

连续鞅与布朗运动

独立中文讲义

Daniel Revuz Marc Yor

依据第三版第三次修订印刷（2005）翻译、校订并重新排版

中文译校与排版：Yuguang XIAO（肖煜光）

原著信息（Springer, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 293）：

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-06400-9>

前言

自本书第一版于 1991 年问世以来，人们对布朗运动及相关随机过程的兴趣丝毫未减。这或许是因为布朗运动同时属于许多基本过程类：它是连续鞅，是高斯过程，是马尔可夫过程；更确切地说，它是独立增量过程。事实上，在相差若干简单变换的意义下，它可以定义为具有平稳独立增量和连续路径的实值中心过程。因此，多种多样的技术都能成功用于研究布朗运动，并不足为奇。基于这一点，我们按如下方式组织本书。

第一章介绍布朗运动；此后每一章引入一种新的技术或概念，并讨论它在布朗运动中的若干应用。其中有两种技术至关重要：贯穿全书的随机微积分，以及威力强大的游程理论。我们用尽可能少的预备工具，以自足的方式介绍这两种理论。借助它们，Itô 与 McKean 的开创性著作 *Diffusion Processes and Their Sample Paths* (Springer, 1965) 中的许多结果，如今可以得到简洁得多的证明。

正如我们曾多次实践的那样，这两种技术可以分别安排在两个学期的课程中。第一门课程以布朗运动和随机积分为主题，围绕著名的 Itô 公式展开，可以涵盖第 I 至第 V 章，并酌情选讲第 VIII、第 IX 章的开头部分。第二门课程更为深入，可以从第 VI 章的局部时以及随机微积分向凸函数的推广讲起，继而讨论时间反演、Bessel 过程和 Ray-Knight 定理；后者用 Bessel 过程刻画布朗局部时。第 XII 章的游程理论在这门课程中起着基础作用。最后，第 XIII 章讨论一维和二维布朗运动加性泛函的渐近行为，特别是平面布朗运动绕有限多个点的缠绕数。

每一节末都配有大量习题，较难的习题标以 *，特别困难者标以 **。一方面，这些习题应当帮助读者加深对正文概念的理解；另一方面，它们还涵盖了许多重要结果，若全然略去，正文会显得有些单薄或不完整，但若全部纳入正文，篇幅又将增长到难以接受的程度，也会剥夺读者亲自推导的乐趣。本书的写作默认读者会尝试其中相当一部分习题，尤其是标有 # 的习题；在少数证明中，我们甚至直接使用了前面习题的结论。

除测度论中的少数结果外，本书基本自足。除了经典微积分，我们只要求读者较好地掌握积分论和概率论的基本概念，例如几乎必然收敛、平均收敛、条件期望和独立性等。第 0 章补充了其中若干内容。此外，前几章还收入了一些经典材料，初学者可以借此磨炼技巧。

每章末均设“注释与评述”，其中尤其列出参考文献并说明有关成果的出处。鉴于布朗运动及相关主题的文献极为浩繁，我们并未试图勾勒这一领域的完整历史图景；如有作者因此感到其工作未获充分提及，我们在此预先致歉。

同样，本书的参考文献远非完备。大量将布朗运动与数学其他领域联系起来的论文，例如涉及势论、调和分析、偏微分方程和几何的工作，都未收入。关于这些方向已经出版了许多优秀著作，其中一部分会在“注释与评述”中讨论。

这也使我们想到，应当列举一些自 20 世纪 90 年代初以来由布朗运动研究生发出来、并且在未来仍将十分活跃的方向：

- Neveu 与 Pitman 开创，继而由 Aldous、Le Gall、Duquesne 等人推进的分枝过程、随机树与布朗游程之间的深刻联系；
- Lévy 过程研究的重要进展。这些进展既受益于布朗运动乃至更一般扩散过程方面的成果，也受益于 P.A. Meyer 及其“斯特拉斯堡学派”对随机过程一般理论的深刻理解。在这一领域，Bertoin 的 *Lévy Processes* (Cambridge University Press, 1996) 是一部基本参考书；Sato 的 *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions* (Cambridge University Press, 1999) 同

样重要，不过该书取径不同，更侧重无穷可分分布的性质；

- 与此类似，对布朗局部时的深入认识导出了相交局部时，而后者是研究三维布朗运动多重点的基本工具。Le Gall 在 Saint-Flour (1992) 的出色讲义，使我们不再因本书略去这一主题而感到遗憾。还应提及 Lawler、Schramm 与 Werner 关于布朗曲线的成果；他们开创了随机 Loewner 方程的研究；
- 随机积分与 Itô 公式的适用范围已经超越半鞅，例如扩展到某些 Dirichlet 过程，即一个鞅与一个二次变差为零的过程之和 (Bertoin、Yamada)。还应提及预见随机分析 (Skorokhod、Nualart、Pardoux)。不过，目前尚无统一这些推广的一般理论；分数布朗运动所引发的兴趣说明了开展这类研究的必要性 (Cheridito、Feyel–De la Pradelle、Valkeila 等)。

最后，我们很高兴向多年来帮助我们不断改进书稿的所有人致谢：J. Jacod、B. Maisonneuve、J. Pitman、A. Adhikari、J. Azéma、M. Emery、H. Föllmer，以及我们受益良多、现已故去的 P. A. Meyer。我们尤其感谢 J. F. Le Gall，他在数不胜数的问题上为我们澄清了疑误；还要感谢 Shi Zhan，他在习题方面给予了帮助。

