$

所以这个开集包含 0 . 命题 14.2(c) 给出

$$\{\phi_A > 0\} \subset A + (-A) = A - A.$$

因此 $A - A$ 包含 0 的一个开邻域。 $\square$

定理 14.3 (L^1 卷积代数)。

(a) 若 $f, g \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, 则 $(f * g)(x)$ 对几乎每个 x 存在, 且 $f * g \in L^1_{\mathbb{K}}$, 并满足

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \int f * g \, d\lambda_d = \left(\int f \, d\lambda_d \right) \left(\int g \, d\lambda_d \right).$$

(b) $(L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d), +, \cdot, *)$ 是无单位元的交换 $\mathbb{K}$ -代数。

证明。 命题 14.1 给出

$$\int |f| * |g| \, dx = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

所以 $|f| * |g| < \infty$ 几乎处处。在异常零测集上令 $f * g = 0$, 便得到 Borel 可积代表, 并且

$$\|f * g\|_1 \leq \| |f| * |g| \|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

积分乘积公式由 Fubini 定理得到。

分配律与交换律已经证明。对 $f, g, h \in L^1$, 非负情形的结合律给出

$$(|f| * |g|) * |h| = |f| * (|g| * |h|) < \infty \quad \text{几乎处处.} \quad (14.3)$$

在满足 (14.3) 的每个 x 上, $(y, z) \mapsto f(x-y)g(y-z)h(z)$ 可积; Fubini-Lebesgue 定理使命题 14.1 中的形式计算合法, 从而得到结合律。

最后反设存在单位元 $u \in L^1$ 。对每个 $\rho > 0$, 令 $F_\rho(x) = e^{-\rho|x|^2}$ 。则 $F_\rho * u = F_\rho$ 几乎处处。定理 14.2(a) 说明左端连续, 右端也连续; 两个连续函数若几乎处处相等, 便处处相等。因此在 $x = 0$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\rho|y|^2} u(y) \, dy = 1.$$

但控制收敛定理在 $\rho \rightarrow \infty$ 时给出左端趋于 0, 矛盾。 $\square$

注。 更一般地, 只要某点 x 满足 $(|f| * |g| * |h|)(x) < \infty$, 卷积结合律就在该点成立。上一节反例不满足这个条件。

定理 14.4。 若 $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ 、 $1 \leq p \leq +\infty$, 且 $g \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, 则 $f * g$ 几乎处处存在、属于 $L^p_{\mathbb{K}}$, 并且

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

证明。 先设 $p < \infty$, 令 q 为其共轭指数, 并对测度 $\eta(dy) = |g(y)| \, dy$ 使用 Hölder 不等式:

$$\left(\int |f(x-y)| |g(y)| \, dy \right)^p \leq \|g\|_1^{p/q} \int |f(x-y)|^p |g(y)| \, dy.$$

对 x 积分并用 Fubini-Tonelli 定理, 得到

$$\| |f| * |g| \|_p^p \leq \|g\|_1^{p/q} \|f\|_p^p \|g\|_1 = \|f\|_p^p \|g\|_1^p.$$

当 $p = \infty$ 时, 直接估计 $|f * g| \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$ 。 $\square$

14.4 近似恒等族

由于 $L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ 的卷积没有单位元, 我们引入一类在渐近意义下充当单位元的函数列。也就是说, 希望在某种适当意义下有

$$\alpha_n * f \text{“近似于” } f, \quad n \rightarrow +\infty.$$

定义 14.5. 若函数列 $(\alpha_n)_{n \geq 1} \subset L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ 满足

(i) 对每个 $n \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda_d = 1;$$

(ii)

$$\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| d\lambda_d < +\infty;$$

(iii) 对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{|x| \geq \varepsilon\}} |\alpha_n| d\lambda_d = 0,$$

则称 $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ 为一个近似恒等族。

若各 α_n 非负, 则条件 (ii) 直接由 (i) 得到。除了函数列, 也常用以 $t > 0$ 为参数的族 $(\alpha_t)_{t>0}$; 这时把条件 (iii) 中的 $n \rightarrow +\infty$ 改成 $t \rightarrow 0$ 。

一般构造。 取任意 $\alpha \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, 满足 $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha d\lambda_d = 1$, 并令

$$\alpha_n(x) := n^d \alpha(nx), \quad n \geq 1.$$

变量替换 $x = u/n$ 给出

$$\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda_d = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha| d\lambda_d.$$

而对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\{|x| \geq \varepsilon\}} |\alpha_n(x)| dx = \int_{\{|u| \geq n\varepsilon\}} |\alpha(u)| du \rightarrow 0.$$

故 (α_n) 是近似恒等族。

下面列出几类常用的近似恒等族; 其中 $|\cdot|$ 表示 Euclid 范数。

例。

1. **Laplace 核 ($\mathbb{R}$ 上):**

$$\alpha_t(x) = \frac{1}{2t} e^{-|x|/t}, \quad t > 0.$$

2. **Cauchy 核 ($\mathbb{R}$ 上):**

$$\alpha_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}, \quad t > 0.$$

3. **Gauss 核 ($\mathbb{R}^d$ 上):**

$$\alpha_t(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi}t)^d} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t^2}\right), \quad t > 0.$$

这里使用了 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (见第 12.2 节例 2)。

4. **紧支撑核** ($\mathbb{R}^d$ 上): 若 $\alpha \in C_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 且 $\int \alpha d\lambda_d = 1$, 则

$$\alpha_t(x) = \frac{1}{t^d} \alpha\left(\frac{x}{t}\right), \quad t > 0.$$

定理 14.5 (L^p 收敛)。设 $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ 是近似恒等族, $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ 。则对每个 $n \geq 1$, $f * \alpha_n \in L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, 并且

$$\|f * \alpha_n - f\|_p \rightarrow 0.$$

证明。第一项结论由定理 14.4 得到。记 q 为 p 的共轭指数, 并令

$$M := \sup_{n \geq 1} \|\alpha_n\|_1 < +\infty.$$

由于 $\int \alpha_n = 1$, 在 $f * \alpha_n(x)$ 存在处有

$$(f * \alpha_n)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x)) \alpha_n(y) dy.$$

按照定理 14.4 的估计, 并应用 Fubini-Tonelli 定理, 得到

$$\|f * \alpha_n - f\|_p^p \leq M^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p |\alpha_n(y)| dy,$$

其中当 $p = 1$ 时约定 $M^{p/q} = 1$ 。对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p |\alpha_n(y)| dy &\leq 2^p \|f\|_p^p \int_{\{|y| \geq \varepsilon\}} |\alpha_n(y)| dy \\ &\quad + M \sup_{|y| \leq \varepsilon} \|\tau_y f - f\|_p^p. \end{aligned}$$

先令 $n \rightarrow +\infty$, 第一项由定义 14.5(iii) 趋于零; 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 第二项由定理 14.1(b) 趋于零。因此结论成立。□

下面研究当 f 至少局部具有正则性时的逐点逼近。

定义 14.6。设 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$, $B \subset \mathbb{R}^d$ 。若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in B, \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

则称 f 在 B 上相对一致连续 (或称 B -一致连续)。等价地,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \sup_{\substack{x \in B \\ |h| \leq \eta}} |f(x+h) - f(x)| = 0.$$

若 f 在 B 上相对一致连续, 则它在 B 的每一点连续, 而且限制 $f|_B$ 一致连续; 反之一般不成立, 例如取 $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ 、 $B = \mathbb{Q}$ 。

例。

1. f 在 $\mathbb{R}^d$ 上相对一致连续, 当且仅当 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上一致连续。
2. f 在 $\{x_0\}$ 上相对一致连续, 当且仅当 f 在 x_0 连续。

3. Heine 定理的推广：若 f 在紧集 $K \subset \mathbb{R}^d$ 的每一点连续，则 f 在 K 上相对一致连续。事实上，若结论不成立，则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及 $x_n \in K, h_n \in \mathbb{R}^d$ ，使

$$|h_n| \leq \frac{1}{n}, \text{ 但 } |f(x_n + h_n) - f(x_n)| > \varepsilon_0.$$

由紧致性可取子列 $x_{\varphi(n)} \rightarrow x \in K$ 。 f 在 x 连续，故 $f(x_{\varphi(n)} + h_{\varphi(n)})$ 与 $f(x_{\varphi(n)})$ 都趋于 $f(x)$ ，矛盾。

定理 14.6 (逐点收敛)。 设 $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ 是近似恒等族， $f \in L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\lambda_d)$ 。则：

(a) 对每个 $n \geq 1$ ， $f * \alpha_n$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上一致连续，且

$$\|f * \alpha_n\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \|\alpha_n\|_1.$$

(b) 若 f 在 $B \subset \mathbb{R}^d$ 上相对一致连续，则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in B} |(f * \alpha_n)(x) - f(x)| = 0.$$

校订注：原文定理 14.6(b) 的上确界中漏印绝对值；证明中使用的正是绝对误差，故在此补全。

证明。 (a) 是定理 14.2(a) 的直接推论。证明 (b) 时，令 $M_f = \|f\|_{\infty}$ ，并把 f 的代表元替换为闭球 $\{z \in \mathbb{K} : |z| \leq M_f\}$ 上的度量投影与 f 的复合。实值情形下，这个投影就是

$$z \mapsto (-M_f) \vee (z \wedge M_f).$$

投影是 1-Lipschitz 的；而 f 在 B 的每一点连续，所以 $|f(x)| \leq M_f$ 对 $x \in B$ 成立。故替换后的代表元与原函数在 B 上相同，仍在 B 上相对一致连续，并处处满足 $|f| \leq \|f\|_{\infty}$ 。仍记这个代表元为 f ，并令 $M = \sup_n \|\alpha_n\|_1$ 。对任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 、 $n \geq 1$ 和 $\eta > 0$ ，

$$\begin{aligned} |(f * \alpha_n)(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |\alpha_n(y)| dy \\ &\leq M \sup_{|y| \leq \eta} |f(x-y) - f(x)| + 2\|f\|_{\infty} \int_{\{|y| > \eta\}} |\alpha_n(y)| dy. \end{aligned}$$

对 $x \in B$ 取上确界，再先令 $n \rightarrow \infty$ ，后令 $\eta \rightarrow 0$ ，即得 (b)。 $\square$

推论 14.4。 设 $f \in L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\lambda_d)$ 。则：

- (a) 若 f 在 $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 连续，则 $(f * \alpha_n)(x_0) \rightarrow f(x_0)$ ；
- (b) 若 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上一致连续，则 $\|f * \alpha_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ ；
- (c) 若 f 在紧集 K 的每一点连续，则

$$\sup_{x \in K} |(f * \alpha_n)(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

14.5 用卷积正则化

第 14.3 节已经说明：若 f 局部可积、 φ 本质有界且具有紧支撑，则 $f * \varphi$ 在 $\mathbb{R}^d$ 每一点存在。本节将证明 $f * \varphi$ 还会继承 φ 的光滑性，并由此得到若干重要的光滑函数逼近定理。

定义 14.7。

(a) 对 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, 记

$$C_K^n(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ 具有紧支撑且属于 } C^n\}.$$

(b) 对多重指标 $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{N}^d$, 记

$$|\mathbf{p}| := \sum_{i=1}^d p_i.$$

(c) 一个 m 阶微分算子是指形如

$$Df := \sum_{|\mathbf{p}| \leq m} \lambda_{\mathbf{p}} \frac{\partial^{|\mathbf{p}|} f}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_d^{p_d}}, \quad \lambda_{\mathbf{p}} \in \mathbb{K},$$

的算子。

回忆：函数 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上属于 C^n , 当且仅当它的所有阶数不超过 n 的偏导数都连续。

定理 14.7。 设 $\varphi \in C_K^n(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, 且 $f \in L^1_{\text{loc}, \mathbb{K}}(\lambda_d)$ 。则 $f * \varphi$ 在 $\mathbb{R}^d$ 每一点有定义, 并且

$$f * \varphi \in C^n(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}).$$

若 D 是阶数 $m \leq n$ 的微分算子, 则

$$D(f * \varphi) = f * (D\varphi).$$

证明。 用归纳法, 只需对基本算子 $\partial/\partial x_i$ 证明结论。令

$$K_\varphi := \text{supp } \varphi + \overline{B}(0, 1),$$

这是紧集。固定 $x \in \mathbb{R}^d$, 记 e_i 为第 i 个标准基向量。当 $0 < |h| \leq 1$ 时,

$$\frac{(f * \varphi)(x + he_i) - (f * \varphi)(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\varphi(x - y + he_i) - \varphi(x - y)}{h} dy.$$

由一元中值不等式, 积分核的绝对值不超过

$$|f(y)| \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_\infty \mathbf{1}_{K_\varphi}(x - y).$$

这个控制函数可积, 因为 f 局部可积且 $x - K_\varphi$ 是紧集。另一方面, 对每个 y , 被积函数趋于

$$f(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x - y).$$

控制收敛定理于是给出

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * \varphi) = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

右端连续性可由同一控制收敛论证得到, 随后归纳即可。□

命题 14.4. 设 $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, 而

$$\varphi \in C_b^n(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}) := \{u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K} : u \in C^n, u \text{ 及其所有不超过 } n \text{ 阶的偏导数均有界}\},$$

其中 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 。则定理 14.7 的结论仍然成立。

为了把上述正则性结论与近似恒等族结合起来, 最有用的是 $n = \infty$ 的情形。空间 C_K^∞ 并非只有零函数。例如, 在 Euclid 范数下,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad \text{属于 } C_K^\infty(\mathbb{R}^d, [0, 1]). \quad (14.4)$$

这可由一元函数

$$u \mapsto \begin{cases} e^{-1/u}, & u > 0, \\ 0, & u \leq 0 \end{cases}$$

属于 $C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ 直接推出。

定义 14.8. 若函数列 $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ 既是近似恒等族, 又满足

$$\alpha_n \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}), \quad n \geq 1,$$

则称它为一个光滑化近似恒等族, 也称磨光核族。

基本例. 取 $\alpha \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ 且 $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha \, d\lambda_d = 1$, 令

$$\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx).$$

例如可取 $\alpha = \varphi / \int \varphi \, d\lambda_d$, 其中 φ 由 (14.4) 给出; 更一般地, 任取积分非零的实值 C_K^∞ 函数作同样归一化即可。

定理 14.8 (稠密性).

- (a) $C_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ 在 $C_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ 中关于 $\|\cdot\|_\infty$ 稠密。
- (b) 对每个 $1 \leq p < +\infty$, $C_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ 在 $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ 中关于 $\|\cdot\|_p$ 稠密。
- (c) $C_b^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ 在所有有界一致连续函数组成的空间 $C_{U,b}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ 中关于 $\|\cdot\|_\infty$ 稠密。
- (d) $C_b^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ 在 $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ 中关于紧集上一致收敛稠密: 对每个有界连续函数 f , 存在 $(f_n)_{n \geq 1} \subset C_b^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$, 使对每个紧集 $K \subset \mathbb{R}^d$,

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

证明. 固定一个光滑化近似恒等族 (α_n) 。以下各情形中的函数 f 都局部可积, 故 $f * \alpha_n$ 处处存在。

(a) 若 $f \in C_K$, 则 $f * \alpha_n \in C_K$; 定理 14.7 又说明它属于 C^∞ , 故 $f * \alpha_n \in C_K^\infty$ 。因为 f 一致连续, 推论 14.4(b) 给出一致收敛。

(b) 设 $f \in L^p$, 并令 $f_m = f \mathbf{1}_{\{|x| \leq m\}}$ 。控制收敛定理给出 $\|f - f_m\|_p \rightarrow 0$ 。固定 m 后, $\alpha_n * f_m \in C_K^\infty$, 且由定理 14.5, $\|\alpha_n * f_m - f_m\|_p \rightarrow 0$ 。用对角选取即可得到所需稠密性。

(c) 对 $f \in C_{U,b}$, 定理 14.2(a) 与定理 14.7 说明 $f * \alpha_n \in C_b^\infty$, 推论 14.4(b) 给出一致收敛。

(d) 对 $n \geq 1$, 令闭球上的径向投影为

$$P_n(x) := \begin{cases} x, & |x| \leq n, \\ n \frac{x}{|x|}, & |x| > n, \end{cases} \quad \tilde{f}_n := f \circ P_n.$$

映射 P_n 是从 $\mathbb{R}^d$ 到闭球 $\overline{B}(0, n)$ 的 1-Lipschitz 映射, 而 $f|_{\overline{B}(0, n)}$ 一致连续且有界, 故 $\tilde{f}_n \in C_{U, b}$. 由 (c), 可取 $f_n \in C_b^\infty$ 使 $\|\tilde{f}_n - f_n\|_\infty \leq 1/n$. 任给紧集 K , 当 n 充分大时 $P_n(x) = x$ 对所有 $x \in K$ 成立, 因而

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

□

卷积的光滑化性质还有许多其他用途。下面给出 $\mathbb{R}^d$ 上光滑版的 Urysohn 闭集分离引理。

定理 14.9 (Lebesgue–Urysohn 引理)。设 $K \subset \mathbb{R}^d$ 为紧集, $\omega \subset \mathbb{R}^d$ 为开集, 且 $K \subset \omega$. 则存在 $f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d, [0, 1])$, 使

$$f \equiv 1 \text{ 于 } K, \quad f \equiv 0 \text{ 于 } \omega^c.$$

证明。若 $K = \emptyset$, 取 $f = 0$ 即可。以下设 $K \neq \emptyset$. 若 $\omega^c \neq \emptyset$, 连续函数 $x \mapsto d(x, \omega^c)$ 在 K 上达到正的最小值, 记为 ρ ; 若 $\omega = \mathbb{R}^d$, 则任取 $\rho > 0$. 令

$$K_\eta := \{u \in \mathbb{R}^d : d(u, K) \leq \eta\}.$$

于是当 $0 < \eta < \rho$ 时 $K_\eta \subset \omega$. 取非负函数 $\alpha_\rho \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, 使

$$\text{supp } \alpha_\rho \subset \overline{B}(0, \rho/3), \quad \int \alpha_\rho d\lambda_d = 1,$$

并定义

$$f := \mathbf{1}_{K_{\rho/3}} * \alpha_\rho.$$

由定理 14.2(a), $0 \leq f \leq 1$; 由定理 14.7, $f \in C^\infty$. 又

$$\{f \neq 0\} \subset K_{\rho/3} + \overline{B}(0, \rho/3) \subset K_{2\rho/3} \subset \omega,$$

所以 f 具有紧支撑并在 ω^c 上恒为零。最后, 若 $x \in K$, 则 $\overline{B}(0, \rho/3) \subset x - K_{\rho/3}$, 故

$$f(x) = \int_{x - K_{\rho/3}} \alpha_\rho(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_\rho(y) dy = 1.$$

□

14.6 其他卷积

14.6.1 函数的其他卷积

在其他空间上, 也可以定义具有类似性质的卷积。例如, 在所有双边序列

$$\mathbb{K}^{\mathbb{Z}} := \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} : u_n \in \mathbb{K}\}$$

上，可以形式地写成

$$(u * v)_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{n-k} v_k, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

特别地，当 u, v 都属于

$$\ell_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{Z}) := \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n| < +\infty \right\}$$

时，上式确实定义了卷积序列。

再看带有归一化 Lebesgue 测度 $\lambda_1|_{[0,2\pi)}/(2\pi)$ 的圆环 $[0, 2\pi)$ 。任意 Borel 函数 $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{K}$ 都可周期延拓为

$$f(x) := f\left(x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

于是可以定义周期卷积

$$(f * g)(x) := \int_0^{2\pi} f(x-y)g(y) \frac{dy}{2\pi}.$$

例如，当 $f, g \in L_{\mathbb{K}}^1([0, 2\pi), dy/(2\pi))$ 时，该卷积几乎处处存在。前述关于 $\mathbb{R}^d$ 的结论可相应移植到周期情形。连续 2π -周期函数空间记为

$$C_{2\pi}^{\#}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ 连续且 } 2\pi\text{-周期}\}, \quad \|f\|_{2\pi}^{\#} := \sup_{x \in [0, 2\pi)} |f(x)|.$$

这些构造也都有多维版本。

更一般地，只要空间具有阿贝尔群结构，并且所用测度关于群平移不变，就可以建立类似的卷积理论。这便导向局部紧阿贝尔群及其 Haar 测度上的卷积。

14.6.2 非负测度的卷积

先在 $\mathbb{R}^d$ 上说明抽象定义。设 μ, ν 是 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的非负 σ -有限测度。把乘积测度 $\mu \otimes \nu$ 在加法映射

$$(x, y) \mapsto x + y$$

下的像测度称为 μ 与 ν 的卷积，记作 $\mu * \nu$ 。由像测度的换元公式，对每个非负 Borel 函数 f （以及每个使积分有意义的函数）有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(z)(\mu * \nu)(dz) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x+y)(\mu \otimes \nu)(dx, dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)\mu(dx)\nu(dy). \end{aligned}$$

卷积满足交换律。若把讨论限制在有限非负测度上，则卷积仍是有限测度，并满足结合律，且 δ_0 是单位元；概率测度因而也在卷积下封闭。

校订注：原文把上述结论直接表述为“ σ -有限测度之间的运算”，但两个 σ -有限测度的卷积未必仍是 σ -有限的。例如 Lebesgue 测度与自身的卷积不是 σ -有限测度。因此这里把封闭的代数性结论准确地限制为有限非负测度；一般情形仍可用像测度定义一次卷积。

函数卷积与测度卷积自然相容：若 μ, ν 关于 λ_d 的密度分别是 f, g ，则 $\mu * \nu$ 关于 λ_d 的密度为 $f * g$ 。习题 14.15 将对此作更细致的说明。在概率论中，两个独立随机向量之和的分布，正是它们各自分布的卷积。

14.7 习题

以下均在测度空间 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ 上讨论, 其中 $d \geq 1$ 。

习题 14.1. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 令 $\chi = \mathbf{1}_{[a,b]}$, 并对 $n \geq 1$ 定义

$$\chi_n := \underbrace{\chi * \cdots * \chi}_{n \text{ 次}}.$$

- (a) 画出 χ_2 的图像, 并证明对每个 $n \geq 2$, $\chi_n \in C_K^{n-2}(\mathbb{R})$ 。
 (b) 对 $n \geq 1$ 计算 $\|\chi_n\|_1$; 计算 $\|\chi_2\|_\infty$, 并证明当 $n \geq 3$ 时

$$\|\chi_n\|_\infty < \|\chi_n\|_1.$$

- (c) 令 $\varphi = \sum_{n \geq 2} \chi_n$. 给出 $\varphi \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda_1)$ 的充要条件. 证明在此条件下 $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$, 且

$$\varphi = \chi * \varphi + \chi_2.$$

函数 φ 在 $\mathbb{R}$ 上可微吗?

习题 14.2. 考察与函数 $\mathbf{1}_{[0,1]}$ 的卷积, 证明 $L^1_{\mathbb{R}}(\lambda_1)$ 关于卷积没有单位元。

习题 14.3. 设 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$. 定义 f 的傅里叶变换

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i(t \cdot x)} dx, \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

其中 $\cdot$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的内积。

- (a) 证明 $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ 。
 (b) 若 $f, g \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$, 证明

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}.$$

- (c) 由此再次证明 $L^1_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$ 关于卷积没有单位元。

习题 14.4 (卷积的 Young 不等式). 设 $p, q, r \in [1, +\infty]$ 满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r},$$

且 $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$ 、 $g \in L^q_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$. 证明 $f * g$ 几乎处处有定义, 并且

$$f * g \in L^r_{\mathbb{R}}(\lambda_d), \quad \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

习题 14.5. 设 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$ 、 $g \in L^p_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$, 其中 $1 \leq p \leq +\infty$. 证明: 对每个满足

$$|a| < \|f\|_1^{-1}$$

的 $a \in \mathbb{K}$, 方程

$$h - af * h = g$$

在 $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ 中有唯一解。

习题 14.6. 设 $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, 并设 $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ 是非负近似恒等族。对概率测度 $\alpha_n(x) dx$ 应用 Jensen 不等式 (参见习题 7.10), 证明

$$\|\alpha_n * f - f\|_p \rightarrow 0.$$

习题 14.7. 设 $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, $g \in L^\infty_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, 且

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

证明 $f * g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ 。若去掉 g 在无穷远处趋于零的条件, 结论是否仍然成立?

习题 14.8. 设 $(B_n)_{n \geq 1}$ 是以原点为中心、半径 $r_n > 0$ 的开球列, 且 $r_n \rightarrow 0$ 。对 $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, 定义球平均

$$\bar{f}_n(x) := \frac{1}{\lambda_d(B_n)} \int_{x+B_n} f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

证明存在子列 $(\bar{f}_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$, 使它几乎处处收敛于 f 。

习题 14.9. 设 $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ 在某个紧集外恒为零, 并满足: 对每个 $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \Delta \varphi(x) dx = 0,$$

其中 Δ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 Laplace 算子。

(a) 设 $\alpha \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ 。证明 $\alpha * f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$, 并且对每个 $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\alpha * f)(x) \Delta \varphi(x) dx = 0.$$

(b) 由此证明 $\alpha * f = 0$, 再证明 $f = 0$ λ_d -几乎处处。

习题 14.10. 本题使用习题 6.14 中研究的可测函数的本质支撑。设 $f, g \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$, 并令

$$A := S_f^{\lambda_d} \cup \{f = 0\}, \quad B := S_g^{\lambda_d} \cup \{g = 0\}, \quad F := S_f^{\lambda_d} + S_g^{\lambda_d}.$$

(a) 证明 $\lambda_d(A^c) = \lambda_d(B^c) = 0$, 并且对每个 $x \in F^c$,

$$\{y \in \mathbb{R}^d : f(x-y)g(y) \neq 0\} \subset (x - A^c) \cup B^c.$$

(b) 由此证明

$$S_{f*g}^{\lambda_d} \subset \overline{S_f^{\lambda_d} + S_g^{\lambda_d}}.$$

校订注: 原文在本题中写成了未定义的上标 μ ; 本章的环境测度是 λ_d , 故统一改为 $S_f^{\lambda_d}$ 、 $S_g^{\lambda_d}$ 。此外, 本质支集按定义是闭集, 而两个闭集的和未必闭; 由 (a) 能推出的一般结论是包含于和集的闭包, 故在 (b) 中补上闭包。

习题 14.11 (傅里叶反演公式)。 设 $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ 。定义

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i(t \cdot x)} dx, \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

对每个 $n \geq 1$, 令

$$a_n(t) := (2\pi)^{-d} \exp\left(-\frac{|t_1| + \cdots + |t_d|}{n}\right), \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

(a) 计算 $\alpha_n := \widehat{a_n}$, 并证明它是 $\mathbb{R}^d$ 上的卷积核 (参见第 14.4 节)。

(b) 若 $\widehat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$, 证明对每个 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(\alpha_n * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} a_n(t) \widehat{f}(t) e^{i(x \cdot t)} dt.$$

(c) 推出傅里叶反演公式

$$(2\pi)^d f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i(x \cdot t)} dt = \widehat{\widehat{f}}(-x) \quad \text{对 } \lambda_d\text{-几乎处处的 } x.$$

校订注：原文在本题的 d 维积分中沿用了一维上下限 $-\infty, +\infty$; 这里改为正确的积分域 $\mathbb{R}^d$ 。

习题 14.12。

(a) 设 $g, h \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\widehat{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, 且 $\|\widehat{h}\|_{\infty} < 1$ 。在 $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ 中求解

$$f = g + h * f.$$

(b) 设实数 $a > b > 0$, 并定义

$$g(x) = e^{-a|x|}, \quad h(x) = (a-b)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-ax}.$$

用微分方程求解 $f = g + h * f$ 。

(c) 由此求函数

$$x \mapsto \frac{1}{(a-ix)(b+ix)}$$

的傅里叶变换。

习题 14.13。 在 $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$ 上定义测度

$$\mu(dx) := x^{-1} dx.$$

对可测函数 $f, g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{K}$, 在积分有意义时定义

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}_+^*} f(xy^{-1})g(y)\mu(dy).$$

(a) 若 $f, g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ 为 Borel 函数, 证明 $f \star g$ 仍为非负 Borel 函数, 且

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} f \star g d\mu = \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} f d\mu \right) \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} g d\mu \right).$$

(b) 若 $f, g \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, 证明

$$f \star g \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu), \quad \|f \star g\|_{L^1(\mu)} \leq \|f\|_{L^1(\mu)} \|g\|_{L^1(\mu)}.$$

(c) 若 $p \in [1, +\infty]$ 、 $(f, g) \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu) \times L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, 证明

$$f \star g \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu), \quad \|f \star g\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^1(\mu)}.$$

习题 14.14 (带权 Hardy 不等式)。沿用习题 14.13 的测度 $\mu(dx) = x^{-1}dx$ 与卷积 $\star$ 。设 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 、 $1 \leq p < +\infty$, 且 $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ 为 Borel 函数, 满足 $\text{id}^\alpha f \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ 。

(a) 证明对每个 $x > 0$,

$$F(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, & \alpha < 1, \\ \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} f(t) dt, & \alpha > 1 \end{cases}$$

有定义, 并存在 $g_\alpha \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu) \cap L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$, 使

$$\text{id}^\alpha F = (\text{id}^\alpha f) \star g_\alpha.$$

(b) 推出带权 Hardy 不等式

$$\int_0^{+\infty} x^{p\alpha-1} |F(x)|^p dx \leq \frac{1}{|\alpha-1|^p} \int_0^{+\infty} x^{p\alpha-1} |f(x)|^p dx. \quad (H_p)$$

并说明它如何推广习题 9.16 中的 Hardy 不等式。

(c) 证明 (H_p) 中的常数 $1/|\alpha-1|^p$ 是最优的。

(d) 证明当 $\alpha = 1$ 时不存在与 (H_p) 类似的不等式。

校订注：原文在 (a) 中只写 $g_\alpha \in L^p(\mu)$, 但由习题 14.13(c) 推出 (b) 还需要 $g_\alpha \in L^1(\mu)$ 。实际构造的 g_α 同时属于这两个空间, 故在题目中补全。

习题 14.15。设 μ, ν 是 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的有限非负测度, $\mu * \nu$ 表示乘积测度 $\mu \otimes \nu$ 在映射 $(u, v) \mapsto u + v$ 下的像测度。

(a) 对有界 Borel 函数 φ , 证明

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \varphi(u+v) \mu(du) \nu(dv).$$

(b) 证明这里定义的卷积满足交换律、结合律, 并以 δ_0 为单位元。

(c) 设 $f, g \in L^1_{\mathbb{R}_+}(\lambda_d)$, 并令

$$\mu = f\lambda_d, \quad \nu = g\lambda_d.$$

证明

$$\mu * \nu = (f * g)\lambda_d.$$

(d) 设 $g \in L^1_{\mathbb{R}_+}(\lambda_d)$ 、 $\mu = g\lambda_d$ 。证明存在 $h \in L^1_{\mathbb{R}_+}(\lambda_d)$, 使

$$\mu * \nu = h\lambda_d.$$

(e) 证明

$$\text{supp}(\mu * \nu) \subset \overline{\text{supp} \mu + \text{supp} \nu}.$$

校订注：原文 (c) 将 ν 误记为 μ , 且 (e) 漏写闭包; 均已改正。

第十五章 Fourier 变换与 Laplace 变换

Fourier 变换是纯数学与应用数学许多领域中的基本工具。不同领域会根据关注点采用略有差异的规范，例如在复指数的自变量中加入因子 2π ，或者把所变换的测度乘以 $(2\pi)^{-d/2}$ 。本章采用概率论中最常见的规范。章末还将联系 Fourier 变换，较简略地介绍 Laplace 变换。

本章补充记号。 本章中的 $|\cdot|$ 一律表示 $\mathbb{R}^d$ 上的标准 Euclid 范数，并记

$$\langle x, x' \rangle := \sum_{j=1}^d x_j x'_j, \quad x, x' \in \mathbb{R}^d.$$

复数 z 的共轭记为 $\bar{z}$ ，模仍记为 $|z|$ 。记中心对称

$$\check{\text{Id}} : x \mapsto \check{x} := -x.$$

若 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上的函数，则

$$\check{f} := f \circ \check{\text{Id}}, \quad \check{f}(x) = f(-x).$$

这个变换是对合，即 $\check{\check{f}} = f$ 。对测度也采用相同记号： $\check{\mu}$ 表示 μ 在 $x \mapsto -x$ 下的像测度。

我们将频繁使用如下稠密性结论：

$$C_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}) \text{ 在 } (L^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d), \|\cdot\|_p) \text{ 中稠密, } \quad 1 \leq p < +\infty.$$

一维情形见第 7 章，一般情形见第 9.7 节定理 9.10。

15.1 定义与初步性质

定义 15.1。

(a) 设 μ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的有限非负测度。定义 μ 的 Fourier 变换为

$$\widehat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} \mu(dx), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (15.1)$$

(b) 设 $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ 。定义 f 的 Fourier 变换为

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (15.2)$$

因为 $|e^{i\langle \xi, x \rangle}| = 1$ ，上述积分都绝对收敛。若 $f \geq 0$ 且 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$ ，令 $\mu_f = f\lambda_d$ ，则两个定义相容：

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f\lambda_d}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} f(x) dx. \quad (15.3)$$

基本性质。

P1 对每个 $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{\mu}(-\xi) = \overline{\widehat{\mu}(\xi)} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} \check{\mu}(dx) = \widehat{\check{\mu}}(\xi).$$

亦即

$$\widehat{\check{\mu}} = \overline{\widehat{\mu}} = \check{\widehat{\mu}}.$$

特别地, 若 μ 关于原点对称, 则 $\widehat{\mu}$ 为实值函数。

对 $f \in L^1_{\mathbb{C}}$, 相应地有

$$\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} f(-x) dx = \widehat{\check{f}}(\xi),$$

即

$$\widehat{\check{f}} = \overline{\widehat{f}} = \check{\widehat{f}}.$$

特别地, 若 f 为实值函数, 则 $\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$; 若 f 还为偶函数, 则 $\widehat{f}$ 为实值函数。

P2 对有限非负测度 μ, μ' 和 $\rho \geq 0$,

$$\widehat{\rho\mu + \mu'} = \rho\widehat{\mu} + \widehat{\mu'}, \quad \widehat{\rho\mu} = \rho\widehat{\mu}.$$

函数 Fourier 变换在 $L^1_{\mathbb{C}}$ 上是 $\mathbb{C}$ -线性的, 在 $L^1_{\mathbb{R}}$ 上是 $\mathbb{R}$ -线性的。

命题 15.1。

(a) $\widehat{\mu}$ 与 $\widehat{f}$ 都有界且一致连续。更准确地,

$$\|\widehat{\mu}\|_{\infty} \leq \mu(\mathbb{R}^d), \quad \|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1,$$

并且

$$\begin{aligned} |\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\mu}(\xi')| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \min\{2, |\xi - \xi'| |x|\} \mu(dx), \\ |\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\xi')| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \min\{2, |\xi - \xi'| |x|\} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

(b) **Riemann–Lebesgue 定理**: 对每个 $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

因此

$$\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) := \{g \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) : g(x) \rightarrow 0 \text{ 当 } |x| \rightarrow \infty\}.$$

证明。 对任意 $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\mu}(\xi') = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle \xi, x \rangle} - e^{i\langle \xi', x \rangle}) \mu(dx).$$

由中值不等式和三角不等式,

$$|e^{iu} - e^{iv}| \leq \min\{2, |u - v|\},$$

再用 Cauchy–Schwarz 不等式 $|\langle \xi - \xi', x \rangle| \leq |\xi - \xi'| |x|$, 便得到 (a) 中关于测度的估计。令 $\xi - \xi' \rightarrow 0$, 控制收敛定理给出一致连续性。有界性直接来自复指数的模为 1。函数情形完全相同, 只需用 $|f(x)| dx$ 代替 $\mu(dx)$ 。

证明 (b)。对 $\xi \neq 0$ ，令

$$h_\xi := \pi \frac{\xi}{|\xi|^2}.$$

由于 $e^{i\langle \xi, h_\xi \rangle} = e^{i\pi} = -1$ ，平移变量后得到

$$\widehat{f}(\xi) = - \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} f(x - h_\xi) dx.$$

与 (15.2) 相加可得

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} (f(x) - f(x - h_\xi)) dx,$$

从而

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2} \|f - \tau_{h_\xi} f\|_1 \rightarrow 0,$$

因为 $|h_\xi| = \pi/|\xi| \rightarrow 0$ ，再应用定理 14.1(b)。

□

注。 Riemann–Lebesgue 定理一般不能推广到所有有限测度。例如对 $a \in \mathbb{R}^d$ ，

$$\widehat{\delta}_a(\xi) = e^{i\langle \xi, a \rangle},$$

其模恒为 1。

推论 15.1。 Fourier 变换是连续线性映射

$$(L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty).$$

命题 15.2。

(a) 若有限测度 μ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x| \mu(dx) < +\infty,$$

则 $\widehat{\mu} \in C^1(\mathbb{R}^d)$ ，并且对 $1 \leq k \leq d$ ，

$$\frac{\partial \widehat{\mu}}{\partial \xi_k}(\xi) = i \int_{\mathbb{R}^d} x_k e^{i\langle \xi, x \rangle} \mu(dx). \quad (15.4)$$

(b) 若 $x \mapsto |x| |f(x)|$ 属于 $L^1_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$ ，则 $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}^d)$ ，且

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_k}(\xi) = i \int_{\mathbb{R}^d} x_k e^{i\langle \xi, x \rangle} f(x) dx. \quad (15.5)$$

证明。 这是含参积分的连续性定理与积分号下求导定理的直接应用。

□

推论 15.2。

(a) 若有限测度 μ 具有任意阶多项式矩，即

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^n \mu(dx) < +\infty \quad \text{对每个 } n \in \mathbb{N},$$

则 $\widehat{\mu} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 。

(b) 若

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^n |f(x)| dx < +\infty \quad \text{对每个 } n \in \mathbb{N},$$

则 $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 。

命题 15.3. 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$, 并满足

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad f \in L^1(\lambda_d), \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^1(\lambda_d) \quad (1 \leq k \leq d).$$

则

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(\xi) = -i\xi_k \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (15.6a)$$

特别地,

$$\widehat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{|\xi|}\right) \quad (|\xi| \rightarrow +\infty).$$

校订注: 原文把 f 的定义域印成 $\mathbb{R}$, 并把 (15.6a) 左端写成只对 x_k 的一维积分, 却把右端写成完整的 d 维 Fourier 变换; 这里统一改为 $\mathbb{R}^d$ 上偏导数的 Fourier 变换。

注. 当 $d = 1$ 时, 条件 $f(x) \rightarrow 0$ 是多余的。事实上,

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_x^y |f'(u)| du.$$

由 $f' \in L^1$, 函数 f 在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 都满足 Cauchy 判别条件, 因而存在有限极限; 再由 $f \in L^1$, 两个极限只能都是 0。

证明. 固定 k . 对其余变量几乎处处固定, 并在 x_k 上分部积分; 边界项由 $f(x) \rightarrow 0$ 消失。再用 Fubini 定理对其余变量积分, 得到

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(\xi) = -i\xi_k \widehat{f}(\xi).$$

因此

$$\max_{1 \leq k \leq d} |\xi_k| |\widehat{f}(\xi)| \leq \max_{1 \leq k \leq d} \left| \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(\xi) \right|. \quad (15.6)$$

又有

$$|\xi| \leq \sqrt{d} \max_{1 \leq k \leq d} |\xi_k|.$$

右端各项由 Riemann–Lebesgue 定理在 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时趋于零, 所以得到所需的 $o(|\xi|^{-1})$ 估计。□

推论 15.3. 设 $f \in C^n(\mathbb{R}^d)$, $n \geq 1$. 若对所有满足 $|\alpha| \leq n$, $|\beta| \leq n-1$ 的多重指标 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, 都有

$$D^\alpha f \in L^1(\lambda_d), \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} D^\beta f(x) = 0,$$

则

$$|\widehat{f}(\xi)| = o\left(\frac{1}{|\xi|^n}\right) \quad (|\xi| \rightarrow +\infty).$$

证明。对阶数作递推：先把命题 15.3 用于所有 $n-1$ 阶偏导数，再逐阶向下，每一步使用估计 (15.6)，即可得到结论。□

上述结果显示出一种对偶：函数越光滑，其 Fourier 变换在无穷远处衰减得越快；反过来，函数自身衰减越快，其 Fourier 变换越光滑。这启发我们引入同时具有两类性质的函数空间。

定义 15.2 (Schwartz 空间)。定义实 Schwartz 空间

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \forall m \in \mathbb{N}, D^\alpha f(x) = O(|x|^{-m}) \text{ 当 } |x| \rightarrow \infty \right\}.$$

又定义复 Schwartz 空间

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} : \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\}.$$

推论 15.4。若 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ，则

$$\widehat{f} \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d).$$

校订注：原文把结论写成 $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ ，但原文刚把 $\mathcal{S}$ 定义为实值函数空间；一般实值 Schwartz 函数的 Fourier 变换可为复值，故正确的目标空间是 $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ 。

证明。任取 $m \geq 1$ 。由快速衰减性，可取常数 $C > 0$ ，使

$$|x|^m |f(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|^2)^d}.$$

又因 $|x| \geq |x_k|$ ，

$$(1 + |x|^2)^d \geq \prod_{k=1}^d (1 + x_k^2).$$

所以 Fubini–Tonelli 定理给出

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^m |f(x)| dx \leq C \prod_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}} \frac{dx_k}{1 + x_k^2} = C \pi^d < +\infty.$$

推论 15.2 因而说明 $\widehat{f} \in C^\infty$ 。另一方面， f 对任意阶数都满足推论 15.3 的假设，故

$$\widehat{f}(\xi) = O(|\xi|^{-n}) \quad \text{对每个 } n.$$

最后，由命题 15.2 反复求导，

$$D^\alpha \widehat{f} = i^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}.$$

函数 $x^\alpha f$ 仍属于 $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ ，对它重复上述衰减论证，便知 $\widehat{f}$ 的每一阶偏导数都快速衰减。□

例 (Gauss 函数)。 在 $\mathbb{R}^d$ 上令

$$\varphi_d(x) := e^{-|x|^2}.$$

显然 $\varphi_d \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 。由 Fubini 定理,

$$\widehat{\varphi_d}(\xi) = \prod_{k=1}^d \widehat{\varphi_1}(\xi_k).$$

命题 15.2(b) 与分部积分给出

$$\widehat{\varphi_1}'(\xi) = -\frac{\xi}{2} \widehat{\varphi_1}(\xi).$$

因此

$$\widehat{\varphi_1}(\xi) = \widehat{\varphi_1}(0) e^{-\xi^2/4} = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}.$$

最终得到

$$\widehat{\varphi_d}(\xi) = \pi^{d/2} e^{-|\xi|^2/4}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (15.7)$$

命题 15.4 (卷积公式)。

(a) 若 μ, ν 是有限非负测度, 则

$$\widehat{\mu * \nu} = \widehat{\mu} \widehat{\nu}.$$

(b) 若 $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$, 则

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}.$$

证明。 由测度卷积是 $\mu \otimes \nu$ 在加法映射下的像测度, 再用 Fubini–Lebesgue 定理,

$$\begin{aligned} \widehat{\mu * \nu}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x+y \rangle} (\mu \otimes \nu)(dx, dy) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} \mu(dx) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, y \rangle} \nu(dy) \right) \\ &= \widehat{\mu}(\xi) \widehat{\nu}(\xi). \end{aligned}$$

当 $f, g \geq 0$ 时, (b) 由 (a) 对密度测度应用即得; 一般情形可用卷积与复数乘法的双线性, 或直接重复上述 Fubini 计算。□

15.2 单射性与反演公式

本节首先证明 Fourier 变换的单射性。在概率论中, 这将允许我们只用一个函数刻画 $\mathbb{R}^d$ -值随机向量的分布。

定理 15.1 (Fourier 变换的单射性)。

(a) 映射 $\mu \mapsto \widehat{\mu}$ 在 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上所有有限非负测度组成的集合上是单射。

(b) 映射 $f \mapsto \widehat{f}$ 在 $L^1(\lambda_d)$ 上是单射。换言之, 若 $f, g \in L^1(\lambda_d)$, 则

$$\widehat{f} = \widehat{g} \implies f = g \quad \lambda_d\text{-几乎处处}.$$

证明需要下面两个引理。

引理 15.1.

(a) 设 $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ 、 $\theta > 0$ ，并令 $f_{\theta}(x) = f(x/\theta)$ 。则

$$\widehat{f_{\theta}}(\xi) = \theta^d \widehat{f}(\theta\xi).$$

(b) 对 $\sigma > 0$ ，定义

$$g_{\sigma}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sigma^d} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right).$$

则 g_{σ} 是中心为 0、协方差为 $\sigma^2 I_d$ 的 Gauss 概率密度，并且

$$\widehat{g_{\sigma}}(\xi) = \exp\left(-\frac{\sigma^2|\xi|^2}{2}\right). \quad (15.8)$$

证明。 (a) 在 (15.2) 中作伸缩变量替换 $x = \theta y$ 即得。 (b) 由 (a) 取 $\theta = \sqrt{2}\sigma$ ，再使用 Gauss 公式 (15.7)。 $\square$

引理 15.2. 设 μ 是有限非负测度。对 $\sigma > 0$ ，定义

$$(g_{\sigma} * \mu)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} g_{\sigma}(\xi - x) \mu(dx).$$

则对每个 $\xi \in \mathbb{R}^d$ ，

$$(g_{\sigma} * \mu)(\xi) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(y) e^{-i\langle \xi, y \rangle} e^{-\sigma^2|y|^2/2} dy. \quad (15.9)$$

若把 $\mu(dx)$ 与 $\widehat{\mu}$ 分别替换为 $f(x)dx$ 与 $\widehat{f}$ ，其中 $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ ，同一公式仍然成立。

证明。 由 Gauss 公式 (15.7) 及伸缩变换，

$$g_{\sigma}(z) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle z, y \rangle} e^{-\sigma^2|y|^2/2} dy.$$

把 $z = \xi - x$ 代入并对 $\mu(dx)$ 积分。由于

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\sigma^2|y|^2/2} dy \mu(dx) < +\infty,$$

Fubini–Lebesgue 定理允许交换积分次序，于是

$$(g_{\sigma} * \mu)(\xi) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \xi, y \rangle} e^{-\sigma^2|y|^2/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, y \rangle} \mu(dx) \right) dy,$$

这就是 (15.9)。函数情形同理。 $\square$

定理 15.1 的证明。 先证 (a)。若 $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$ ，则引理 15.2 给出

$$g_{\sigma} * \mu = g_{\sigma} * \nu, \quad \sigma > 0.$$

设 $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 有界且 Lipschitz。由 Fubini 定理和 $x = y + z$ ，

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x) (g_{\sigma} * \mu)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} g_{\sigma}(z) h(y + z) dz \mu(dy).$$

由于 g_σ 是概率密度,

$$\begin{aligned} \left| \int h(g_\sigma * \mu) d\lambda_d - \int h d\mu \right| &\leq [h]_{\text{Lip}} \mu(\mathbb{R}^d) \int_{\mathbb{R}^d} |z| g_\sigma(z) dz \\ &= \sigma [h]_{\text{Lip}} \mu(\mathbb{R}^d) \int_{\mathbb{R}^d} |u| g_1(u) du \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (15.10)$$

因此 $\int h d\mu = \int h d\nu$ 对所有有界 Lipschitz 函数成立。若 $F \subset \mathbb{R}^d$ 闭, 令

$$h_p(x) := (1 - p d(x, F))_+.$$

则 $h_p \downarrow \mathbf{1}_F$ 。控制收敛定理给出 $\mu(F) = \nu(F)$ 。有限测度在生成 Borel σ -代数的闭集 π -系统上一致, 故 $\mu = \nu$ 。

证明 (b)。令 $u = f - g$ 。若 $\hat{u} = 0$, 引理 15.2 的函数版本说明

$$g_\sigma * u = 0 \quad (\sigma > 0).$$

而 $(g_\sigma)_{\sigma>0}$ 是近似恒等族, 故定理 14.5 给出 $\|g_\sigma * u - u\|_1 \rightarrow 0$ 。于是 $u = 0$ 于 L^1 , 即 $f = g$ 几乎处处。□

推论 15.5。

- (a) 有限非负测度 μ 关于原点对称, 当且仅当 $\hat{\mu}$ 为实值函数。
- (b) 实值函数 $f \in L^1(\lambda_d)$ 几乎处处为偶函数, 当且仅当 $\hat{f}$ 为实值函数。若 f 连续, 则可删去“几乎处处”。

定理 15.2 (Fourier 反演)。

- (a) 设 μ 是有限非负测度, 且 $\hat{\mu} \in L^1(\lambda_d)$ 。则 $\mu \ll \lambda_d$, 其密度 φ 非负、有界且一致连续, 并由

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mu}(\xi) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d\xi = (2\pi)^{-d} \hat{\hat{\mu}}(-x) \quad (15.11a)$$

给出。

- (b) 若 $f, \hat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$, 则

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d\xi = (2\pi)^{-d} \hat{\hat{f}}(-x) \quad \lambda_d\text{-几乎处处}. \quad (15.11)$$

右端是有界、连续且在无穷远处趋于零的函数。因而, 在 d 维情形下, 若 f 在 x 连续, 则等式在 x 逐点成立; 当 $d = 1$ 时, 只要 f 在 x 右连续或左连续, 等式也在 x 成立。

校订注: 原文在一般 d 维陈述后直接使用“右连续或左连续”; 这两个概念只适用于一维。这里把一般情形写为在 x 连续, 并把原有的单侧连续结论明确限制在 $d = 1$ 。

证明。 (a) 在 (15.9) 中令 $\sigma \rightarrow 0$ 。由于 $\hat{\mu} \in L^1$, 控制收敛定理给出

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} (g_\sigma * \mu)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mu}(\xi) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d\xi =: \varphi(x). \quad (15.12)$$

命题 15.1 说明 φ 有界且一致连续。由 $\hat{\mu}(-\xi) = \overline{\hat{\mu}(\xi)}$ 可知 φ 为实值。

对 $h \in C_K(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, (15.9) 还给出与 σ 无关的界

$$|h(x)(g_\sigma * \mu)(x)| \leq (2\pi)^{-d} \|\hat{\mu}\|_1 |h(x)|.$$

因此可在 x 上应用控制收敛定理。再结合 (15.10) (先对 Lipschitz 紧支撑函数证明, 再用定理 9.10 的一致稠密性推广), 得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} h \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \varphi(x) \, dx. \quad (15.13)$$

若某点有 $\varphi(x_0) < 0$, 由连续性可在其邻域内取非零的 $h \in C_K$ 、 $h \geq 0$, 使右端为负, 与左端非负矛盾。因此 $\varphi \geq 0$ 。Riesz 表示的唯一性于是给出 $\mu = \varphi \lambda_d$ 。

(b) 令

$$\psi(x) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{-i\langle x, \xi \rangle} \, d\xi.$$

引理 15.2 的函数版本与控制收敛定理说明 $g_\sigma * f(x) \rightarrow \psi(x)$ 对每个 x 成立。另一方面, 定理 14.5 给出 $g_\sigma * f \rightarrow f$ 于 L^1 , 故可取子列几乎处处收敛于 f 。于是 $f = \psi$ 几乎处处。

函数 ψ 连续, 而它与 f 相等的满测集在 $\mathbb{R}^d$ 中稠密。若 f 在 x 连续, 从该稠密集取趋于 x 的点列即可得到 $f(x) = \psi(x)$ 。当 $d = 1$ 且 f 只在一侧连续时, 从相应一侧选取点列, 同样得到结论。□

例。 设 $f(x) = 1/(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$ 。则

$$\widehat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

事实上, 直接计算

$$\widehat{e^{-|\cdot|}}(\xi) = \int_{-\infty}^0 e^{(1+i\xi)x} \, dx + \int_0^{+\infty} e^{(-1+i\xi)x} \, dx = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

函数 $2/(1+\xi^2)$ 可积, Fourier 反演公式给出

$$e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{2}{1+\xi^2} \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \frac{2}{1+\xi^2} \, d\xi,$$

从而得到所述公式。

校订注：原文在这个一维例子的结论中误写 “ $\xi \in \mathbb{R}^d$ ”; 这里改为 $\xi \in \mathbb{R}$ 。

推论 15.6。 对每个 $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$,

$$\widehat{\widehat{f}} = (2\pi)^d \check{f}.$$

因此 Fourier 算子 $\mathcal{F}: f \mapsto \widehat{f}$ 满足

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}_{\mathbb{C}}) = \mathcal{S}_{\mathbb{C}}, \quad \mathcal{F}^{-1}g = (2\pi)^{-d} \check{g}.$$

校订注：原文再次把空间写成只含实值函数的 $\mathcal{S}$ 。为使 Fourier 算子对该空间封闭, 正确空间应为 $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ 。

下面给出一维 Fourier 变换的局部反演定理。若相应极限存在, 记 $f(x+)$ 、 $f(x-)$ 分别为 f 在 x 的右极限与左极限。

定理 15.3 (局部 Fourier 反演)。 设 $f \in L^1(\lambda_1)$ 、 $x \in \mathbb{R}$ 。假设 $f(x+)$ 、 $f(x-)$ 都存在, 并且

函数

$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - (f(x+) + f(x-))}{t} \quad (15.15)$$

在 0 的某个邻域内可积。则

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^M \widehat{f}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi. \quad (15.16)$$

校订注：原文把这个明确的一维定理写成 $f \in L^1(\lambda_d)$ ；这里改为 $L^1(\lambda_1)$ 。

注。这与 Fourier 级数的经典局部收敛定理相对应。条件 (15.15) 在 f 于 x 两侧分别局部 Lipschitz 连续时成立；更一般地，两侧分别局部 Hölder 连续也足够。这里不要求 $\widehat{f}$ 可积。

引理 15.3。 设 $F \in L^1(\mathbb{R}_+, \lambda_1)$ 为实值函数，并且对某个 $\eta > 0$,

$$t \mapsto \frac{F(t) - F(0+)}{t} \mathbf{1}_{(0,\eta]}(t) \text{ 属于 } L^1(\mathbb{R}_+, \lambda_1).$$

则

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} F(t) \frac{\sin(Mt)}{t} dt = \frac{\pi}{2} F(0+).$$

证明。由 Dirichlet 积分，

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(Mt)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

因此

$$\int_0^\infty F(t) \frac{\sin(Mt)}{t} dt - \frac{\pi}{2} F(0+) = \int_0^\infty \frac{F(t) - F(0+)}{t} \sin(Mt) dt.$$

给定 $\varepsilon > 0$ ，先取 $0 < a \leq \eta$ ，使

$$\int_0^a \frac{|F(t) - F(0+)|}{t} dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

在 $(a, +\infty)$ 上令

$$G_a(t) := \frac{F(t)}{t} \mathbf{1}_{(a, +\infty)}(t).$$

因为 $|G_a| \leq a^{-1}|F|$ ，故 $G_a \in L^1$ 。Riemann–Lebesgue 定理给出

$$\int_a^\infty G_a(t) \sin(Mt) dt \rightarrow 0.$$

同时，由 $\int_0^\infty \sin u/u du$ 的收敛性，

$$F(0+) \int_a^\infty \frac{\sin(Mt)}{t} dt = F(0+) \int_{Ma}^\infty \frac{\sin u}{u} du \rightarrow 0.$$

三项合并即得结论。 □

定理 15.3 的证明。 对 $M > 0$, Fubini–Lebesgue 定理给出

$$\begin{aligned}\int_{-M}^M e^{-ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-M}^M e^{i(u-x)\xi} d\xi \right) f(u) du \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(M(u-x))}{u-x} f(u) du \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{\sin(Mv)}{v} (f(x+v) + f(x-v)) dv.\end{aligned}$$

令

$$F(v) := \frac{f(x+v) + f(x-v)}{2}, \quad v > 0.$$

则 $F \in L^1(\mathbb{R}_+)$, 且 (15.15) 正是引理 15.3 所需的局部可积条件; 此外

$$F(0+) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

应用引理 15.3, 再除以 2π , 便得到 (15.16)。 □

15.3 Fourier–Plancherel 变换

本节把可积函数的 Fourier 变换延拓到平方可积函数空间 $L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ 。严格地说, “延拓” 一词略有滥用, 因为 $L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ 并不包含于 $L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ 。

引理 15.4。 若 $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$, 则 $\widehat{f}, \widehat{g} \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, 并且

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$

证明。 被积函数的绝对值在乘积空间上可积, 故 Fubini–Lebesgue 定理给出

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} f(x) dx \right) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} g(\xi) d\xi \right) dx.$$

□

若 $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$, 对引理 15.4 取 $f = \varphi$, $g = \overline{\widehat{\psi}}$, 并使用推论 15.6, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi} \overline{\widehat{\psi}} d\lambda_d = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \overline{\psi} d\lambda_d.$$

特别地,

$$\|\widehat{\varphi}\|_2 = (2\pi)^{d/2} \|\varphi\|_2.$$

由于 $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ 包含 $C_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, 定理 14.8(b) 说明它在 $L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ 中稠密。因此 $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ 唯一延拓为 $L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ 上的连续线性算子 Φ , 满足

$$\|\Phi(f)\|_2 = (2\pi)^{d/2} \|f\|_2.$$

定义 15.3。 上述算子 Φ 称为 *Fourier–Plancherel 变换*。

校订注：原文直接称未归一化的 Φ 为 “等距映射”, 但它把范数放大 $(2\pi)^{d/2}$ 倍。真正的等距映射是 $(2\pi)^{-d/2}\Phi$, 故这里把 Φ 准确称为常数倍等距映射。

定理 15.4 (Plancherel 定理)。Fourier-Plancherel 变换具有下列性质：

(a) 对每个 $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$,

$$\Phi(\Phi(f)) = (2\pi)^d \check{f}.$$

(b) 对所有 $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(f) \overline{\Phi(g)} d\lambda_d = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f \bar{g} d\lambda_d.$$

(c) 若 $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$, 则

$$\Phi(f) = \widehat{f} \quad \lambda_d\text{-几乎处处}.$$

证明。(a) 在 $S_{\mathbb{C}}$ 上由推论 15.6 成立。等式两端都是 L^2 上的连续算子, 而 $S_{\mathbb{C}}$ 稠密, 故等式推广到整个 $L^2_{\mathbb{C}}$ 。

(b) 由 (15.17) 在 $S_{\mathbb{C}}$ 上成立, 再以稠密性推广; 也可由复 Hilbert 空间范数的极化恒等式直接得到。

(c) 取由某个 $\alpha \in C_K^{\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 构造的非负磨光核族 (ρ_n) , 并令

$$f_n := \rho_n * (f \mathbf{1}_{[-n, n]^d}).$$

由定理 14.7, $f_n \in C_K^{\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ 。对 $p = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_p &\leq \left\| \rho_n * (f \mathbf{1}_{[-n, n]^d}) - \rho_n * f \right\|_p + \|\rho_n * f - f\|_p \\ &\leq \|\rho_n\|_1 \left\| f \mathbf{1}_{([-n, n]^d)^c} \right\|_p + \|\rho_n * f - f\|_p \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

这里使用了定理 14.4、定理 14.5 和控制收敛定理。在 f_n 上 $\Phi(f_n) = \widehat{f_n}$ 。又

$$\Phi(f_n) \rightarrow \Phi(f) \quad \text{于 } L^2, \quad \widehat{f_n} \rightarrow \widehat{f} \quad \text{一致}.$$

从第一种收敛取几乎处处收敛的子列, 再与第二种收敛比较, 得到 $\Phi(f) = \widehat{f}$ 几乎处处。

校订注：原文把 f_n 的光滑性误引作“定理 14.8”；真正给出卷积可微性的是定理 14.7, 定理 14.8 是稠密性定理。

□

命题 15.5。对所有 $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$, 卷积 $\Phi(f) * \Phi(g)$ 处处存在, 并满足

$$\Phi(f) * \Phi(g) = (2\pi)^d \widehat{fg}.$$

右端中的 $fg \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$, 故使用通常的 L^1 -Fourier 变换。

证明。先设 $f, g \in S_{\mathbb{C}}$ 。由命题 15.4 与推论 15.6,

$$\widehat{\widehat{f} * \widehat{g}} = \widehat{\widehat{f} \widehat{g}} = (2\pi)^{2d} \check{f} \check{g} = (2\pi)^{2d} (fg).$$

对两端使用 Fourier 反演, 便得到

$$\widehat{f} * \widehat{g} = (2\pi)^d \widehat{fg}.$$

一般地，取 Schwartz 函数列 $f_n \rightarrow f$ 、 $g_n \rightarrow g$ 于 L^2 。由定理 14.2，

$$\|\Phi(f_n) * \Phi(g_n) - \Phi(f) * \Phi(g)\|_\infty \rightarrow 0,$$

而 Cauchy-Schwarz 不等式给出 $f_n g_n \rightarrow fg$ 于 L^1 ，故

$$\|\widehat{f_n g_n} - \widehat{fg}\|_\infty \rightarrow 0.$$

令 $n \rightarrow \infty$ 即得结论。 □

记号。 对 L^2 函数，也常把 $\Phi(f)$ 记为 $\widehat{f}$ 。这一记号不会造成歧义，因为定理 15.4(c) 说明它与 L^1 -Fourier 变换在交集上一致。此外，对任意 $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ ，

$$\Phi(f) = L^2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\xi \mapsto \int_{[-n,n]^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} f(x) dx \right].$$

15.4 Laplace 变换

本节以比 Fourier 变换更简略的方式研究 Laplace 变换，尽量少用复分析，而主要采用 Lebesgue 积分方法。更深入的应用见本章习题 15.28–15.40。

15.4.1 定义与初步例子

定义 15.4。

(a) 设 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ 局部可积。定义

$$\mathcal{L}(f)(z) := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt, \quad z \in D_{\mathcal{L}}(f), \quad (15.17)$$

其中

$$D_{\mathcal{L}}(f) := \{z \in \mathbb{C} : t \mapsto f(t) e^{-zt} \in L^1(\mathbb{R}_+)\}.$$

(b) 设 μ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的非负 Borel 测度。定义

$$\mathcal{L}(\mu)(z) := \int_0^{+\infty} e^{-zt} \mu(dt), \quad z \in D_{\mathcal{L}}(\mu), \quad (15.18)$$

其中

$$D_{\mathcal{L}}(\mu) := \{z \in \mathbb{C} : t \mapsto e^{-zt} \in L^1(\mathbb{R}_+, \mu)\}.$$

校订注： 原文在测度情形的定义域中误留了函数情形的因子 $f(t)$ ；这里删去该未定义函数。

(c) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 局部可积。定义双边 Laplace 变换

$$\mathcal{L}_b(f)(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt, \quad z \in D_{\mathcal{L}_b}(f), \quad (15.19)$$

其中

$$D_{\mathcal{L}_b}(f) := \{z \in \mathbb{C} : t \mapsto f(t) e^{-zt} \in L^1(\mathbb{R})\}.$$

若 $z_0 = x_0 + iy_0 \in D_{\mathcal{L}}(f)$, 则

$$|f(t)e^{-(x+iy)t}| = |f(t)|e^{-xt} \leq |f(t)|e^{-x_0t}$$

对每个 $x \geq x_0$ 成立。因此令

$$x_f := \inf\{x \in \mathbb{R} : t \mapsto f(t)e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}_+)\}. \quad (15.20)$$

若 $D_{\mathcal{L}}(f) \neq \emptyset$, 则实数集合

$$I_f := \{x \in \mathbb{R} : f(t)e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}_+)\}$$

等于 $(x_f, +\infty)$ 或 $[x_f, +\infty)$, 从而

$$D_{\mathcal{L}}(f) = \{x + iy : x \in I_f, y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathring{D}_{\mathcal{L}}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > x_f\}. \quad (15.21)$$

校订注：原文先说明端点 x_f 可能属于定义域，随后却把定义域一律写成开半平面，前后矛盾。这里区分端点是否可积；其内部始终是 $\operatorname{Re} z > x_f$ 。

例。

1. $f(t) = e^{t^2}$ 没有 Laplace 变换, 即 $D_{\mathcal{L}}(f) = \emptyset$ 。

2. 对 $n \in \mathbb{N}$, 反复分部积分得到

$$\mathcal{L}(t^n)(z) = \frac{n!}{z^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

且 $x_{t^n} = 0$ 。右端可亚纯延拓到 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 。

3. 对 $a \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}(e^{at})(z) = \frac{1}{z-a}, \quad \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a,$$

且 $x_{e^{at}} = \operatorname{Re} a$ 。

4. 由 Euler 公式,

$$\mathcal{L}(\sin t)(z) = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad \mathcal{L}(\cos t)(z) = \frac{z}{z^2 + 1}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

15.4.2 Laplace 变换的性质

命题 15.6。 设 f, g 在 $\mathbb{R}_+$ 上局部可积。则:

(a) $\mathcal{L}(f)$ 在 $\mathring{D}_{\mathcal{L}}(f)$ 上全纯, 而且对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$(\mathcal{L}(f))^{(n)} = \mathcal{L}((-t)^n f(t)). \quad (15.22)$$

(b) 若 $D_{\mathcal{L}}(f) \neq \emptyset$, 则

$$\mathcal{L}(f)(z) \rightarrow 0 \quad (\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty).$$

(c) 对每个 $a \geq 0$ 与 $z \in D_{\mathcal{L}}(f)$,

$$e^{-az} \mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(f(t-a)\mathbf{1}_{[a,+\infty)}(t))(z).$$

(d) 在 $\mathbb{R}_+$ 上定义

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-s)g(s) \, ds, \quad t \geq 0. \quad (15.23)$$

则在 $D_{\mathcal{L}}(f) \cap D_{\mathcal{L}}(g)$ 上,

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g). \quad (15.24)$$

校订注：原文 (c) 允许任意 $a \in \mathbb{R}$, 但 f 只定义在 $\mathbb{R}_+$, 且所写延迟公式在 $a < 0$ 时一般不成立; 故改为 $a \geq 0$.

证明。(a) 来自全纯含参积分的逐阶求导; 在定义域内部可留出一个正的实部余量, 从而用可积指数权作统一控制。(b) 取 $x_0 > x_f$ 。当 $\operatorname{Re} z \geq x_0$ 时,

$$|f(t)e^{-zt}| \leq |f(t)|e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}_+),$$

控制收敛定理给出结论。(c) 作变量替换 $u = t - a$ 。(d) 对三角区域 $\{(s, t) : 0 \leq s \leq t\}$ 使用 Fubini–Lebesgue 定理, 再作 $u = t - s$ 即得。□

例。由 (15.22),

$$\mathcal{L}(t)(z) = -(\mathcal{L}(1))'(z) = z^{-2}.$$

因此当 $\operatorname{Re} z > 1$ 时,

$$\mathcal{L}(e^t - t - 1)(z) = \mathcal{L}(t * e^t)(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}.$$

命题 15.7 (导数的 Laplace 变换)。设 $n \geq 1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 可导 n 次, 且 $f^{(n)}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上局部可积。假设

$$\Delta_f^n := \bigcap_{k=0}^n \mathring{D}_{\mathcal{L}}(f^{(k)}) \neq \emptyset.$$

则对 $z \in \Delta_f^n$,

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} f^{(k)}(0). \quad (15.25)$$

证明。对 n 作归纳。基本情形由分部积分得到。若公式对 n 成立, 则对 $z \in \Delta_f^{n+1}$,

$$\mathcal{L}(f^{(n+1)})(z) = \left[f^{(n)}(t)e^{-zt} \right]_0^{+\infty} + z\mathcal{L}(f^{(n)})(z).$$

这里无穷远处的边界项为零。事实上,

$$\frac{d}{dt}(f^{(n)}(t)e^{-zt}) = f^{(n+1)}(t)e^{-zt} - zf^{(n)}(t)e^{-zt}$$

可积, 所以 $f^{(n)}(t)e^{-zt}$ 在 $+\infty$ 有有限极限; 该函数本身又可积, 故极限只能为 0。代入归纳假设, 得到

$$\mathcal{L}(f^{(n+1)})(z) = z^{n+1}\mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^n z^{n-k} f^{(k)}(0).$$

□

用 Laplace 变换解常系数微分方程。设 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$f''(t) + f(t) = e^{-t}, \quad f(0) = \alpha, \quad f'(0) = \beta.$$

令 $F = \mathcal{L}(f)$ 。由 (15.25)，在 $\operatorname{Re} z$ 充分大时

$$(z^2 + 1)F(z) - \alpha z - \beta = \frac{1}{z + 1}.$$

作部分分式分解并使用 Laplace 变换的单射性，得到

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\cos t + \left(\beta + \frac{1}{2}\right)\sin t.$$

用 Laplace 变换解变系数微分方程。 设

$$f''(t) + tf'(t) - 2f(t) = 4, \quad f(0) = -1, \quad f'(0) = 0.$$

由 (15.22) 与 (15.25)， $F = \mathcal{L}(f)$ 满足

$$F'(z) + \left(\frac{3}{z} - z\right)F(z) = -\frac{4}{z^2} + 1.$$

在 $z = x > 0$ 上解此一阶线性方程，得到

$$F(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{c}{x^3}e^{x^2/2}.$$

命题 15.6(b) 强迫 $c = 0$ ，故由 Laplace 变换的单射性，

$$f(t) = t^2 - 1.$$

命题 15.8 (终值 Abel 型结论)。 设 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ 局部可积，并在 $+\infty$ 有有限极限 $\ell \in \mathbb{C}$ 。则 $D_{\mathcal{L}}(f)$ 包含所有正实数，并且

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t). \quad (15.26)$$

校订注：原文误写成“ f 的 Fourier 变换定义域非空”；本命题讨论的是 Laplace 变换。事实上由局部可积和无穷远处有有限极限，正半轴已自动包含在 Laplace 定义域中。

证明。 固定 $a > 0$ 。对每个 $x > 0$ ，

$$\begin{aligned} |x\mathcal{L}(f)(x) - \ell| &\leq x \int_0^a |f(t) - \ell| e^{-xt} dt + \sup_{t \geq a} |f(t) - \ell| \int_a^\infty x e^{-xt} dt \\ &\leq x \int_0^a |f(t) - \ell| dt + \sup_{t \geq a} |f(t) - \ell|. \end{aligned}$$

先固定足够大的 a ，使第二项任意小，再令 $x \rightarrow 0+$ ，第一项趋于零。 $\square$

15.4.3 Laplace 反演

Laplace 反演公式可由 Fourier 反演直接推出。

定理 15.5 (Laplace 反演; Bromwich–Mellin 公式)。设 f 在 $\mathbb{R}_+$ 上局部可积, 并把它在 $\mathbb{R}_-^*$ 上延拓为 0。记 $F = \mathcal{L}(f)$ 。设 $x > x_f$, 且

$$y \mapsto F(x + 2\pi iy)$$

属于 $L^1(\mathbb{R})$ 。则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{\operatorname{Re} z = x\}} F(z) e^{zt} dz \quad \text{对 } \lambda_1\text{-几乎处处的 } t \in \mathbb{R}_+. \quad (15.27)$$

积分路径沿竖直直线 $\operatorname{Re} z = x$ 自下向上。若 f 在 t 连续, 则公式在该点逐点成立。

证明。令 $g(t) = f(t)e^{-xt}$, 并在负半轴上取 0。对 $y \in \mathbb{R}$,

$$F(x + 2\pi iy) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi i y t} dt = \widehat{g}(-2\pi y).$$

由假设, $\widehat{g} \in L^1$ 。对 g 应用定理 15.2 的 Fourier 反演公式, 作变量替换 $z = x + 2\pi iy$, 得到

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{\mathbb{R}} F(x + 2\pi iy) e^{(x+2\pi iy)t} dy \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\{\operatorname{Re} z = x\}} F(z) e^{zt} dz. \end{aligned}$$

几乎处处结论与连续点结论都由 Fourier 反演定理得到。 $\square$

推论 15.7 (Laplace 变换的单射性)。设 f 在 $\mathbb{R}_+$ 上局部可积, 并在负半轴上延拓为 0。若 $\mathcal{L}(f)$ 在其定义域内部所含的某个非退化线段上恒为零, 则

$$f = 0 \quad \lambda_1\text{-几乎处处于 } \mathbb{R}_+.$$

校订注: 原文只说“在 $\mathbb{C}$ 中某条正长度线段上为零”, 却未要求线段位于全纯定义域内部; 只有补上这一条件, 复分析恒等定理才可应用。

证明。 $\mathcal{L}(f)$ 在连通开半平面 $\mathring{D}_{\mathcal{L}}(f)$ 上全纯。其零点集含有位于该开集内的非退化线段, 因而有内点聚点。由全纯函数恒等定理,

$$\mathcal{L}(f) \equiv 0 \quad \text{于 } \mathring{D}_{\mathcal{L}}(f).$$

任取 $x > x_f$, 函数 $y \mapsto \mathcal{L}(f)(x + 2\pi iy)$ 恒为零, 当然可积。定理 15.5 遂给出 $f = 0$ 几乎处处。 $\square$

定理 15.6 (Bernstein–Widder 定理)。设 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 完全单调, 即

$$f \in C^0(\mathbb{R}_+) \cap C^\infty(\mathbb{R}_+^*), \quad (-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}, x > 0). \quad (15.28)$$

则存在一个有界非减函数 $\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, 把它在 $\mathbb{R}_-^*$ 上延拓为 0, 并满足

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = f(0),$$

使 f 是 Stieltjes 测度 $d\alpha$ 的 Laplace 变换：

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt} d\alpha(t), \quad x \geq 0.$$

约定

$$\mathcal{L}(d\alpha)(z) := z\mathcal{L}(\alpha)(z) - \alpha(0-), \quad z \in \mathring{D}_{\mathcal{L}}(\alpha). \quad (15.29)$$

校订注：原文在完全单调条件中漏写了量词 $n \in \mathbb{N}$ ；该不等式必须对所有阶导数成立。

注。定理证明见习题 15.39。按 (15.29) 的约定，Heaviside 函数 $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ 的 Stieltjes 导数是 δ_0 ，并且

$$\mathcal{L}(\delta_0) = 1.$$

因此 δ_0 是 $\mathbb{R}_+$ 上测度卷积的单位元。

15.4.4 概率论中的两个例子

例 1 (Gamma 分布)。当 $a, b > 0$ 时，Gamma 分布 $\gamma(a, b)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上的密度为

$$f_{a,b}(t) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t/b}, \quad \Gamma(a) = \int_0^\infty s^{a-1} e^{-s} ds.$$

其 Laplace 变换为

$$\mathcal{L}(f_{a,b})(z) = \frac{1}{(1+bz)^a}, \quad \operatorname{Re} z > -\frac{1}{b}.$$

对实数 $x > -1/b$ ，作变量替换 $s = (x + 1/b)t$ 即得该公式；一般复数 z 的结论由全纯函数恒等定理推广。

例 2 (Gauss 分布)。均值为 m 、方差为 σ^2 的 Gauss 分布密度为

$$g_{m,\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

其双边 Laplace 变换在整个复平面上有定义，并满足

$$\mathcal{L}_b(g_{m,\sigma})(z) = \exp\left(-mz + \frac{\sigma^2 z^2}{2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

对实数 x ，配方得到

$$-xt - \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} = -mx + \frac{\sigma^2 x^2}{2} - \frac{(t + \sigma^2 x - m)^2}{2\sigma^2},$$

积分后即得公式；复数情形再由全纯函数恒等定理推出。

15.5 习题

习题 15.1. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 且 $f > 0$ 几乎处处. 证明:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad |\widehat{f}(\xi)| < \widehat{f}(0).$$

习题 15.2. 设 μ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的有限非负测度. 证明下列两条等价:

- (i) $\exists \xi \in \mathbb{R}^*, \quad \widehat{\mu}(\xi) = \mu(\mathbb{R}),$
 (ii) $\exists \xi \in \mathbb{R}^*, \quad \mu\left(\left(\frac{2\pi}{\xi}\mathbb{Z}\right)^c\right) = 0.$

更深入的讨论见习题 15.18.

习题 15.3. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 中 Lebesgue 测度有限的 Borel 集, 并且

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_E e^{ix/n} dx = 0.$$

证明 E 是零测集.

校订注: 原文把 E 写成 $\mathbb{R}^d$ 的 Borel 集, 但积分中的 x 、指数 $e^{ix/n}$ 和后续结论均为一维写法; 据题意统一改为 $E \subset \mathbb{R}$.

习题 15.4. 证明: 存在唯一一个 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 它在 $\mathbb{R}$ 上二次可微并满足

$$f''(x) - f(x) = \left(x^2 - \frac{3}{4}\right)e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

对该微分方程作 Fourier 变换以求出 f .

习题 15.5. 定义

$$f(x) := \frac{1}{x^2 \log|x|} \mathbf{1}_{\{|x|>2\}}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) 证明 $\int_{\mathbb{R}} |x|f(x) dx = +\infty$.
 (b) 证明 f 的 Fourier 变换在 0 点可微.

习题 15.6. 给出一个函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus L^1(\mathbb{R}^d)$, 使它的 Fourier-Plancherel 变换属于 $L^1(\mathbb{R}^d)$.