巴黎，2004 年 8 月

Daniel Revuz
Marc Yor

目录

前言	ii
第 0 章 预备知识	1
1 基本记号	1
2 单调类定理	2
3 完备化	3
4 有限变差函数与 Stieltjes 积分	3
5 度量空间中的弱收敛	8
6 高斯及其他随机变量	10
第 I 章 引论	13
1 随机过程的例子; 布朗运动	13
2 布朗路径的局部性质	24
3 典范过程与高斯过程	32
4 滤过与停时	41
注释与评述	48
第 II 章 鞅	49
1 定义、极大不等式及其应用	49
2 收敛定理与正则化定理	59
3 可选停止定理	67
注释与评述	77
第 III 章 马尔可夫过程	78
1 基本定义	78
2 Feller 过程	86
3 强马尔可夫性质	101
4 Lévy 过程结果概要	115
注释与评述	118
第 IV 章 随机积分	119
1 二次变差	119
2 随机积分	137
3 Itô 公式及其初步应用	146
4 Burkholder–Davis–Gundy 不等式	161

5	可预测过程	173
	注释与评述	179
第 V 章 鞅的表示		181
1	连续鞅作为时间变换后的布朗运动	181
2	共形鞅与平面布朗运动	193
3	布朗鞅	205
4	积分表示	217
	注释与评述	226
第 VI 章 局部时		231
1	定义与基本性质	231
2	布朗运动的局部时	249
3	三维 Bessel 过程	263
4	一阶微积分	275
5	Skorokhod 停止问题	287
	注释与评述	296
第 VII 章 生成元与时间反演		299
1	无穷小生成元	299
2	扩散过程与 Itô 过程	314
3	一维连续马尔可夫过程	321
4	时间反演及其应用	336
	注释与评述	347
第 VIII 章 Girsanov 定理及其初步应用		348
1	Girsanov 定理	348
2	Girsanov 定理在 Wiener 空间研究中的应用	362
3	扩散过程的泛函与变换	374
	注释与评述	387
第 IX 章 随机微分方程		389
1	形式定义与唯一性	389
2	Lipschitz 系数情形下的存在性与唯一性	400
3	一维 SDE 及与 Hölder 连续系数有关的结果	414
第 X 章 布朗运动的加性泛函		428
1	一般定义	428
2	一维布朗运动加性泛函的表示定理	436
3	加性泛函的遍历定理	451

4 平面布朗运动的渐近结果	461
注释与评述	468
第 XI 章 Bessel 过程与 Ray–Knight 定理	470
1 Bessel 过程	470
2 Ray–Knight 定理	486
3 Bessel 桥	496
注释与评述	502
第 XII 章 游程	504
1 Poisson 点过程预备知识	504
2 布朗运动的游程过程	512
3 跨越给定时刻的游程	520
4 Itô 测度的刻画及其应用	526
注释与评述	542
第 XIII 章 分布极限定理	544
1 依分布收敛	544
2 布朗运动加性泛函的渐近行为	551
3 平面布朗运动的渐近性质	561
注释与评述	571
附录 A 附录	573
1 Gronwall 引理	573
2 广义函数	573
3 凸函数	574
4 Hausdorff 测度与维数	576
5 遍历理论	576
6 函数空间上的概率	577
7 Bessel 函数	577
8 Sturm–Liouville 方程	578
参考文献	581
符号索引	620
主题索引	622

第 0 章 预备知识

本章回顾若干基本事实，主要涉及积分论和经典概率论。全书将在不再另作说明的情况下反复使用这些结果。另一些通常属于微积分范畴、只在个别部分使用的预备知识，集中收录在书末附录中。

1 基本记号

在下文中， $\mathbb{N}$ 表示非负整数集，即 $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ ； $\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别表示实数集、有理数集和复数集。此外，

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \quad \mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+.$$

我们所说的“正”一律指“非负”，即 ≥ 0 ；若要表示 > 0 ，则称为“严格正”。

同样，定义在 $\mathbb{R}$ 的一个区间上的实值函数 f 称为单调不减（相应地，严格递增），如果 $x < y$ 蕴含 $f(x) \leq f(y)$ （相应地， $f(x) < f(y)$ ）。

若 $a, b \in \mathbb{R}$ ，记

$$a \wedge b = \min(a, b), \quad a \vee b = \max(a, b).$$

若 E 是一个集合， f 是 E 上的实值函数，则采用记号

$$f^+ = f \vee 0, \quad f^- = -(f \wedge 0), \quad |f| = f^+ + f^-, \quad \|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

若实数列 (a_n) 单调递减（单调递增）并收敛到 a ，则写作 $a_n \downarrow a$ ($a_n \uparrow a$)。

若 $(E, \mathcal{E})$ 和 $(F, \mathcal{F})$ 是可测空间，我们用 $f \in \mathcal{E}/\mathcal{F}$ 表示映射 $f: E \rightarrow F$ 关于 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 可测。当 $(F, \mathcal{F})$ 是配备 Borel σ -代数的实直线时，简写为 $f \in \mathcal{E}$ ；若 f 还非负，则写作 $f \in \mathcal{E}_+$ 。集合 A 的示性函数记为 $\mathbf{1}_A$ ，因而 $A \in \mathcal{E}$ 与 $\mathbf{1}_A \in \mathcal{E}$ 含义相同。

设 Ω 是一个集合， f_i ($i \in I$) 是从 Ω 到可测空间 $(E_i, \mathcal{E}_i)$ 的一族映射。使所有 f_i 均可测的 Ω 上最小 σ -代数记为 $\sigma(f_i, i \in I)$ 。若 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的一族子集，则包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ -代数记为 $\sigma(\mathcal{C})$ ，并称它由 $\mathcal{C}$ 生成。特别地， $\sigma(f_i, i \in I)$ 由下列集合族生成：

$$\mathcal{C} = \{f_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{E}_i, i \in I\}.$$