习题 15.7. 对 $a > 0$, 定义

$$f_a(t) := \frac{a}{\pi(t^2 + a^2)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

证明对任意 $a, b > 0$, 均有 $f_a * f_b = f_{a+b}$.

习题 15.8. 考虑下列极限 (只要它存在):

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n \frac{\sin t}{t} e^{ixt} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) 证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上有定义; 在 $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ 上有

$$f = f(0)\mathbf{1}_{(-1,1)},$$

并且 $f(\pm 1) = f(0)/2$ 。

(b) 利用 Plancherel 定理证明 $f = \pi\mathbf{1}_{(-1,1)}$ 几乎处处, 并由此求出 f 在 $\mathbb{R}$ 每一点的值。

习题 15.9. 对 $n \in \mathbb{N}$ 、 $n \geq 2$, 定义

$$I_n := \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^n t}{t^n} dt.$$

(a) 证明 $0 < I_n \leq I_2 = \pi$ 。可以考虑

$$f_n := (\mathbf{1}_{[-1/2, 1/2]})^{*n},$$

即 $\mathbf{1}_{[-1/2, 1/2]}$ 的 n 次卷积。

(b) 证明: 对所有满足 $n = p + q$ 的 $n, p, q \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n^2 \leq I_{2p} I_{2q}.$$

习题 15.10. 设 $f \in C_K^1(\mathbb{R})$ 。利用 Plancherel 定理证明 $\hat{f}$ 与 $t \mapsto t\hat{f}(t)$ 都属于 $L^2(\mathbb{R})$, 继而证明 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ 。由此说明 f 是某个 $L^1(\mathbb{R})$ 函数的 Fourier 变换。

习题 15.11.

(a) 证明: $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 当且仅当存在 $g, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$, 使 $f = gh$ 几乎处处。

(b) 由此证明: φ 是某个 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 函数的 Fourier 变换, 当且仅当存在 $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, 使 $\varphi = \phi * \psi$ 几乎处处。

(c) 证明集合

$$\{f \in L^1(\mathbb{R}^d) : \hat{f} \text{ 的支集紧}\}$$

在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中稠密。

习题 15.12. 令

$$\varphi(x) := e^{-|x|^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

令 $\phi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ 为偶函数, 并置

$$f := \varphi * (\hat{\phi})^2.$$

(a) 用 φ 与 ϕ 显式计算 $\hat{f}$ 。

(b) 由此证明: 存在一个在 $\mathbb{R}^d$ 上严格为正的函数, 其 Fourier 变换属于 $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ 。

本题由作者在法国雷恩国立应用科学学院的同事 D. Guibourg 提供。

习题 15.13. 设 $f \in C_K(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 。证明 $\hat{f}$ 可自然延拓为 $\mathbb{C}$ 上的整函数。由此证明：除非 $f \equiv 0$ ，否则 f 与 $\hat{f}$ 不可能同时具有紧支集。

习题 15.14.

(a) 在配备通常 L^2 Hilbert 范数的 $L^2_{\mathbb{C}}([-1, 1], \lambda)$ 中，证明函数族

$$\left(\frac{e^{in\pi(\cdot)}}{\sqrt{2}} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

是正交归一族。

(b) 例如利用 Stone–Weierstrass 定理证明：上述函数族实际上是 $L^2_{\mathbb{C}}([-1, 1], \lambda)$ 的 Hilbert 正交归一基。

(c) 设 $f \in L^1(\mathbb{R}, \lambda)$ 。若 $\text{supp}(f) \subset [-1, 1]$ ，并且对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都有 $\hat{f}(n\pi) = 0$ ，证明 $f = 0$ 几乎处处。

(d) 对承载于 $[-1, 1]$ 的 $\mathbb{R}$ 上有限非负测度的 Fourier 变换，证明类似结论。

(e) 把以上结论推广到多维情形，即 $\mathbb{R}^d$ 上的函数与测度。

习题 15.15. 定义

$$\varphi(t) := (1 - |t|)\mathbf{1}_{\{|t| \leq 1\}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) 证明

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{2(1 - \cos \xi)}{\xi^2} \quad (\xi \in \mathbb{R}^*), \quad \hat{\varphi}(0) = 1.$$

(b) 由此证明，按通常在 $\xi = 0$ 处的约定，

$$\mu(d\xi) = \frac{1 - \cos \xi}{\pi \xi^2} d\xi$$

定义了一个概率测度；并求它的 Fourier 变换。

(c) 在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上定义测度 ν ：

$$\begin{cases} \nu(\left(\{0\} \cup \{(2n-1)\pi : n \in \mathbb{Z}\}\right)^c) = 0, \\ \nu(\{0\}) = \frac{1}{2}, \quad \nu(\{n\pi\}) = \frac{2}{n^2\pi^2} \quad (n \in \mathbb{Z} \text{ 为奇数}). \end{cases}$$

把 $\hat{\nu}$ 写成级数并计算。

(d) 计算函数 $t \mapsto \hat{\nu}(t)\mathbf{1}_{\{|t| \leq 1\}}$ 的 Fourier 变换。由此证明 $\hat{\mu}$ 与 $\hat{\nu}$ 在 $[-1, 1]$ 上相同（可使用习题 15.14 的结论）。

本题取自 J. Stoyanov 的专著 *Counterexamples in Probability* 第 8.2 节。

习题 15.16 (Poisson 求和公式). 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$ ，并且存在常数 $C \geq 1$ ，使

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2|f(x)| \leq C,$$

以及

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| \leq 1 \implies |f(x) - f(y)| \leq C \frac{|x - y|}{1 + x^2 + y^2}.$$

(a) 对 $x \in \mathbb{R}$, 令

$$F(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi k).$$

证明 F 在 $\mathbb{R}$ 上连续且以 2π 为周期。

(b) 计算 F 的 Fourier 系数

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (15.30)$$

(c) 推出 Poisson 求和公式

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2\pi k).$$

(d) **Basel 问题**。把 (c) 用于 $f(x) = e^{-a|x|}$, 其中 $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > 0$ 。推出

$$\forall a \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} a > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2a} \left(\coth(\pi a) - \frac{1}{\pi a} \right),$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(e) 证明对每个 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\pi \cot(\pi \alpha) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

习题 15.17 (卷积的不动点)。

(a) 求出所有满足 $f * f = f$ 的 $f \in L^1(\mathbb{R}, \lambda)$ 。

(b) 当

$$f \in \Phi(L^1(\mathbb{R}, \lambda)) \cap L^2(\mathbb{R}, \lambda)$$

时, 求解方程 $f * f = f$ 。

习题 15.18。设 μ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的有限非负测度, 其 Fourier 变换定义为

$$\hat{\mu}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \mu(dx), \quad u \in \mathbb{R}.$$

(a) 假设存在 $u_0 \in \mathbb{R}^*$, 使 $\hat{\mu}(u_0) = \mu(\mathbb{R})$ 。证明

$$\int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(u_0 x)) \mu(dx) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \sin(u_0 x) \mu(dx) = 0.$$

由此证明: 存在一个应明确求出的可数集 D , 使 $\mu(\mathbb{R} \setminus D) = 0$; 并证明 $\hat{\mu}$ 是周期函数。

(b) 证明 $\hat{\mu}$ 连续。由此证明: 若 $\mu \neq \mu(\mathbb{R})\delta_0$, 则 $\hat{\mu}$ 存在最小正周期 $T > 0$ 。

(c) 现在假设存在 $u_0 \in \mathbb{R}^*$, 使 $|\hat{\mu}(u_0)| = \mu(\mathbb{R})$ 。证明: 存在一个应明确求出的可数集 D , 使 $\mu(\mathbb{R} \setminus D) = 0$ 。

(d) 设 $f \in L^1_{\mathbb{R}^+}(\lambda)$, 且 $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \neq 0$ 。证明

$$\forall u \in \mathbb{R}^*, \quad \left| \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x) \lambda(dx) \right| < \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

习题 15.19 (Berry–Esseen 不等式与 Paul Lévy 定理)。 设 μ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的有限非负测度。

(a) 证明对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\mu(\{|x| \geq 2/\varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [\mu(\mathbb{R}) - \operatorname{Re}(\widehat{\mu}(\xi))] \, d\xi.$$

(b) 现设 $(\mu_n)_{n \geq 1}$ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的有限非负测度列, 并且 $\widehat{\mu}_n$ 简单收敛于 χ 。证明

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\{|x| \geq 2/\varepsilon\}) \leq 2 \sup_{|\xi| \leq \varepsilon} |\chi(\xi) - \chi(0)|.$$

再证明: 若 χ 在 0 处连续, 则 $(\mu_n)_{n \geq 1}$ 是紧的, 即

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\{|x| \geq A\}) \right) = 0.$$

本题后续允许使用 Prokhorov 定理: 若 $(\mu_n)_{n \geq 1}$ 是紧测度列, 则它关于弱收敛 (亦称窄收敛) 拓扑是序列相对紧的。换言之, 从 (μ_n) 的任意子列 $(\mu_{\varphi(n)})$ 中, 都能抽出子子列 $\nu_n = \mu_{\varphi \circ \psi(n)}$, 使它弱收敛于某个有限非负测度 ν , 即

$$\forall h \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h \, d\nu_n = \int_{\mathbb{R}} h \, d\nu.$$

(c) 证明: 若 χ 在 0 处连续, 则 χ 是某个有限非负测度的 Fourier 变换。

习题 15.20 (Fourier 变换的非满射性)。 取 $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$, 使

$$\operatorname{supp}(\rho) \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \rho(0) = 2\pi,$$

并定义

$$g(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \rho(x+n), \quad c_n := \frac{\operatorname{sign}(n)}{2i \log |n|} \mathbf{1}_{\{|n| \geq 2\}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) 证明 $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 且

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

(b) 假设存在 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 使 $g = \widehat{f}$ 。证明级数

$$F(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi k)$$

在几乎处处有定义, $F(x + 2\pi) = F(x)$ 几乎处处, 并且 $F \in L^1([-\pi, \pi])$ 。

(c) 计算 F 的 Fourier 系数 (参见习题 8.31), 并对每个 $n \in \mathbb{N}^*$ 计算

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(nx) \, dx, \quad \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k}.$$

(d) 根据以上各问、习题 8.30(b) 的估计以及控制收敛定理导出矛盾。说明 $L^1(\mathbb{R})$ 在 Fourier 变换下的像不是整个 $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 。

校订注: 原文把 (a) 中的值域写成 $\mathbb{R}$, 但 $c_n = \operatorname{sign}(n)/(2i \log |n|)$ 为纯虚数, 而各平移函数的支集互不相交, 故所得 g 一般为复值函数; 改为 $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 。

本题取自 B. R. Gelbaum 与 M. H. Olmsted 的 *Counterexamples in Analysis*, 例 I.26。

习题 15.21 (Hausdorff-Young 不等式)。

(a) 证明：对每个 $p \in [1, 2]$ ，存在常数 $C_p \geq 0$ ，使

$$\forall f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d), \quad \|\widehat{f}\|_q \leq C_p \|f\|_p, \quad q := \frac{p}{p-1}.$$

(b) 设 $z \in \mathbb{C}$ 、 $\operatorname{Re} z > 0$ ，并定义

$$f_z(x) := e^{-z|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

对 $p, q \in [1, +\infty]$ ，利用公式 (15.7) 和 Fresnel 积分的值（见习题 8.29），证明

$$\frac{\|\widehat{f_z}\|_q}{\|f_z\|_p} = \left(4^{1/q} p^{1/p} q^{-1/q} \pi^{1+1/q-1/p} |z|^{2/q-1} (\operatorname{Re} z)^{1/p-1/q} \right)^{d/2},$$

其中约定 $(+\infty)^{1/(+\infty)} = 1$ 。

(c) 由此证明：Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上的 Fourier 变换能够延拓成连续线性映射

$$L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^q_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$$

当且仅当 $1 \leq p \leq 2$ 且 $q = p/(p-1)$ 。

习题 15.22 (Shannon 采样公式)。

(a) 设 $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ 连续，并且

$$\operatorname{supp}(\widehat{f}) \subset [-\pi, \pi], \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)| < +\infty.$$

证明

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i(n-x)\xi} d\xi,$$

其中 c_n 是 $\widehat{f}$ 的 Fourier 系数，定义见 (15.30)。

(b) 推出 Shannon 采样公式

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\sin(\pi(n-x))}{\pi(n-x)},$$

其中 $x = n$ 时相应因子按连续延拓取值 1。

习题 15.23 (一条反演公式)。

(a) 证明引理 15.4 在 $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ 上的推广：

$$\forall f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(f)(x) g(x) \lambda_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \Phi(g)(x) \lambda_d(dx).$$

(b) 设 $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ 、 $g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ ，并且 $\widehat{f} = \Phi(g)$ 几乎处处。证明

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{\varphi}(x) \lambda_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \widehat{\varphi}(x) \lambda_d(dx).$$

再利用习题 8.33 推出 $f = g$ 几乎处处。

(c) 设 $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$, 且 $\Phi(f) \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ 。证明

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\Phi(f)}(-x) \overline{\varphi(x)} \lambda_d(dx) = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{\varphi(x)} \lambda_d(dx).$$

由此推出反演公式

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \widehat{\Phi(f)}(-x) \quad \text{几乎处处.}$$

本题由作者与法国雷恩国立应用科学学院教授 L. Hervé 合作拟定。

习题 15.24 (正弦基数函数满足的积分-级数公式)。设 $a, \alpha > 0$, 且 $a\alpha < 1$ 。设 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 分段 C^1 、在 0 处连续, 并且

$$\varphi = 0 \quad \text{于 } \mathbb{R} \setminus [-a/2, a/2].$$

令 ψ 是 2π -周期函数, 在 $[-\pi, \pi]$ 上定义为

$$\psi(t) := \frac{1}{\alpha} \varphi\left(\frac{t}{2\pi\alpha}\right),$$

并令

$$f(x) := \widehat{\varphi}(2\pi\alpha x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) 证明对每个 $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(\psi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t) e^{-int} dt = f(n).$$

(b) 证明

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \frac{1}{\alpha} \varphi(0).$$

(c) 证明

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^2 = \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

(d) 取 $a = 1$ 、 $\alpha = 1/\pi$ 及 $\varphi = \mathbf{1}_{[-1/2, 1/2]}$ 。

(i) 证明

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

(ii) 推出

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi,$$

其中各商在 0 处均按连续延拓取值。

习题 15.25 (习题 15.24 的积分-级数公式之推广)。设 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ Lebesgue 可测, 在每个整数点连续, 并且

$$\exists \alpha > 1, \exists C > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \varphi(t) \leq \frac{C}{(1 + |t|)^{\alpha}}.$$

还假设 $\check{\varphi} = \varphi$, 并且

$$\exists a > 0, \quad \left(t \mapsto \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \right) \in L^1([-a, a]).$$

令

$$F(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(t + 2\pi k), \quad t \in \mathbb{R},$$

并假设这个 2π -周期函数在 $\mathbb{R}$ 上分段 C^1 。再定义

$$f(x) := \frac{1}{2\pi} \widehat{\varphi}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

并假设

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)| < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \text{ 收敛}.$$

(a) 在上述条件下重新得到 Poisson 求和公式:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(2\pi n).$$

(b) 证明

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \widehat{\varphi}(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \frac{\sin(nt)}{\pi t} dt = \varphi(0). \end{aligned}$$

(c) 证明下列两个断言等价:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx; \\ \text{(ii)} \quad & \varphi(0) = \frac{1}{2\pi} (\varphi * \varphi)(0), \\ & \forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad \varphi(2\pi n) = 0, \quad \varphi(2\pi n - \cdot) \varphi(\cdot) = 0 \text{ 几乎处处}. \end{aligned}$$

(d) 取 $\varphi = \pi \mathbf{1}_{[-1,1]}$, 重新得到习题 15.24(d)(ii) 的结论。

(e) 若 φ 满足 (i) (等价地满足 (ii)), 并且 $\varphi > 0$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上几乎处处成立, 证明

$$\varphi = 0 \text{ 在 } \mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi] \text{ 上几乎处处},$$

亦即 φ 具有紧支集。

校订注: 原文在本题中有一组相互关联的缩放与引用错误: $F(t) = \sum_k \varphi(t + 2\pi k)$ 应为 2π -周期; 为使 (a) 的 Poisson 公式成立, 应取 $f = (2\pi)^{-1} \widehat{\varphi}$; 相应地, (b) 的截断积分须带因子 $(2\pi)^{-1}$, 核为 $\sin(nt)/(\pi t)$; (d) 所引也应是习题 15.24(d)(ii), 而非习题 15.16(d)(ii)。这些修正彼此一致, 并可直接由本章 Fourier 规范验算。

习题 15.26 (Heisenberg 不等式). 在 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上定义三个 $\mathbb{C}$ -线性算子

$$A(f) := if', \quad B(f)(x) := xf(x) \ (x \in \mathbb{R}), \quad C(f) := f.$$

(a) 证明

$$A \circ B - B \circ A = iC,$$

并证明 A, B 都是对称算子, 即

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle A(f), g \rangle = \langle f, A(g) \rangle, \quad \langle B(f), g \rangle = \langle f, B(g) \rangle,$$

其中

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

(b) 推出

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \|f\|_2^2 \leq 2 \|xf(x)\|_2 \|f'\|_2.$$

(c) 证明 Heisenberg 不等式

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \|f\|_2^2 \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|xf(x)\|_2 \|x\hat{f}(x)\|_2.$$

因此, Schwartz 函数与其 Fourier 变换不可能同时把支集集中在原点。这个不等式体现了 Heisenberg 不确定性原理: 某些物理量不能同时被任意精确地测定, 例如粒子的位置与动量。

习题 15.27. 设 $f \in L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}) \cap L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$, f 在 0 处连续, 并且对某个 $a > 0$ 有 $\text{supp}(\hat{f}) \subset [-a, a]$ 。

(a) 证明

$$|f(0)| \leq \frac{\sqrt{aI}}{\pi} \|f\|_2, \quad I := \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

(b) 证明: 上式取等号, 当且仅当存在 $\alpha \in \mathbb{R}_+$, 使

$$|f(x)| = \alpha \left| \frac{\sin(ax)}{x} \right| \quad \text{对几乎处处的 } x \in \mathbb{R}.$$

(c) 由此推出 $I = \pi$ 。

习题 15.28 (用 Laplace 变换求解常系数微分方程)。 设 P 是次数为 $n \in \mathbb{N}^*$ 的实多项式, 并令 D 为相应微分算子:

$$P(X) := X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k, \quad D(x) := x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}.$$

给定 $f \in C^0(\mathbb{R})$, 假设 $f = 0$ 于 $\mathbb{R}_-^*$ 。考虑 Cauchy 问题

$$\begin{cases} D(x) = f \\ x(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = \eta, \end{cases} \quad \text{于 } \mathbb{R}_+, \quad (\text{C})$$

其中 $\eta \in \mathbb{R}$ 。

(a) 暂且假设存在

$$a \geq \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|, \quad b > 0,$$

使对 $k = 0, \dots, n$ 和 $t \in \mathbb{R}_+$ 均有

$$|f(t)| + |x^{(k)}(t)| \leq be^{at}.$$

证明对每个满足 $\operatorname{Re} z > a$ 的 $z \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}(x^{(k)})(z) = z^k \mathcal{L}(x)(z) \quad (k = 0, \dots, n-1),$$

以及

$$\mathcal{L}(x^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}(x)(z) - \eta.$$

以下假设 P 有 n 个互异复根 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 。

(b) 设 x_g 是 (C) 在齐次情形 $f = 0$ 下的解。证明

$$x_g(t) = \eta \sum_{j=1}^n \beta_j e^{\alpha_j t}, \quad \frac{1}{P(X)} = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{X - \alpha_j}.$$

(c) 证明：当 $\eta = 0$ 时, (C) 的解为

$$y(t) = \int_0^t f(t-s) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j e^{\alpha_j s} \right) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(d) 推出 (C) 的一般解, 并事后验证 (a) 中关于各阶导数的指数增长假设确实成立。

(e) 对任意满足上述条件、在 $\mathbb{R}_+$ 上为零的 $f \in C^0(\mathbb{R})$, 求解 (C)。

校订注：原文把 (C) 的方程误写为 $D(x) = 0$, 但随后 (b) 又特称“右端 $f = 0$ 的情形”, (c)–(e) 也都使用非零右端 f ; 故应为 $D(x) = f$ 。原文还在 $\max |a_k|$ 中写到 $k = n$, 但多项式只定义了 $a_0, \dots, a_{n-1}$, 现一并修正。为避免与增长常数 a 混淆, 初值常数改记为 η 。

习题 15.29 (一族非常系数线性微分方程)。 给定 $a \in \mathbb{R}$, 考虑带有 0 点奇性的 Cauchy 型问题

$$tx''(t) + ax'(t) + tx(t) = 0 \quad (t \geq 0), \quad x(0) = x'(0) = 0. \quad (C_a)$$

零函数显然是它的一个解。

(a) 假设 x 的 Laplace 变换定义域非空。证明

$$\forall z \in D_{\mathcal{L}}(x), \quad (z^2 + 1)\mathcal{L}(x)'(z) + (2 - a)z\mathcal{L}(x)(z) = 0.$$

由此求出 $\mathcal{L}(x)$ 的一个简单表达式。

(b) 设 $a \geq 2$ 。

(i) 证明：若 (C_a) 存在非零解 $x \in C^2(\mathbb{R}_+)$, 则 $D_{\mathcal{L}}(x) = \emptyset$ 。

(ii) 当 $a = 2$ 时, 用幂级数展开求相应微分方程在 $\mathbb{R}_+^*$ 上的一组解基, 并结合 (i) 作出结论。

(c) 设 $a = -2$ 。

(i) 利用恒等式

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2 + 1},$$

作 Laplace 反变换, 求出 (C_{-2}) 的一个简单解 φ_{-2} 。

(ii) 证明：所有 Laplace 变换定义域非空的 (C_{-2}) 解, 恰好组成由 φ_{-2} 张成的一维向量空间。

(iii) 用常数变易法证明： (C_{-2}) 的全部解仍恰好组成由 φ_{-2} 张成的一维向量空间。

(d) 设 $a = 1$ 。

(i) 求相应微分方程在 $\mathbb{R}_+^*$ 上唯一的解 φ_1 , 使它能在 $\mathbb{R}$ 上展开成幂级数且 $\varphi_1(0) = 1$ 。

(ii) 证明

$$\psi_1(t) := \varphi_1(t) \int_1^t \frac{ds}{s\varphi_1(s)^2}, \quad t \in \mathbb{R}_+^*,$$

是相应微分方程在 $\mathbb{R}_+^*$ 上的一个解。由此证明零函数是 (C_1) 的唯一解。

(iii) 推出：不存在

$$f \in C(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}_+)$$

使它的 Laplace 变换定义域非空并且

$$f * f = \sin \quad \text{于 } \mathbb{R}_+,$$

这里的卷积是 $\mathbb{R}_+$ 上的卷积，参见命题 15.6(c)。

习题 15.30 (波动方程)。

(a) 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$ ，且 $f = 0$ 于 $\mathbb{R}_-^*$ 。证明：对 $a, x \in \mathbb{R}_+$ 及满足 $\operatorname{Re} z \geq 0$ 的 $z \in \mathbb{C}$ ，

$$\int_{ax}^{+\infty} f(t - ax)e^{-zt} dt = e^{-axz} \mathcal{L}(f)(z).$$

(b) 利用关于 t 的 Fourier 变换，求出所有 $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ，它们满足：对每个 $a > 0$ ，存在 $h_a \in L^1(\mathbb{R})$ ，使

$$\forall x \in [-a, a], \forall t \in \mathbb{R}, \quad |u(t, x)| + \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right| + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \right| \leq h_a(t),$$

并且对某个 $c > 0$ 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

(c) 设

$$f, g \in C^2(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+)$$

并在 $\mathbb{R}_-^*$ 上延拓为零，且 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 。利用关于 t 的 Laplace 变换，求出在 $\mathbb{R}_+^2$ 上次线性增长的 $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$ ，使

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

并满足边界条件

$$\begin{cases} u(0, x) = \alpha, & x \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \beta, & x \geq 0, \\ u(t, 0) = f(t), & t \geq 0, \\ u(t, +\infty) = g(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

校订注：原文 (a) 的右端积分含有未量化的 x ，下限却写成 a ，同时漏掉平移产生的指数因子；现改为标准且可直接换元验证的延迟公式。原文 (b) 还把二元函数 $u(t, x)$ 的空间误写为 $C^2(\mathbb{R})$ ，现改为 $C^2(\mathbb{R}^2)$ 。

习题 15.31 (有限差分方程)。 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 并令

$$P(X) := X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k, \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

设 f 在 $\mathbb{R}_+$ 上局部可积, 并把它延拓到 $\mathbb{R}$; 假设其 Laplace 变换定义域非空, 并且满足

$$f(t+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f(t+k) = 1 \quad \text{对几乎处处的 } t \in \mathbb{R}_+, \quad (\text{D})$$

以及

$$f = 0 \quad \text{在 } (-\infty, n] \text{ 上几乎处处.}$$

(a) 证明

$$\forall k = 0, \dots, n, \quad \forall z \in D_{\mathcal{L}}(f), \quad \mathcal{L}(f(\cdot + k))(z) = e^{kz} \mathcal{L}(f)(z).$$

以下假设 P 有 n 个互异复根 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, 并置

$$\alpha := \max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j|.$$

(b) 若

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{X - \alpha_j},$$

证明

$$\forall z \in D_{\mathcal{L}}(f), \quad \operatorname{Re} z > \log \alpha, \quad \mathcal{L}(f)(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j e^{-z}}{z(1 - \alpha_j e^{-z})}.$$

(c) 证明对每个 $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^{k-1} \mathbf{1}_{[k, +\infty)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1} \right) \mathbf{1}_{[k, k+1)} \quad \text{在 } \mathbb{R}_+ \text{ 上几乎处处,}$$

其中 $\alpha = 1$ 时右端商按极限解释为 k 。

(d) 推出 (D) 有唯一解, 并且在 $\mathbb{R}_+$ 上几乎处处满足

$$f(t) = \sum_{j=1}^n \beta_j h_{\alpha_j}(t),$$

其中

$$h_{\alpha}(t) := \begin{cases} \frac{\alpha^{[t]} - 1}{\alpha - 1}, & \alpha \neq 1, \\ [t], & \alpha = 1. \end{cases}$$

校订注：原文在多项式系数表中多列了一个未被使用的 a_n ; 现与求和范围统一为 $a_0, \dots, a_{n-1}$ 。

习题 15.32 (整数部分函数的一个刻画)。

(a) 证明

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \mathcal{L}([t])(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

(b) 设 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ 局部可积, Laplace 变换定义域非空, 且

$$f(t+1) - f(t) = 1 \quad \text{对几乎处处的 } t \in \mathbb{R}_+,$$

并在 $[0, 1]$ 上几乎处处为零。证明 f 在 $\mathbb{R}_+$ 上几乎处处等于整数部分函数 $t \mapsto [t]$ 。

习题 15.33 (再论整数部分函数)。 设 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ 局部可积, 且 Laplace 变换定义域非空。

(a) 证明对每个 $z \in D_{\mathcal{L}}(f)$,

$$\mathcal{L}\left(t \mapsto \int_0^t f(s) \, ds\right)(z) = \frac{1}{z} \mathcal{L}(f)(z).$$

(b) 证明

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^t [s] \, ds = \frac{1}{2}[t](2t - [t] - 1).$$

(c) 假设 f 满足

$$f(t+2) - 2f(t+1) + f(t) = 1 \quad \text{对几乎处处的 } t \in \mathbb{R}_+,$$

并在 $[0, 2]$ 上几乎处处为零。证明对 $z \in D_{\mathcal{L}}(f)$ 、 $\operatorname{Re} z > 0$,

$$\mathcal{L}(f)(z) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z(e^z - 1)} \right) - \frac{1}{z^2(e^z - 1)} - \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

再利用习题 15.32(a) 和前两问证明

$$f(t) = \frac{[t][t-1]}{2} \quad \text{对几乎处处的 } t \in \mathbb{R}_+.$$

习题 15.34 (二阶线性递推数列)。 设 $a, b, \gamma \in \mathbb{C}$ 、 $b \neq 0$, 并设 α, β 是方程

$$x^2 - ax - b = 0$$

的两个复根。给定 $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$, 考虑递推数列

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + \gamma^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

并定义

$$f(t) := u_{[t]}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

(a) 设 $\sigma, \tau, v \in \mathbb{C}$ 两两不同。利用控制收敛定理与有限增量不等式证明: 只要

$$\operatorname{Re} z > \max\{\log |\sigma|, \log |\tau|, \log |v|\},$$

就有

$$\mathcal{L}(\sigma^{[t]})(z) = \frac{e^z - 1}{z(e^z - \sigma)},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sigma^{[t]} - \tau^{[t]}}{\sigma - \tau}\right)(z) = \frac{e^z - 1}{z(e^z - \sigma)(e^z - \tau)},$$

$$\mathcal{L}([t]\sigma^{[t]-1})(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\left(\frac{(\sigma + \varepsilon)^{[t]} - \sigma^{[t]}}{\varepsilon}\right)(z) = \frac{e^z - 1}{z(e^z - \sigma)^2},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{\sigma^{[t]}}{(\sigma-\tau)(\sigma-v)} + \frac{\tau^{[t]}}{(\tau-\sigma)(\tau-v)} + \frac{v^{[t]}}{(v-\sigma)(v-\tau)}\right)(z) \\ = \frac{e^z - 1}{z(e^z - \sigma)(e^z - \tau)(e^z - v)}, \\ \mathcal{L}\left(\frac{[t]\sigma^{[t]-1}}{\sigma-\tau} \frac{\tau^{[t]} - \sigma^{[t]}}{(\sigma-\tau)^2}\right)(z) = \frac{e^z - 1}{z(e^z - \sigma)^2(e^z - \tau)}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{[t]([t]-1)}{2}\sigma^{[t]-2}\right)(z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\left(\frac{(\sigma+\varepsilon)^{[t]} + (\sigma-\varepsilon)^{[t]} - 2\sigma^{[t]}}{2\varepsilon^2}\right)(z) \\ &= \frac{e^z - 1}{z(e^z - \sigma)^3}. \end{aligned}$$

这里约定 $0^0 = 1$ 。

(b) 证明：若

$$\operatorname{Re} z > \max\{\log |\alpha|, \log |\beta|, \log |\gamma|\},$$

则

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(\cdot+1))(z) &= e^z \mathcal{L}(f)(z) + u_0 \frac{1-e^z}{z}, \\ \mathcal{L}(f(\cdot+2))(z) &= e^{2z} \mathcal{L}(f)(z) + u_0 \frac{e^z - e^{2z}}{z} + u_1 \frac{1-e^z}{z}. \end{aligned}$$

由此推出

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{e^z - 1}{z(e^z - \alpha)(e^z - \beta)} \left(u_1 - au_0 + u_0 e^z + \frac{1}{e^z - \gamma} \right).$$

(c) 若 α, β, γ 两两不同，证明

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{u_1 - au_0}{\alpha - \beta} (\alpha^n - \beta^n) + \frac{u_0}{\alpha - \beta} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \\ &\quad + \frac{\alpha^n}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta^n}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma^n}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}. \end{aligned}$$

(d) 若 $\alpha = \beta \neq \gamma$ ，证明

$$u_n = u_0 \alpha^n + (u_1 - au_0 + \alpha u_0) n \alpha^{n-1} + \frac{n \alpha^{n-1}}{\alpha - \gamma} + \frac{\gamma^n - \alpha^n}{(\gamma - \alpha)^2}.$$

(e) 若 $\alpha = \gamma \neq \beta$ ，证明

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{u_1 - au_0 + \alpha u_0}{\alpha - \beta} \alpha^n + \frac{u_1 - au_0 + \beta u_0}{\beta - \alpha} \beta^n \\ &\quad + \frac{n \alpha^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\beta^n - \alpha^n}{(\beta - \alpha)^2}. \end{aligned}$$

(f) 若 $\alpha = \beta = \gamma$ ，证明

$$u_n = u_0 \alpha^n + (u_1 - au_0 + \alpha u_0) n \alpha^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \alpha^{n-2}.$$

习题 15.35 (Weierstrass 变换)。 对函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 在相应积分存在时定义

$$W(f)(x) := (f * G)(x), \quad G(y) := \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-y^2/4}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- (a) 对适当范围内的 $a \in \mathbb{R}$, 计算函数 $y \mapsto e^{-ay^2}$ 的 Weierstrass 变换, 并确定 a 的范围。
 (b) 证明对每个 $p \in [1, +\infty]$ 及 $f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$\|W(f)\|_p \leq \|f\|_p.$$

- (c) 证明

$$W(f)(x) = \sqrt{4\pi} G(x) \mathcal{L}_b(Gf)\left(-\frac{x}{2}\right),$$

只要等式两端的表达式有定义; 这里 $\mathcal{L}_b$ 是定义 15.4(c) 中的双边 Laplace 变换。

- (d) 若

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

是收敛半径为无穷的幂级数, D 是微分算子, 记

$$S(D) := \sum_{n \geq 0} a_n D^n.$$

设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, 其在 0 点的 Taylor 级数在整个 $\mathbb{R}$ 上收敛; 以下等式均在相应积分与级数绝对收敛时理解。

- (i) 证明

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x-y) = (e^{-yD}(f))(x).$$

- (ii) 对 $n \in \mathbb{N}$ 作归纳, 证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^{2n} G(y) dy = \frac{(2n)!}{n!}.$$

- (iii) 推出

$$W(f) = e^{D^2}(f) \quad \text{于 } \mathbb{R}.$$

校订注: 原文只假设 f 的 Taylor 级数在 $\mathbb{R}$ 上收敛, 这并不足以保证 $W(f)$ 存在或允许逐项积分, 例如增长过快的整函数即可使卷积发散。因此在 (d) 中补上相应积分与级数绝对收敛的条件。

习题 15.36 (Gauss-Weierstrass 变换与热方程)。 对 $t > 0$, 定义

$$W_t(f)(x) := (f * G_t)(x), \quad G_t(y) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-y^2/(4t)}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

函数 $(t, y) \mapsto G_t(y)$ 称为**热核**。

- (a) 在表达式有定义时证明

$$W_t(f)(x) = W(f(\sqrt{t} \cdot))\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

- (b) 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, 其在 0 点的 Taylor 级数在 $\mathbb{R}$ 上收敛。在习题 15.35(d) 的收敛条件下, 证明对每个 $t > 0$,

$$W_t(f) = e^{tD^2}(f) \quad \text{于 } \mathbb{R}.$$

- (c) 证明半群性质

$$\forall p \in [1, +\infty), \forall s, t > 0, \quad W_s \circ W_t = W_{s+t} \quad \text{于 } L^p(\mathbb{R}).$$

(d) 利用不等式 $y\mathbf{1}_{\{y>\delta\}} \geq \delta\mathbf{1}_{\{y>\delta\}}$, 证明

$$\forall t, \delta > 0, \quad \|G_t\|_{L^q(\{|y|>\delta\})} \leq \begin{cases} \left(\frac{4t}{q\delta}\right)^{1/q} G_t(\delta), & q \in [1, +\infty), \\ G_t(\delta), & q = +\infty. \end{cases}$$

由此证明：对

$$\varphi \in L^p(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}) \supset C_K^\infty(\mathbb{R}), \quad p \in [1, +\infty],$$

有

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} W_t(\varphi)(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} (\varphi * G_t)(x) = \varphi(x).$$

换言之, 当 $t \rightarrow 0+$ 时, $(G_t)_{t>0}$ 在分布意义下收敛到 δ_0 ; 后者是卷积的单位元。

(e) 设 f 满足 (b) 的条件。证明

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D^2\right) W_t(f) = 0 \quad \text{于 } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

因此 $W_t(f)$ 是一维热方程的解; 若再有 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 、 $p \in [1, +\infty]$, 则由 (d) 得初值条件 $W_{0+}(f) = f$ 。

习题 15.37 (Abel 滑道问题)。 对在 $\mathbb{R}_+$ 上局部可积的 $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 定义 Abel 积分变换

$$\mathcal{A}(u)(t) := \int_0^t \frac{u(s)}{\sqrt{t-s}} ds, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (15.31)$$

(a) 计算函数

$$a(t) := \frac{\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)}{\sqrt{t}}$$

的 Laplace 变换。

(b) 计算 $\mathcal{A}(u)$ 与 $\mathcal{A}(\mathcal{A}(u))$ 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上的 Laplace 变换。

(c) 推出

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{A}(\mathcal{A}(u))(x) = \pi \int_0^x u(t) dt.$$

设 $c \in \mathbb{R}_+^*$, 并设 $f: [c, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是 C^1 函数且 $f(0) = 0$ 。一个有质量的粒子在 f 的图像所构成的滑道上无摩擦运动, 并受到重力势能 V 的作用。沿图像的弧长坐标记为 $x(t)$, 粒子从 $x = c$ 处以零初速度释放。为简化公式, 把质量取为 2, 则 x 满足

$$\begin{cases} 2 \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -V'(x(t)), & t \geq 0, \\ V(x(0)) = E, \\ \frac{dx}{dt}(0) = 0, \end{cases}$$

其中

$$V \in C^1([c, 0], \mathbb{R}_+), \quad V' < 0, \quad V(0) = 0,$$

而 $E \geq 0$ 是粒子的总能量。以 $\tau(E)$ 表示粒子到达滑道底部 $x(\tau(E)) = 0$ 所需的时间。

Abel 定理: τ 唯一确定势函数 V 。换言之, 运动的到达时间确定由弧长坐标描述的滑道形状。

(d) 利用总能量守恒证明

$$\forall E \geq 0, \quad \tau(E) = \int_c^0 \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}.$$

(e) 记 $W := V^{-1}$, 证明

$$\tau = -\mathcal{A}(W').$$

(f) 推出

$$W = -\frac{1}{\pi} \mathcal{A}(\tau).$$

校订注：原文在 Abel 变换 (15.31) 中把积分微元误写为 dy , 而被积变量是 s ; 现改为 ds 。

本题取自 Y. C. de Verdière 与 J. P. Truc 的论文 *Du problème du toboggan d'Abel au problème inverse semi-classique* (HAL-00400153, 2009)。

习题 15.38 (Abel 算子的不动点)。 设 $\mathcal{A}$ 是 (15.31) 定义的 Abel 算子。给定 $a \in \mathbb{R}$ 、 $k \in \mathbb{R}^*$, 考虑 $\mathbb{R}_+$ 上的方程

$$f = a + k\mathcal{A}(f),$$

其中 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上局部可积。

(a) 利用习题 15.37(c) 证明: 若 f 是该方程的解, 则

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{ak}{\sqrt{x}} + \pi k^2 f(x), \quad f(0) = a.$$

(b) 推出

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = ae^{\pi k^2 x} + ak \mathcal{A}(t \mapsto e^{\pi k^2 t})(x).$$

(c) 反过来证明, (b) 中得到的函数确实是方程 $f = a + k\mathcal{A}(f)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上的解。

校订注：原文 (a) 误引习题 15.35(c); 这里使用的是 $\mathcal{A}(\mathcal{A}(u))(x) = \pi \int_0^x u(t) dt$, 故正确引用为习题 15.37(c)。

习题 15.39 (定理 15.6, 即 Bernstein–Widder 定理的证明)。 设 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 在定义 (15.28) 的意义下完全单调。

(a) 对

$$F_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^k f^{(k)}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^*,$$

求导并作归纳, 证明对每个 $n \in \mathbb{N}$, 极限

$$\ell_n := \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} x^n f^{(n)}(x) \right]$$

存在且属于 $\mathbb{R}_+$ 。

(b) 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 并定义

$$M_n := \sum_{k=0}^{n-1} \ell_k.$$

(i) 利用 (a) 作归纳, 证明

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) - M_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} u^{n-1} f^{(n)}(u+x) du.$$

(ii) 在 (i) 中取 $x = 1/k$, $k \in \mathbb{N}^*$, 并对 k 使用 Beppo Levi 定理, 证明

$$f(0) - M_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} u^{n-1} f^{(n)}(u) \, du.$$

(iii) 在 (i) 中取 $x = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, 结合 (ii) 对 k 使用控制收敛定理, 证明

$$\ell := \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = M_n.$$

(c) 对 $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, 研究

$$g_n(x) := e^{-nx} - (1-x)^{n-1}, \quad x \in (0, 1),$$

并证明

$$\max_{x \in [0, 1]} |e^{-nx} - (1-x)^{n-1}| \leq \frac{1}{n-1}.$$

(d) 固定 $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) 证明

$$f(x) - \ell = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_x^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{n-1} u^{n-1} f^{(n)}(u) \, du.$$

(ii) 利用 (i)、(b)(ii) 和 (c), 证明

$$f(x) - \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_x^{+\infty} e^{-nx/u} u^{n-1} f^{(n)}(u) \, du \right].$$

(iii) 利用估计以及 (b)(ii)、(b)(iii), 证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^x e^{-nx/u} u^{n-1} f^{(n)}(u) \, du \right] = 0.$$

(iv) 推出

$$f(x) - \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-nx/u} u^{n-1} f^{(n)}(u) \, du \right].$$

(e) 设 $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) 作变量替换 $u \mapsto n/u$, 证明在 0 处可能不连续的函数 α_n :

$$\alpha_n(t) := \begin{cases} \ell + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^t \left(\frac{n}{u}\right)^{n+1} f^{(n)}\left(\frac{n}{u}\right) \, du, & t \in \mathbb{R}_+^*, \\ 0, & t \in \mathbb{R}_-, \end{cases}$$

在 0 处右连续、非负、非减, 并满足

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_n(t) = f(0).$$

(ii) 利用 (d)(iv) 证明

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \mathcal{L}(\alpha_n)(x). \quad (15.32)$$

下面允许使用:

Helly 选择定理. 定义在 $\mathbb{R}$ 的某个区间上、一致有界且全变差一致有界的任意函数列, 都有一个子列逐点收敛于某个有界的有界变差函数。

该定理还允许在 Stieltjes 积分中取极限。因而, 抽取子列后, 非减函数列 $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ 逐点收敛于 $\mathbb{R}_+^*$ 上某个非负非减函数 α 。由 α_n 的定义、极限 (15.32) 以及约定 (15.29), 得到

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{L}(\mathrm{d}\alpha_n)(x) + \alpha_n(0-)) = \mathcal{L}(\mathrm{d}\alpha)(x).$$

这便完成 Bernstein-Widder 定理的证明。

校订注: 原文在 (b) 中直接使用 M_n 却从未定义; 由 (a) 的极限及 (b)(i) 的分部积分结构, 应为 $M_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ell_k$ 。原文末段还把已证明为非减的 α_n 与极限 α 误称为递减函数; 现均改为非减。

习题 15.40 (Riemann–Liouville 分数积分)。设 $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, 并设 $a, b \in \mathbb{R}$ 、 $a < b$ 。对 $[a, b]$ 上的 Borel 函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, 定义

$$I^\alpha(f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \quad x \in [a, b],$$

只要 $f \geq 0$, 或 $t \mapsto f(t)(x-t)^{\alpha-1}$ 在 $[a, x]$ 上可积。

(a) 设 $p \in [1, +\infty)$ 。利用 Jensen 不等式 (见习题 7.10) 和 Fubini–Tonelli 定理证明: 对每个 $\alpha > 0$, I^α 是 $(L^p([a, b]), \|\cdot\|_p)$ 到自身的连续线性算子, 并满足

$$\forall f \in L^p([a, b]), \quad \|I^\alpha(f)\|_p \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|f\|_p.$$

(b) 设 $p \in [1, +\infty)$ 。

(i) 对 $\alpha > 0$, $y \in [a, b]$ 及 $x \in [y, b]$, 定义

$$\rho_y^\alpha(x) := \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}.$$

证明对每个 $y \in [a, b]$,

$$\forall x \in (y, b], \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \rho_y^\alpha(x) = 1,$$

以及

$$\forall \alpha \in (0, 1], \quad \|\rho_a^\alpha\|_{L^\infty([a, b])} \leq 2 \max\{1, b-a\}.$$

(ii) 设 $\varphi \in C^0([a, b])$ 。证明对 $x \in [a, b]$ 、 $y \in [a, x]$,

$$\begin{aligned} |I^\alpha(\varphi)(x) - \varphi(x)| &\leq \rho_a^\alpha(b) \max_{t \in [y, x]} |\varphi(t) - \varphi(x)| \\ &\quad + 2 \|\varphi\|_{\sup} (\rho_a^\alpha(x) - \rho_y^\alpha(x)) + |\varphi(x)| |\rho_a^\alpha(x) - 1|, \end{aligned}$$

且

$$|I^\alpha(\varphi)(x)| \leq \|\varphi\|_{\sup} \rho_a^\alpha(x).$$

由此推出

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \|I^\alpha(\varphi) - \varphi\|_p = 0.$$

(iii) 证明对每个 $f \in L^p([a, b])$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \|I^\alpha(f) - f\|_p = 0.$$

(c) 对 $\alpha > 0$ 与 $f \in C^0([a, b])$, 证明

$$(I^{\alpha+1}(f))' = I^\alpha(f).$$

(d) 证明对所有 $\alpha, \beta > 0$,

$$I^\alpha \circ I^\beta = I^{\alpha+\beta} \quad \text{于 } L^1([a, b]).$$

(e) 本问取 $a = 0$ 。设 $\alpha \in (0, 1)$ 且 $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 。证明

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \mathcal{L}(I^{1-\alpha}(f))(x) = x^\alpha \mathcal{L}(f)(x).$$

解释。 若 $\alpha \in (0, 1)$ 且 $f \in C^0(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+)$, 则由命题 15.7,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left((I^{1-\alpha}(f))'\right)(x) &= x\mathcal{L}(I^{1-\alpha}(f))(x) - I^{1-\alpha}(f)(0) \\ &= x\mathcal{L}(I^{1-\alpha}(f))(x),\end{aligned}$$

从而

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{L}\left((I^{1-\alpha}(f))'\right)(x) = x^\alpha \mathcal{L}(f)(x).$$

因此, 函数 $I^{1-\alpha}(f)$ 的通常导数可视为 f 的 α 阶分数导数。

校订注： 原文 (b)(i) 声称 $\|\rho_a^\alpha\|_\infty \leq \frac{1}{2} \max(1, b-a)$, 这在 $b-a=1$ 、 $\alpha=1$ 时已给出 $1 \leq 1/2$ 的矛盾。由 $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$ 及 $\Gamma(\alpha+1)$ 在 $[1, 2]$ 上有正下界, 可取简洁统一估计 $2\max(1, b-a)$ 。

第五部分

选择题与考试问题

第十六章 多项选择题

说明。下面的大多数多项选择题取自法国雷恩国立应用科学学院自 2010 年起开设的三年级公共基础课“工程师分析”的考试题。答案见第 19 章。

在本章题目中，空间 $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ 简记为 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 。Fourier 变换记为 $\mathcal{F}$ ，并采用

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(x) dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^d). \quad (16.1)$$

与第 15 章相比，指数中多了因子 -2π 。这样一来， $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上同样记为 $\mathcal{F}$ 的 Fourier 变换满足

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(f)(x) = f(-x), \quad \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(fg),$$

并有不带第 15 章中 $(2\pi)^d$ 因子的 Plancherel 公式

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f) \overline{\mathcal{F}(g)} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f \bar{g} dx.$$

校订注：原文在 (16.1) 的积分中漏写了 $f(x)$ ，致使右端与 f 无关；现补回 Fourier 变换定义所必需的因子。

每题可能有一个或多个正确选项。请选出全部正确选项。

16.1 选择题 1

1. 下列命题中正确的是：

- | | | |
|--|--|---|
| ☐ $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ | ☐ $\frac{\sin x}{x} \in L^1(\mathbb{R})$ | ☐ $\frac{x}{x^2+1} \in L^2(\mathbb{R})$ |
| ☐ $\frac{x}{x^2+1} \in L^1(\mathbb{R})$ | ☐ $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ | ☐ $\frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$ |

2. 下列极限中等于 0 的是：

- | | |
|--|--|
| ☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n^2 x e^{-nx} dx = 0$ | ☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} dx = 0$ |
| ☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(\frac{1+x}{2}\right)^n dx = 0$ | ☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+n)^2} dx = 0$ |

3. 二重积分

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$$

等于：

- | | | |
|---|--|--|
| ☐ π | ☐ $\pi/2$ | ☐ $\pi/4$ |
| ☐ $\pi/\sqrt{2}$ | ☐ $\pi/(2\sqrt{2})$ | ☐ $\pi/(4\sqrt{2})$ |

4. 定义

$$f(x) := \begin{cases} x^2 e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$\mathcal{F}(f)(\xi)$ 等于:

☐ $\frac{1}{(1+2\pi i\xi)^2}$
☐ $\frac{2}{(1+2\pi i\xi)^2}$

☐ $\frac{1}{(1+2\pi i\xi)^3}$
☐ $\frac{2}{(1+2\pi i\xi)^3}$

5. 利用 $\mathcal{F}(e^{-2\pi|x|})$ 计算

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2}.$$

所得结果为:

☐ $1/2$
☐ 1

☐ 2
☐ $\pi/2$

☐ π
☐ 2π

6. 利用 $\mathcal{F}(1_{[-1/(2\pi), 1/(2\pi)]})$ 计算

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 d\xi.$$

所得结果为:

☐ $1/2$
☐ 1

☐ 2
☐ $\pi/2$

☐ π
☐ 2π

7. 设 $f(x) := e^{-\pi x^2}$ 。则 $\mathcal{F}(f * f)(\xi)$ 等于:

☐ $e^{-\pi \xi^2}$
☐ $2e^{-\pi \xi^2}$

☐ $e^{-2\pi \xi^2}$
☐ $\frac{2}{1+\xi^2}$

☐ $\frac{1}{(1+\xi^2)^2}$

16.2 选择题 2

1. 下列命题中正确的是:

☐ $\frac{\arctan \sqrt{x}}{x} \in L^1(\mathbb{R}_+)$
☐ $\frac{1}{\sqrt{x^4+x}} \in L^1(\mathbb{R}_+)$

☐ $\frac{\cos x}{x} \in L^1(\mathbb{R})$
☐ $\frac{\arctan \sqrt{x}}{x} \in L^2(\mathbb{R}_+)$

☐ $\frac{1}{\sqrt{x^4+x}} \in L^2(\mathbb{R}_+)$
☐ $\frac{\cos x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$

2. 二重积分

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+2xy+3y^2)} dx dy$$

等于:

☐ π ☐ $\pi/\sqrt{2}$ ☐ $\pi/3$ ☐ $\pi/(2\sqrt{3})$ ☐ $\pi/4$ ☐ $\pi/(4\sqrt{2})$ **3. 二重积分**

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x(1+y^2)} dx dy$$

等于：☐ π ☐ $\pi/2$ ☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ ☐ $2 \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2$ ☐ $\sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ **4. 对 $f(x) := xe^{-\pi x^2}$, $\mathcal{F}(f)$ 等于：**☐ f ☐ $-f$ ☐ if ☐ $-if$ ☐ $2f$ ☐ $-2f$ **5. 设**

$$f(x) := -4\pi^2 x^2 \mathbf{1}_{[-1/2, 1/2]}(x).$$

则 $\mathcal{F}(f)(1)$ 等于：☐ $-\pi$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ π ☐ 2π **6. 定义**

$$f(x) := \begin{cases} x^2 e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

则 $\int_0^{+\infty} f(x)^2 dx$ 等于：☐ $\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2}$ ☐ $\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^3}$ ☐ $\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^4}$ ☐ $\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^5}$ ☐ $\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^6}$ ☐ $\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^8}$ **7. 对 $a > 0$, 令**

$$f_a(x) := \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

则 $f_1 * f_1$ 在相差一个乘法常数的意义下等于：☐ f_1 ☐ f_2 ☐ f_1^2 ☐ f_2^2 ☐ $(\mathcal{F}(f_1))^2$ ☐ $(\mathcal{F}(f_2))^2$

16.3 选择题 3

1. 下列命题中正确的是：

- ☐ $\frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in L^1(\mathbb{R}_+)$
☐ $\frac{\sin^2 x}{x} \in L^1(\mathbb{R})$
☐ $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \in L^2(\mathbb{R}_+)$
- ☐ $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \in L^1(\mathbb{R}_+)$
☐ $\frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \in L^1(\mathbb{R}_+)$
☐ $\frac{\sin^2 x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$

2. 二重积分

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

等于：

- ☐ 1
 ☐ 1/2
 ☐ $\pi/\sqrt{2}$
- ☐ $1/\sqrt{2}$
☐ $\pi/2$
☐ π

3. 令

$$I := \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + (x+n)^2}, \quad J := \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (x+n)^2}.$$

则：

- ☐ $I = +\infty$
☐ $I = 0$
☐ $J = \pi/2$
- ☐ $I = \pi$
☐ $J = 0$
☐ $J = \pi$

4. 对 $f(x) := x^2 e^{-\pi x^2}$, $\mathcal{F}(f)$:

- ☐ $= 1 + f$
☐ $= if$
☐ $> -f$
- ☐ 是实值函数
 ☐ $> 1 + f$
☐ $< -f$

5. 定义

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in [-1/2, 1/2], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

积分 $\int_{\mathbb{R}} 4\pi f(x)^2 dx$ 等于：

- ☐ $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$
☐ $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{t \cos t - \sin t}{t^2}\right)^2 dt$
- ☐ $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1 - \cos t}{t^2}\right)^2 dt$
☐ $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1 - \cos t + t \sin t}{t^2}\right)^2 dt$
- ☐ $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{t \cos t - \sin t}{t}\right)^2 dt$

6. 对 $a > 0$, 定义

$$f_a(x) := \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

从 $f_a * f_a$ 的 Fourier 变换出发，积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + 4\pi^2 t^2)^2}$$

等于：

☐ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ax} dx$

☐ $\int_0^{+\infty} e^{-2ax} dx$

☐ $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2ax} dx$

☐ $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2ax} dx$

☐ $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-2ax} dx$

☐ $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-2ax} dx$

7. 从 $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 出发，积分

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$$

等于：

☐ 1

☐ $\sqrt{\pi/2}$

☐ $\sqrt{2\pi}$

☐ $1/\sqrt{2}$

☐ $\sqrt{\pi}$

☐ $2\sqrt{\pi}$

16.4 选择题 4

1. 下列命题中正确的是：

☐ $\frac{1 - e^{-\sqrt{x}}}{x} \in L^1([0, 1])$

☐ $\frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + 1}} \in L^1(\mathbb{R})$

☐ $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} \in L^2(\mathbb{R}_+)$

☐ $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} \in L^1(\mathbb{R}_+)$

☐ $\frac{1 - e^{-\sqrt{x}}}{x} \in L^2([0, 1])$

☐ $\frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + 1}} \in L^2(\mathbb{R})$

2. 对 $t > 0$ ，令

$$f(t) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(1+x)}}{1+x} dx.$$

则 $f'(1)$ 等于：

☐ $-e^2$

☐ $-1/e$

☐ $1/e$

☐ e^2

☐ $-e$

☐ 0

☐ e

3. 二重积分

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

等于：

☐ $1/\sqrt{2}$

☐ 2

☐ π

☐ 1

☐ $\pi/\sqrt{2}$

☐ 2π

4. 对 $f(x) := xe^{-\pi x^2}$, $\mathcal{F}(f)$ 满足:

☐ $\mathcal{F}(f)(0) = 0$

☐ $\mathcal{F}(f) = -f$

☐ $\mathcal{F}(f) = -if$

☐ $\mathcal{F}(f)(0) = \sqrt{\pi}$

☐ $\mathcal{F}(f) = f$

☐ $\mathcal{F}(f) = if$

5. 积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} e^{-2\pi x(x+iy)} dx \right|^2 dy$$

等于:

☐ $1/4$

☐ 1

☐ $\sqrt{\pi}/2$

☐ $1/2$

☐ $\sqrt{\pi}/4$

☐ $\sqrt{\pi}$

6. 设

$$f(x) := \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \quad x \neq 0.$$

$\mathcal{F}$ 表示 $L^2(\mathbb{R})$ 上的 Fourier 变换。则 $f * f$ 等于:

☐ f^2

☐ $\mathcal{F}(f)$

☐ $\mathcal{F}(f^2)$

☐ f

☐ $(\mathcal{F}(f))^2$

☐ $\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(f)$

7. 二重积分

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+y)} - e^{-2(x+y)}}{x+y} dx dy$$

等于:

☐ $1/2$

☐ $\log 2$

☐ $2 \log 2$

☐ $(\log 2)/2$

☐ 1

☐ $1 + \log 2$

16.5 选择题 5

1. 下列命题中正确的是:

☐ $\frac{1}{\sqrt{x} |\log x|} \in L^1((0, 1))$

☐ $\frac{1}{\sqrt{x} \log x} \in L^2([2, +\infty))$

☐ $\frac{1}{\sqrt{x} \log x} \in L^1((0, 1))$

☐ $\frac{1}{\sqrt{\log x} (1 + x\sqrt{\log x})} \in L^1((1, +\infty))$

☐ $\frac{1}{\sqrt{x} |\log x|} \in L^2((0, 1))$

☐ $\frac{1}{\sqrt{\log x} (1 + x\sqrt{\log x})} \in L^2((1, +\infty))$

2. 对 $t > 0$, 令

$$f(t) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2(x^2+i)}}{x^2+i} dx.$$

则 $f'(\sqrt{\pi})$ 等于:

☐ $-2\sqrt{\pi}$

☐ $-\sqrt{\pi}$

☐ 1

☐ 2

☐ -2

☐ -1

☐ $\sqrt{\pi}$

3. 二重积分

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

等于：

☐ $1/\sqrt{2}$

☐ 2

☐ π

☐ 1

☐ $\pi/\sqrt{2}$

☐ 2π

4. 对

$$f(x) := (4\pi^2 x^2 - \pi)e^{-\pi x^2},$$

 $\mathcal{F}(f)$ 满足：

☐ $\mathcal{F}(f) = -if$

☐ $\mathcal{F}(f) = -f$

☐ $\mathcal{F}(f) = 2f$

☐ $\mathcal{F}(f) = -2f$

☐ $\mathcal{F}(f) = f$

☐ $\mathcal{F}(f) = if$

5. 对 $a, b > 0$, 积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x^2} dx$$

等于：

☐ $\pi(a+b)$

☐ $\pi \min(a, b)$

☐ $\pi \max(a, b)$

☐ $2\pi(a+b)$

☐ $2\pi \min(a, b)$

☐ $2\pi \max(a, b)$

6. 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 。若下列某个函数为 $f(x)$, 则 $(f * f)(x) = xf(x)$ 对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$ 成立。该函数是：

☐ $e^{-|x|}$

☐ $-\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-x}$

☐ $-\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x)e^x$

☐ $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-x}$

☐ $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x)e^x$

☐ $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-2x}$

7. 对 $y \geq 0$, 置

$$g(y) := \log(1 + 2y + 2\sqrt{y^2 + y}).$$

当 $a \geq 0$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1 + a + ax^2)}{1 + x^2} dx$$

等于：

☐ $g(a)/2$

☐ $2g(a)$

☐ $\pi g(a)$

☐ $g(a)$

☐ $(\pi/2)g(a)$

☐ $2\pi g(a)$

16.6 选择题 6

1. 下列命题中正确的是：

- ☐ $\int_0^1 \sqrt{x} \log(e^{2/x} - e^{1/x}) dx = +\infty$
☐ $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin^2 x} dx = +\infty$
- ☐ $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx = +\infty$
☐ $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_e^a \frac{\log x \sin x}{x(\log x + \sin x)} dx = +\infty$
- ☐ $\int_0^1 x \log^2(e^{2/x} - e^{1/x}) dx = +\infty$
☐ $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_e^a \frac{\log x \sin x}{x(\log x - \sin x)} dx = +\infty$

2. 设 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 。则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(n\pi x)}{x} \varphi(x) dx$$

等于：

- ☐ 0
 ☐ $\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$
☐ $\varphi(0)$
- ☐ $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$
☐ $\pi \varphi(0)$

3. 二重积分

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2 + y^2)^{n-1}}{1 + (n+1)^2(x^2 + y^2)^{2n}} \right] dx dy$$

等于：

- ☐ 1
 ☐ 2
 ☐ $\pi^2/2$
- ☐ $\pi/2$
☐ π
☐ $+\infty$

4. 下列方程中，至少有一个 $L^1(\mathbb{R})$ 中的非零实值解的是：

- ☐ $f * f = 1 + f$
☐ $f * f = ix f$
☐ $f * f = -e^{-\pi x^2}$
- ☐ $f * f = f$
☐ $f * f = e^{-\pi x^2}$

5. 对 $a, b > 0$ ，积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a + ix)(b + ix)}$$

等于：

- ☐ 0
 ☐ $2\pi/(a+b)$
☐ $\pi(a+b)$
- ☐ $\pi/(a+b)$
☐ $\pi(a+b)/2$
☐ $2\pi(a+b)$

6. 设 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 。若对每个偶函数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ ，都有

$$F(\mathcal{F}(f)) \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})),$$

则 F 可以是：

- ☐ $\mathbf{1}_{[1,+\infty)}(x)$
☐ e^x

- ☐ xe^x
☐ $\cos x$

- ☐ $\frac{\sin x}{1+x^2}$
☐ $\frac{1}{1+x^2}$

7. 利用 Fubini 定理, 当 $a \in \mathbb{R}$ 时, 积分

$$\int_0^\pi \frac{\arctan(a \sin x)}{\sin x} dx$$

等于:

- ☐ πa
☐ $\frac{\pi a}{\sqrt{a^2+1}}$

- ☐ $\pi \sin a$
☐ $\pi \arctan a$

- ☐ $\pi \sinh a$
☐ $\pi \operatorname{arsinh} a$

第十七章 若干考试问题

说明。 下面各题曾用于巴黎东克雷泰伊大学 (UPEC) 和皮埃尔-玛丽·居里大学 (UPMC) 数学本科积分理论课程的考试。除题目本身偶尔给出的提示外, 它们原则上不需要额外预备知识。这些题通常综合运用多章内容; 若把它们拆散到各章中, 反而会破坏论证的连贯性, 故集中置于本书末尾。

17.1 问题 1

问题 1。 设 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Borel 函数, 并假设 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$, 即

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)| \, dx < +\infty.$$

对 $t \in \mathbb{R}_+$, 定义

$$L_f(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) \, dx.$$

1(a). 验证 $t \mapsto L_f(t)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 每一点都有定义, 并且

$$L_f(0) = \int_0^{+\infty} f(x) \, dx.$$

1(b). 证明 L_f 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续。

1(c). 证明

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} L_f(t) = 0.$$

定义 $g(x) := xf(x)$, 并假设 $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ 。

2(a). 证明 L_f 在 $\mathbb{R}_+$ 上可微, 导函数连续, 且

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad L'_f(t) = -L_g(t).$$

2(b). 推出

$$\int_0^{+\infty} L_g(t) \, dt = \int_0^{+\infty} f(x) \, dx.$$

2(c). 证明: 若

$$\int_0^{+\infty} \frac{|f(x)|}{x} \, dx < +\infty,$$

则

$$\int_0^{+\infty} L_f(t) \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x} \, dx.$$

对 $n \geq 1$, 定义

$$f_n(x) := \sin x \, \mathbf{1}_{[0,n]}(x).$$

3(a). 证明

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad L_{f_n}(t) = \frac{1 - e^{-nt}(\cos n + t \sin n)}{1 + t^2}.$$

提示：注意

$$L_{f_n}(t) = \operatorname{Im} \left(\int_0^n e^{x(i-t)} dx \right), \quad i^2 = -1.$$

3(b). 迅速证明对每个 $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$, 并推出

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad e^{-nt}(\cos n + t \sin n) \leq e^{-(n-1)t} \leq 1.$$

3(c). 证明估计

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |L_{f_n}(t)| \leq \frac{2}{1 + t^2}.$$

3(d). 证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} L_{f_n}(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

3(e). 利用 2(c) 证明

$$\int_0^{+\infty} L_{f_n}(t) dt = \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx,$$

并由此推出

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

本问假设 $f \geq 0$, 并且 L_f 在 0 处可微。

4(a). 证明函数

$$\varphi(u) := \frac{1 - e^{-u}}{u}, \quad u \in \mathbb{R}_+^*,$$

单调递减。

4(b). 证明函数列

$$\varphi_n(x) := n(1 - e^{-x/n}), \quad n \geq 1, x \in \mathbb{R}_+,$$

非负且关于 n 单调递增。

4(c). 证明

$$\int_0^{+\infty} x f(x) dx = -L'_f(0).$$

17.2 问题 2

问题 2。

1. 利用 Fubini 定理与变量替换证明

$$I := \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

可以引入 I^2 。

对 $n \geq 1, x \in \mathbb{R}$, 定义

$$f_n(x) := \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \quad a_n := \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx.$$

2(a). 证明对每个 $u \in \mathbb{R}_+$ 及 $p \in \mathbb{N}$,

$$(1+u)^p \geq 1+pu.$$

2(b). 推出

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) \leq \frac{2}{1+x^2}.$$

2(c). 计算

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

3. 求出一个可积函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f_n(x)}{a_n} - f(x) \right| dx = 0.$$

4. 证明对每个 $\lambda \geq 1/2$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x^2} f_n(x) dx = +\infty.$$

校订注：原文把 f_n 定义为对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立，但公式含有 x^2/n ，在 $n=0$ 时无意义；现改为 $n \geq 1$ 。

17.3 问题 3

问题 3. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是概率空间，即 $\mu(X) = 1$ 。

回顾：可微函数 $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I 为 $\mathbb{R}$ 的区间) 是凸函数，当且仅当下面任一等价条件成立：

$$(i) \quad \varphi(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta\varphi(u) + (1-\theta)\varphi(v),$$

$$\theta \in [0, 1], \quad u, v \in I;$$

$$(ii) \quad \varphi(u) \geq \varphi(v) + \varphi'(v)(u-v), \quad u, v \in I.$$

1(a). 设 $f: X \rightarrow I$, $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 φ 凸, 且 $f, \varphi(f) \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ 。证明 Jensen 不等式

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \varphi(f) d\mu.$$

可以在 (ii) 中取 $v = \int_X f d\mu$, 并适当选择 u 。

1(b). 证明定义在 $I = \mathbb{R}_+$ 上的 $\varphi(x) = x^\alpha$ 为凸函数，当且仅当 $\alpha \geq 1$ 。

现考虑非负函数 $g \in L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ 。

2(a). 利用 Jensen 不等式证明：若 $p \geq 2$ 且 $g \in L^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, 则

$$g^{p/(p-1)} \in L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$$

并且

$$\left(\int_X g^{p/(p-1)} d\mu\right)^{p-1} \leq \int_X g^p d\mu.$$

2(b). 直接利用 Hölder 不等式重新证明 2(a)。

2(c). 推出：若 $f, g \geq 0$ 且 $f, g \in L^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, 其中 $p \geq 2$, 则

$$\left(\int_X fg d\mu\right)^p \leq \left(\int_X f^p d\mu\right) \left(\int_X g^p d\mu\right).$$

现设 $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 连续、递增，满足

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(1) > 0,$$

以及

$$\forall x, y \geq 0, \quad \psi(xy) \leq \psi(x)\psi(y),$$

并假设 $t \mapsto \psi(\sqrt{t})$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上为凸函数。

3(a). 证明对每个 $x \geq 1$,

$$\psi(x) \geq x^2 \psi(1).$$

3(b). 设 $f: (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ 。证明

$$\psi(f) \in L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu) \implies f \in L^2_{\mathbb{R}_+}(\mu).$$

3(c). 对满足 $\psi(f), \psi(g) \in L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ 的任意非负 Borel 函数 f, g , 证明

$$\psi\left(\int_X fg \, d\mu\right) \leq \psi(\|f\|_2)\psi(\|g\|_2).$$

再推出

$$\psi\left(\int_X fg \, d\mu\right) \leq \left(\int_X \psi(f) \, d\mu\right) \left(\int_X \psi(g) \, d\mu\right).$$

3(d). 证明 2(c) 是上述结论的一个特例。

校订注：原文在本题第 2 问开头把 g 写成属于 $L^1_{\mathbb{R}_+}(\lambda)$ ，但本题始终在概率空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 上积分；现把测度统一为 μ 。

17.4 问题 4

问题 4。 本题始终在配备 Lebesgue 测度 λ 的可测空间 $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ 上进行。积分 $\int f \, d\lambda$ 与 $\int f(x) \, dx$ 混用。

1(a). 证明映射

$$(u, v) \mapsto (u/v, v)$$

是 $(\mathbb{R}_+^*)^2$ 到自身的 Borel 映射。

1(b). 设 $f, g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ 为 Borel 函数。证明

$$(u, v) \mapsto f(u/v)g(v)$$

是从 $((\mathbb{R}_+^*)^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)^{\otimes 2})$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 的可测函数。

2(a). 设 $f, g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为非负 Borel 函数。证明

$$\int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} f(u/v)g(v) \frac{du \, dv}{v} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} f(x) \, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} g(x) \, dx \right).$$

2(b). 推出：若 $f, g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ 关于 Lebesgue 测度可积，则对几乎处处的 $u \in \mathbb{R}_+^*$ ，可以定义

$$(f \star_M g)(u) := \int_{\mathbb{R}_+^*} f(u/v)g(v) \frac{dv}{v}.$$

在积分无定义的点以及非正实数上，把 $f \star_M g$ 定义为 0。证明这样定义的 $f \star_M g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Borel 函数。

2(c). 证明：若 $f, g \in L^1(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$ ，则

$$f \star_M g = g \star_M f.$$

约定。 以下 $f \star_M g(u)$ 均指 2(b) 中定义的积分，只要该积分存在。

3(a). 假设 f 连续，并在包含于 $\mathbb{R}_+^*$ 的某个紧区间 $[a, b]$ 外为零；又设 g 在 $\mathbb{R}_+^*$ 的每个紧区间上可积。证明 $f \star_M g$ 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上处处存在且连续。

3(b). 设 $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ 为 Borel 函数，满足

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} |f(x)| \frac{dx}{x} < +\infty.$$

设 $(f_n)_{n \geq 0}$ 是 $\mathbb{R}_+^*$ 上的连续紧支集函数列，并且

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} |f(x) - f_n(x)| \frac{dx}{x} \rightarrow 0.$$

本问不要求证明这类函数列存在。若 Borel 函数 g 被某个实数 M 一致控制，证明对每个 $x \in \mathbb{R}_+^*$ ， $f \star_M g(x)$ 有定义，且

$$|f \star_M g(x) - f_n \star_M g(x)| \leq M \int_{\mathbb{R}_+^*} |f(y) - f_n(y)| \frac{dy}{y}.$$

推出 $f_n \star_M g$ 一致收敛于 $f \star_M g$ ，并证明后者连续。

4(a). 令

$$g := \mathbf{1}_{[a, b]}, \quad 0 < a < b.$$

证明对每个 $f \in L^1(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$ ， $f \star_M g$ 都存在且在 $\mathbb{R}_+^*$ 上连续。可以把它写成一个积分上下限依赖于 u 的积分。

4(b). 由此证明：不存在 $e \in L^1(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$ ，使对每个 $g \in L^1(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$ 都有

$$e \star_M g = g \quad \text{几乎处处.}$$

设 $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为非负 Borel 函数，并满足

$$\exists \alpha > 0, \quad \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x) e^{\alpha x} dx < +\infty. \quad (\text{C})$$

对 $t \geq 0$ ，定义

$$L_f(t) := \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x) x^t dx.$$

5(a). 证明对每个 $t \in \mathbb{R}_+$ ， $L_f(t) < +\infty$ 。例如可先证明对 $u \in \mathbb{R}_+$ ， $u^n \leq n! e^u$ 。

5(b). 证明：只要两个非负 Borel 函数 f, g 都满足 (C)，便有

$$L_{f \star_M g} = L_f L_g.$$

5(c). 给出一个不满足 (C) 的非负 Borel 函数 f ，但 $L_f(t)$ 对每个 $t \geq 0$ 仍然有限。

17.5 问题 5

问题 5。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是抽象测度空间, 且 $\mu(X) < +\infty$ 。本题旨在给出比控制收敛定理更弱的条件, 使几乎处处收敛能够推出 $L^1(\mu)$ 收敛。

称一列 $\mathcal{A}$ -可测函数 $(f_n)_{n \geq 1} : X \rightarrow \mathbb{R}$ **一致可积**, 如果

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 1} \int_{\{|f_n| \geq c\}} |f_n| d\mu = 0.$$

预备问题。 设 $g \in L^1_{\mathbb{R}^+}(\mu)$, 对 $A \in \mathcal{A}$ 定义

$$\mu^g(A) := \int_A g d\mu.$$

证明 μ^g 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的有限测度。

本问假设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 一致可积。

1(a). 证明对每个 $n \geq 1$ 、 $A \in \mathcal{A}$ 与 $c > 0$,

$$\int_A |f_n| d\mu \leq \int_{\{|f_n| \geq c\}} |f_n| d\mu + c\mu(A).$$

1(b). 推出

$$\sup_{n \geq 1} \|f_n\|_1 < +\infty.$$

1(c). 仍由 1(a) 证明: 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta_\varepsilon > 0$, 使对任意集合列 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$,

$$\sup_{n \geq 1} \mu(A_n) \leq \eta_\varepsilon \implies \sup_{n \geq 1} \int_{A_n} |f_n| d\mu \leq \varepsilon.$$

现假设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 一致可积, 并且几乎处处收敛于函数 f 。

2(a). 证明 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, 且

$$\|f\|_1 \leq \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_1.$$

2(b). 证明对每个 $A \in \mathcal{A}$,

$$\int_A |f| d\mu \leq \sup_{n \geq 1} \int_A |f_n| d\mu.$$

2(c). 对 $n \geq 1$, 置

$$A_{c,n} := \{|f - f_n| \geq c\}.$$

证明

$$\sup_{n \geq 1} \mu(A_{c,n}) \leq \frac{2 \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_1}{c}.$$

2(d). 证明对每个 $n \geq 1$ 及 $c > 0$,

$$\int_X |f - f_n| d\mu \leq \int_X \min\{|f - f_n|, c\} d\mu + 2 \sup_{m \geq 1} \int_{A_{c,n}} |f_m| d\mu.$$

2(e). 由以上各问推出

$$\int_X |f - f_n| d\mu \longrightarrow 0.$$

3(a). 证明: 若存在 $g \in L^1_{\mathbb{R}^+}(\mu)$, 使对每个 $n \geq 1$ 都有 $|f_n| \leq g$ 几乎处处, 则 (f_n) 一致可积。

3(b). 推出：对任意 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ，常值函数列 $f_n := f$ 一致可积。

4. 证明：若 (f_n) 与 (g_n) 都一致可积，则 $(f_n + g_n)$ 也一致可积。可先证明

$$\begin{aligned} \int_{\{|f_n+g_n|\geq\varepsilon\}} |f_n+g_n| d\mu &\leq \int_{\{|f_n|\geq\varepsilon/2\}} |f_n| d\mu + \int_{\{|g_n|\geq\varepsilon/2\}} |g_n| d\mu \\ &\quad + \int_{\{|f_n|\geq\varepsilon/2\}} |g_n| d\mu + \int_{\{|g_n|\geq\varepsilon/2\}} |f_n| d\mu, \end{aligned}$$

再使用 1(c)。

本问假设 $f_n \rightarrow f$ 于 $L^1(\mu)$ 。

5(a). 证明

$$\sup_{n \geq 1} \|f_n\|_1 < +\infty.$$

5(b). 证明：对每个 $\varepsilon > 0$ ，存在整数 $n_\varepsilon \geq 1$ ，使对每个 $c > 0$ ，

$$\sup_{n \geq 1} \int_{\{|f_n-f|\geq c\}} |f_n-f| d\mu \leq \max \left\{ \varepsilon, \int_{\{|f_1-f|\geq c\}} |f_1-f| d\mu, \dots, \int_{\{|f_{n_\varepsilon}-f|\geq c\}} |f_{n_\varepsilon}-f| d\mu \right\}.$$

5(c). 推出 $(f_n - f)$ 一致可积；再由第 4 问推出 (f_n) 本身一致可积。

6. 仅在本问中取 $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ 。证明

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$$

满足

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{\{|f|\geq c\}} f(x) dx = 0,$$

但 f 甚至不可积。

17.6 问题 6

问题 6. 对 $t \in \mathbb{R}_+^*$ ，定义

$$\Gamma(t) := \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

A 部分。

1(a). 证明 $\Gamma(t)$ 对每个 $t > 0$ 都有定义且属于 $\mathbb{R}_+$ 。

1(b). 证明

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t), \quad t > 0,$$

并推出

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

2(a). 证明

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

2(b). 证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

可以把等式左端平方，将一重积分化为二重积分，再作适当且严格论证的变量替换。

3(a). 特别考虑变量替换

$$v = \varphi(u) := \frac{u}{\sqrt{t}} - \sqrt{t},$$

证明

$$\Gamma(t+1) = t^t \sqrt{t} e^{-t} \int_{-\sqrt{t}}^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-v\sqrt{t}} dv.$$