最后，若 $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ 是 Ω 上的一族 σ -代数，则 $\bigvee_i \mathcal{E}_i$ 表示由 $\bigcup_i \mathcal{E}_i$ 生成的 σ -代数。它等于由所有可数子族所生成的 σ -代数之并。

如果 $\mathcal{E}$ 可由一族可数集合生成，则称可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 是可分的。特别地，若 E 是具有可数基的局部紧空间（下文简称 LCCB 空间），则其 Borel 集的 σ -代数是可分的，通常记为 $\mathcal{B}(E)$ 。例如， $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 是 d 维 Euclid 空间的 Borel 子集所成的 σ -代数。

设 m 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的测度，且 $f \in \mathcal{E}$ 。只要积分有意义，关于 m 的积分可以用下列任一记号表示：

$$\int f \, dm, \quad \int f(x) \, dm(x), \quad \int f(x) m(dx), \quad m(f), \quad \langle m, f \rangle.$$

若 E 是 Euclid 空间的子集且 m 是 Lebesgue 测度，则写作 $\int f(x) \, dx$ 。

若 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间, 我们照例用“随机变量”和“期望”代替“可测函数”和“积分”, 并写作

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X \, dP.$$

随机变量 X 的分布, 即 P 在 X 下的像测度, 记为 P_X 或 $X(P)$ 。定义在同一空间上的两个随机变量, 如果 P -几乎必然相等, 则称它们 P -等价。

若 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ -代数, X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望 (若存在) 记为 $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ 。当 $X = \mathbf{1}_A$ 、 $A \in \mathcal{F}$ 时, 也可写作 $P(A | \mathcal{G})$ 。若 $\mathcal{G} = \sigma(X_i, i \in I)$, 还写作 $\mathbb{E}[X | X_i, i \in I]$ 或 $P(A | X_i, i \in I)$ 。众所周知, 条件期望只在 P -等价意义下确定; 下文常省略“ P -几乎必然”这一限定。连续使用条件期望时, 把

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_1] | \mathcal{F}_2] \quad \text{简写为} \quad \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_1 | \mathcal{F}_2].$$

回顾: 若 Ω 是 Polish 空间 (即可度量化、完备且具有可数稠密子集的拓扑空间), $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, 而 $\mathcal{G}$ 是可分的子 σ -代数, 则存在给定 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率分布。

若 μ, ν 是 $(E, \mathcal{E})$ 上两个 σ -有限测度, 记 $\mu \perp \nu$ 表示二者互相奇异, 记 $\mu \ll \nu$ 表示 μ 关于 ν 绝对连续; 若 $\mu \ll \nu$ 且 $\nu \ll \mu$, 则记 $\mu \sim \nu$ 。 μ 关于 ν 的绝对连续部分的 Radon–Nikodym 导数记为

$$\left. \frac{d\mu}{d\nu} \right|_{\mathcal{E}},$$

没有混淆之虞时省略下标 $\mathcal{E}$ 。

2 单调类定理

我们将使用单调类定理的若干变体; 下面直接陈述而不证明。

定理 2.1. 设 $\mathcal{S}$ 是 Ω 的一族子集, 并满足:

- i) $\Omega \in \mathcal{S}$;
 - ii) 若 $A, B \in \mathcal{S}$ 且 $A \subset B$, 则 $B \setminus A \in \mathcal{S}$;
 - iii) 若 (A_n) 是 $\mathcal{S}$ 中的递增序列, 则 $\bigcup_n A_n \in \mathcal{S}$ 。
- 若 $\mathcal{S} \supset \mathcal{T}$, 且 $\mathcal{T}$ 对有限交封闭, 则 $\mathcal{S} \supset \sigma(\mathcal{T})$ 。

以上版本处理集合。下面给出函数版本。

定理 2.2. 设 $\mathcal{H}$ 是 Ω 上有界实值函数构成的向量空间, 并满足:

- i) 常值函数属于 $\mathcal{H}$;
 - ii) 若 (h_n) 是 $\mathcal{H}$ 中非负函数的递增序列, 并且 $h = \sup_n h_n$ 有界, 则 $h \in \mathcal{H}$ 。
- 若 $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$ 对逐点乘法封闭, 则 $\mathcal{H}$ 包含所有有界的 $\sigma(\mathcal{C})$ -可测函数。

以上定理将以下述形式使用, 尤其是在第 III 章中。设 f_i ($i \in I$) 是从集合 Ω 到可测空间 $(E_i, \mathcal{E}_i)$ 的一族映射。假设对每个 $i \in I$, 存在 $\mathcal{E}_i$ 的子类 $\mathcal{N}_i$, 它对有限交封闭并满足 $\sigma(\mathcal{N}_i) = \mathcal{E}_i$ 。

定理 2.3. 令 $\mathcal{N}$ 为所有下列形式的集合所成的族:

$$\bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(A_i),$$

其中 A_i 遍历 $\mathcal{N}_i$, 而 J 遍历 I 的有限子集。则

$$\sigma(\mathcal{N}) = \sigma(f_i, i \in I).$$

定理 2.4. 设 $\mathcal{H}$ 是 Ω 上实值函数构成的向量空间, 包含 $\mathbf{1}_\Omega$, 满足定理 2.2 的条件 ii), 并且对每个 $\Gamma \in \mathcal{N}$ 都包含 $\mathbf{1}_\Gamma$. 则 $\mathcal{H}$ 包含所有有界的实值 $\sigma(f_i, i \in I)$ -可测函数。

3 完备化

设 $(E, \mathcal{E})$ 是可测空间, μ 是 $\mathcal{E}$ 上的概率测度. $\mathcal{E}$ 关于 μ 的完备化 $\mathcal{E}^\mu$, 是所有满足下列条件的 E 的子集 B 所成的 σ -代数: 存在 $B_1, B_2 \in \mathcal{E}$, 使得

$$B_1 \subset B \subset B_2, \quad \mu(B_2 \setminus B_1) = 0.$$

若 γ 是 $\mathcal{E}$ 上的一族概率测度, 则

$$\mathcal{E}^\gamma = \bigcap_{\mu \in \gamma} \mathcal{E}^\mu$$

称为 $\mathcal{E}$ 关于 γ 的完备化. 如果 γ 是 $\mathcal{E}$ 上所有概率测度的族, 则把 $\mathcal{E}^\gamma$ 记为 $\mathcal{E}^*$, 并称它为普遍可测集所成的 σ -代数.

若 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}^\gamma$ 的子 σ -代数, 则定义 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{E}^\gamma$ 中关于 γ 的完备化如下: 集合 A 属于这一完备化, 当且仅当对每个 $\mu \in \gamma$, 都存在集合 B , 使得

$$A \triangle B \in \mathcal{E}^\gamma, \quad \mu(A \triangle B) = 0.$$

这个集合族记为 $\tilde{\mathcal{F}}^\gamma$. 读者可以验证, 它是一个包含 $\mathcal{F}^\gamma$ 的 σ -代数. 它还有如下刻画.

命题 3.1. 集合 $A \in \tilde{\mathcal{F}}^\gamma$ 当且仅当: 对每个 $\mu \in \gamma$, 存在 $B_\mu \in \mathcal{F}$ 以及 $\mathcal{E}$ 中两个 μ -零测集 N_μ, M_μ , 使得

$$B_\mu \setminus N_\mu \subset A \subset B_\mu \cup M_\mu.$$

证明. 留给读者作为练习. □

下一个结果给出了一种检验函数关于 $\tilde{\mathcal{F}}^\gamma$ 型 σ -代数是否可测的方法.

命题 3.2. 对 $i = 1, 2$, 设 $(E_i, \mathcal{E}_i)$ 是可测空间, γ_i 是 $\mathcal{E}_i$ 上的一族概率测度, 而 $\mathcal{F}_i$ 是 $\mathcal{E}_i^{\gamma_i}$ 的子 σ -代数. 设映射 $f: E_1 \rightarrow E_2$ 既属于 $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2$, 又属于 $\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2$, 并且对每个 $\mu \in \gamma_1$, 像测度 $f(\mu)$ 都属于 γ_2 . 则

$$f \in \tilde{\mathcal{F}}_1^{\gamma_1} / \tilde{\mathcal{F}}_2^{\gamma_2}.$$

证明. 取 $A \in \tilde{\mathcal{F}}_2^{\gamma_2}$. 对 $\mu \in \gamma_1$, 令 $\nu = f(\mu) \in \gamma_2$. 于是存在 $B_\nu \in \mathcal{F}_2$ 和 $\mathcal{E}_2$ 中两个 ν -零测集 N_ν, M_ν , 使得

$$B_\nu \setminus N_\nu \subset A \subset B_\nu \cup M_\nu.$$

集合 $B_\mu = f^{-1}(B_\nu)$ 属于 $\mathcal{F}_1$, 而 $N_\mu = f^{-1}(N_\nu)$ 、 $M_\mu = f^{-1}(M_\nu)$ 是 $\mathcal{E}_1$ 中的 μ -零测集, 并且

$$B_\mu \setminus N_\mu \subset f^{-1}(A) \subset B_\mu \cup M_\mu.$$

因此 $f^{-1}(A) \in \tilde{\mathcal{F}}_1^{\gamma_1}$, 证明完毕. □

4 有限变差函数与 Stieltjes 积分

本节汇集一组将在全书中反复使用的性质。

我们考虑定义在 $[0, +\infty)$ 上的实值右连续函数 A ；这些结果很容易推广到整条实直线。 A 在 t 处的值记为 A_t 或 $A(t)$ 。设 Δ 是区间 $[0, t]$ 的一个分割，

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t.$$

把

$$|\Delta| = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$$

称为 Δ 的模或网格，并考虑变差和

$$S_t^\Delta = \sum_i |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|.$$

若另一个分割 Δ' 是 Δ 的加细，即 Δ 的每个分点也是 Δ' 的分点，则显然 $S_t^{\Delta'} \geq S_t^\Delta$ 。

定义 4.1. 如果对每个 t ，都有

$$S_t = \sup_{\Delta} S_t^\Delta < +\infty,$$

则称函数 A 为有限变差函数。函数 $t \mapsto S_t$ 称为 A 的全变差函数，而 S_t 称为 A 在 $[0, t]$ 上的变差。函数 S 显然非负且单调不减；若 $\lim_{t \rightarrow \infty} S_t < +\infty$ ，则称 A 为有界变差函数。

同样的概念可以在任意区间 $[a, b]$ 上定义。称整条实直线上的函数 A 为有限变差函数，是指它在每个紧区间上均为有限变差函数，而不要求它在整个 $\mathbb{R}$ 上有界变差。