3(b). 推出：对任意趋于 $+\infty$ 的实数列 (t_n) ,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{t_n}\right)^{t_n} \frac{\Gamma(t_n+1)}{\sqrt{t_n}} \geq \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}.$$

可以对每个 $v \in \mathbb{R}$ 计算

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[t \log \left(1 + \frac{v}{\sqrt{t}}\right) - v\sqrt{t} \right].$$

4(a). 证明

$$\int_{-\sqrt{t}}^0 \left(1 + \frac{v}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-v\sqrt{t}} dv = \int_0^{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{w}{\sqrt{t}}\right)^t e^{w\sqrt{t}} dw.$$

4(b). 证明对每个 $x \in (-1, 0]$,

$$\log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}.$$

4(c). 推出对每个 $w, t \in \mathbb{R}_+$,

$$\left(1 - \frac{w}{\sqrt{t}}\right)^t e^{w\sqrt{t}} \mathbf{1}_{[0, \sqrt{t}]}(w) \leq e^{-w^2/2}.$$

4(d). 证明

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{t}}^0 \left(1 + \frac{v}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-v\sqrt{t}} dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

5(a). 研究函数

$$x \mapsto \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2(1+x)}$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上的单调性。

5(b). 推出对 $u \in \mathbb{R}_+$ 、 $t \geq 1$,

$$\left(1 + \frac{u}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-u\sqrt{t}} \leq e^{-u^2/(2(1+u))}.$$

5(c). 证明

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-u\sqrt{t}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

6. 建立推广的 Stirling 公式

$$\Gamma(t+1) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{t}{e}\right)^t \sqrt{2\pi t}.$$

B 部分。

1(a). 证明对每个 $s, t > 0$,

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_{\mathbb{R}_+^2} x^{s-1} y^{t-1} e^{-(x+y)} dx dy.$$

1(b). 对 $u, v \in \mathbb{R}$, 令

$$\varphi(u, v) := (u(1-v), uv).$$

找出一个 $\mathbb{R}^2$ 中的开矩形, 使 φ 是它到 $(\mathbb{R}_+^*)^2$ 的 C^1 -微分同胚, 并加以证明。

1(c). 证明对每个 $s, t > 0$,

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \Gamma(s+t) \int_0^1 (1-v)^{s-1} v^{t-1} dv.$$

2. 证明

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}} = \pi.$$

注. 可参考习题 8.18 所附提示。

17.7 问题 7

问题 7. 本题三个部分彼此独立。

A 部分. 定义

$$f(t) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-t(x^4+y^4)}}{1+x^4+y^4} dx dy, \quad t \geq 0.$$

1. 证明

$$f(0) \leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2}{2+(x^2+y^2)^2} dx dy,$$

并用一个经典变量替换计算右端积分。

2. 证明 f 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续, 并且

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0.$$

提示: 先注意 $f(0) < +\infty$ 。

3. 证明 f 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上可微, 并满足微分方程

$$f'(t) = f(t) - \frac{I^2}{\sqrt{t}}, \quad I := \int_{\mathbb{R}} e^{-u^4} du.$$

4. 推出对每个 $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f(t) = 2I^2 \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} e^{t-u^2} du.$$

可以先验证右端是第 3 问微分方程的一个特解, 再使用第 2 问中的极限。

B 部分. 考虑测度空间 $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. 要证明蕴含关系

$$\forall A \in \mathcal{B}([0, 1]), \quad \int_A \frac{\lambda(dx)}{x} < +\infty \implies \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(A \cap [0, \varepsilon])}{\varepsilon} = 0.$$

1. 设 $A \in \mathcal{B}([0, 1])$, 且

$$\int_A \frac{\lambda(dx)}{x} < +\infty.$$

证明

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A \cap [0, \varepsilon]} \frac{\lambda(dx)}{x} = 0.$$

可使用极限的序列刻画。

2. 证明

$$\lambda(A \cap [0, \varepsilon])^2 \leq \left(\int_{A \cap [0, \varepsilon]} \frac{\lambda(dx)}{x} \right) \left(\int_{A \cap [0, \varepsilon]} x \lambda(dx) \right).$$

3. 推出所求蕴含关系。

4 (选做). 利用集合

$$A := \bigcup_{k \geq 2} \left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k} + a_k \right], \quad a_k := \frac{1}{k \log k} - \frac{1}{(k+1) \log(k+1)},$$

证明逆命题不成立。提示：用级数估计 $\lambda(A \cap [0, 1/n])$ 的上界，用和式估计

$$\int_{A \cap [1/n, 1]} \frac{\lambda(dx)}{x}$$

的下界，并注意

$$a_k \sim \frac{1}{k^2 \log k}.$$

C 部分。 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为测度空间，并设 $\Phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且严格递增，满足

$$\exists a, b > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad at \leq \Phi(t) \leq bt.$$

设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 与 f 是 $L^2_{\mathbb{R}_+}(X, \mu)$ 中的非负函数，并且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (\Phi(f_n) - \Phi(f))(f_n - f) d\mu = 0.$$

1. 证明：从 (f_n) 的每个子列中都能抽出子子列 (f_{k_n}) ，使

$$(\Phi(f_{k_n}) - \Phi(f))(f_{k_n} - f)$$

几乎处处收敛于 0，并且几乎处处被一个固定的 $L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ 函数控制。

2. 证明存在 $g \in L^2_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ 、 $h \in L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ ，使

$$f_{k_n}^2 \leq g f_{k_n} + h \quad \text{几乎处处},$$

再证明 f_{k_n} 几乎处处被一个固定的 $L^2_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ 函数控制。

3. 证明 $f_{k_n} \rightarrow f$ 几乎处处。可以利用第 1 问、 Φ 的连续性与严格递增性，证明对几乎处处的 x ， $f(x)$ 是 $f_{k_n}(x)$ 的唯一聚点。

4. 用控制收敛定理证明

$$f_{k_n} \rightarrow f \quad \text{于 } L^2_{\mathbb{R}_+}(\mu),$$

并进一步证明整个函数列 $f_n \rightarrow f$ 于 $L^2_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ 。

17.8 问题 8

问题 8. λ 表示单位区间 $[0, 1]$ 上的 Lebesgue 测度。给定函数 $f_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 和参数 $\alpha \in \mathbb{R}_+$ 。只要下式有意义，就对 Borel 函数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 定义

$$\Phi(f)(x) := \alpha \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt + f_0(x), \quad x \in [0, 1].$$

A 部分。

1. 证明：若 f 有界或非负，则 $\Phi(f)(x)$ 在 $[0, 1]$ 每一点都有定义。

2. 证明：若 $f \geq 0$ ，则

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \right) dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1-t} f(t) dt.$$

3(a). 证明：若 $f \in L^1([0, 1], \lambda)$ ，则 $\Phi(f)(x)$ 对几乎处处的 $x \in [0, 1]$ 有定义，并且 $\Phi(f)$ 在 $[0, 1]$ 上的任意补定义都属于 $L^1([0, 1], \lambda)$ 。推出：若 $f_0 \in L^1([0, 1], \lambda)$ ，则 Φ 定义了 $L^1([0, 1], \lambda)$ 到自身的映射。

3(b). 证明对每个 $f, g \in L^1([0, 1], \lambda)$ ，

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_1 \leq 2\alpha \|f - g\|_1.$$

由此证明：当 $\alpha \in (0, 1/2)$ 时，存在 $f_1 \in L^1([0, 1], \lambda)$ ，使

$$\Phi(f_1) = f_1 \quad \text{几乎处处.}$$

可以暂时把 $L^1([0, 1], \lambda)$ 看作完备度量空间。再证明这个不动点在 L^1 中唯一。

4(a). 固定 $x \in [0, 1]$ ，验证

$$\nu_x(A) := \int_{A \cap [0, x]} \frac{dt}{\sqrt{x-t}}, \quad A \in \mathcal{B}([0, 1]),$$

定义了 $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ 上的有限非负测度，并用 x 表示其总质量。

4(b). 设 μ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的有限非负测度。证明对任意非负可测函数 f ，

$$\int_X f d\mu \leq \sqrt{\mu(X)} \sqrt{\int_X f^2 d\mu}.$$

推出

$$L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$

4(c). 证明对任意 $[0, 1]$ 上的非负可测函数 f 与 $x \in [0, 1]$ ，

$$\left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \right)^2 \leq 2\sqrt{x} \int_0^x \frac{f(t)^2}{\sqrt{x-t}} dt.$$

4(d). 推出：若 $f_0 \in L^2([0, 1], \lambda)$ ，则 Φ 把 $L^2([0, 1], \lambda)$ 映到自身，并且对 $\|\cdot\|_2$ 满足与 3(b) 类似的不等式。

5. 此时能对 Φ 的不动点 f_1 的可积性作出什么更强结论？

B 部分。 以下假设 $f_0 \equiv 0$ 、 $\alpha = 1$ 。

1(a). 证明 $\Phi : L^1([0, 1], \lambda) \rightarrow L^1([0, 1], \lambda)$ 是线性算子，并且

$$\|\Phi\| \leq 2, \quad \|\Phi\| := \sup\{\|\Phi(f)\|_1 : \|f\|_1 \leq 1\}.$$

1(b). 对 $n \geq 1$, 令

$$f_n := n\mathbf{1}_{[0,1/n]}.$$

证明 $\|f_n\|_1 = 1$, 并且

$$\|\Phi(f_n)\|_1 = \frac{4n}{3} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{3/2} \right).$$

推出

$$\|\Phi\| = 2.$$

2(a). 设 $f \in L^1([0,1], \lambda)$. 证明对 $x \in [0,1]$,

$$\Phi(f)(x) = \sqrt{x} \int_0^1 \frac{f(xu)}{\sqrt{1-u}} du.$$

2(b). 推出: 若 f 有界且在 0 处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(f)(x)}{\sqrt{x}} = 2f(0).$$

2(c). 仍由 2(a) 推出: 若 $f \geq 0$ 且递减, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(f)(x)}{\sqrt{x}} = 2f(0+).$$

2(d). 如果 f 只假设非负并在 0 处存在右极限, 2(c) 的结论还保留多少?

现假设 f 在 $[0,1]$ 上有界且在 0 处可微.

3(a). 证明存在 $c > 0$, 使

$$\forall t \in [0,1], \quad |f(t) - f(0)| \leq ct.$$

3(b). 定义

$$\Psi(f)(x) := \frac{\Phi(f)(x)}{\sqrt{x}}, \quad x \in (0,1], \quad \Psi(f)(0) := 2f(0).$$

证明 $\Psi(f)$ 在 0 处可微, 且

$$\Psi(f)'(0) = \frac{4}{3}f'(0).$$

3(c). 推出 $\Phi(f)$ 在 0 附近的一个渐近展开.

17.9 问题 9

问题 9. 在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上, 对任意有限测度 μ , 定义

$$\hat{\mu}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \mu(dx), \quad u \in \mathbb{R}.$$

本题研究映射 $\mu \mapsto \hat{\mu}$ 的若干性质.

A 部分.

1(a). 说明 $\hat{\mu}$ 在 $\mathbb{R}$ 每一点都有定义, 并证明它是处处连续的复值函数.

1(b). 若

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \mu(dx) < +\infty,$$

证明 $\hat{\mu}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微, 并给出其导函数。

1(c). 归纳证明: 若对某个整数 $n \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n \mu(dx) < +\infty,$$

则 $\hat{\mu}$ 可 n 次连续微分, 并写出各阶导函数的简洁公式。

1(d). 若测度 μ 在中心对称映射 $x \mapsto -x$ 下不变, 证明 $\hat{\mu}$ 为偶函数且只取实值。

2(a). 证明对任意 $u, v \in \mathbb{R}$,

$$|\hat{\mu}(u) - \hat{\mu}(v)| \leq \int_{\mathbb{R}} \min\{2, |u - v| |x|\} \mu(dx).$$

2(b). 推出 $\hat{\mu}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。

B 部分. 仅在本部分中, 假设

$$\mu(dx) = f(x) \lambda(dx), \quad f \in L^1_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}, \lambda),$$

其中 λ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度。

1(a). 假设 f 是阶梯函数。证明

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \hat{\mu}(u) = 0.$$

1(b). 证明对任意 $f \in L^1_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}, \lambda)$, 仍有

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \hat{\mu}(u) = 0.$$

可以使用适当的稠密性定理。

考虑

$$f(x) := e^{-x^2/2}.$$

2(a). 用任意方法计算 $\hat{\mu}(0)$ 。

2(b). 用分部积分建立 $\hat{\mu}$ 与 $\hat{\mu}'$ 之间的一个简单关系, 并推出

$$\hat{\mu}(u) = \sqrt{2\pi} e^{-u^2/2}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

C 部分.

1(a). 用 Fubini 定理和简单变量替换证明: 对 $u \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-u)^2/(2\varepsilon)} \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iuv} \hat{\mu}(v) e^{-\varepsilon v^2/2} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}} dv.$$

1(b). 设 μ, ν 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的有限测度。由此证明: 若 $\hat{\mu} = \hat{\nu}$, 则对任意紧支集函数 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 与 $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-u)^2/(2\varepsilon)} \mu(dx) \right) du = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-u)^2/(2\varepsilon)} \nu(dx) \right) du.$$

两边均为有限实数。

2. 利用适当的 Fubini 定理与简单变量替换推出

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-v) e^{-v^2/(2\varepsilon)} \frac{dv}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-v) e^{-v^2/(2\varepsilon)} \frac{dv}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \nu(dx).$$

3(a). 再假设 φ 为 Lipschitz 函数。证明

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x-v) - \varphi(x)| e^{-v^2/(2\varepsilon)} \frac{dv}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} = 0.$$

3(b). 推出：对任意紧支集 Lipschitz 函数 φ 及 $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x-v) e^{-v^2/(2\varepsilon)} \frac{dv}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \rightarrow \varphi(x).$$

4. 利用第 2 问作出结论：

$$\hat{\mu} = \hat{\nu} \implies \mu = \nu.$$

校订注：原文 A.1(c) 在矩条件下误称“ μ 可 n 次连续微分”；测度本身没有这里所说的导数，按上下文应为 $\hat{\mu}$ 可 n 次连续微分。

17.10 问题 10

问题 10. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 、 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 是两个 σ -有限测度空间， $p \in [1, +\infty)$ ， q 是其共轭指数。设

$$\varphi : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$$

为 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -可测、非负且关于 $\mu \otimes \nu$ 可积。

1. 对 $x \in X$ ，令

$$\Phi(x) := \int_Y \varphi(x, y) \nu(dy).$$

不作计算，说明 Φ 是 $\mathcal{A}$ -可测函数，并且对几乎处处的 x 取有限非负值。

设 $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ 关于包含关系递增，满足

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = X, \quad \mu(A_n) < +\infty.$$

2(a). 证明对每个 $n \geq 1$,

$$\int_X \mathbf{1}_{\{\Phi \leq n\} \cap A_n}(x) \Phi(x)^p \mu(dx) = \int_{X \times Y} \mathbf{1}_{\{\Phi \leq n\} \cap A_n}(x) \Phi(x)^{p-1} \varphi(x, y) (\mu \otimes \nu)(dx, dy).$$

2(b). 证明

$$\begin{aligned} & \int_X \mathbf{1}_{\{\Phi \leq n\} \cap A_n}(x) \Phi(x)^p \mu(dx) \\ & \leq \left(\int_X \mathbf{1}_{\{\Phi \leq n\} \cap A_n}(x) \Phi(x)^p \mu(dx) \right)^{1/q} \int_Y \left(\int_X \varphi(x, y)^p \mu(dx) \right)^{1/p} \nu(dy). \end{aligned}$$

2(c). 记

$$\varphi_y(x) := \varphi(x, y).$$

推出

$$\|\mathbf{1}_{\{\Phi \leq n\} \cap A_n} \Phi\|_{L^p(\mu)} \leq \int_Y \|\varphi_y\|_{L^p(\mu)} \nu(dy).$$

2(d). 建立 Minkowski 积分不等式

$$\|\Phi\|_{L^p(\mu)} \leq \int_Y \|\varphi_y\|_{L^p(\mu)} \nu(dy).$$

2(e). 说明为什么 2(a) 中要引入 $A_n \cap \{\Phi \leq n\}$ 。

2(f). 证明：若 $\varphi \in L^p(\mu \otimes \nu)$ 且 ν 是有限测度，则

$$\int_Y \|\varphi_y\|_{L^p(\mu)} \nu(dy) < +\infty.$$

下一问只需使用 2(d)。设 $p \in (1, +\infty)$ ，并设

$$f \in L^p_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda).$$

对 $A > 0$ ，置

$$\varphi(x, y) := f(xy) \mathbf{1}_{[0, A]}(x) \mathbf{1}_{[0, 1]}(y), \quad \mu = \lambda, \quad \nu = \lambda|_{[0, 1]}.$$

3(a). 证明 φ 非负且关于 $\lambda \otimes \lambda|_{[0, 1]}$ 可积；计算 $\Phi(x)$ （对 $x \in \mathbb{R}_+$ ）以及 $\|\varphi_y\|_{L^p(\lambda)}$ （对 $y \in (0, 1]$ ）。

3(b). 推出 Hardy 不等式：对每个 $p \in (1, +\infty)$ 与 $f \in L^p(\mathbb{R}_+, \lambda)$ ，

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p, \quad F(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du, \quad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

校订注：原文第 3 问仍沿用章首的 $p \geq 1$ ，但 $\int_0^1 y^{-1/p} dy$ 只在 $p > 1$ 时有限，且最终 Hardy 常数 $p/(p-1)$ 在 $p=1$ 时也无定义；故第 3 问应限制为 $p \in (1, +\infty)$ 。原文还从 3(a) 直接跳到 3(c)，现把后者按顺序编号为 3(b)。

17.11 问题 11

问题 11。 在半赋范空间

$$L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda), \quad p \geq 1,$$

上工作，并以 $\|\cdot\|_p$ 表示通常的 L^p 半范数。

1. 证明：若 $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \lambda)$ ，则

$$u \mapsto \frac{f(u)}{u}$$

在每个 $[a, +\infty)$ 、 $a > 0$ 上可积。

以下考虑函数

$$F(0) := 0, \quad F(x) := \int_x^{+\infty} \frac{f(u)}{u} du, \quad x > 0.$$

$F(0)$ 的值只为书写方便，不影响后文。

本问假设 f 连续，并在包含于 $(0, +\infty)$ 的某个紧区间 $[a, b]$ 外为零。

2(a). 证明 F 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上连续可微，在 0 附近为常数，并在 $+\infty$ 附近为零。

2(b). 利用分部积分证明严格恒等式

$$\int_{\mathbb{R}_+} |F(x)|^p dx = p \int_{\mathbb{R}_+} |F(x)|^{p-2} F(x) f(x) dx,$$

其中 $p = 1$ 时把 $|F|^{p-2}F$ 理解为 $\operatorname{sgn}(F)$ (在 $F = 0$ 处任取 0)。

仍假设 f 连续且在某个 $[a, b] \in (0, +\infty)$ 外为零。

3(a). 再假设 $f \geq 0$ 。证明存在与 f 无关的常数 C_p , 求出它, 并使

$$\|F\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

可以对 2(b) 的右端使用 Hölder 不等式, 并验证 $F \in L^p$ 。

3(b). 证明即使 f 不非负, 上述不等式仍成立。

设 $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \lambda)$ 。允许使用如下稠密性结论: 存在连续函数列 (f_n) , 每个 f_n 都在某个 $I_n \in (0, +\infty)$ 外为零, 并且

$$\|f - f_n\|_p \rightarrow 0.$$

4(a). 利用课程中的某个定理证明, 可以抽取一个仍记为 (f_n) 的子列, 除上述性质外还满足

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{对几乎处处的 } x.$$

以下只使用这个子列。

4(b). 证明对每个 $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|F(x)| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{|f_n(u)|}{u} du.$$

4(c). 推出 $F \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \lambda)$, 并且

$$\|F\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

5. 设 $\rho > 1/p$, 并令

$$f_\rho(x) := x^{-\rho} \mathbf{1}_{\{x \geq 1\}}.$$

计算比值

$$\frac{\|F\|_p}{\|f\|_{\rho p}}.$$

由此能推出什么?

校订注: 原文 2(b) 对一般实值 f 写 $\int F^p = p \int F^{p-1} f$ 。当 p 非整数且 $F < 0$ 时, F^p 不一定是实数。现改为适用于任意实值 f 的 $|F|^p$ 恒等式; 当 $f \geq 0$ 时它退化为原书后续实际使用的公式。

第六部分

习题解答与选择题答案

第十八章 习题提示与解答

18.1 第 1 章习题

习题 1.1(b)。先用一致逼近把问题化到 g 在某个紧区间上连续可微、因而为 Lipschitz 函数的情形。

习题 1.2。(a) 先假设 f 是阶梯函数, 再使用 Riemann 可积性的定义。

(b) 得到

$$\alpha = -1, \quad \beta = \frac{1}{2\pi}.$$

(c) 用 e^{ikx} 计算相应和式。

(d) 由 (a),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} (\alpha x + \beta x^2) \left(\sum_{k=1}^n \cos(nx) \right) dx = -\frac{1}{2} \int_{\delta}^{\pi} (\alpha x + \beta x^2) dx.$$

另一方面,

$$\int_0^{\delta} (\alpha x + \beta x^2) \left(\frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} - 1 \right) dx = O(\delta) \rightarrow 0.$$

习题 1.3。定义

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} f(x), & x = k/n! \quad (k \in \{0, \dots, n!\}), \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则

$$\|f - \varphi_n\|_{\sup} \leq \frac{1}{n}.$$

习题 1.4。反证; 构造一系列嵌套闭区间 $(I_n)_{n \geq 1}$, 使

$$\sup_{x \in I_n} f(x) \leq \frac{1}{n}.$$

习题 1.5。

$$\log u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) \rightarrow \int_0^1 \log(1+x) dx = 2 \log 2 - 1.$$

习题 1.6。设 S_n 是 f 在 $[0, 1]$ 上、对应分点 $(k/n)_{1 \leq k \leq n}$ 的 Riemann 和。利用步长 $2/n$ 的分点 $(2k/n)_{1 \leq k \leq [n/2]}$, 得到

$$S_n + T_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{[n/2]} f\left(\frac{2k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx.$$

故 $T_n \rightarrow 0$ 。

习题 1.7。(a) 若 f 递增, 且

$$x_k := a + \frac{k}{n}(b-a), \quad 1 \leq k \leq n-2,$$

则

$$\frac{b-a}{n}f(x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq \frac{b-a}{n}f(x_{k+1}).$$

(b) 在 $X = 1$ 处计算

$$\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \frac{X^n - 1}{X - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} (e^{-ik\pi/n} X - e^{ik\pi/n}).$$

(c) 在 $(0, \pi)$ 上把 (a) 用于 $\log(\sin)$; 该函数分别在 $(0, \pi/2]$ 与 $[\pi/2, \pi)$ 上单调。再对 (b) 的等式取对数。

习题 1.8。 设 F, G, H 分别是 f, g, fg 在 0 点取零值的原函数。证明

$$H = F \circ G$$

在 $[0, 1]$ 上递减。

习题 1.9。 对 $p, q \in \mathbb{N}^*$ 、 $q > p$,

$$N_1(f_q - f_p) \leq \sum_{n=p+1}^q \frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$$

(f_n) 与 (f'_n) 在每个 $[0, a]$ 、 $a < 1$ 上正规收敛, 从而一致收敛于 f 与 f' 。有

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f(x) = -\log(1-x).$$

若 $f_n \rightarrow g$ 于 $(C([0, 1], \mathbb{R}), N_1)$, 则对 $a < 1$,

$$\int_0^a |g(x) + \log(1-x)| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a |g(x) - f_n(x)| dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} N_1(g - f_n) = 0.$$

故 $g(x) = -\log(1-x)$ 于 $[0, 1)$, 与 g 在 1 处连续矛盾。

习题 1.10。 (a) 对 $a \in (0, 1)$, 在 $[0, a]$ 上一致收敛, 因为充分大的 n 满足 $\max_{[0, a]} f_n = f_n(a) \rightarrow 0$ 。但在 $[0, 1]$ 上不一致:

$$\max_{[0, 1]} f_n = f_n(1/\sqrt{n}) = \frac{2^{n-2}}{\sqrt{n}} \rightarrow +\infty.$$

(b)

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{\log(n^{2n} + 1)}{2n} \rightarrow \frac{\log 2}{2}.$$

习题 1.11。 (a) 使用 $e^{-x} \log x$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛的幂级数展开, 从而交换级数与积分。

(b) $1/(x-1)$ 的幂级数在 $[0, a]$ 、 $a < 1$ 上一致收敛, 因此

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\log x}{x-1} dx &= -\log a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2} \\ &= -\log a \log(1-a) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

习题 1.12。 (a) 展开 e^x 并使用 Newton 二项式。 f_n 的幂级数系数为

$$\begin{cases} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \right) \geq 0, & k \leq n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

(b) 固定 $a > 0$ 。当 $n \geq a$ 时,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^n f_n(x) e^{-2x} dx \leq a f_n(a) + \int_a^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= a f_n(a) + e^{-a} \longrightarrow e^{-a}. \end{aligned}$$

右端可令 a 充分大而任意小, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = 1.$$

习题 1.13. 为证明在 0 处可微, 在 $[\varepsilon, 1]$ 上引入

$$t \mapsto \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

并作分部积分, 再令 $\varepsilon \downarrow 0$ 。

习题 1.14. 为在 1 处连续延拓, 估计

$$\frac{1}{\log t} - \frac{1}{t-1}.$$

习题 1.15. (a) 对 f 的两个表达式之差求导, 所得导数为 0。

(b) 由 $f(0) = \pi/4$ 及 $\lim_{+\infty} f = 0$, 得到

$$I^2 = \frac{\pi}{4}.$$

(c) 令

$$g_n(x) := \int_{-n}^n \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

(g_n) 在 $\mathbb{R}_+$ 上一致收敛, 且 (g'_n) 在每个紧子集上一致收敛; 事实上对 $a > 0$, $x \in [0, a]$, 尾项可由

$$2 \int_{an}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

控制。因此可以在积分号下求导。

(d) 对 $x > 0$,

$$g'(x) = -2I^2 e^{-x^2}, \quad g(x) = -2I^2 \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

且

$$g(0) = \frac{\pi}{2} = 2I^2.$$

习题 1.16. (a) 第一个等式由对 I_n 作分部积分得到, 其中 $x \mapsto x/\sqrt{1-x^2}$ 有简单原函数; 第二个等式再由归纳得到。由于 (I_n) 递减,

$$I_n I_{n+1} \leq I_n^2 \leq I_{n-1} I_n,$$

结合第二个等式即得等价式。

(b) 用 (a) 的第一个等式归纳, 再用 0 点 Taylor-Lagrange 公式及 (a) 的等价式:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1), \quad 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{(2k+1)I_{2k+1}} \leq \frac{x^{n+1}(1-x)^{-n-3/2}}{(2n+3)I_{2n+3}}.$$

校订注: 原稿在本式中把求和项的指标 k 误印成 n , 并把 Taylor-Lagrange 余项中的 x^{n+1} 误印成 x^{n+2} 。此处按 $f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}/(n+1)!$ 改正。

(c) 对 $x < 1$, (b) 中级数在 $[0, x]$ 上一致收敛; 逐项积分即可得到 $\arcsin$ 的幂级数。

(d) 对 $a < 1$, 一致收敛给出

$$\int_0^a \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 I_{2n+1}} \int_0^a \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

令 $a \uparrow 1$ 。左端趋于

$$\frac{1}{2} [\arcsin^2 x]_0^1,$$

右端由在 $[0, 1]$ 上的一致收敛趋于 $\sum_{n \geq 0} (2n+1)^{-2}$ 。

习题 1.17. (a) 先对常数 1、再对 θ , 连续两次对 I_{2n} 分部积分。

(b) 把 (a) 的等式除以 $n^2 I_{2n}$, 并用

$$2n I_{2n} = (2n-1) I_{2n-2}.$$

(c)

$$J_n \leq \frac{\pi^2}{4} (I_{2n} - I_{2n+2}).$$

(d) 由习题 1.16(a) 的等价式与 (c),

$$\frac{J_n}{I_{2n}} \rightarrow 0.$$

对 (b) 的等式作望远镜求和, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2J_0}{I_0} = \frac{\pi^2}{6}.$$

习题 1.18. (a) 该函数在 $(0, 1)$ 上导数为零, 且在 $0+$ 的极限为 0。

(b) 对

$$\frac{\log(1-t)}{t} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$$

在 $[0, x]$ 与 $[1-x, 1]$ 上积分; 当 $x \in (0, 1)$ 时该级数正规收敛, 故一致收敛。

(c) 在 (b) 的公式中取 $x = 1/2$ 。

18.2 第 2 章习题

习题 2.3. (a) 对 n 作归纳。(b) 注意

$$\text{card}(A) = \sum_{x \in X} \mathbf{1}_A(x).$$

习题 2.5. 若 $n \mapsto x_n = 0.d_1^m d_2^m \cdots$ 是 $\mathbb{N}^*$ 到 $[0, 1)$ 的双射, 取

$$x = 0.d_1 d_2 \cdots, \quad d_n \notin \{d_n^m, 9\}.$$

习题 2.6. 考虑 $\mathbb{N}$ 的所有有限子集所成的集合。

习题 2.7. 证明 A 可以写成一族有限集的并, 而这族有限集由可数集 $\mathbb{Z}[X]$ 编号。

习题 2.8。 对 $k, n \in \mathbb{N}^*$, 考虑

$$\{x \in (-k, k) : |f(x+) - f(x-)| \geq 1/n\}.$$

习题 2.9。 按等价关系

$$x \sim y \iff x, y \text{ 属于同一个包含于 } \Omega \text{ 的区间}$$

把 Ω 分成等价类。

18.3 第 3 章习题

习题 3.1(a)。 固定 p , 对 n 作 Euclid 除法, 并证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_p}{p}.$$

习题 3.2。 仿照习题 3.1。

习题 3.3。 调整习题 3.2 的论证。

18.4 第 4 章习题

习题 4.3。 刻画 B_n , 并证明 $\{1/2\}$ 不属于 $\bigcup_n B_n$ 。

习题 4.4。 证明

$$\{A \in \mathcal{P}(X) : A \times B \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}\}$$

是一族 σ -代数。

习题 4.5。 (b) 使用对可数交的稳定性, 并注意对 $A \in \mathcal{A}$,

$$A = \bigcup_{x \in A} \dot{x}.$$

(c) 假设 $\mathcal{A}$ 可数; 若

$$X = \bigcup_{i \in I} \dot{x}_i,$$

证明

$$\Phi : \mathcal{P}(I) \rightarrow \mathcal{A}, \quad \Phi(J) := \bigcup_{j \in J} \dot{x}_j$$

是双射。

18.5 第 5 章习题

习题 5.3(b)。 第一种情形考虑 $f^{-1}(\{y, -y\})$, 第二种情形考虑 $f^{-1}(\{y\})$, 其中 $y \in \mathbb{R}$ 。

习题 5.4(b)。 用阶梯函数列 (s_n) 逼近 g ; 写成 $s_n = t_n \circ f$, 并在 (t_n) 的收敛集上定义 h 。

习题 5.5(b)。 使用习题 5.4(b) 的刻画。

习题 5.6(a)。 使用定义 1.4。

习题 5.7。 证明对 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$z = e^{i\theta}|z|, \quad \theta = 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right).$$

习题 5.8。 考虑点到集合的距离函数。

习题 5.9。 (a) 考虑

$$A := \liminf_n f_n^{-1}(\Omega).$$

(b) 考虑开集

$$\Omega_k := \{x \in \Omega : d(x, \Omega^c) > 1/k\}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

的并。

18.6 第 6 章习题

习题 6.4(a)。 考虑集合 $\{|f| \leq n\}$ 、 $n \in \mathbb{N}$ 。

习题 6.5。 (a) 对 $x \leq y$ 计算 $\mu([x, y])$ 。(b) 使用测度 μ 的左、右连续性。(c) D 可数。

习题 6.6(b)。 证明对补集的稳定性时使用 (a)。

习题 6.8(a)。 考虑以有理点为中心的开区间之并。

习题 6.9。 分别考虑 $[0, 1]$ 中二进制展开的所有偶数位系数为零的点集, 和所有奇数位系数为零的点集。

习题 6.10。 在 $\mathbb{R}^d$ 的闭立方体上写出 f 的一致连续性, 再把立方体分割成边长足够小的小立方体。

习题 6.11(b)。 调整第 6.6 节命题 6.5 的证明。

习题 6.12。 (a) 使用 Cauchy 判别准则。(b) 证明对 $k \in \mathbb{N}^*$,

$$C \subset \liminf_n A_{k,n}.$$

(c) 考虑

$$A_\varepsilon := \bigcap_{k \geq 1} A_{k, n_{k, \varepsilon}}.$$

习题 6.13。 (a) 使用习题 6.12 的 Egoroff 定理。(b) 构造子列 (f_{n_k}) , 使

$$\mu(\{|f_{n_k} - f| > 1/k\}) < 1/k^2,$$

并考虑

$$A := \liminf_k \{|f_{n_k} - f| \leq 1/k\}.$$

习题 6.14。 (a) 为证明等式, 先证明: 若 f 在开集 Ω 上几乎处处为零, 则在 Ω 上处处为零。

(b) 取 X 的可数开基 (U_n) , 并把 $\operatorname{supp}_\mu f$ 的补集写成相应开基元素之并。(c) 使用 (b)。

习题 6.15。 (a) 在可数开基中选取属于 $\mathcal{O}_\mu$ 的元素, 并用测度的 σ -次可加性。(c) 使用

$$\int_A f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \quad \mu\text{-几乎处处}.$$

习题 6.16。 (b) 对可数族 $(A_n) \subset \mathcal{P}(X)$ 与 $\delta > 0$, 选取 $R_\varepsilon(A_n)$ 的覆盖 (B_k^n) , 使

$$\sum_{k \geq 1} (\operatorname{diam} B_k^n)^\alpha - \delta/2^n < \mu_\varepsilon^\alpha(A_n).$$

(c) 注意 $\mu^\alpha \leq \mu_\varepsilon^\alpha$ 。

习题 6.17。 (a) 用直径不超过 ε 的小超立方体铺砌 Q 。(c) 使用习题 6.16(d)。(d) 使用 (a), 并证明存在 $b_d > 0$, 使

$$\mu^d(Q) \geq b_d \lambda_d(Q).$$

习题 6.18。 (b) 证明

$$A \Delta B \subset (A \Delta A') \cup (B \Delta B') \cup (A' \Delta B').$$

(c) 证明

$$A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta C),$$

以及

$$\arctan(x+y) \leq \arctan x + \arctan y, \quad x, y \geq 0.$$

(d) 若 (A_n) 在 $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ 中收敛于 A , 利用

$$\nu(A_n) \leq \nu(A) + \nu(A_n \Delta A)$$

先取上极限, 再类似处理下极限。

习题 6.19。 (a) 用

$$A^+ := A \cap \mathbb{R}_+, \quad A^- := (-A) \cap \mathbb{R}_+$$

表示 $|A|$ 。(b) 使用 λ 的一个刻画, 并注意

$$A^- = -(A \cap \mathbb{R}_+).$$

习题 6.20。 (a) 先证明

$$\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B) = \int_X (\mathbf{1}_A - \mu(A))(\mathbf{1}_B - \mu(B)) d\mu.$$

(b) 第二个不等式使用

$$\mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) - \mu(A).$$

(c) 使用 $\min(a, b) \leq \sqrt{ab}$ ($a, b \geq 0$)。

习题 6.21。 (b) 定义

$$\lambda_0(B) := \mu_0(e^B).$$

证明 λ_0 平移不变且等于 Lebesgue 测度 λ 。(c) 使用 (b) 的表示。

习题 6.22。 (a) 先归纳证明 μ 对 n 个两两不交的 $\mathcal{A}$ 元素可加, 再用条件 (iii)。(b) 用“有上界的递增实数列收敛于其上确界”把 $\lim_n$ 换成 $\sup_n$ 。

习题 6.23。 (a) 使用命题 6.3。(b) 使用阶梯函数逼近基本引理。

18.7 第 7 章习题

习题 7.1(b)。 把 F^c 写成可数个开区间 I 的并, 并用反证法证明 $\mu(f^{-1}(I)) = 0$ 。

习题 7.2。 必要性考虑

$$f := \sum_{n \geq 0} a_n \mathbf{1}_{E_n};$$

充分性考虑 $E_n := \{f \geq 1/n\}$ 。

习题 7.4. (a)

$$[|f|] = \sum_{n \geq 1} n \mathbf{1}_{\{n \leq |f| < n+1\}}.$$

(c) 证明对 $p \geq n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n u_k - n u_{p+1} \leq v_p.$$

习题 7.5(a). 对

$$A_n := \{2^{-n} \leq |f| \leq 2^n\}$$

及函数列 $(|f| \mathbf{1}_{A_n})$ 使用 Beppo Levi 定理。

习题 7.6. 使用习题 7.5。

习题 7.7(b). 在带计数测度的 $\mathbb{N}$ 上, 把 (a) 用于

$$f_p(q) := a_{p,q}.$$

习题 7.8(b). 在 $\mathbb{N}$ 上考虑

$$f_n(k) := \frac{1}{k+1} \mathbf{1}_{\{k \geq n\}}.$$

习题 7.9. (b) 若 $x \notin D := \bigcup_{n \geq 1} \sigma_n$, 证明: 对每个 n 存在 k , 使充分小的 h 满足

$$I_h(x) \subset I_{n,k};$$

反之, 对每个 $h > 0$, 充分大的 n 存在 k , 使

$$x \in I_{n,k} \subset I_h(x).$$

(c) 对 (φ_n) 、 (ψ_n) 使用 Beppo Levi 定理和第 1 章关于 Riemann 和的定理 1.4, 再用 (a)。

习题 7.10(b). 证明

$$x_0 := \int_X f \, d\mu \in I.$$

习题 7.11. 对 f/g , 以 $g \, d\mu$ 为测度、以 $x \mapsto x \log x$ 为凸函数使用 Jensen 不等式。

习题 7.12. 令 $x = nt$, 并对

$$g_n(x) := \frac{n}{n+x} \mathbf{1}_{[0,n]}(x)$$

使用 Beppo Levi 定理。

习题 7.13. (a)

$$\inf_{t \in (0,1)} \left(\frac{a}{t} + \frac{b}{1-t} \right) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

(b) 在 (a) 中取

$$a := \left(\frac{\|f\|_1}{\|f\|_1 + \|g\|_1} \right)^2.$$

习题 7.14. $I_0 = 0$ 。若 $a > 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((1+x)^a - x^a)^2 = +\infty,$$