注意， C^1 函数是有限变差函数；有限的单调函数也是有限变差函数。反过来，有如下结论。

命题 4.2. 任一有限变差函数均可表示为两个单调不减函数之差。

证明. 函数 $(S + A)/2$ 和 $(S - A)/2$ 都单调不减，这一点容易验证；而 A 正是二者之差。□

上述分解还是最小的：若 $A = F - G$ ，其中 F, G 非负且单调不减，则

$$\frac{S + A}{2} \leq F, \quad \frac{S - A}{2} \leq G.$$

由此， A 在每个 $t \in (0, +\infty)$ 处都有左极限。记

$$A_{t-} = A(t-) = \lim_{s \uparrow t} A_s, \quad A_{0-} = 0, \quad \Delta A_t = A_t - A_{t-},$$

其中 ΔA_t 是 A 在 t 处的跳跃。

这类函数的重要性来自下面的对应关系。

定理 4.3. $[0, +\infty)$ 上的（有符号）Radon 测度 μ 与右连续有限变差函数 A 之间存在一一对应，对应关系为

$$A_t = \mu([0, t]).$$

因而

$$A_{t-} = \mu([0, t)), \quad \Delta A_t = \mu(\{t\}).$$

此外，若 $\mu(\{0\}) = 0$ ，则 A 的全变差 S 对应于 μ 的全变差测度 $|\mu|$ ，命题 4.2 证明中的分解对应于 μ 为正、负两部分之差的最小分解。

设 f 是 $\mathbb{R}_+$ 上局部有界的 Borel 函数。 f 关于 A 的 Stieltjes 积分可写为

$$\int_0^t f_s dA_s, \quad \int_0^t f(s) dA(s), \quad \text{或} \quad \int_{(0,t]} f(s) dA_s,$$

它是 f 关于 μ 在区间 $(0, t]$ 上的积分。注意, A 在零点的跳跃不参与其中, 并且

$$\int_0^t dA_s = A_t - A_0.$$

若要考虑 $[0, t]$ 上的积分, 则写成 $\int_{[0,t]} f(s) dA_s$ 。区间 $(0, t]$ 上的积分也记为 $(f \cdot A)_t$ 。映射 $t \mapsto (f \cdot A)_t$ 本身仍是右连续有限变差函数。

把 Radon–Nikodym 定理用于 μ 与 Lebesgue 测度 λ , 得到下述结论。

定理 4.4。 有限变差函数 A 在 λ -几乎处处可微, 并存在有限变差函数 B , 使得 $B' = 0$ 在 λ -几乎处处成立, 且

$$A_t = B_t + \int_0^t A'_s ds.$$

若 $B = 0$, 则称 A 绝对连续; 此时与 A 对应的测度 μ 关于 λ 绝对连续。

下面讨论处理 Stieltjes 积分时十分有用的一系列概念和性质。

命题 4.5 (分部积分公式)。 若 A, B 是两个有限变差函数, 则对任意 t ,

$$A_t B_t = A_0 B_0 + \int_0^t A_s dB_s + \int_0^t B_{s-} dA_s.$$

证明。 设 μ (相应地, ν) 是与 A (相应地, B) 对应的测度。等式两边都等于 $\mu \otimes \nu([0, t]^2)$: 事实上, $\int_0^t A_s dB_s$ 是包含对角线的上三角形的测度, $\int_0^t B_{s-} dA_s$ 是不含对角线的下三角形的测度, 而 $A_0 B_0 = \mu \otimes \nu(\{(0, 0)\})$ 。□

为了恢复对称性, 上式还可以写成

$$A_t B_t = \int_0^t A_{s-} dB_s + \int_0^t B_{s-} dA_s + \sum_{s \leq t} \Delta A_s \Delta B_s.$$

右端的和有意义, 因为 A, B 都至多只有可数个不连续点。事实上, A 可以唯一地写成

$$A_t = A_t^c + \sum_{s \leq t} \Delta A_s,$$

其中 A^c 连续且为有限变差函数。

下一个结果是“链式法则”。

命题 4.6。 若 F 是 C^1 函数, A 是有限变差函数, 则 $F(A)$ 也是有限变差函数, 而且

$$\begin{aligned} F(A_t) &= F(A_0) + \int_0^t F'(A_{s-}) dA_s \\ &\quad + \sum_{s \leq t} (F(A_s) - F(A_{s-}) - F'(A_{s-}) \Delta A_s). \end{aligned}$$

证明。当 $F(x) = x$ 时结论成立。若结论对 F 成立，则由分部积分公式可推出它对 $xF(x)$ 也成立；故结论对多项式成立。再用一列多项式逼近 C^1 函数即可完成证明。 $\square$

作为以上概念的一个应用，证明下面这个有用的结果。

命题 4.7。 若 A 是右连续有限变差函数，则

$$Y_t = Y_0 \prod_{s \leq t} (1 + \Delta A_s) \exp(A_t^c - A_0^c)$$

是方程

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t Y_{s-} dA_s$$

唯一的局部有界解。

证明。对两个有限变差函数

$$Y_0 \prod_{s \leq t} (1 + \Delta A_s) \quad \text{和} \quad \exp\left(\int_0^t dA_s^c\right)$$

应用分部积分公式，容易验证上述 Y 确为方程的解。

设 Z 是两个局部有界解之差，并令 $M_t = \sup_{s \leq t} |Z_s|$ 。由 $Z_t = \int_0^t Z_{s-} dA_s$ 可得 $|Z_t| \leq M_t S_t$ ，其中 S 是 A 的全变差函数。再由分部积分公式，

$$|Z_t| \leq M_t \int_0^t S_{s-} dS_s \leq \frac{M_t S_t^2}{2},$$

并且归纳可得

$$|Z_t| \leq \frac{M_t}{n!} \int_0^t S_{s-}^n dS_s \leq \frac{M_t S_t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