故 $I_a = +\infty$ 。若 $a < 0$, 则

$$((1+x)^a - x^a)^2 \sim_{x \rightarrow 0+} x^{2a},$$

且

$$((1+x)^a - x^a)^2 = x^{2a} (1 - (1+1/x)^a)^2 \sim_{x \rightarrow +\infty} a^2 x^{2a-2}.$$

由 Riemann 型积分判别, $I_a < +\infty$ 当且仅当

$$2a > -1.$$

18.8 第 8 章习题

习题 8.1。 Fatou 引理给出

$$0 \leq \min(\mu(A), \mu(A^c)).$$

习题 8.2(b)。 在 $\mathbb{R}$ 上考虑

$$f_n(x) := \frac{1}{n} e^{-x/n} \mathbf{1}_{[n, +\infty)}(x).$$

习题 8.3。 (a) 对几乎处处定义的函数列

$$g_n := f_n + f - |f_n - f|$$

使用 Fatou 引理。

(b) 在 $\mathbb{N}$ 上考虑

$$f_n := \mathbf{1}_{\{n\}} - \mathbf{1}_{\{n+1\}}.$$

习题 8.4(a)。 对

$$g_n := |f_n| + |f| - |f_n - f|$$

使用 Fatou 引理。

习题 8.5。 (a) 使用定理 8.4(b)。

(b) 积分等于

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{e^x + 1} > 0,$$

而和式等于 0, 所以 (a) 的假设不成立。

习题 8.6。 (a) 在计数测度下使用定理 8.4(b)。

(b) 由望远镜消去, 第一重和等于

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+1)(p+2)} > 0,$$

第二重和等于 0。所以 (a) 的假设不成立。

习题 8.7(a)。 当 $x > 0$ 时, 把

$$\frac{1}{1 - e^{-x}}$$

展开成级数。

习题 8.8(b)。 把积分拆成 $[0, 1]$ 与 $[1, +\infty)$ 上的两部分, 在第二部分作变量代换 $y = 1/x$, 再使用 (a)。

习题 8.9。 根据 f 的单调方向, 使用控制收敛定理或 Beppo Levi 定理。

习题 8.10。 (a) 对每个 $x \notin \pi\mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n \sin^2 x} = 0, \quad \lambda(\pi\mathbb{N}) = 0.$$

由控制收敛定理即得结论。

(b) 作平移 $x \mapsto x - \pi$, 得到

$$I_n(0) = I_n(0) + \int_{-\pi}^0 e^{-n \sin^2 x} dx.$$

若 $I_n(0)$ 有限, 这与右端新增积分严格为正矛盾; 故 $I_n(0) = +\infty$ 。

习题 8.11. 第一个等式中作变量代换 $x = n(1-t)$, 并使用

$$\int_0^1 (1-t^{n+1}) \log(1-t) dt = 0.$$

第二个等式可仿照应用 7.1 证明。

习题 8.12. (b) 对接近 1 的 a , 估计

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^1 nx^n f(x) dx.$$

(c) 令

$$u_n := \int_0^1 x^n |f(x)| dx.$$

证明 $(u_n)_{n \geq 0}$ 递减且 $\sum_{n \geq 0} u_n < +\infty$, 再推出 $nu_n \rightarrow 0$ 。

习题 8.13. (a)

$$b_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

(b) 由周期性与奇偶性, 只需考虑 $x \in [0, \pi]$ 。若 $nx \leq \pi$, 则由 $|\sin u| \leq |u|$, 和式的绝对值至多为 $nx \leq \pi$ 。否则取满足 $px \leq \pi$ 的最小 $p \in \{1, \dots, n-1\}$, 并写成

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{k=1}^p \frac{\sin(kx)}{k} + \sum_{k=p+1}^n \frac{\sin(kx)}{k}.$$

第一项的绝对值至多为 π 。对第二项, 以

$$S_k(x) := \sum_{j=p+1}^k \sin(jx), \quad |S_k(x)| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x},$$

作 Abel 变换, 得到

$$\left| \sum_{k=p+1}^n \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{|S_n(x)|}{n+1} + \sum_{k=p+1}^n \frac{|S_k(x)|}{k(k+1)} \leq \frac{\pi}{(p+1)x} \leq 1.$$

于是得到所需一致上界。

(c) 借助 (b) 的上界, 对

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} \right) dx = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k}$$

使用控制收敛定理。

(d) 由 Abel 判别法, 该级数在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛。根据 (c), 它不可能在 $L^1([-\pi, \pi])$ 中收敛, 因为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

发散。

习题 8.14. (a) 先对 $\mathbb{R}$ 的每个有界区间 I 证明该关系, 再证明 I 的所有满足该关系的 Borel 子集构成 I 上的 σ -代数。

(c) 借助 (a) 计算

$$\lim_n \int_{E \cap \{g \geq 0\}} \cos(nx) \, dx, \quad \lim_n \int_{E \cap \{g \leq 0\}} \cos(nx) \, dx, \quad \lim_n \int_E \cos(2nx) \, dx.$$

习题 8.16. (a) 用一个收敛定理计算 f 在 0 处的极限。

(b) 在 $f'(t)$ 的表达式中作变量代换 $u = \cosh x$ 。

习题 8.17. (a) 使用

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

(b)(i) 在 g'_n 的表达式中分部积分, 并在 $\hat{f}'$ 中作 $u = tx$ 。

(b)(ii) 在 $(\hat{f})''$ 的表达式中分部积分, 并在 $\hat{f}$ 中作 $u = tx$ 。

(b)(iii) 使用 $\hat{f}$ 关于 u 的积分表达式。

习题 8.18. (c) 作变量代换

$$y := t + \sqrt{t}, x.$$

(d) 对函数 $\log(1 + c \cdot t)$ 在 0 点使用三阶 Taylor-Lagrange 公式证明不等式。

(e) 在 (c) 的积分中分别处理 $\mathbb{R}_+$ 与 $\mathbb{R}_-$, 借助 (d) 使用控制收敛定理。

习题 8.19. (b) 仿照应用 8.6(d)。

(c) 化到 $t = 0$ 。先证明

$$2(1 - n|\varphi|)\mathbf{1}_{\{n|\varphi| \leq 1\}} \leq |n\varphi + 1| + |n\varphi - 1| - 2n|\varphi|,$$

再对左端使用控制收敛定理。

习题 8.20. (b) 若 $A \in \mathcal{A}$, $i \in I$, $c > 0$, 则

$$\int_A |f_i| \, d\mu \leq \int_{\{|f_i| \geq c\}} |f_i| \, d\mu + c\mu(A).$$

(c) 例如可直接使用 (b)。

(d) 借助 (a)、(c) 证明 $(f_n - f)_{n \geq 1}$ 依概率等度可积, 再使用

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \leq \int_X (|f_n - f| \wedge c) \, d\mu + \int_{\{|f_n - f| \geq c\}} |f_n - f| \, d\mu.$$

习题 8.21. (a) 使用习题 7.5 的结果。

(b) 先把 (a) 用于有限多个 f_n 以及 f 。

(c) 注意 $(f_n - f)_{n \geq 1}$ 也等度可积; 在 A_ε 上对它使用 Egoroff 定理 (见习题 6.12)。

(d) 在 $[0, 1]$ 上考虑

$$f_n(x) := \sin(nx).$$

习题 8.22. (b) 使用习题 6.13(b) 与控制收敛定理。

(c)(iv) 使用习题 6.13(b) 与 (b)。

习题 8.23. (a) 证明

$$\{|f| > 2\} \subset \{|f - \mathbf{1}_{A_n}| > 1\},$$

再使用 Markov 不等式。

(b) 证明

$$\lim_n \int_X |\mathbf{1}_{A_n} - f^2| \, d\mu = 0.$$

(c) 考察 $\liminf_n A_n \triangle A$, 并证明其补集为零测集。

习题 8.24. (a) 使用习题 8.23(c)。

(b) 使用控制收敛定理。

习题 8.25. (a) 对函数列

$$n(f(\cdot + 1/n) + f(\cdot - 1/n) - 2f)$$

使用 Fatou 引理, 再利用 Lebesgue 测度的平移不变性。

(b) 用控制收敛定理证明 (a) 中的极限为 0。

习题 8.27. (a) 在 $[0, 1]$ 上使用控制收敛定理, 并利用 $|\sin x| \leq |x|$ 。

(b) 在 $[1, +\infty)$ 上使用控制收敛定理, 并利用

$$\log(1+x^n) \leq \log(2x^n).$$

(c) 分别在 $(0, 1]$ 与 $[1, +\infty)$ 上使用控制收敛定理。

习题 8.28. (a) 使用积分号下连续定理。

(b) 在给定点使用“局部”的积分号下求导定理。

习题 8.29. (a) 依次使用积分号下连续定理、积分号下求导定理与控制收敛定理。

(b) 令 $z = a + ib$ 直接计算 (计算较长); 也可以沿线段 $[-R, R]$ 与以 0 为圆心、半径 $R \gg 1$ 的上半圆所成围道使用留数定理。还可以先注意该恒等式对 $z \in \mathbb{R}_+^*$ 成立, 再使用解析延拓定理。

(c) 由习题 1.15, 当 $t > 0$ 时

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{t}, \quad f'(t) = -2\sqrt{\pi}e^{-zt^2}.$$

(d) 积分的收敛性及其值由下式给出:

$$f(0) - \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = - \int_0^{+\infty} f'(t) dt = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt^2} dt.$$

习题 8.30. (a) 使用 Abel 变换。

(b) Abel 判别法、习题 8.13(b) 的上界以及 $(b_n)_{n \geq 1}$ 递减到 0 共同推出该级数在 $[0, \pi]$ 上一致收敛。

(c) 把积分拆成 $[0, \delta]$ 与 $[\delta, \pi]$ 两段。在后一段上可由 (a) 的一致收敛交换级数与积分, 从而

$$\begin{aligned} 2 \int_{\delta}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx &= 2b_n \int_{\delta}^{\pi} \sin^2(nx) dx \\ &+ \sum_{k \neq n} b_k \left(\frac{\sin((k+n)\delta)}{k+n} - \frac{\sin((k-n)\delta)}{k-n} \right). \end{aligned}$$

由 (b) 中级数在 0 处的连续性, 令 $\delta \downarrow 0$ 后, 上式趋于 πb_n 。

(d) 利用 (a)–(c) 以及 f 的可积性, 对

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} \right) dx = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k}$$

使用控制收敛定理。

(e) 由于 $\sum_{n=2}^{\infty} (n \log n)^{-1}$ 发散, 使用 (d) 的逆否命题。

(f) 若这样的 f 存在, 则

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \log k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} \right) dx$$

由控制收敛定理应有极限，矛盾。

习题 8.31。 (a) 令 $b_n := a_n - a_{n+1}$ 。则 (b_n) 非负、递减且 $\sum b_n$ 收敛，因此 $nb_n \rightarrow 0$ ，并且

$$\sum_{k=1}^n k(b_{k-1} - b_k) = a_0 - a_n - nb_n \rightarrow a_0.$$

(b) 在 $(1 - \cos x)F_n(x)$ 中把余弦乘积化为余弦和。注意

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_n(x) dx = 1,$$

并结合 (a)，对 $(f_n)_{n \geq 1}$ 使用 Beppo Levi 定理。

(c) 对所有 $n, k \geq 1$,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi F_n(x) \cos(kx) dx = \begin{cases} 0, & k > n, \\ 1 - k/n, & k \leq n, \end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(x) \cos(kx) dx = \begin{cases} 0, & k > n, \\ a_k + (n - k)a_{n+1} - (n + 1 - k)a_n, & k \leq n, \end{cases}$$

且

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f_n(x) dx = a_0 + na_{n+1} - (n + 1)a_n.$$

注意 f_n 是 $1, \cos x, \dots, \cos(nx)$ 的线性组合，即可得出结论。

(d) 使用

$$\left| \sum_{k=0}^n \cos(kx) \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}, \quad \left| \sum_{k=0}^n k \cos(kx) \right| \leq \frac{n}{|\sin(x/2)|},$$

以及 $na_n \rightarrow 0$ 。对 (c) 的表达式使用 Abel 判别法，得到

$$\forall x \in (0, \pi], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

该极限在 $[0, \pi]$ 上几乎处处等于 (f_n) 在 $L^1([0, \pi])$ 中的极限 f 。

(e) 在 (d) 中取

$$a_0 := \frac{4}{\log 2}, \quad a_1 := \frac{2}{\log 2}, \quad a_n := \frac{1}{\log n} \quad (n \geq 2),$$

并注意函数 $1/\log$ 在 $(1, +\infty)$ 上凸。

习题 8.32。 (a) 对函数列 (f_n) 与 $(g_n - f_n)$ 使用 Fatou 引理。

(b) $f = 0$ ，但

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \pi.$$

Pratt 引理不适用，因为 $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} \notin L^1(\mathbb{R})$ 。

习题 8.33。 (a) 取 $T \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ，使 $T(t) = t$ 于 $[-1, 1]$ ，再取 $(\psi_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ ，使其在 $L^1(\Omega)$ 中以及 λ_d -几乎处处收敛到

$$\frac{f}{|f|} \mathbf{1}_{\{f \neq 0\}}.$$

证明 $\varphi_n := T(\psi_n)$ 满足要求。

(b) 对

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi_n(x) \lambda_d(dx)$$

使用控制收敛定理。

习题 8.34。 (a) 在 $\mathbb{R}^2$ 上使用 Dirichlet 定理, 得到所需的级数展开, 其 Fourier 系数为

$$\alpha_n = \int_{[0,1]^2} \frac{e^{-2i\pi(y \cdot n)}}{a(y)} dy, \quad n \in \mathbb{Z}^2.$$

对周期矩阵函数 $\nabla^2(1/a)$ 使用 Parseval 恒等式, 存在 $c > 0$ 使

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} |n|^4 |\alpha_n|^2 \leq c \|\nabla^2(1/a)\|_{L^2([0,1]^2)}^2 < +\infty.$$

Cauchy-Schwarz 不等式于是给出

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |\alpha_n| \leq \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|^4} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \neq 0} |n|^4 |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} < +\infty.$$

(b) 由微分系统解 $X(\cdot, x)$ 的唯一性, 只需对候选表达式求导并使用 F_x^{-1} 的导数公式。

(c) 在 F_x 的积分表达式中, 用 (a) 的 Fourier 级数代替 $a^{-1}(s\xi + x)$, 再利用 $(\alpha_n) \in \ell^1(\mathbb{Z}^2)$ 与控制收敛定理, 交换 $[0, t]$ 上的积分与 Fourier 级数。

(d) 对任意 $x \in \mathbb{R}^2$ 以及满足 $\xi \cdot n \neq 0$ 的 $n \in \mathbb{Z}^2$,

$$\left| \alpha_n e^{2i\pi(x \cdot n)} e^{i\pi t(\xi \cdot n)} \frac{\sin(\pi t(\xi \cdot n))}{\pi t(\xi \cdot n)} \right| \leq |\alpha_n|,$$

且左端趋于 0。对级数使用控制收敛定理, 得到

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^2 \\ \xi \cdot n \neq 0}} \alpha_n e^{2i\pi(x \cdot n)} e^{i\pi t(\xi \cdot n)} \frac{\sin(\pi t(\xi \cdot n))}{\pi t(\xi \cdot n)} = 0.$$

由 (c) 中 $F_x(t)$ 的表达式立即得到 $F_x(t)/t$ 的极限; 由 (a) 还有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F_x(t)}{t} \geq \min_{[0,1]^2} \frac{1}{a} > 0.$$

最后, 由 F_x 严格递增,

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F_x^{-1}(t)}{t} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s}{F_x(s)}.$$

(e) ξ 的不可公度性等价于

$$\xi \cdot n = 0 \iff n = 0.$$

因此 (d) 的极限化为 $\alpha_0^{-1} \xi = \bar{a} \xi$ 。

习题 8.35。 (a) 当 $0 \leq r < 1$ 时, 级数正规收敛, 故可逐项求两次导数:

$$f_r''(t) = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{2int} = \frac{2r \cos(2t) - 2r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(2t)}.$$

直接验证可知, 该表达式也是题中反正切函数在 $\mathbb{R}$ 上的导数。

(b) 对 (a) 的表达式积分两次, 并使用 $f'_r(0) = f_r(0) = 0$ 。

(c) 在 (b) 中令 $r \uparrow 1$, 并使用 Lebesgue 控制收敛定理 (反正切函数有界)。

(d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \frac{\pi^2}{8}.$$

再把 $\sum_{n \geq 1} n^{-2}$ 分成奇数项与偶数项。

习题 8.36。 (a) 在 $[\theta, \pi/2 - \theta]$ 上对

$$C'_n(t) = \frac{\cos((2n+1)t) - \cos t}{\sin t}$$

积分。

(b) 分部积分得到

$$\int_0^{\pi/2} \theta \left(C_n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - C_n(\theta) \right) d\theta = \sum_{k=1}^n \frac{(1 - (-1)^k)^2}{4k^3}.$$

(c) 由 $1/\sin t \leq \pi/(2t)$ 得到所需上界, 右端可积成 $\log t$ 。

(d) 对每个 $\theta \in [\delta, \pi/2]$, 由 Riemann-Lebesgue 引理, 关于 θ 的被积函数趋于 0; 又因 $1/\sin$ 在 $[\delta, \pi/2]$ 上连续, 被积函数在那里有统一常数上界。故可使用 Lebesgue 控制收敛定理。

(e) 由 (a)、(c)、(d),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \theta \left(C_n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - C_n(\theta) \right) d\theta = - \int_0^{\pi/2} \theta [\log(\sin t)]_{t=\theta}^{t=\pi/2-\theta} d\theta.$$

结合 (b) 即得 $\zeta(3)$ 的积分公式。

习题 8.38。 (a) 在 $[0, 1]$ 上展开 $\log(1+x)$, 并利用

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq 2 \log(1+x)$$

使用控制收敛定理。

(b) 使用积分号下连续定理, 并采用控制函数

$$\forall x \in [0, 1], \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{\log(1 - 2x \cos t + x^2)}{x} \right| \leq 2 \max_{\pm} \left| \frac{\log(1 \pm x)}{x} \right| \in L^1([0, 1]).$$

(c) 由积分号下求导定理,

$$f'(t) = 2 \left[\arctan\left(\frac{x - \cos t}{\sin t}\right) \right]_{x=0}^{x=1}.$$

(d) 由 (a), $f(\pi/2) = I/2$, $f(\pi) = 2I$; 由 (c),

$$f(t) = c + \pi t - \frac{t^2}{2}, \quad c = 2I - \frac{\pi^2}{2} = \frac{I}{2} - \frac{3\pi^2}{8}.$$

因此

$$I = \frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

18.9 第 9 章习题

习题 9.1. (a) 使用 Hölder 不等式。

(b) 注意：若 $\|x\|_p = 1$ ，则 $\|x\|_\infty \leq 1$ ，并且对每个 $i \in \{1, \dots, d\}$ ，当 $q \geq p$ 时有

$$|x_i|^q \leq |x_i|^p.$$

(c) 使用 Minkowski 不等式的等号情形。

习题 9.3. (a) 使用 Hölder 不等式及其等号情形。

(b) 使用习题 9.1(a) 中的第二个不等式。

习题 9.4. (a) 取

$$f \in L_{\mathbb{K}}^p(\mu) \triangle L_{\mathbb{K}}^q(\mu), \quad B_n := \{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

并证明有无穷多个 B_n 满足 $0 < \mu(B_n) < +\infty$ 。

(b) 令

$$b_n := \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right)^{-1/p}, & \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty, \\ \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^{-1/q}, & \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty. \end{cases}$$

(c) 取

$$f := \sum_{n \geq 0} b_n \mathbf{1}_{A_n}, \quad a_n := \mu(A_n),$$

其中 (b_n) 由 (b) 给出。

习题 9.7. 先证明：对每个 $r > 1$ 与 $x, y \geq 0$,

$$|x^r - y^r| \leq r|x - y|(x + y)^{r-1},$$

再以指数 r 使用 Hölder 不等式。

习题 9.8. 对

$$g_n := 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$$

使用 Fatou 引理。

习题 9.9. (a) 当 $p < +\infty$ 时使用 Fatou 引理。

(b) 可以对 (f_n) 使用 Egoroff 定理 (习题 6.12)，再对小测度集合的示性函数使用 Hölder 不等式；也可以直接使用习题 8.20 的依概率等度可积结论。

习题 9.10. (a) 仿照应用 9.2 的证明。

(b) 证明存在 $(y_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^*$ ，使

$$|y_n| \longrightarrow +\infty, \quad |g(y_n)| > n|y_n|^{r/s}.$$

再取 $[0, 1]$ 中两两不交、长度为

$$(n^{s+1}|y_n|^r)^{-1}$$

的区间 I_n ，并考虑

$$f := \sum_{n \geq N} y_n \mathbf{1}_{I_n}.$$

习题 9.11. 反证。取一列在 $L^1([0,1])$ 中收敛到 0、但在 $[0,1]$ 的任何一点都不逐点收敛的函数 (f_n) (见定理 9.3 后的例子)。若存在刻画几乎处处收敛的度量, 则 $\{f_n : n \geq 0\} \cup \{0\}$ 在该度量下应为紧集, 由此推出矛盾。

习题 9.12. (a) 使用 Lebesgue 测度的平移不变性。

(b) 先证明 $f \in C_K(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ 的情形, 再使用 $C_K(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ 在 $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$ 中的稠密性。

(c) 当 $a \rightarrow 0$ 时取 $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$; 当 $a \rightarrow +\infty$ 时取 $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ 。

习题 9.14. (a) 对 $p, q \in I$ 、 $p \leq q$ 以及 $r \in [p, q]$, 证明

$$|f|^r \leq |f|^p + |f|^q.$$

单点区间的例子可取 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$f(x) := \frac{1}{x(\log x)^2} \mathbf{1}_{(0,1/2]}(x) + \mathbf{1}_{[2,+\infty)}(x).$$

(b) 设 $p < q$ 、 $t \in (0,1)$ 且 $tp + (1-t)q \in (p,q)$, 使用指数 $1/t$ 与 $1/(1-t)$ 的 Hölder 不等式。证明 θ 在 I 的端点连续时, 采用单调序列作序列刻画, 并分别在 $\{|f| \leq 1\}$ 与 $\{|f| > 1\}$ 上使用收敛定理。

习题 9.15. (a) 对凸函数 $-\log$ 使用 Jensen 不等式 (见习题 7.10)。

(b) 使用控制收敛定理, 并注意当 $0 < p \leq q$ 时

$$|f|^p \leq |f|^q + 1.$$

(c) 用递减到 0 的序列刻画极限; 在 $\{|f| \leq 1\}$ 上使用 Beppo Levi 定理, 在 $\{|f| > 1\}$ 上使用控制收敛定理。

(d) 使用 (a); 若 $\mu(\{f = 0\}) = 0$, 再使用 (c) 的极限。

习题 9.16. (a) 对 F^p 分部积分, 并在 (H+) 中使用 Hölder 不等式。

(b) 由稠密性定理 9.4, 用

$$(\varphi_n) \subset C_K(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$$

逼近 $|f|$, 再在 φ_n 满足的 (H) 中用 Fatou 引理令 $n \rightarrow \infty$ 。

(c) 取 $(\varphi_n) \subset C_K(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$ 在 $L^p(\mathbb{R}_+)$ 中收敛到 f , 并被某个 $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$ 控制。记 Φ_n, G 为相应平均函数。先对 (Φ_n) 在 (H) 中使用 Fatou 引理, 得到 $F, G \in L^p(\mathbb{R}_+)$; 再在 φ_n 满足的 (H+) 中令 $n \rightarrow \infty$, 并对 (Φ_n) 与 $(\varphi_n \Phi_n^{p-1})$ 使用控制收敛定理。

(d) 若 g 取等号, 则 $f := |g|$ 也取等号。证明 f 与 F^{p-1} 在 (H+) 所用的 Hölder 不等式中取等号, 最后证明 f 几乎处处等于一个初等微分方程的解。

(e) 考虑

$$f_a(x) := x^{-1/p} \mathbf{1}_{[1,a]}(x).$$

(g) 等式由分部积分得到; 对右端使用 Hölder 不等式即得所需估计。若 $x \mapsto x^r f(x)^p$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上可积, 先对 $0 < a < b < +\infty$ 用 $C_K((a,b), \mathbb{R}_+)$ 中的函数逼近 f , 在相应不等式中使用 Fatou 引理, 再借助 Beppo Levi 定理令 $a \downarrow 0$ 、 $b \uparrow +\infty$ 。

习题 9.17. (a) 先假设 f 连续; 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x)^2 = 0,$$

再分部积分。一般情形使用与习题 9.16(c) 相同的稠密性论证。

(c) 使用 Cauchy-Schwarz 不等式的等号情形。

习题 9.18(b). 对 f, g 使用 Young 不等式并积分, 再利用 $\log$ 的凹性。

习题 9.19. (a) 考虑最终恒为 0 的有理数列。

(b) 证明以 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 中不同元素为中心、半径为 1 的开球两两不交。

习题 9.20. (a) 写成

$$X = \bigcup_{n \geq 0}^{\uparrow} X_n,$$

其中 X_n 是闭包紧的递增开集。若 $\mathcal{V} = \{V_n : n \geq 0\}$ 是可数开基，考虑各个 $V_m \cap X_n$ 的有限交。

(b) 先用习题 2.3(a) 的恒等式处理 $\mathcal{U}$ 中有限多个元素的并，再把 Ω 写成这类并的递增极限并使用控制收敛定理。

(c) 使用 μ 的外正则性 (定理 6.10)，再用 (b)。

(d) 使用 $L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ 中简单函数的稠密性，再用 (c)。

习题 9.21. 使用习题 8.23。

习题 9.22. (a) 先证明：若 $f \geq 0$ ，则

$$\|M_h(f)\|_1 = \|f\|_1.$$

(b) 当 $f \in C_K(\mathbb{R})$ 时用控制收敛定理证明；一般情形使用 $C_K(\mathbb{R})$ 在 $L^1(\mathbb{R})$ 中的稠密性与 (a)。

习题 9.23. (a) 对等式使用 Abel 变换。

(b) 必要性在 (a) 中取 $t = \mu(A)^{-1/p}$ ；充分性取

$$A := \{|f| > t\}.$$

(c) 对 $|f|^q$ 使用习题 7.4(d) 的刻画。

(d) 在带 Lebesgue 测度的 $[0, 1]$ 上，

$$x \mapsto x^{-1/p}$$

属于 L_{weak}^p ，但不属于 L^p 。

习题 9.24(a). 仿照习题 7.13(a)，并参考 Minkowski 不等式证明中 Hölder 不等式的用法。

18.10 第 10 章习题

习题 10.1. 使用 Hölder 不等式的等号情形。

习题 10.2. 反证。

若 $p < +\infty$ ，适当选取 c_n 使

$$a_n = a_n |c_n|,$$

并考虑由有限部分和归一化得到的数列

$$b_n := |a_n|^{p-1} c_n \left(\sum_{k=0}^n |a_k|^p \right)^{-1}.$$

若 $p = +\infty$ ，取子列 $(a_{\varphi(n)})$ ，使

$$|a_{\varphi(n)}| \geq n,$$

并令

$$b_{\varphi(n)} := \frac{c_{\varphi(n)}}{n |a_{\varphi(n)}|}, \quad b_k := 0 \quad (k \notin \varphi(\mathbb{N}^*)).$$

习题 10.3. (a) 令

$$A_n := E_n \cap \{|f| \leq n\},$$

并使用 Beppo Levi 定理。

(b) 反证。使用 (a) 中的 A_n , 写 $f = |f|h$, 并考虑

$$g := h|f|^{p-1} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{na_n^p} \mathbf{1}_{A_n},$$

其中 a_n 选取得使该函数给出所需矛盾。

习题 10.4. (a) 对每个 $n \in \mathbb{N}^*$, 令

$$g_n := k \mathbf{1}_{B_n}, \quad h = |h|k, \quad B_n := E_n \cap \{|h| \leq n\}.$$

(b) 使用 Banach–Steinhaus 定理: 若 (T_n) 是从 Banach 空间 E 到赋范空间 F 的连续线性映射列, 且对每个 $x \in E$,

$$\sup_n \|T_n(x)\| < +\infty,$$

则 $\sup_n \|T_n\| < +\infty$ 。

(c) 使用 L^p – L^q 对偶定理, 再由 (a) 得出结论。

习题 10.5. 反设 $f \notin L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu)$ 。在说明下列函数确有定义后, 考虑

$$g := h \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 \mu(A_n)} \mathbf{1}_{A_n}, \quad A_n := \{|f| \geq n\}, \quad f = |f|h.$$

习题 10.7. 对 Φ 使用 Hahn–Banach 定理: 定义在 $\mathbb{K}$ -向量空间 E 的子空间 F 上的连续线性泛函, 可以延拓为 E 上具有相同范数的连续线性泛函。

习题 10.8. (a) 对限制在 $L_{\mathbb{K}}^p(\mu|_A)$ 上的泛函

$$f \mapsto \Phi(f \mathbf{1}_A)$$

使用 L^p – L^q 对偶定理。

(b) 使用 g_A 的唯一性。

(c) 取 (A_n) 使

$$\|g_{A_n}\|_q \longrightarrow \sup_{\mu(A) < +\infty} \|g_A\|_q,$$

令 $X_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$, 并借助 (b) 证明 (g_{X_n}) 在 $L^q(\mu)$ 中是 Cauchy 列。

(d) 对每个 $n \geq 1$ 令

$$Y_n := X_n \cup \{|f| \geq 1/n\}.$$

在 $f \mathbf{1}_{Y_n}$ 的积分表示中令 $n \rightarrow \infty$, 并借助 (b) 及 X_n 的定义证明

$$\lim_n \int_{Y_n \setminus X_n} f g_{Y_n} d\mu = 0.$$

习题 10.9. (a) 先考虑 X_n 与一个包含 X 的可数开基中元素的有限交。

(b) 对每个 $n \geq 0$, 证明密度测度

$$\mathbf{1}_{U_n} g^+ \mu, \quad \mathbf{1}_{U_n} g^- \mu$$

在满足 $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{U})$ 的 π -系统 $\mathcal{U}$ 上相同, 再使用第 6.2 节推论 6.2。

(c) 证明

$$E := D \cap L_{\mathbb{R}}^p(\mu)$$

是 $L_{\mathbb{R}}^p(\mu)$ 的实线性子空间。反设存在 $f_0 \in L_{\mathbb{R}}^p(\mu) \setminus E$, 在 $\mathbb{R}f_0 \oplus E$ 上定义

$$\Phi_0(f_0) := 1, \quad \Phi_0|_E := 0.$$

依次使用 Hahn-Banach 定理、对偶定理与 (b) 得到矛盾。

习题 10.10。 (a) 对每个 $h \in D$, 数列

$$\left(\int_X f_{\varphi(n)} h \, d\mu \right)_n$$

有界。利用 D 的可数性作对角抽取, 得到对所有 $h \in D$ 都收敛的共同子列。

(b) 对每个 $g \in L_{\mathbb{K}}^q(\mu)$, 利用 D 的稠密性与 (a), 证明

$$\left(\int_X f_{\varphi(n)} g \, d\mu \right)_n$$

为 Cauchy 列。

(c) 证明 (b) 中定义的 Φ 是 $L_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ 上的连续线性泛函。

(d) 在 $\mathbb{R}$ 上取

$$f_n := n \mathbf{1}_{[0, 1/n]},$$

并对每个 $g \in C_K(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ 计算

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) \, dx.$$

习题 10.11。 (b) 先对计数测度使用 Fatou 引理, 证明

$$\liminf_n \nu_n(B) \geq \sum_{k \geq 1} \liminf_n \nu_n(B_k).$$

再证明对每个 $\varepsilon > 0$ 以及 $n, k \geq 1$,

$$\nu_n(B) \leq \sum_{j=1}^k \nu_n(B_j) + \nu_n \left(A_\varepsilon \cap \bigcup_{j>k} B_j \right) + \nu_n(A_\varepsilon^c \cap B),$$

并注意

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu \left(A_\varepsilon \cap \bigcup_{j>k} B_j \right) = 0.$$

(c) 使用定理 6.2。

习题 10.12。 (a) 取 X 的可数开基

$$\mathcal{U} := \{U_n : n \geq 0\}, \quad U_0 := X,$$

并令 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{U}$ 中元素所有有限交组成的族。

(b) 对每个 $C \in \mathcal{C}$, 数列 $(\nu_n^\pm(C))$ 有界。利用 $\mathcal{C}$ 的可数性作对角抽取。

(c) 对测度列 $(\nu_{\varphi(n)}^\pm)$ 使用 Vitali-Saks 定理 (习题 10.11), 再对极限使用 Radon-Nikodym 定理。

(e) 在 $[0, 1]$ 上考虑

$$f_n(x) := \sin(nx).$$

习题 10.13. (a) 把指数函数展开成级数。

(b) 在 (a) 的等式中令 $n \rightarrow +\infty$ 。

(c) 对一个在 E 上恒为零的线性泛函使用 Hahn-Banach 定理。

习题 10.14. (a) 利用

$$\{\mathbf{1}_A\} \cup \{\mathbf{1}_{A_n} : n \geq 1\}$$

的可数性作对角抽取。

(b) 对定义在 M 上的线性泛函 Φ 使用 Hahn-Banach 定理。

(d) 借助控制收敛定理计算

$$\lim_n \int_X f \mathbf{1}_{\cup_{k=1}^n A_k} d\mu.$$

习题 10.15. 若 X 无限, 证明: 对任意无限开集 $\Omega \subset X$, 存在半径严格为正的闭球 B_f , 使

$$B_f \subset \Omega, \quad \Omega \setminus B_f \text{ 仍为无限集.}$$

由此构造两两不交的非空开球列 (B_k) , 再对适当整数列 (n_k) 使用习题 10.14, 集合取为 $(B_k \cap E_{n_k})$ 。

习题 10.16. (b) 由正交性, 对每个 $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| f - \sum_{|n|_\infty \leq N} \hat{f}(n) e^{i(n|x)} \right\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 - \sum_{|n|_\infty \leq N} |\hat{f}(n)|^2,$$

其中

$$|n|_\infty := \max_{1 \leq k \leq d} |n_k|.$$

(c) 结合 (a)、(b), 对

$$L^{p_i}(\mathbb{T}^d) \longrightarrow \ell^{q_i}(\mathbb{Z}^d)$$

使用 Marcinkiewicz 定理 10.8, 取

$$p_1 = q_1 = 2, \quad p_2 = 1, \quad q_2 = +\infty.$$

先得到 $f \in L^1 \cap L^2$ 的估计。一般 $f \in L^p$ 用 $L^1 \cap L^2$ 中函数逼近, 再在 $\ell^{p'}(\mathbb{Z}^d)$ 中使用 Fatou 引理。

(d) 对

$$\ell^{p_i}(\mathbb{Z}^d) \longrightarrow L^{q_i}(\mathbb{T}^d)$$

使用同一 Marcinkiewicz 定理, 指数仍取

$$p_1 = q_1 = 2, \quad p_2 = 1, \quad q_2 = +\infty.$$

习题 10.17. (a) 第一个不等式可在和式上乘 $\sin(x/2)$ 后证明; 第二个不等式对

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

作 Abel 变换, 再使用第一个不等式。

(b) 把 $[0, \pi]$ 上的积分拆成区间

$$\left[\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n} \right],$$

并证明当 x 属于该区间时

$$|f(x)| \leq 3A_n.$$

(c) 注意

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} a(x)^p x^{p-2} dx < +\infty &\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} < +\infty, \\ \int_0^{+\infty} A(x)^p x^{-2} dx < +\infty &\iff \sum_{n=1}^{\infty} A_n^p n^{-2} < +\infty. \end{aligned}$$

后一条件结合 (b) 推出 $f \in L^p([-\pi, \pi])$ 。

(d) 有 $f \in L^p(\mathbb{T}^1)$ 而 $\hat{f} \notin \ell^q(\mathbb{Z})$, 因此习题 10.16(c) 的估计通常不能推广到 $p > 2$ 。

18.11 第 11 章习题

习题 11.1(a)。证明 C 是 $\mathbb{R}^2$ 的闭集。

习题 11.2。(a) 对每个 $a > 0$,

$$\arctan a \leq \int_0^a f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2} \leq \frac{\pi}{2},$$

并且

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

(b) 对每个 $n \geq 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{n^2 + x^2} \right) dx = 0.$$

因此不能使用 Fubini 定理交换积分与求和。

习题 11.4。从

$$g(f(x)) = \int_0^{+\infty} g'(t) \mathbf{1}_{\{t \leq f(x)\}} dt$$

出发, 使用 Fubini–Tonelli 定理。

习题 11.5(a)。对 $n, k \in \mathbb{N}^*$, 考虑

$$D_{n,k} := \{x \in X_n : \mu(\{x\}) > 1/k\}.$$

习题 11.6。(a) 证明函数

$$(x, y) \mapsto f(x) - y$$

是 Borel 可测的。

(c) 对 $\lambda_2(G_f)$ 的积分表达式使用 Fubini–Tonelli 定理。

习题 11.7。考虑

$$(x, y) \mapsto (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)).$$

习题 11.8。在每个紧含于 Ω 的闭矩形上, 对相应导数使用 Fubini 定理。

习题 11.10。(a) 由 Fubini–Tonelli 定理,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dx dy}{(1+y)(1+x^2 y)} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

(b) 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2-1} dx = 2 \int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1} dx,$$

再把 $(1-x^2)^{-1}$ 在 $[0, 1)$ 上展开成级数。

习题 11.11. (a) 在 $[0, \pi] \times [0, 1]$ 上使用 Fubini 定理。

(b) 在第一个积分中作 $s = \tan x$, 再在 $[0, \pi] \times [0, 1]$ 上使用 Fubini 定理, 最后作

$$t = \sqrt{y+1}.$$

(c) 得到

$$\int_0^{\pi/2} \log(1 + \cos^2 x) dx = \pi \log \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2} \right).$$

习题 11.13. (b) 在 $f_a(t)$ 的定义中使用 (a), 再用 Fubini 定理。

(c) 在 $f_a(t)$ 的第二个表达式中作变量代换

$$az = y + t,$$

然后令 $a \downarrow 0$ 。

习题 11.14. (a) 令

$$F_n := |F| \mathbf{1}_{\{1/n \leq |F| \leq n\}},$$

并对 $\int_X F_n g_n d\mu$ 使用 Fubini 定理; 再为适当的 $g_n \in L_{\mathbb{R}}^q(\mu)$ 使用 Hölder 不等式估计所得积分。