令 $n \rightarrow \infty$ ，即得 $Z = 0$ 。 $\square$

本节最后研究时间变换这一基本技巧，它可以用来显式计算某些 Stieltjes 积分。现在设 A 是一个允许取 $+\infty$ 的右连续单调不减函数。对 $s \geq 0$ ，定义

$$C_s = \inf\{t : A_t > s\},$$

并约定 $\inf \emptyset = +\infty$ 。我们也称 C 为 A 的（右连续）逆。

为了理解下面的结果，画出图 1 所示的 A 的图像以及求 C 的方法很有帮助。函数 C 显然单调不减，所以

$$C_{s-} = \lim_{u \uparrow s} C_u$$

对每个 s 都有定义。容易看出

$$C_{s-} = \inf\{t : A_t \geq s\}.$$

特别地，若 A 在水平 s 上有一段常值区间，则 C_s 位于该区间的右端，而 C_{s-} 位于左端；并且只有当 A 在水平 s 上有常值区间时，才有 $C_{s-} \neq C_s$ 。约定 $C_{0-} = 0$ 。

引理 4.8。 函数 C 右连续。此外，

$$A(C_s) \geq s, \quad A_t = \inf\{s : C_s > t\}.$$

证明。 $A(C_s) \geq s$ 是显然的。又因为

$$\{t : A_t > s\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \{t : A_t > s + \varepsilon\},$$

所以 C 右连续。

若 $C_s > t$, 则 $t \notin \{u : A_u > s\}$, 从而 $A_t \leq s$ 。因此

$$A_t \leq \inf\{s : C_s > t\}.$$

另一方面, 对每个 t 都有 $C(A_t) \geq t$, 故 $C(A_{t+\varepsilon}) \geq t + \varepsilon > t$, 从而

$$A_{t+\varepsilon} \geq \inf\{s : C_s > t\}.$$

由 A 的右连续性得到反向不等式, 证明完毕。 $\square$

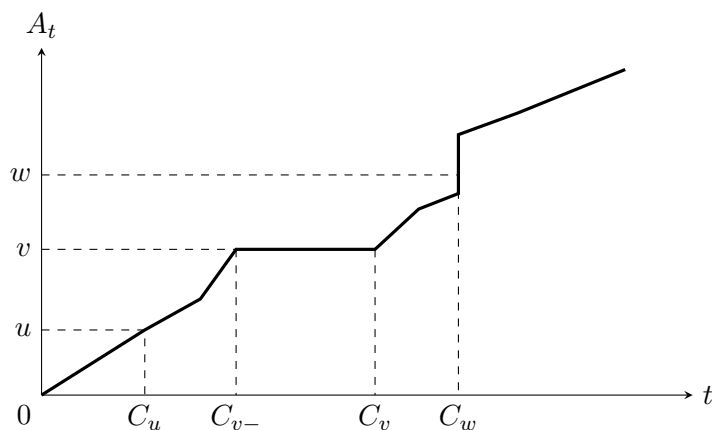


图 1: 单调函数与其右连续逆。

注。 由此可见, A 与 C 扮演对称的角色。不过, 即使 A 连续, C 一般仍只有右连续性; 在这种情况下, $A(C_s) = s$, 但若 s 位于 A 的某个常值区间中, 则 $C(A_s) > s$ 。如上所述, C 的跳跃与 A 的水平常值区间相对应, 反之亦然; 因此, C 连续当且仅当 A 严格递增。 C 的右连续性并非来自 A 的右连续性, 而是来自其定义中的严格不等号; 同样, C_{s-} 是左连续的。

下面给出一个“变量替换”公式。

命题 4.9。 若 f 是 $[0, +\infty)$ 上的非负 Borel 函数, 则

$$\int_{[0, +\infty)} f(u) dA_u = \int_0^{+\infty} f(C_s) \mathbf{1}_{\{C_s < +\infty\}} ds.$$

证明。 若 $f = \mathbf{1}_{[0, v]}$, 则公式化为

$$A_v = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{C_s \leq v\}} ds,$$

这直接来自 C 的定义。取差可知, 等式对区间 $(u, v]$ 的示性函数成立; 再由单调类定理, 它对所有具有紧支集的 f 成立。最后取递增极限, 即得一般情形。 $\square$

同理还有

$$\int_0^{+\infty} f(u) dA_u = \int_0^{+\infty} f(C_s) \mathbf{1}_{\{0 < C_s < +\infty\}} ds.$$

命题右端也可写作

$$\int_0^{A_\infty} f(C_s) ds,$$

因为 $C_s < +\infty$ 当且仅当 $A_\infty > s$ 。

最后一个结果与时间变换密切相关。

命题 4.10. 若 u 是区间 $[a, b]$ 上连续的单调不减函数, f 是 $[u(a), u(b)]$ 上的非负 Borel 函数, 则

$$\int_{[a, b]} f(u(s)) dA_{u(s)} = \int_{[u(a), u(b)]} f(t) dA_t.$$

左端是关于右连续单调不减函数 $s \mapsto A(u(s))$ 所对应测度的积分。

证明. 对 $t \in [u(a), u(b))$, 定义

$$v_t = \inf\{s \in [a, b] : u(s) > t\},$$

并约定 $v_{u(b)} = b$ 。则 $u(v_t) = t$, 且 v 是从 $[u(a), u(b)]$ 到 $[a, b]$ 的可测映射。^a 设 dA 是 $[u(a), u(b)]$ 上与 A 对应的测度, 令 ν 为 dA 在 v 下的像测度。由于 $u \circ v$ 是恒等映射, dA 又是 ν 在 u 下的像测度, 故

$$\int_{[a, b]} f(u(s)) d\nu(s) = \int_{[u(a), u(b)]} f(t) dA_t.$$

特别地,

$$A(u(b)) - A(u(a)-) = \nu([a, b]),$$

这说明 ν 正是与单调不减函数 $s \mapsto A(u(s))$ 对应的测度。命题得证。 $\square$

^a**校订注:** 原文未单独规定端点 $t = u(b)$ 处的 v_t ; 若直接使用严格不等号, 该处集合可能为空。这里补充约定 $v_{u(b)} = b$, 使映射在闭区间上定义完备。