(b) 把 (a) 的不等式用于

$$\varphi_a(x, y) := \mathbf{1}_{[0, a]}(x) f(xy), \quad a > 0.$$

习题 11.15. (a) 先取 $f = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 并使用 Fubini-Tonelli 定理; 再由线性性推广到简单函数, 最后由单调收敛推广到所有 Borel 函数。

(b) 在 (a) 中取 $f(x) = x^{a+b}$, 对测度 $d(-\varphi)$ 使用 Hölder 不等式, 再次使用 (a)。

(c) 使用 Hölder 不等式的等号情形, 推出存在 $x \in \mathbb{R}$ 使

$$d(-\varphi)(\mathbb{R}_+ \setminus \{x\}) = 0.$$

习题 11.16. (a) 仿照习题 11.15(a)。

(b) 在 (a) 中取 $f(x) = x^{a+b}$, 并使用习题 9.18(b) 的不等式。

(c) 使用习题 9.18(b) 的等号情形, 推出

$$d\varphi((0, 1)) = 0.$$

习题 11.17. (a) 使用 Cauchy-Schwarz 不等式。

(b) 使用 Fubini 定理。

(c) 先用 Fubini 定理计算 $\widehat{P(\mu)}$, 再用 (b)。

习题 11.18. (a) 先证明对每个 $z > 0$,

$$z^s \mathcal{M}(y \mapsto e^{-zy})(s) = \Gamma(s),$$

再由解析性把等式推广到 $\operatorname{Re} z > 0$ 。证明在 $z \in i\mathbb{R}^*$ 处连续时, 在 $[1, +\infty)$ 上分部积分。

(b) 在 $\mathbb{R}_+ \times [0, a]$ 上使用 Fubini 定理, 再作 $u = xy$ 。

(c) 当 $ax \geq 1$ 时, 在 $[1, ax]$ 上分部积分, 证明

$$x \mapsto \mathcal{M}(\mathbf{1}_{[0, ax]} \cos)(s)$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上有与 a 无关的统一上界; 再对 (b) 使用控制收敛定理。在 (a) 中取 $z = \pm i$, 计算 $\mathcal{M}(\cos)$ 。

(d) 把 (c) 分别用于

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}(f))(s), \quad \mathcal{M}(\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f))(1-s).$$

习题 11.19. (a) 使用 Fubini–Tonelli 定理, 再作 $y = tx$ 。

(b) 在 (a) 的等式中使用 Hölder 不等式。

(c) 令

$$F(x) := \int_0^x \varphi(u) \, du, \quad G(x) := \int_0^x \psi(u) \, du,$$

证明它们满足相同的尺度性质。若 F 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上不恒为零, 先证明 $F > 0$, 再证明

$$F(1)F(xy) = F(x)F(y), \quad x, y > 0.$$

考察 $x \mapsto \log F(e^x)$, 推出存在 $\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, 使

$$F(x) = \beta x^\gamma, \quad x > 0,$$

再得出矛盾。

(d) 使用 Hölder 不等式的等号情形, 并把 (c) 用于

$$\varphi = f^p, \quad \psi = g^q.$$

(e) 对 $a \geq 1$, 考虑

$$f_a(x) := \mathbf{1}_{[1, a]}(x)x^{-1/p}, \quad g_a(x) := \mathbf{1}_{[1, a]}(x)x^{-1/q}.$$

(f) 在 (S) 中取

$$f := \sum_{m \geq 0} a_{m+1} \mathbf{1}_{[m, m+1)}, \quad g := \sum_{n \geq 0} b_{n+1} \mathbf{1}_{[n, n+1)}.$$

习题 11.20(a). 写成

$$e^{-ax} - e^{-bx} = x \int_a^b e^{-tx} \, dt,$$

并连续两次使用 Fubini 定理。

习题 11.21. (a) 作变量代换 $y = 1/x$ 。

(b) 通过分部积分证明

$$\begin{aligned} \int \arctan^2(1/x) \, dx &= x \arctan^2(1/x) + \log(x^2 + 1) \arctan(1/x) \\ &\quad + \int \frac{\log(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \, dx. \end{aligned}$$

习题 11.22. (a) 使用三角不等式。

(b) 使用

$$\mathbf{1}_{A_n}^2 = \mathbf{1}_{A_n}.$$

习题 11.23(a). 用 Fubini–Tonelli 定理得到

$$\frac{1}{c_d r^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \mu(B(x, r)) \lambda_d(dx) = \frac{v_d}{c_d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{\lambda_d(B(y, r))} \int_{B(y, r)} \varphi(x) \lambda_d(dx) \right) \mu(dy).$$

再借助控制收敛定理令 $r \downarrow 0$ 。

(b) 使用 Riesz 表示定理中的唯一性。

18.12 第 12 章习题

习题 12.1. (a) 反证。利用 φ^{-1} 在 D 上连续, 证明

$$\varphi(\partial\Delta) \cap \varphi(\Delta) = \emptyset.$$

(b) 从

$$\partial D = \partial(\varphi(\Delta))$$

出发, 用紧致性论证证明

$$\partial D \subset \varphi(\overline{\Delta}).$$

习题 12.3. (a) 把 $(1 - xy)^{-1}$ 展开成级数, 并用 Beppo Levi 定理交换级数与积分。

(b) 证明

$$\varphi(\theta, t) := (\cos \theta - t, \cos \theta + t)$$

是开集

$$\left\{ (\theta, t) : 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, |t| < \min(\cos \theta, 1 - \cos \theta) \right\}$$

到 $(0, 1)^2$ 的 C^1 -微分同胚, 且

$$J_\varphi(\theta, t) = 2 \sin \theta.$$

对 φ 使用变量替换定理, 再使用 Fubini-Tonelli 定理。

(c) 把关于 θ 的积分拆成 $[0, \pi/3]$ 与 $[\pi/3, \pi/2]$ 两段, 并在第二段使用

$$\arctan(\cot \theta) = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

习题 12.4(b). 证明 $\varphi_{a,b}(\mathbb{R}^2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中既开又闭。

习题 12.7. (a) 在 $\Gamma(a)$ 中令 $u = \sqrt{t}$, 再使用 Fubini-Tonelli 定理。

(b) 改用极坐标。

习题 12.9. (a) 在一组标准正交特征向量基中对角化 A :

$$A = PD {}^t P, \quad P = ({}^t P)^{-1}, \quad D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d).$$

作正交线性变量替换 $x = {}^t P y$ 。由 Fubini-Tonelli 定理,

$$\begin{aligned} I_A &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(\alpha_1 y_1^2 + \dots + \alpha_d y_d^2)} dy \\ &= \prod_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha_i y_i^2} dy_i = \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\det A}}. \end{aligned}$$

(b) $I_A < +\infty$ 当且仅当每个 $\alpha_i > 0$, 亦即 A 正定。

(c) 仿照 (a), 使用 Fubini-Lebesgue 定理与应用 12.3(a')。

习题 12.10. (c) 作正交线性变量替换。

(d) 在 $I(z)$ 中取

$$z = (0, \dots, 0, |y|, 0, 0),$$

并使用球坐标

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta_1, \\ x_2 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2, \\ \vdots \\ x_{d-1} = r \cos \theta_1 \cdots \cos \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1}, \\ x_d = r \cos \theta_1 \cdots \cos \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1}. \end{cases}$$

对 d 归纳证明 Jacobian 满足

$$|J_d| = r^{d-1} (\cos \theta_1)^{d-2} \cdots (\cos \theta_{d-3})^2 \cos \theta_{d-2}.$$

习题 12.11. (a) 把 Ω 写成 Δ 中紧集的递增并。

(b) 作仿射变量替换, 化到 $0 \in K$, 且 AK 包含于超平面 $\{x_d = 0\}$ 中边长不超过 $\text{diam}(AK)$ 的超立方体。于是 $AK + Q_{0,r}$ 包含于相应的薄长方体中。

(c) 若 $J_\varphi(u_0) \neq 0$, 直接使用定理 12.4 证明的步骤 1。若 $J_\varphi(u_0) = 0$, 由 Taylor 公式证明

$$\varphi(Q_{a,r}) \subset \varphi(u_0) + \varphi'(u_0)Q_{a-u_0,r} + Q_{0,r\varepsilon_0},$$

再使用 (a)。

(e) 证明 Δ 的每个紧集都是 Δ 中开集的递减交, 并在 (d) 的不等式中使用控制收敛定理。

习题 12.12. 设 (K_n) 是递增且并为 Ω 的紧集列。证明

$$\lambda_d(\varphi(\Omega)) \geq \lambda_d(\varphi(\Delta)) - \lambda_d(\varphi(\Delta \setminus K_n)),$$

再使用习题 12.11(d)。

习题 12.13. 把 S 写成 Δ 中紧集的递增并, 并在习题 12.11(e) 的不等式中使用单调收敛定理。

习题 12.14. 证明当 $|a|$ 充分小时,

$$\deg_{B_d}(\text{Id} - af) \in (0, 2),$$

再使用命题 12.3(c)。

习题 12.15. (a) 写成

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \int_0^1 \frac{dt}{tx+1},$$

再使用 Fubini–Tonelli 定理。

(b) 使用分解

$$\frac{1}{(1+sx)(1+tx)} = \frac{1}{s-t} \left(\frac{s}{1+sx} - \frac{t}{1+tx} \right).$$

(c) 把 (a) 的等式在 $\mathbb{R}_+$ 上积分, 在 $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ 上使用 Fubini–Tonelli 定理, 再使用 (b)。

习题 12.16. (b) 作极坐标变量替换

$$(r, \theta) \mapsto (\sqrt{r} \cos \theta, \sqrt{r} \sin \theta),$$

得到

$$I = \frac{\sqrt{\pi}(\pi-1)}{8}.$$

(c) 注意

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} \leq 1,$$

再使用 Fubini 定理。

习题 12.17. (a) 证明

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} (x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} = \max(x, y),$$

从而 $\mathbf{1}_{B_\alpha}$ 逐点收敛到 $\mathbf{1}_{(0,1)^2}$; 由控制收敛定理, 极限等于 1。

(b) 作变量替换

$$(r, \theta) \mapsto r((\cos \theta)^{2/\alpha}, (\sin \theta)^{2/\alpha}).$$

习题 12.18。 (a) 作极坐标变量替换

$$(x, y) = \sqrt{r} (\cos \theta, \sin \theta),$$

再使用 sinc 函数在 $\mathbb{R}_+$ 上不可积这一事实 (见习题 7.15)。

(b) 同样处理, 并使用 sinc 积分的条件收敛性, 得到

$$J = \frac{\pi^2}{2}.$$

习题 12.19。 (a)

$$I_a = \begin{cases} \frac{\pi}{a-1}, & a > 1, \\ +\infty, & a \leq 1. \end{cases}$$

(b) 由对称性,

$$I = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2} dx dy = \frac{\pi}{2}.$$

习题 12.20。 (a) 展开

$$\frac{1}{1 - x^2 y^2}$$

并用 Fubini–Tonelli 定理交换级数与积分。

(b) 注意 $0 < xy = uv < 1$, 逆映射为

$$\varphi^{-1}(x, y) = \left(x \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}, y \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} \right).$$

Jacobian 的计算稍长, 但没有困难。

(c) 由变量替换定理及 Fubini–Tonelli 定理,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Delta} \frac{du dv}{(1+u^2)(1+v^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \int_0^{1/u} \frac{dv}{1+v^2} \\ &= \left[-\frac{1}{2} \arctan^2(1/u) \right]_0^{+\infty}. \end{aligned}$$

18.13 第 14 章习题

习题 14.1。 (b) 对 n 归纳。

(c) 令

$$\varphi_n := \sum_{k=2}^n \chi_k.$$

证明对每个 $n \geq 3$,

$$\varphi_n = \chi * \varphi_{n-1} + \chi_2.$$

习题 14.3。 (a) 对每个 $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, 证明

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi \xi}{|\xi|^2}\right) \right] e^{-i(\xi \cdot x)} dx,$$

再使用平移算子在 $L^1_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$ 中的连续性 (定理 14.1)。

(b) 使用 Fubini 定理。

(c) 若 h 是卷积单位元, 在 (b) 中取 h 以及

$$f(x) := e^{-(|x_1|+\cdots+|x_d|)}.$$

习题 14.4。 从恒等式

$$\begin{aligned} |f(x-y)g(y)| &= (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{1/r} \\ &\quad \times (|f(x-y)|^p)^{1/p-1/r} (|g(y)|^q)^{1/q-1/r} \end{aligned}$$

出发, 并使用 Hölder 不等式。

习题 14.5。 使用压缩映射原理: 完备度量空间到自身的每个严格压缩映射都有唯一不动点。

习题 14.8。 证明

$$\bar{f}_n = \alpha_n * f,$$

其中 (α_n) 是一个不必光滑的近似恒等族。

习题 14.9。 使用

$$\operatorname{div}(\varphi \nabla \varphi) = \varphi \Delta \varphi + |\nabla \varphi|^2,$$

以及引理 12.1 的分部积分公式, 其中取 $\varphi = \alpha * f$ 。

习题 14.10(b)。 使用习题 6.14(b)。

习题 14.11。 (b) 使用 Fubini 定理。

(c) 由 (b) 证明: 对每个 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\alpha_n * f(x) \longrightarrow (2\pi)^{-d} \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

再用定理 9.3 证明存在子列 (k_n) , 使

$$\alpha_{k_n} * f(x) \longrightarrow f(x) \quad \lambda_d\text{-a.e.}$$

习题 14.12(a)。 使用习题 14.3(b) 与习题 14.11(c) 的 Fourier 反演公式。

习题 14.13。 (a) 对

$$(x, y) \longmapsto f(xy^{-1})g(y)$$

使用 Fubini–Tonelli 定理。

(c) 仿照习题 14.4。

习题 14.14。 (a) 考虑

$$g_\alpha := \operatorname{id}^\beta \mathbf{1}_I,$$

其中根据 α 相对于 1 的位置, 取

$$I = (0, 1] \quad \text{或} \quad I = (0, +\infty).$$

(b) 使用习题 14.13 的卷积不等式。

(c) 考虑

$$f_a(x) := x^{-\alpha} \mathbf{1}_{[1, a]}(x).$$

(d) 当 a 充分大时, 考虑

$$f(x) := x^{-1} (\log x)^{-1-1/p} \mathbf{1}_{[2, a]}(x).$$

习题 14.15。 (d) 使用 λ_d 的平移不变性。

(e) 仿照习题 14.10。

18.14 第 15 章习题

习题 15.1。 使用积分三角不等式的等号情形。

习题 15.2(a)。 对 $\xi \in \mathbb{R}^*$,

$$\mu(\mathbb{R}) - \widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(\xi x)) \mu(\mathrm{d}x) - \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} \sin(\xi x) \mu(\mathrm{d}x).$$

该量等于 0, 当且仅当

$$\cos(\xi x) = 1 \quad \mu\text{-a.e.},$$

亦即

$$x \in \frac{2\pi}{\xi} \mathbb{Z} \quad \mu\text{-a.e.}$$

习题 15.3。 由 $\widehat{1_E}$ 在 0 处连续,

$$\widehat{1_E}(0) = \lambda(E) = 0.$$

习题 15.4。 计算得

$$\widehat{f}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-t^2/4},$$

从而

$$f(x) = \frac{1}{4} e^{-x^2}.$$

可积性保证解的唯一性。

习题 15.5。 Fourier 变换可写为

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{|x| \geq 2} \frac{e^{\mathrm{i}x\xi}}{x^2 \log|x|} \mathrm{d}x = 2 \int_2^{+\infty} \frac{\cos(x\xi)}{x^2 \log x} \mathrm{d}x.$$

对 $\xi \in (0, 1/2)$, 变量替换 $x = y/\xi$ 给出

$$\frac{\widehat{f}(0) - \widehat{f}(\xi)}{\xi} = 2 \int_{2\xi}^{+\infty} \frac{1 - \cos y}{y^2 (\log y - \log \xi)} \mathrm{d}y.$$

又对 $y \geq 2\xi$,

$$\frac{1 - \cos y}{y^2 (\log y - \log \xi)} \leq \frac{2(1 - \cos y)}{y^2 (\log 2 - \log \xi)}.$$

右端可积, 故由控制收敛定理得到所需导数。

习题 15.6。 取

$$f := \Phi^{-1}(\mathbf{1}_B),$$

其中 B 是 $\mathbb{R}^d$ 的单位球。若 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则由反演定理, $\mathbf{1}_B$ 应几乎处处等于某个连续函数, 这是不可能的。另一方面,

$$\Phi(f) = \mathbf{1}_B \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

习题 15.7。 使用 Fourier 变换对卷积的乘法性, 并注意

$$f_a = \frac{1}{2\pi} \widehat{e^{-a|\cdot|}}.$$

习题 15.8。 (a) 把积分拆成 $[a, n]$ 、 $[-n, -a]$ 与 $[-a, a]$, 其中 $0 < a \leq n$ 。把 $\sin t$ 写成指数形式, 并在前两段分别作

$$s = (1 \pm x)t.$$

先令 $n \rightarrow \infty$, 再令 $a \downarrow 0$.

(b) 令 $\chi = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}$. 函数列

$$\Phi(\mathbf{1}_{[-n,n]}\hat{\chi})$$

在 $L^2(\mathbb{R})$ 中收敛到

$$\Phi(\hat{\chi}) = 2\pi\chi = \pi\mathbf{1}_{[-1,1]}.$$

抽取几乎处处收敛子列, 即得所需等式。

习题 15.9. (a) 计算 $\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}$ 的 Fourier 变换, 得到

$$I_n = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_n(t) dt.$$

又

$$I_n = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{n-1}(t) \hat{f}_1(t) dt,$$

故由 Plancherel 定理,

$$I_n = \pi \int_{\mathbb{R}} f_{n-1}(x) f_1(x) dx.$$

归纳证明 $0 \leq f_n \leq 1$, 即可得结论。

(b) 同理,

$$I_n = \pi \int_{\mathbb{R}} f_p(x) f_q(x) dx, \quad I_{2p} = \pi \int_{\mathbb{R}} f_p(x)^2 dx,$$

再使用 Cauchy-Schwarz 不等式。

习题 15.10. 有

$$t\hat{f}(t) = \frac{1}{i} \hat{f}'(t) \in L^2(\mathbb{R}).$$

对 $1/t$ 与 $t\hat{f}(t)$ 使用 Cauchy-Schwarz 不等式, 得到 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, 再由反演定理完成证明。

习题 15.11. (a) 取

$$g := \mathbf{1}_{\{f \neq 0\}} \frac{f}{\sqrt{|f|}}, \quad h := \sqrt{|f|}.$$

(b) 在 (a) 中取

$$\varphi = \hat{f}, \quad \phi = (2\pi)^{-d/2} \Phi(g), \quad \psi = (2\pi)^{-d/2} \Phi(h).$$

(c) 写成 $f = gh \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 取 $\varphi_n, \psi_n \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$, 分别在 L^2 中收敛到

$$(2\pi)^{-d/2} \Phi(g), \quad (2\pi)^{-d/2} \Phi(h).$$

于是

$$F_n := (2\pi)^d \Phi^{-1}(\varphi_n) \Phi^{-1}(\psi_n)$$

在 L^1 中收敛到 f , 并且

$$\hat{F}_n = \varphi_n * \psi_n \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d).$$

习题 15.12(a).

$$\hat{f} = \widehat{\varphi(\hat{\phi})^2} = (2\pi)^{3d/2} \varphi(\phi * \phi) \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d).$$

习题 15.13. 若 f 连续且支集包含于紧区间 I , 则

$$\hat{f}(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{ixz} f(x) dx, \quad z \in \mathbb{C},$$

由复值积分号下求导定理在整个 $\mathbb{C}$ 上全纯。事实上, 对 $|h| \leq 1$,

$$|f(x)e^{i(z+h)x} - f(x)e^{izx}| \leq |f(x)| |hx| e^{|x|(|z|+1)},$$

右端因 f 的紧支集而可积。若 $\widehat{f}|_{\mathbb{R}}$ 具有紧支集, 则它在实轴的某个非空开区间上恒为零; 全纯函数恒等定理遂给出

$$\widehat{f} \equiv 0,$$

因而 $f \equiv 0$ 。

校订注: 原解答错误地声称“非恒定整函数在 $|z| \rightarrow \infty$ 时模趋于 $+\infty$ ”; 例如 e^z 已是反例。这里改用全纯函数恒等定理, 这是本题所需且充分的正确论证。

习题 15.14. (b) 函数 $x \mapsto e^{i\pi x}$ 分离 $[-1, 1]$ 中的点且处处非零。由 Stone–Weierstrass 定理, 它及其共轭生成的三角多项式代数在复值连续 2-周期函数中关于一致范数稠密; 后者又在 $L^2_{\mathbb{C}}([-1, 1])$ 中稠密。

(c)

$$\widehat{f}(n\pi) = \int_{-1}^1 e^{in\pi x} f(x) dx = \langle f, e^{-in\pi(\cdot)} \rangle_{L^2_{\mathbb{C}}([-1, 1])}.$$

由于 $(e^{in\pi(\cdot)})_{n \in \mathbb{Z}}$ 是 Hilbert 基, 得到 $f = 0$ 于 $L^2_{\mathbb{C}}([-1, 1])$ 。

(d) 若 $\widehat{\mu}(n\pi) = 0$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 成立, 先证明 $\int f d\mu = 0$ 对所有三角多项式成立, 再仿照 (b) 推出结论。

习题 15.15. (a) 两次分部积分得到

$$\widehat{\varphi}(\xi) = 2 \int_0^1 (1-t) \cos(t\xi) dt = \frac{2}{\xi} \int_0^1 \sin(t\xi) dt = \frac{2(1 - \cos \xi)}{\xi^2}.$$

(b) $\widehat{\varphi} \geq 0$ 且属于 $L^1(\mathbb{R})$, 所以由反演公式与偶性,

$$\widehat{\widehat{\varphi}} = 2\pi\varphi.$$

因此

$$\mu(d\xi) = \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{2\pi} d\xi$$

是概率测度, 且 $\widehat{\mu} = \varphi$ 。

(c) 把相反的奇整数 $2n+1$ 与 $-(2n+1)$ 配对, 得到

$$\widehat{\nu}(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n \geq 0} \frac{\cos((2n+1)\xi)}{(2n+1)^2}.$$

(d) 分别在 $n\pi$ 处计算 $\widehat{\mu}\mathbf{1}_{[-1, 1]}$ 与 $\widehat{\nu}\mathbf{1}_{[-1, 1]}$ 的 Fourier 变换, 即其 Fourier 系数, 再用习题 15.14 的唯一性结论。

习题 15.16. (a) 第二个假设保证级数正规收敛, 故 F 的连续性来自局部 Lipschitz 的 f 。

(b) 交换积分与求和, 得到

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(n).$$

(c) Lipschitz 型假设给出

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{F(x) - F(0)}{x} \right| dx \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-1}^1 \left| \frac{f(x + 2\pi k) - f(2\pi k)}{x} \right| dx \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2C}{(2k\pi)^2 + 1}.$$

由 Fourier 级数的 Dirichlet 定理, F 在 0 点等于其 Fourier 级数。结合 (b) 即得公式。

(d) 左端级数由

$$\widehat{f}(n) = \frac{2a}{a^2 + n^2}$$

得到；而 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2\pi k)$ 拆成公比 $e^{-2\pi a}$ 的两个几何级数。最后令 $a \downarrow 0$ ，并使用

$$\coth x - \frac{1}{x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3}.$$

(e) 在 (d) 的第一个公式中取 $a = \varepsilon + i\alpha$ ，其中 $\varepsilon > 0$ 、 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ，再令 $\varepsilon \downarrow 0$ ，对级数使用控制收敛定理。

习题 15.17。 (a)

$$\widehat{f * f} = (\widehat{f})^2,$$

故方程化为 $(\widehat{f})^2 = \widehat{f}$ 。连续性说明 $\widehat{f}$ 只能恒为 0 或恒为 1；Riemann-Lebesgue 定理排除后者，故 $f = 0$ 。

(b) 使用 Fourier-Plancherel 卷积恒等式，证明

$$f = \frac{1}{2\pi} \Phi(\varphi), \quad \varphi^2 = \varphi, \quad \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

因此

$$\varphi = \mathbf{1}_A, \quad \lambda(A) < +\infty.$$

习题 15.18。 (a) 把 e^{iux} 分成实部与虚部。注意 $1 - \cos$ 非负，且其零点集为

$$D = \frac{2\pi}{|u_0|} \mathbb{Z}.$$

由函数列的控制收敛定理，

$$\widehat{\mu}(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu\left(\left\{\frac{2k\pi}{|u_0|}\right\}\right) e^{2ik\pi u/|u_0|},$$

故 $\widehat{\mu}$ 以 $|u_0|$ 为一个周期。

(b) 仿照应用 8.5(b) 证明 $\widehat{\mu}$ 连续。其全体周期连同 0 与负周期构成 $\mathbb{R}$ 的加法子群，因此或稠密，或为 $T\mathbb{Z}$ 。若稠密，则连续性给出

$$\widehat{\mu}(u) = \widehat{\mu}(0) = \mu(\mathbb{R}),$$

于是每个 $u > 0$ 都是周期。特别取周期 1 与 $\sqrt{2}$ ，由 (a) 可知 μ 同时承载于 $2\pi\mathbb{Z}$ 与 $(2\pi/\sqrt{2})\mathbb{Z}$ ，故承载于 $\{0\}$ ，即 $\mu = \mu(\mathbb{R})\delta_0$ 。

(c) 取 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使

$$e^{-i\alpha} \widehat{\mu}(u_0) = \mu(\mathbb{R}),$$

仿照 (a) 得到

$$D = \frac{\alpha + 2\pi\mathbb{Z}}{u_0}, \quad \widehat{\mu}(u) = e^{i\alpha u/u_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu\left(\left\{\frac{\alpha + 2k\pi}{u_0}\right\}\right) e^{2ik\pi u/u_0}.$$

(d) 把以上结论用于有限正测度

$$\mu(dx) = f(x)\lambda(dx).$$

该测度不可能承载于可数集 D ，因为

$$\mu(D) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_D(x) f(x) dx = 0,$$

而 $\mu(\mathbb{R}) = \int f \, d\lambda \neq 0$ 。

习题 15.19。 (a) 对每个 $\varepsilon > 0$ ，由 Fubini-Tonelli 定理，

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\mu(\mathbb{R}) - \operatorname{Re} \hat{\mu}(\xi)) \, d\xi &= 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin(x\varepsilon)}{x\varepsilon}\right) \mu(dx) \\ &\geq \varepsilon \mu(\{|x| \geq 2/\varepsilon\}). \end{aligned}$$

(b) 由控制收敛定理，

$$\lim_n \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\hat{\mu}_n(0) - \hat{\mu}_n(\xi)) \, d\xi = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\chi(0) - \chi(\xi)) \, d\xi.$$

与 (a) 合并即得结论。

(c) 抽取弱收敛子列 $\mu_{\varphi(n)} \rightarrow \mu$ 。对每个 $\xi \in \mathbb{R}$ ，函数 $x \mapsto e^{ix\xi}$ 连续有界，故

$$\hat{\mu}_{\varphi(n)}(\xi) \rightarrow \hat{\mu}(\xi).$$

因此 $\hat{\mu} = \chi$ 。

习题 15.20。 (a) 平移函数 $\rho(\cdot - n)$ 的支集两两不交，所以定义 $g(x)$ 的和在每个 x 处至多只有一项非零， g 因而继承 ρ 的光滑性。对 $|x| \geq p \geq 2$ ，

$$|g(x)| \leq \frac{2\pi}{\log p},$$

故 $g(x) \rightarrow 0$ 。

(b)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(x)| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx.$$

(c) F 的第 n 个 Fourier 系数为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \rho(k-n) = c_n.$$

因此 $b_1 = 0$ ，且当 $n \geq 2$ 时，

$$b_n = \frac{1}{\log n}, \quad \sum_{k=2}^n \frac{b_k}{k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \left(\sum_{k=2}^n \frac{\sin(kx)}{k} \right) \, dx.$$

最后一个积分中的部分和由 Abel 判别法在每个 $x \in [-\pi, \pi]$ 收敛。

(d) 习题 8.30(b) 的上界与 F 的可积性允许在最后一个积分中使用控制收敛定理，于是错误地推出 $\sum (n \log n)^{-1}$ 收敛，矛盾。因此

$$g \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \setminus \Phi(L^1(\mathbb{R})).$$

习题 15.21。 (a) 结合 Plancherel 定理与 Fourier 变换从 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 到 $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 的连续性，对

$$L^{p_i}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^{q_i}(\mathbb{R}^d)$$

使用 Marcinkiewicz 定理 10.8，取

$$p_1 = q_1 = 2, \quad p_2 = 1, \quad q_2 = +\infty.$$

(b) 由公式 (15.7) 与习题 8.29 的 Fresnel 积分,

$$\widehat{f}_z(\xi) = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{d/2} e^{-|\xi|^2/(4z)}.$$

(c) 因 $f_z \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 若所述连续延拓存在, 则 $\|\widehat{f}_z\|_q / \|f_z\|_p$ 必须关于 z 一致有界. 先取 $z > 0$, $z \rightarrow +\infty$, 得到

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

再令 $|\operatorname{Im} z| \rightarrow +\infty$, 得到 $p \leq 2$.

习题 15.22. (a) 在 x 点使用 Fourier 反演公式, 并利用 f 的连续性.

(b) 由反演公式有

$$c_n = f(n).$$

再利用 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)| < +\infty$ 交换积分与级数.

习题 15.23. (a) 先在 Schwartz 空间 $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ 中使用引理 15.4, 再利用 $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ 在 $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ 中的稠密性.

(b) 依次使用引理 15.4 与 (a), 最后对

$$f - g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$$

使用习题 8.33.

(c) 依次使用引理 15.4 与定理 15.4, 再次用习题 8.33 得出结论.

习题 15.24. (b) 对 ψ 使用 Dirichlet 定理.

(c) 对 ψ 使用 Parseval 恒等式, 再对 φ 使用 Plancherel 定理.

(d)(i) 分部积分.

(d)(ii) 证明

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

再使用 (b)、(c) 的等式.

习题 15.25. (b) 对第二个等式, 在

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \widehat{\varphi}(x) \, dx$$

中使用 Fubini–Lebesgue 定理. 证明第三个极限时, 在 $\{|t| \geq a\}$ 上对 $t \mapsto \varphi(t)/t$, 在 $[-a, a]$ 上对

$$t \mapsto \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$$

使用 Borel–Lebesgue 引理, 并结合习题 15.16(d) 中的 sinc 核结论.

(c) 分别对

$$(\varphi, f), \quad \left(\frac{1}{2\pi} \varphi * \varphi, f^2\right)$$

使用 Poisson 求和公式.

(d) 使用 (ii) 的最后一个条件.

习题 15.26. (a) A 的对称性由分部积分得到.

(b) 由 (a) 证明

$$\|f\|_2^2 = i\langle A(f), B(\bar{f}) \rangle - i\langle B(f), A(\bar{f}) \rangle,$$

再分别对右端两项使用 Cauchy–Schwarz 不等式.

(c) 由命题 15.3 与 Plancherel 定理,

$$\|x\widehat{f}(x)\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f'\|_2.$$

习题 15.27. (a) 依次对 f 在 0 点使用反演公式、引理 15.4、Cauchy-Schwarz 不等式与 Plancherel 定理:

$$\begin{aligned} |f(0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-a,a]}(t) \widehat{f}(t) dt \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbf{1}_{[-a,a]}}(t) f(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|\widehat{\mathbf{1}_{[-a,a]}}\|_2 \|f\|_2 = \frac{\sqrt{aI}}{\pi} \|f\|_2. \end{aligned}$$

(b) Hölder 不等式的等号情形给出某个 $\alpha \geq 0$, 使

$$|f| = \alpha \left| \widehat{\mathbf{1}_{[-a,a]}} \right| \quad \lambda\text{-a.e.}$$

(c) 在 (b) 中取 $\alpha = 1$, 再用 Plancherel 定理:

$$2a = \widehat{\mathbf{1}_{[-a,a]}}(0) = \frac{\sqrt{aI}}{\pi} \|\widehat{\mathbf{1}_{[-a,a]}}\|_2 = \frac{2aI}{\pi}.$$

习题 15.28. (a) 连续作 n 次分部积分。

(b) 由 (a),

$$\mathcal{L}(x_g)(z) = \frac{\eta}{P(z)}, \quad \mathcal{L}(e^{\alpha_j t})(z) = \frac{1}{z - \alpha_j}.$$

由 Laplace 反演定理得出结论。

(c) 令

$$h(t) := \sum_{j=1}^n \beta_j e^{\alpha_j t}.$$

由 $1/P$ 的部分分式分解, 对 $\operatorname{Re} z > a$,

$$P(z)\mathcal{L}(h)(z) = 1.$$

于是

$$P(z)\mathcal{L}(h * f)(z) = P(z)\mathcal{L}(h)(z)\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(f)(z).$$

另一方面, 由 (a) 也有

$$P(z)\mathcal{L}(y)(z) = \mathcal{L}(Dy)(z) = \mathcal{L}(f)(z).$$

Laplace 反演给出 $y = h * f = f * h$ 。

(d) 由线性性, $x = x_g + y$ 。

(e) 直接计算可验证: 对任何在 $\mathbb{R}^*$ 上为零的 $f \in C(\mathbb{R}_+)$, (d) 的表达式都是问题 (C) 的解。

习题 15.29. (a) 对 (C_a) 作 Laplace 变换, 并使用导数的 Laplace 变换公式。在 $\mathbb{R}_+$ 上得到的一般解为

$$\mathcal{L}(x)(z) = \lambda(z^2 + 1)^{a/2-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

由 Laplace 变换的单射性, 该表达式延拓到 $\mathcal{L}(x)$ 的整个定义域。

(b)(i) 若 $a \geq 2$, 则上述 $F(z)$ 不可能在 $z \rightarrow +\infty$ 时趋于 0, 故它不能是一个非零解的、定义域非空的 Laplace 变换。

(b)(ii) 当 $a = 2$ 时, $\mathbb{R}_+^*$ 上的一组解基为

$$\frac{\sin t}{t}, \quad \frac{\cos t}{t}.$$

其中没有非零线性组合满足 (C_2) 在 0 点的两个初始条件。

(c)(i) 对 $a = -2$ 作 Laplace 反变换, 得到

$$\varphi_{-2}(t) := \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t).$$

Laplace 变换定义域非空的全部解构成由 φ_{-2} 张成的一维空间。

(c)(ii) $\mathbb{R}_+^*$ 上相应二阶线性方程的解空间为二维; 除 φ_{-2} 外, 可用常数变易法取

$$\psi_{-2}(t) := \varphi_{-2}(t) \int_1^t \frac{s^2}{\varphi_{-2}(s)^2} ds.$$

在 φ_{-2} 的零点附近作渐近展开, 可验证 $\psi_{-2} \in C^2(\mathbb{R}_+^*)$ 。又因

$$\varphi_{-2}(t) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{6}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \psi_{-2}(t) = -2 \neq 0,$$

故 ψ_{-2} 不满足 (C_{-2}) 的初值条件。

(d)(i)

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n}.$$

(d)(ii) 由常数变易法得到题中的 ψ_1 。在 0 及 φ_1 的每个可能零点附近作渐近展开, 证明 $\psi_1 \in C^2(\mathbb{R}_+^*)$, 且

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi_1(t) = +\infty.$$

若 $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ 是 (C_1) 的解, 则在 $\mathbb{R}_+^*$ 上

$$f = \lambda \varphi_1 + \mu \psi_1.$$

由 f, φ_1 在 0 处连续而 ψ_1 无有限极限, 得 $\mu = 0$; 又

$$0 = f(0) = \lambda \varphi_1(0) = \lambda,$$

故 $f = 0$ 。

(d)(iii) 若题中 f 存在, 则对 $z \in \mathring{D}_{\mathcal{L}}(f)$,

$$\mathcal{L}(f * f)(z) = \mathcal{L}(f)(z)^2 = \frac{1}{z^2 + 1} = \mathcal{L}(\sin)(z).$$

由单射性与连续性, 固定一个符号后

$$\mathcal{L}(f)(z) = (z^2 + 1)^{-1/2}.$$

因此

$$(z^2 + 1)\mathcal{L}(f)'(z) + z\mathcal{L}(f)(z) = 0.$$

逆向使用 (a) 的计算可知 f 是 (C_1) 的解, 与 (ii) 矛盾。

校订注: 原解答在本题多处把正半轴 $\mathbb{R}_+^*$ 误写成负半轴 $\mathbb{R}_-^*$, 并在 (d)(ii) 的初值等式中误写 $\lambda \psi_1(0)$; 但 ψ_1 在 0 处根本没有有限值。这里分别改为 $\mathbb{R}_+^*$ 与正确的 $\lambda \varphi_1(0)$ 。

习题 15.30。 (b) 对波动方程关于 t 作 Fourier 变换；利用关于参数 x 的积分号下求导定理，证明

$$U(s, x) := \widehat{u(\cdot, x)}(s)$$

满足

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(s, x) + \frac{s^2}{c^2} U(s, x) = 0.$$

于是存在 $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ ，使

$$u(t, x) = f(t - x/c) + g(t + x/c), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

(c) 关于 t 作 Laplace 变换。对 $\operatorname{Re} z > 0$ ，令

$$U(z, x) := \mathcal{L}(u(\cdot, x))(z).$$

则

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(z, x) - \frac{z^2}{c^2} U(z, x) = -\frac{\alpha z + \beta}{c^2}.$$

结合边界条件与 (a)，证明存在 $\lambda(z), \mu(z) \in \mathbb{C}$ ，使

$$U(z, x) = \mathcal{L}(g)(z) + \lambda(z)e^{zx/c} + \mu(z)e^{-zx/c}.$$

进而得到

$$g(t) = \alpha + \beta t$$

以及

$$u(t, x) = \begin{cases} \alpha + \beta t + f(t - x/c), & t \geq x/c, \\ \alpha + \beta t, & t < x/c. \end{cases}$$

校订注：原解答在 (b) 的 Fourier 域常微分方程中把 s -依赖完全漏掉，并误印为 $U_{xx} - c^2 U = 0$ ；由 $\widehat{u_{tt}} = -s^2 U$ 可知正确方程是 $U_{xx} + s^2 c^{-2} U = 0$ 。原解答 (c) 又口误为 Fourier 变换，而随即定义的其实是 Laplace 变换；这里一并改正。