5 度量空间中的弱收敛

设 E 是带有度量 d 的度量空间, $\mathcal{B}$ 表示 E 上的 Borel σ -代数。这里回顾 $(E, \mathcal{B})$ 上概率测度弱收敛的若干事实。若 P 是这样的概率测度, 且 $P(\partial A) = 0$, 其中 ∂A 是 A 的边界, 则称 $A \subset E$ 为 P -连续集。

命题 5.1. 对概率测度 P_n ($n \in \mathbb{N}$) 和 P , 以下条件等价:

i) 对 E 上每个有界连续函数 f ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f dP_n = \int f dP;$$

ii) 对 E 上每个有界一致连续函数 f ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f dP_n = \int f dP;$$

iii) 对 E 的每个闭子集 F ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F) \leq P(F);$$

iv) 对 E 的每个开子集 G ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(G) \geq P(G);$$

v) 对每个 P -连续集 A ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(A) = P(A).$$

定义 5.2. 若 P_n 和 P 满足上一命题中的等价条件, 则称 (P_n) 弱收敛到 P .

若 π 是 $(E, \mathcal{B})$ 上的一族概率测度, 并且 π 中任意测度序列都含有弱收敛子列, 则称 π 弱相对紧. 证明弱收敛需要一个弱紧性判据, 这正是下述概念存在的理由.

定义 5.3. 若对每个 $\varepsilon \in (0, 1)$, 都存在紧集 K_ε , 使得

$$P(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon, \quad \text{对所有 } P \in \pi,$$

则称测度族 π 紧的.

定理 5.4 (Prokhorov 判据). 若测度族 π 是紧的, 则它弱相对紧. 若 E 是 Polish 空间, 则弱相对紧的测度族是紧的.

定义 5.5. 设 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 和 X 是取值于度量空间 E 的随机变量. 如果它们的分布 P_{X_n} 弱收敛到 X 的分布 P_X , 则称 (X_n) 依分布收敛 (或依法则收敛) 到 X , 记作

$$X_n \xrightarrow{(d)} X.$$

还用 $X \stackrel{(d)}{=} Y$ 表示 X, Y 具有相同的分布 (法则).

需要强调, X_n 与 X 不必定义在同一个概率空间上. 如果它们定义在同一概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上, 则可作如下定义.

定义 5.6. 如果对每个 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(d(X_n, X) > \varepsilon) = 0,$$

则称 (X_n) 依概率收敛到 X , 并记为

$$P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X.$$

在 Polish 空间中, 若 $P\text{-}\lim X_n = X$, 则 $X_n \xrightarrow{(d)} X$. 反命题一般不成立, 甚至未必有意义, 因为 X_n 不必定义在同一概率空间上. 不过, 如果 X_n 定义在同一空间上, 且依分布收敛到常数 c , 那么它们依概率收敛到常随机变量 c ; 读者容易验证这一点.

下面的结论在第 XIII 章中很重要.

引理 5.7. 设 (X_n, Y_n) 是一列随机变量, 分别取值于可分度量空间 E 和 F , 并满足:

- i) (X_n, Y_n) 依分布收敛到 (X, Y) ;
- ii) Y_n 的分布与 n 无关。

那么, 对任意 Borel 函数 $\varphi: F \rightarrow G$, 其中 G 是可分度量空间, 序列 $(X_n, \varphi(Y_n))$ 依分布收敛到 $(X, \varphi(Y))$ 。

证明. 只需证明: 若 h, k 是有界连续函数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[h(X_n)k(\varphi(Y_n))] = \mathbb{E}[h(X)k(\varphi(Y))].$$

令 $p = k \circ \varphi$ 。若 ν 是所有 Y_n 的共同分布, 则对任意预先给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $L^1(\nu)$ 中的有界连续函数 $\tilde{p}$, 使得 $\int |p - \tilde{p}| d\nu < \varepsilon$ 。于是

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[h(X_n)p(Y_n)] - \mathbb{E}[h(X)p(Y)]| \\ & \leq |\mathbb{E}[h(X_n)(p(Y_n) - \tilde{p}(Y_n))]| + |\mathbb{E}[h(X_n)\tilde{p}(Y_n)] - \mathbb{E}[h(X)\tilde{p}(Y)]| \\ & \quad + |\mathbb{E}[h(X)(p(Y) - \tilde{p}(Y))]| \\ & \leq 2 \|h\|_\infty \varepsilon + |\mathbb{E}[h(X_n)\tilde{p}(Y_n)] - \mathbb{E}[h(X)\tilde{p}(Y)]|. \end{aligned}$$