习题 15.31。 (a) 作变量代换 $s = t + k$ 。

(b) 对方程 (D) 作 Laplace 变换并使用 (a)，得到

$$P(e^z) \mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z}.$$

再用 $1/P$ 的部分分式分解。

(c) 固定 $p \in \mathbb{N}^*$ ，在 $t \in [p, p+1)$ 上比较两边的函数。

(d) 对每个 $j = 1, \dots, n$ ，使用

$$\begin{aligned} \frac{e^{-z}}{z(1 - \alpha_j e^{-z})} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_j^{k-1} \frac{e^{-kz}}{z} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_j^{k-1} \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{[k, +\infty)}(t) e^{-tz} dt. \end{aligned}$$

当 $\operatorname{Re} z > \log \alpha$ 时，可由控制收敛定理交换级数与积分。最后使用 (c) 的等式与 Laplace 反演定理。

习题 15.32. (a) 使用展开

$$[t] = \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbf{1}_{[n, n+1)}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

(b) 有

$$\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}([t])(z),$$

再由 Laplace 变换的单射性得结论。

习题 15.33. (a) 使用 Fubini–Lebesgue 定理。

(b)

$$\begin{aligned} \int_0^t [s] \, ds &= \int_1^{[t]} [s] \, ds + \int_{[t]}^t [s] \, ds \\ &= \sum_{n=1}^{[t]-1} n + [t](t - [t]) \\ &= \frac{[t]([t] - 1)}{2} + [t](t - [t]). \end{aligned}$$

(c) 由

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)^2} = \frac{e^z}{z(e^z - 1)^2} - \frac{1}{z(e^z - 1)}$$

得到题中等式；再写成

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\left(t[t] - \int_0^t [s] \, ds - [t]\right),$$

并使用 $[t] - 1 = [t - 1]$ 得出结论。

习题 15.34. (a) 第一个等式使用展开

$$\sigma^{[t]} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \mathbf{1}_{[n, n+1)}(t)$$

及控制收敛定理。

第二个等式对

$$\frac{1}{(X - \sigma)(X - \tau)}$$

作部分分式分解，再使用第一个等式。

第三个等式在第二个等式中取 $\tau = \sigma + \varepsilon$ 。选取 $\varepsilon_0 > 0$ ，使

$$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 < \begin{cases} e^{\operatorname{Re} z} - |\sigma|, & |\sigma| \geq 1, \\ 1 - |\sigma|, & |\sigma| < 1, \end{cases}$$

由有限增量不等式，对 $t \geq 1$ 有可积上界

$$\left| \frac{(\sigma + \varepsilon)^{[t]} - \sigma^{[t]}}{\varepsilon} e^{-zt} \right| \leq t(|\sigma| + \varepsilon_0)^{t-1} e^{-(\operatorname{Re} z)t}.$$

再使用控制收敛定理。

含三个互异根的等式对

$$\frac{1}{(X - \sigma)(X - \tau)(X - v)}$$

作部分分式分解，并使用第一个等式。含一个二重根的等式分解

$$\frac{1}{(X - \sigma)^2(X - \tau)}$$

并使用第一、第三个等式。

最后一个三重根等式，在三个互异根的公式中取 $\tau = \sigma + \varepsilon$ 、 $v = \sigma - \varepsilon$ 。由二阶有限增量不等式得到可积控制函数，再用控制收敛定理。

(b) 作 $s = t + 1$ ，得到

$$\mathcal{L}(f(\cdot + 1))(z) = e^z \mathcal{L}(f)(z) - u_0 e^z \int_0^1 e^{-zs} ds.$$

对 $\mathcal{L}(f(\cdot + 2))$ 同样作 $s = t + 2$ 。

(c) 对

$$f(t + 2) = af(t + 1) + bf(t) + \gamma^{[t]}$$

作 Laplace 变换，再用 (b)。

(d)–(f) 对 (c) 中 $\mathcal{L}(f)$ 的表达式作 Laplace 反变换，并使用 (a) 的相应恒等式。先得到 $f(t)$ 对几乎处处 $t \in \mathbb{R}_+$ 的公式，再取 $u_n = f(n)$ 。

习题 15.35。 (a) 对 $a > -1/4$,

$$W(e^{-a(\cdot)^2})(x) = (1 + 4a)^{-1/2} \exp\left(-\frac{a}{1 + 4a}x^2\right).$$

积分只在 $a > -1/4$ 时有定义。

(b) 对凸函数 $t \mapsto t^p$ 与概率测度 $G(y) dy$ 使用 Jensen 不等式，再使用 Fubini–Tonelli 定理。

(c) 在右端积分中写成

$$e^{-y^2/4 + xy/2} = e^{x^2/4} e^{-(x-y)^2/4},$$

再作 $y \mapsto x - y$ 。

(d)(i)

$$e^{-yD}(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} y^n f^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f(x - \cdot))^{(n)}(0)}{n!} y^n.$$

(d)(ii) 对 $yG(y) = -2G'(y)$ 分部积分。

(d)(iii) 在 $W(f)(x)$ 中用 (i) 的表达式替换 $f(x - y)$ ，并交换积分与级数；这由 $e^{|y|}G(y) \in L^1(\mathbb{R})$ 保证。再用 (ii)，奇次矩为零，得到

$$W(f)(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} D^{2n} f(x).$$

习题 15.36。 (a) 在右端积分中作

$$z = \sqrt{t} y.$$

(b) 借助 (a) 化到 W ，把习题 15.35(d)(iii) 用于 $f(\sqrt{t} \cdot)$ ，并注意

$$(f(\sqrt{t} \cdot))^{(2n)} = t^n f^{(2n)}(\sqrt{t} \cdot).$$

(c) 对 $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R})$ ，由 (b)

$$(W_s \circ W_t)(\varphi) = e^{sD^2} e^{tD^2} \varphi = e^{(s+t)D^2} \varphi = W_{s+t}(\varphi).$$

中间等式也可由双重级数的 Fubini–Lebesgue 定理及 Newton 二项式证明：

$$\sum_{m+n=p} \frac{s^m t^n}{m! n!} = \frac{1}{p!} \sum_{n=0}^p \frac{p!}{(p-n)! n!} s^{p-n} t^n = \frac{(s+t)^p}{p!}.$$

另一种方法是在 $W_s(W_t \varphi)(x)$ 的二重积分中作 $u = y + z$ ，再用 Fubini–Lebesgue 定理得到核 G_{s+t} 。

最后使用 $C_K^\infty(\mathbb{R})$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中的稠密性以及习题 15.35(b) 的 L^p 估计，把结论推广到 $1 \leq p < +\infty$ 。

(d) $q = +\infty$ 时显然。若 $q < +\infty$ ，固定 $\delta > 0$ ，则

$$\|G_t\|_{L^q(\{|y|>\delta\})} \leq \left(\frac{4t}{q\delta}\right)^{1/q} G_t(\delta) \longrightarrow 0 \quad (t \downarrow 0).$$

对 $p < +\infty$ ，以共轭指数 $q = p/(p-1)$ 使用 Hölder 不等式，把

$$|(\varphi * G_t)(x) - \varphi(x)|$$

的积分拆成 $|y| \leq \delta$ 与 $|y| > \delta$ 两部分。前一部分由 φ 在 x 处连续而任意小，后一部分由上式趋于零。当 $p = +\infty$ 时，把 $(G_t)_{t>0}$ 作为近似恒等族使用定理 14.6。

(e) 由 (b)，

$$\partial_t W_t(f) = D^2 e^{tD^2} f = D^2 W_t(f) \quad \text{于 } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

习题 15.37。 (a) 作变量代换 $s = t^2$ ，并用 Gauss 积分公式，得到

$$\mathcal{L}(a)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}, \quad x > 0.$$

(b) 对

$$\mathcal{A}(u) = a * u, \quad v := \mathcal{A}(\mathcal{A}(u)) = a * (a * u)$$

取 Laplace 变换，得到

$$\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(a)^2 \mathcal{L}(u).$$

(c) 由 (a)、(b)，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v)(x) &= \frac{\pi}{x} \mathcal{L}(u)(x) \\ &= \pi \mathcal{L}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+})(x) \mathcal{L}(u)(x) = \mathcal{L}(\pi \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} * u)(x). \end{aligned}$$

由 Laplace 反演及两边在 $\mathbb{R}_+$ 上连续得结论。

(d) 注意 $x_0 > 0$ 。

(e) 在 (d) 的积分中作 $x = W(y)$ ，再令 $V(c) = E$ 。

(f) 对 (e) 的等式两边复合 $\mathcal{A}$ ，再使用 (c)。

习题 15.38。 (a) 先注意 f 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续；对原方程复合 $\mathcal{A}$ ，使用习题 15.37(c)，得到

$$f(x) = a + 2ak\sqrt{x} + \pi k^2 \int_0^x f(t) dt.$$

再求导。

(b) 用常数变易法解一阶微分方程，并重新得到

$$\mathcal{A}(t \mapsto e^{\pi k^2 t}).$$

(c) 把 (b) 中 f 的表达式代入 $a + k\mathcal{A}(f)$, 再对 $t \mapsto e^{\pi k^2 t}$ 使用习题 15.37(c)。

习题 15.39. (a)

$$F_n(x) \geq 0, \quad F'_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} x^n f^{(n+1)}(x) \leq 0.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} F_n(x)$ 存在。再假设 $\ell_0, \dots, \ell_{n-1}$ 已存在, 归纳推出 ℓ_n 存在。

(b)(i) 从 n 到 $n+1$ 时, 对 $f(x) - M_n$ 的积分表达式分部积分。

(b)(ii) 对 $k \in \mathbb{N}^*$ 、 $u > 0$, 有

$$0 \leq (-1)^n f^{(n)}(u + 1/k) \uparrow (-1)^n f^{(n)}(u),$$

故可使用 Beppo Levi 定理。

(b)(iii) 对 $k \in \mathbb{N}^*$ 、 $u > 0$,

$$0 \leq (-1)^n u^{n-1} f^{(n)}(u + k) \leq (-1)^n u^{n-1} f^{(n)}(u) =: f_0(u),$$

而由 (ii), f_0 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上可积。

(c) 在 $(0, 1)$ 上

$$g'_n(x) = 0 \implies |g_n(x)| = \frac{e^{-nx}|nx - 1|}{n-1} \leq \frac{1}{n-1}.$$

(d)(i) 在 (b)(i) 的积分中作 $u + x \mapsto u$ 。

(d)(ii) 由 (c)、(b)(ii),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_x^{+\infty} \left[e^{-nx/u} - \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{n-1} \right] u^{n-1} f^{(n)}(u) \, du = 0.$$

(d)(iii) 由 (b)(ii)、(b)(iii), 对每个 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^x e^{-nx/u} u^{n-1} f^{(n)}(u) \, du \\ &\leq \frac{(-1)^n e^{-n}}{(n-1)!} \int_0^x u^{n-1} f^{(n)}(u) \, du \\ &\leq e^{-n} (f(0) - \ell). \end{aligned}$$

(d)(iv) 把 (ii)、(iii) 的极限相加。

(e)(i) 变量替换后,

$$\alpha_n(t) = \ell + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_{n/t}^{+\infty} u^{n-1} f^{(n)}(u) \, du, \quad t > 0.$$

故 α_n 非负、非减。由 (b)(ii)、(b)(iii),

$$\lim_{t \downarrow 0} \alpha_n(t) = \ell, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_n(t) = \ell + f(0) - \ell = f(0).$$

(e)(ii) 固定 $x > 0$, 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} x\mathcal{L}(\alpha_n)(x) &= \ell + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left(\int_{n/t}^{+\infty} u^{n-1} f^{(n)}(u) \, du \right) dt \\ &= \ell + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-nx/u} u^{n-1} f^{(n)}(u) \, du. \end{aligned}$$

由 (d)(iv), 右端在 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 $f(x)$ 。

习题 15.40. (a) 对 $[a, x]$ 上的概率测度

$$\alpha(x-a)^{-\alpha}(x-t)^{\alpha-1} dt$$

使用 Jensen 不等式, 得到

$$|I^\alpha(f)(x)|^p \leq \frac{(x-a)^{\alpha p - \alpha}}{\alpha^p \Gamma(\alpha)^p} \int_a^x \alpha |f(t)|^p (x-t)^{\alpha-1} dt.$$

再用 Fubini-Tonelli 定理, 即得

$$\|I^\alpha(f)\|_p^p \leq \frac{(b-a)^{\alpha p}}{\alpha^p \Gamma(\alpha)^p} \int_a^b |f(t)|^p dt.$$

(b)(i) 由 Γ 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上连续,

$$\alpha \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1) \longrightarrow \Gamma(1) = 1, \quad (x-y)^\alpha \longrightarrow 1.$$

这给出 ρ_y^α 在 $(y, b]$ 上的极限. 对 $\alpha \in (0, 1]$, 可用

$$\Gamma(1+\alpha) \geq \frac{1}{2}$$

及 $b-a \leq 1$ 、 $b-a \geq 1$ 两种情形, 得到题中的统一上界。

校订注: 原解答这里写成 $\Gamma(\alpha+1) \geq \Gamma(2) = 2$, 既把 $\Gamma(2) = 1$ 误写成 2, 不等式本身也不成立。所需的正确统一下界可取 $1/2$; 例如由 $t^\alpha \geq t$ ($0 < t < 1$) 以及 $t^\alpha \geq 1$ ($t \geq 1$) 直接估计 $\Gamma(1+\alpha)$ 即可。

(b)(ii)

$$(I^\alpha(\varphi) - \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\varphi(t) - \varphi(x))(x-t)^{\alpha-1} dt + \varphi(x)(\rho_a^\alpha(x) - 1).$$

把积分拆成 $[a, y]$ 与 $[y, x]$, 并以 $\|\varphi\|_{\sup}$ 控制前一段, 即得第一个不等式。此外,

$$|I^\alpha(\varphi)(x)| \leq \|\varphi\|_{\sup} \rho_a^\alpha(x).$$

结合 (i) 与 φ 的连续性, 对 $|I^\alpha(\varphi) - \varphi|^p$ 使用控制收敛定理。

(b)(iii) 使用

$$C^0([a, b]) \text{ 在 } L^p([a, b]) \text{ 中稠密}$$

以及 (ii) 的两个估计。

(c) 由积分号下连续定理,

$$(I^{\alpha+1}(f))'(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt = I^\alpha(f)(x).$$

(d) 在 $I^\alpha(I^\beta(f))(x)$ 中使用 Fubini 定理, 得到关于 $s \in [a, x]$ 的核

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} dt.$$

作 $t = s + (x-s)u$, 并用余元公式:

$$\frac{(x-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du = \frac{(x-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

(e) 固定 $x > 0$, 在 $\mathcal{L}(I^{1-\alpha}(f))(x)$ 中使用 Fubini 定理。对固定 $s \geq 0$, 内层积分为

$$\int_s^{+\infty} (t-s)^{-\alpha} e^{-xt} dt = e^{-xs} x^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha).$$

校订注: 原解答把内层积分核误印为 $(t-s)^{1-\alpha}$ 。由本题中 $I^{1-\alpha}$ 的定义, 正确指数应为 $(1-\alpha)-1 = -\alpha$; 此处据此改正。

代回即得

$$x \mathcal{L}(I^{1-\alpha}(f))(x) = x^\alpha \mathcal{L}(f)(x).$$

第十九章 选择题答案

选择题 1。

1. 有三个正确选项：

$$\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \in L^1(\mathbb{R}_+), \quad \frac{x}{x^2+1} \in L^2(\mathbb{R}), \quad \frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R}).$$

2. 有两个正确选项。由控制收敛定理，

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(\frac{1+x}{2} \right)^n dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} dx = 0.$$

3. 作极坐标变量替换，得到

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2/2} r dr = \frac{\pi}{2}.$$

4. 分部积分两次可得

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{2}{(1+2\pi i\xi)^3}.$$

5. 直接计算得

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

6. 直接计算得

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 d\xi = \pi.$$

7. 令 $f(x) := e^{-\pi x^2}$ 。由于 $\mathcal{F}(f) = f$ ，故

$$\mathcal{F}(f * f)(\xi) = (\mathcal{F}(f)(\xi))^2 = e^{-2\pi \xi^2}.$$

选择题 2。

1. 只有一个正确选项：

$$\frac{1}{\sqrt{x^4+x}} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

2. 答案是

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3. 有两个正确选项，它们给出同一个值：

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2.$$

4. 利用导数与 Fourier 变换之间的关系，得到

$$\mathcal{F}(f) = -if.$$

5. 答案是 2。

6. 答案是

$$\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^3}.$$

7. 在相差一个乘法常数的意义下，答案是 f_2 。

选择题 3。

1. 有两个正确选项：

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \in L^1(\mathbb{R}_+), \quad \frac{\sin^2 x}{x} \in L^2(\mathbb{R}).$$

2. 作极坐标变量替换，答案是 π 。

3. 有两个正确选项。对 I 作平移变量替换，得到 $I = \pi$ ；对 J 使用控制收敛定理，得到 $J = 0$ 。

4. 有两个正确选项： $\mathcal{F}(f)$ 为实值函数，并且

$$\mathcal{F}(f) > -f.$$

这可由导数与 Fourier 变换之间的关系推出。

5. 由 Plancherel 定理，答案是

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(t \cos t - \sin t)^2}{t^4} dt.$$

6. 答案是

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2ax} dx.$$

7. 答案是 $2\sqrt{\pi}$ 。

选择题 4。

1. 有两个正确选项：

$$\frac{1 - e^{-\sqrt{x}}}{x} \in L^1([0, 1]), \quad \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}} \in L^2(\mathbb{R}).$$

2. 答案是 $-1/e$ 。

3. 作极坐标变量替换，答案是 2π 。

4. 有两个正确选项：

$$\mathcal{F}(f)(0) = 0, \quad \mathcal{F}(f) = -if.$$

5. 被取模的内层积分是函数

$$h(x) := \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) e^{-2\pi x^2}$$

的 Fourier 变换。由 Plancherel 定理，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} e^{-2\pi x(x+iy)} dx \right|^2 dy = \int_0^{+\infty} e^{-4\pi x^2} dx = \frac{1}{4}.$$

校订注：原答案在重写本题积分时把内层积分的下限从 0 误印成 $-\infty$ ，这与题目以及随后使用的 $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} e^{-2\pi x^2}$ 均不相容；此处恢复为 0。

6. 因为

$$f = \mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-1/2, 1/2]}),$$

所以 $f * f = f$ 。

7. 从恒等式

$$\frac{e^{-(x+y)} - e^{-2(x+y)}}{x+y} = \int_1^2 e^{-z(x+y)} dz$$

出发，再应用 Fubini–Tonelli 定理，得到答案 $1/2$ 。

选择题 5。

1. 有两个正确选项：

$$\frac{1}{\sqrt{x}|\log x|} \in L^1((0, 1)), \quad \frac{1}{\sqrt{x} \log x} \in L^2([2, +\infty)).$$

2. 利用

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2t}, \quad t > 0,$$

在积分号下求导，得到

$$f'(\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}.$$

校订注：原答案把上面的半轴 Gauss 积分误印为 $\sqrt{\pi}/t$ ，漏掉因子 $1/2$ ；其随后给出的 $f'(\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}$ 则对应于这里的正确公式。

3. 作极坐标变量替换，答案是 π 。

4. 只有一个正确选项：

$$\mathcal{F}(f) = -f.$$

这可由导数与 Fourier 变换之间的关系以及 $e^{-\pi x^2}$ 是 $\mathcal{F}$ 的不动点推出。

5. 利用 Plancherel 定理以及

$$\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-a, a]})(x) = \frac{\sin(2\pi ax)}{\pi x},$$

得到答案

$$\pi \min(a, b).$$

6. 有三个正确选项：

$$f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-x}, \quad f(x) = -\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x)e^x, \quad f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-2x}.$$

可对等式 $(f * f)(x) = xf(x)$ 作 Fourier 变换加以验证。

7. 由 Fubini–Tonelli 定理，

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+a+ax^2)}{1+x^2} dx &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^a \frac{dy}{1+y+yx^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{y^2+y}} = \frac{\pi}{2} g(a). \end{aligned}$$

选择题 6。

1. 有三个正确选项：

$$\int_0^1 x \log^2(e^{2/x} - e^{1/x}) dx = +\infty,$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx = +\infty, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_e^a \frac{\log x \sin x}{x(\log x - \sin x)} dx = +\infty.$$

对最后一个积分，使用展开

$$\begin{aligned} \frac{\log x \sin x}{x(\log x - \sin x)} &= \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin^2 x}{x \log x} + O\left(\frac{1}{x \log^2 x}\right) \\ &= \frac{1}{2x \log x} + \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos(2x)}{2x \log x} + O\left(\frac{1}{x \log^2 x}\right). \end{aligned}$$

2. 注意到在本章的 Fourier 变换规范下，

$$\frac{\sin(n\pi x)}{\pi x} = \mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-n/2, n/2]})(x).$$

于是由 Fourier 反演定理，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(n\pi x)}{x} \varphi(x) dx &= \pi \int_{-n/2}^{n/2} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) d\xi \\ &\longrightarrow \pi \varphi(0). \end{aligned}$$

校订注：原答案写成 $\sin(2n\pi\xi)/(\pi\xi) = \mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-n, n]})(\xi)$ 后，又声称作变量替换 $x = 2\pi\xi$ ；该变量替换与题目中的 $\sin(n\pi x)/x$ 不相容。这里直接使用与题目完全匹配的核 $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-n/2, n/2]})(x)$ 。

3. 由 Fubini–Tonelli 定理并作极坐标变量替换，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2 + y^2)^{n-1}}{1 + (n+1)^2(x^2 + y^2)^{2n}} dx dy \\ = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{1 + (n+1)^2 t^{2n}} dt \\ = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

校订注：原答案给出的数值为 $\pi/2$ ，漏掉了变量替换后 $\int_0^{+\infty} (1+u^2)^{-1} du = \pi/2$ 所贡献的一个 π 因子。上式给出逐步核算，正确选项为 $\pi^2/2$ 。

4. 只有一个正确选项：

$$f * f = e^{-\pi x^2}.$$

对等式作 Fourier 变换，并使用 $L^1(\mathbb{R})$ 函数的 Fourier 变换连续且在无穷远处趋于 0，即可排除其余选项并构造所需解。

5. 答案是 0。令

$$f_a(t) := \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-at}, \quad f_b(t) := \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-bt}.$$

则

$$\mathcal{F}(f_a)(\xi) = \frac{1}{a + 2\pi i \xi}, \quad \mathcal{F}(f_b)(\xi) = \frac{1}{b + 2\pi i \xi}.$$

由 Fourier 反演与 Fubini 定理,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f_a)(\xi) \mathcal{F}(f_b)(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f_a(t) f_b(-t) dt = 0.$$

再作 $x = 2\pi\xi$ 即得题中积分为 0。

校订注：原答案把第二个因子解释为 $\mathcal{F}(1_{\mathbb{R}_+} e^{b\cdot}) = (b - 2\pi i\xi)^{-1}$, 但题中两个分母的虚部符号相同。这里改用两个正半轴函数；它们与反射后的乘积支集只在零点相交, 故积分为 0。

6. 有两个正确选项:

$$F(x) = xe^x, \quad F(x) = \sin x.$$

这是因为 $\mathcal{F}(f)$ 连续并在无穷远处趋于 0。例如对 $F(x) = xe^x$, 在 $L^1(\mathbb{R})$ 中收敛的级数

$$g := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{*(n+1)}}{n!}, \quad f^{*n} := \underbrace{f * \cdots * f}_{n \text{ 次}}$$

满足

$$\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f)e^{\mathcal{F}(f)}.$$

7. 由 Fubini–Tonelli 定理并作变量替换 $t = \tan x$, 得到

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\arctan(a \sin x)}{\sin x} dx &= 2 \int_0^a dy \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + y^2 \sin^2 x} \\ &= \pi \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 1}} = \pi \operatorname{arsinh} a. \end{aligned}$$

参考文献

编排说明。 为便于读者检索原始出版物，作者姓名、书名、论文名、丛书名与出版社名保留其出版语种；文献分类标题译为中文。

历史文献

- [1] E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1898.
- [2] H. Lebesgue, *Sur une généralisation de l' intégrale définie*, *Comptes rendus de l' Académie des sciences de Paris*, 132, pp. 1025–1028, 1901.
- [3] H. Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire*, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 7, pp. 231–359, 1902.
- [4] H. Lebesgue, *Leçons sur l' intégration et la recherche de fonctions primitives*, «Les grands classiques Gauthier-Villars», Éditions Jacques Gabay, 2^e édition, Paris, 1928.
- [5] B. Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Habilitationsschrift, aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1854.

积分理论著作

- [6] J.-M. Arnaudès, *L' intégrale de Lebesgue sur la droite réelle*, «Les grands cours Vuibert», Vuibert, 1997.
- [7] P. Deheuvels, *Intégrale*, P.U.F., 1980.
- [8] J. Deny, *Théorie de l' intégration*, Orsay P.U.S., Université Paris XI, 1989.
- [9] A. Gramain, *Intégration*, «Méthodes», Hermann, 1988.
- [10] N. Lerner, *A Course on Integration Theory*, Birkhäuser, 2014.
- [11] D. Revuz, *Mesure et intégration*, «Méthodes», Hermann, 1994.
- [12] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 2nd edition, 1974; 法译本: W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 6^e édition, 1992.
- [13] J. L. Schiff, *The Laplace Transform: Theory and Applications*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1999, 233 p.
- [14] D. Stroock, *A Concise Introduction to the Theory of Integration*, Birkhäuser, second edition, 1994.
- [15] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vols. I–II, with a foreword by Robert A. Fefferman, third edition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

集合论著作

- [16] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Théorie des ensembles*, Masson, 1990.

不等式著作

- [17] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, second edition, 1959.

拓扑学著作

- [18] G. Choquet, *Topologie*, Masson, 1995.
[19] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, tome II, Gauthier-Villars, 1968.
[20] J. Dixmier, *Topologie générale*, P.U.F., 1981.
[21] P. Jaffard, *Traité de topologie générale en vue de ses applications*, P.U.F., 1997.

泛函分析著作

- [22] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1993.
[23] F. Hirsch, G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, «Enseignement des Mathématiques», Masson, 1997.
[24] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, Pure and Applied Mathematics, Vol. VII, Interscience Publishers Inc., New York, 4th edition, 1967.
[25] L. Schwartz, *Topologie et analyse fonctionnelle*, «Enseignement des Sciences», Hermann, 4^e édition, 1970.

概率论著作

- [26] J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, 1964.

微分学著作

- [27] A. Avez, *Calcul différentiel*, Masson, 1983.
[28] H. Cartan, *Calcul différentiel*, «Méthodes», Hermann, 1967.
[29] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, «Mathématiques et Applications», 13, Springer-Verlag, 1993.

本科低年级教材

- [30] J.-M. Arnaudiès, H. Fraysse, *Cours de Mathématiques 1: algèbre*, Dunod, 1994.
[31] J.-M. Arnaudiès, H. Fraysse, *Cours de Mathématiques 2 et 3: analyse et compléments d'analyse*, Dunod, 1994.
[32] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Topologie et éléments d'analyse*, Masson, 2^e édition, 1995.

习题集

- [33] J.-P. Ansel, Y. Ducel, *Exercices corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration*, Ellipses, 1995.

- [34] K. Vo Khac, *Théorie de la mesure, exercices et problèmes corrigés*, Hermann, 1993.
- [35] K. Vo Khac, *Intégration et espaces de Lebesgue, exercices et problèmes corrigés*, Hermann, 1994.

索引

使用说明。 本索引依据中文讲义定稿前的实际分页重新生成；页码指向本中文讲义，不沿用原书页码。原书中的倒装重复入口已合并，并按中文读者的检索习惯分为若干主题。

人名定理、公式与常数

Abel 定理	354	Heine 定理	312
Abel 滑梯	354	Heisenberg 不等式	346–347
Apéry 常数 $\zeta(3)$	161–162	Helly 选择定理	356
Banach–Steinhaus 定理	380	Hilbert 不等式	269
Basel 问题 ... 15, 19–20, 161–162, 265, 285, 342		Hölder 不等式	165–166, 168–170
Beppo Levi 定理	116–118, 120, 127	Ionescu–Tulcea–Kolmogorov 定理	261
Bernstein 定理	21–23, 294	Jensen 不等式	130, 318, 357, 371, 393
Bernstein–Widder 定理	338, 353	Lebesgue–Urysohn 定理	314
Berry–Esseen 不等式	345	Lusin 定理	179, 199–200, 203
Bessel 不等式	246	Marcinkiewicz 插值定理	236
Borel–Cantelli 引理	139	Markov 不等式	119–120, 396
Bromwich–Mellin 反演公式	336	Minkowski 不等式	165, 169, 171–172, 174
Brouwer 拓扑度	280	Minkowski 反向不等式	171–172, 209–210
Carathéodory 定理	74–77, 84	Paul Lévy 定理	343
Chasles 关系	5, 140	Poincaré 公式	27
Egoroff 定理	104, 391, 396, 401	Poisson 求和公式	341–342, 346, 419
Euler–Mascheroni 常数	150	Pólya–Szegő 不等式	265
Fatou 引理	132–135, 137	Pratt 引理	159, 398
Fejér 核	158	Prohorov 定理	345
Fourier 反演公式	328–329, 332, 336–337	Radon–Nikodym 定理	226
Fourier–Plancherel 变换	331	Riemann–Lebesgue 引理	17, 326
Fubini–Lebesgue 定理	257	Riesz 表示定理	211, 213, 216–217, 219
Fubini–Tonelli 定理	252	Riesz–Fischer 引理与定理	174, 194
Gauss 积分	18, 425, 430	Riesz–Thorin 定理	236
Gauss–Weierstrass 变换	350	Sard 定理	288
Guldin 第一定理	279	Scheffé 定理	149
Hahn–Banach 定理	380	Schur 不等式	269
Hardy 不等式	207, 266–267, 320, 383	Schwarz 定理	265
Hardy 加权不等式	317	Shannon 公式	347
Hardy–Littlewood–Pólya 不等式	265	Steinhaus 定理	308, 404
Hausdorff 公式	44, 49–50, 249, 272	Stirling 公式	153, 376
Hausdorff–Young 不等式	344	Urysohn 引理	199, 217, 225, 315
		Vitali 定理	154

- Vitali-Saks 定理.....240
- Wallis 积分.....19
- Weyl 不等式.....207
- Young 不等式.....166, 208, 317, 344, 402
- 集合论与拓扑**
- 有限集.....22-23, 27, 52, 99
- 无限集.....22-26
- 可数集.....23-25, 27, 46
- 不可数集.....23, 25-27, 46
- 等势集合.....21-23, 48, 231
- 选择公理.....22, 48, 293
- 开集.....28, 30, 34-36
- 闭集.....34, 48-49, 59, 71
- 拓扑.....34
- 诱导拓扑.....35-36, 51
- 乘积拓扑.....36, 56, 250
- Hausdorff (分离) 拓扑.....34-36, 44, 49
- 度量空间.....32, 34-35
- 超度量.....211
- 点到集合的距离.....29, 37, 195, 199, 391
- 可分空间.....35, 98, 225
- 可数开基.....29, 34-36, 48
- 稠密序列.....35, 48, 59, 98, 100
- 局部紧空间.....77, 98-101
- σ -紧空间.....98, 100, 211, 216
- Polish 空间.....59, 100
- Alexandroff 紧化.....121
- 扩充实直线.....29
- 上极限.....29, 31, 58, 392
- 下极限.....29, 31-33, 45
- 集合上极限.....50
- 集合下极限.....50
- Cantor 集.....291, 294-297
- Hausdorff 维数.....106
- Hausdorff 测度.....106
- 单位球体积.....274, 279, 282, 284, 288
- 矩形 (长方体).....41, 56, 70, 76, 89
- 分割.....2, 10-11, 15, 41
- 分割步长.....11, 386
- 对角抽取法.....405-406
- 不共度向量.....157
- 可测空间、函数与测度**
- σ -代数.....45
- Borel σ -代数.....45, 48-49, 52, 54
- Baire σ -代数.....64
- Lebesgue σ -代数.....125, 291, 293, 300
- 乘积 σ -代数.....248-249, 253, 255, 300
- 原像 σ -代数.....49-50, 54, 63
- 像 σ -代数.....49-51, 54, 63
- 迹 σ -代数.....50, 55
- 完备化 σ -代数.....291-293, 297-298
- 平凡 σ -代数.....46
- 粗 σ -代数.....46
- 函数族生成的 σ -代数.....49
- π -系统.....72-76
- λ -系统.....71-72, 109, 243, 253
- 半代数.....84-85, 87, 89-90
- 代数.....44-45
- Boolean 代数.....75-79
- 格代数.....60
- 单调类定理.....71, 108-109
- 函数单调类定理.....102
- 可测空间.....45, 52
- 可测函数.....54-56
- Borel 函数.....66, 99, 127, 130, 150
- Lebesgue 可测函数.....207, 296-297, 300, 345
- 简单函数.....59-62
- 阶梯函数.....2, 5-7, 11
- 调节函数.....5-6, 16, 64, 125
- 示性函数.....6, 27, 54
- 有理数示性函数.....6-7, 24, 43, 70
- 直接像函数.....44
- 原像函数.....44, 49-50, 54, 61
- 测度.....65
- 有限测度.....65, 68, 72-74
- σ -有限测度.....95, 252-255
- 零测度.....65, 171, 185
- 粗测度.....65
- 条件测度.....66
- 计数测度.....65, 68, 105, 113, 117
- Dirac 测度.....65, 105, 113
- Lebesgue 测度.....66, 69-70, 73, 75
- Borel 测度.....97-99, 101, 197

- Stieltjes 测度 77, 84, 89–90, 92
 Radon 测度 212, 216
 Hausdorff 测度 106
 外测度 75, 78–81
 像测度 272–276
 乘积测度 250–253
 迹测度 66
 完备测度 291–295
 正则测度 76
 内正则测度 76, 93, 95, 97, 101
 外正则测度 77, 93, 95, 97, 101
 弥散测度 141, 145, 157
 绝对连续测度 148, 226–227, 232, 243
 测度的支集 105
 测度的密度 99, 146, 148, 226–227
 Radon–Nikodym 导数 226
 可忽略集 103, 291–293
 测度原子 53, 92–93, 156
 测度分割 60–61, 112–114
 集合截面 251
 函数截面 251
积分、收敛与不等式
 Riemann 积分 2, 4, 7, 15, 41
 Riemann 可积函数 3–7
 Riemann 和 10–11, 16, 41, 386
 Lebesgue 积分 110, 114, 116–117, 124
 简单函数的积分 111
 非负可测函数的积分 115
 含参积分 12, 15, 117, 132, 139
 分部积分 8–9, 19, 260, 267
 变量替换 8, 272–276
 Jacobian 274–275, 280, 282, 285
 极坐标 278–281, 410
 第一积分中值公式 9
 第二积分中值公式 10, 13
 原函数 7–9, 13, 42
 自然对数 7
 一致收敛 5, 13–15, 17
 单调收敛定理 116, 132, 197, 224
 控制收敛定理 127, 132, 134, 136–138
 依测度收敛 105, 155
 分布意义收敛 354
 L^p 控制收敛 162, 177–180
 L^1 弱收敛 240
 L^p 弱收敛 239
 积分号下连续性 141, 397, 400, 427
 积分号下求导 13, 142, 152, 323, 388
 逐项积分 353, 389
 逐项求导 14
 绝对连续性 148, 226–227, 232, 243
 绝对等度连续 239
 一致可积性 244, 374–375
 概率一致可积性 152
 下半连续函数 308
 凸函数 130, 156, 287, 371–372
 熵不等式 130
 三角不等式 124, 135, 168–169, 172
 广义补元公式 286, 412
 补元公式 265
 Fresnel 积分 157, 344, 419
 Riemann–Liouville 积分 356
 分数阶导数 356
 L^p 空间与泛函分析
 L^p 空间 164
 弱 L^p 空间 209
 Marcinkiewicz 空间 209
 L^p 范数 164
 一致范数 5, 187, 416
 范数 172–174
 半范数 123, 172–173, 180, 187
 Hilbert 范数 193, 341
 Hilbert 空间 176, 192–193, 332
 平行四边形恒等式 193
 内积 246, 317
 正交投影 193, 203
 复半双线性型 176, 193
 拓扑对偶 234
 L^∞ 的对偶 245
 L^p – L^q 对偶 231, 234, 236, 238, 241
 线性泛函表示 192, 194–195, 211
 L^p 的可分性 29, 34, 36, 211, 242
 稠密性 179–180, 182, 190–191
 等度连续 239
 插值 236–237

- 点态有界原理 380
- 卷积与变换**
- 卷积 302–309
- 初等卷积 146
- $\mathbb{R}^d$ 上的卷积 304, 316, 319, 349
- 卷积结合律 305–306, 309, 316, 320
- 卷积不动点 288, 342, 355, 379, 413
- Young 卷积不等式 317
- 函数的平移 293–294, 303–304, 307
- 近似恒等族 310–312, 314, 318
- 正则化序列 314, 332
- 紧支集函数 341, 346, 373, 381–382
- 紧支集核 341, 346, 373, 381–382
- 局部可积函数 307, 312–314, 331
- 函数的支集 105–106, 136, 318, 340
- 本质支集 105–106, 318
- Cauchy 核 310
- Gauss 核 310
- Laplace 核 310
- 热核 353
- 半群性质 353
- Fourier 变换 321–326, 329, 331
- Fourier 变换的单射性 275, 280, 326, 336–337
- Fourier 系数 (实) 159
- Fourier 系数 (复) 344
- $\mathbb{R}^d$ 中的 Fourier 系数 159, 161, 245, 342–343
- Fourier–Plancherel 变换 331
- Laplace 变换 321, 333–338, 347
- 双边 Laplace 变换 333, 338, 353
- 函数的 Laplace 变换 333
- 测度的 Laplace 变换 334
- Laplace 反演公式 336–337, 420, 422, 425
- Mellin 变换 268
- Abel 积分变换 354
- Weierstrass 变换 353
- 正弦基数函数 345
- 正弦基数积分–级数公式 346
- 方程、概率与其他应用**
- 概率测度 65, 168, 261–263
- 无限乘积概率测度 261
- 矩阵极分解 274
- 正定矩阵 287
- 实对称矩阵对角化 410
- 畸变 154
- 微分系统的流 2, 160, 399
- 有限差分方程 350
- 递推序列 263, 325, 351
- 热方程 353–354
- 波动方程 349, 422
- Heaviside 函数 338
- Lebesgue 函数 134, 294–296
- 定点定理 382
- 双重级数 261, 425
- 拓扑度 280, 282–283, 288
- 概率 59, 65, 130, 148