因为 h 和 $\tilde{p}$ 连续, 令 n 足够大可使最后一项任意小, 证明完毕。 $\square$

推论 5.8. 设 $(X_n^1, \dots, X_n^k)$ 是一列 k 元随机向量, 其中 X_n^j 取值于可分度量空间 S_j ($j = 1, \dots, k$), 并且

$$(X_n^1, \dots, X_n^k) \xrightarrow{(d)} (X^1, \dots, X^k).$$

如果对每个 j , X_n^j 的分布与 n 无关, 那么对任意 Borel 函数 $\varphi_j: S_j \rightarrow U_j$, 其中 U_j 是可分度量空间, 都有

$$(\varphi_1(X_n^1), \dots, \varphi_k(X_n^k)) \xrightarrow{(d)} (\varphi_1(X^1), \dots, \varphi_k(X^k)).$$

证明. 在引理 5.7 中先取 $X_n = (X_n^1, \dots, X_n^{k-1})$, $Y_n = X_n^k$, 即可把 X_n^k 替换为 $\varphi_k(X_n^k)$ 。再取 $X_n = (X_n^1, \dots, X_n^{k-2}, \varphi_k(X_n^k))$, $Y_n = X_n^{k-1}$, 依次进行即可。 $\square$

6 高斯及其他随机变量

用 $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ 表示随机变量 X 是均值为 m 、方差为 σ^2 的高斯随机变量。特别地, $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 表示 X 是均值为零、方差为一的标准高斯随机变量。下文把常随机变量也视为高斯随机变量的特殊情形, 即 $\sigma^2 = 0$ 的情形。若 $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ 、 $\sigma > 0$, 则 X 的密度为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

其特征函数为

$$\mathbb{E}[e^{itX}] = \exp\left(itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

命题 6.1. 设 (X_n) 是一列高斯随机变量, 并依概率收敛到随机变量 X 。则 X 仍是高斯随机变量; 对每个 $p \geq 1$, 函数族 $\{|X_n|^p\}$ 一致可积, 而且 $X_n \rightarrow X$ 在 L^p 中成立。

因此, 给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的所有高斯随机变量构成 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 的闭子集。更具体地, 作如下定义。

定义 6.2. $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 的一个闭线性子空间, 如果只由中心高斯随机变量组成, 则称为高斯空间。

若 G 是高斯空间, 且 $X_1, \dots, X_d \in G$, 则 d 维随机变量 $X = (X_1, \dots, X_d)$ 是高斯随机向量; 换言之, 对 $\mathbb{R}^d$ 上每个线性泛函 α , $\alpha(X)$ 都是实高斯随机变量。还要回顾: 若 K 是一个对称半正定的 $d \times d$ 矩阵, 即 $\langle x, Kx \rangle \geq 0$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 成立, 则 K 是某个 d 维中心高斯随机向量的协方差矩阵。

命题 6.3. 设 G_i ($i \in I$) 是给定高斯空间的一族闭子空间。则 σ -代数 $\sigma(G_i)$ 相互独立, 当且仅当子空间 G_i 两两正交。

特别地, $\mathbb{R}^d$ 值中心高斯随机向量的各分量相互独立, 当且仅当它们两两不相关。

全书将多次出现实直线上的若干概率分布; 下面回顾它们之间的一些关系。

若随机变量 Y 在 $[0, 1]$ 上具有密度

$$\frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}},$$

则称 Y 服从反正弦分布。此时 $\log Y$ 的特征函数为

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\lambda)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + i\lambda)}.$$

若 $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 则 $\log(\frac{1}{2}N^2)$ 的特征函数为 $\Gamma(\frac{1}{2} + i\lambda)/\sqrt{\pi}$; 若 e 是参数为 1 的指数随机变量, 则 $\log e$ 的特征函数为 $\Gamma(1 + i\lambda)$ 。由此得到

$$N^2 \stackrel{(d)}{=} 2eY,$$

其中 e, Y 相互独立。也可以直接看出这一点: 取与 N 独立的 $N' \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 并写成

$$N^2 = (N^2 + N'^2) \left(\frac{N^2}{N^2 + N'^2} \right).$$

可以证明, 右端两个因子相互独立, 并分别服从均值为 2 的指数分布和反正弦分布。

上式其实只是 Gamma 与 Beta 随机变量恒等式的一个特例。对 $a > 0$, 令 γ_a 表示在 $\mathbb{R}_+$ 上具有密度

$$\frac{x^{a-1}e^{-x}}{\Gamma(a)}$$

的 Gamma 随机变量; 对 $a, b > 0$, 令 $\beta_{a,b}$ 表示在 $[0, 1]$ 上具有密度

$$\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)}$$

的 Beta 随机变量。经典计算表明, 若 γ_a, γ_b 相互独立, 则

- i) $\gamma_a + \gamma_b$ 与 $\gamma_a/(\gamma_a + \gamma_b)$ 相互独立;
- ii) $\gamma_a + \gamma_b \stackrel{(d)}{=} \gamma_{a+b}$;
- iii) $\gamma_a/(\gamma_a + \gamma_b) \stackrel{(d)}{=} \beta_{a,b}$ 。

于是得到二维分布恒等式

$$(\gamma_a, \gamma_b) \stackrel{(d)}{=} \gamma_{a+b}(\beta_{a,b}, 1 - \beta_{a,b}),$$

其中右端的 γ_{a+b} 与 $\beta_{a,b}$ 假设相互独立。

进一步, 若 N, N' 是相互独立的标准高斯随机变量, 则 N/N' 和 $N/|N'|$ 都是 Cauchy 随机变量, 即在实直线上具有密度 $(\pi(1+x^2))^{-1}$ 。若 C 是 Cauchy 随机变量, 则

$$Y \stackrel{(d)}{=} (1+C^2)^{-1}.$$

再设 (e', Y') 是 (e, Y) 的一个独立副本, 则 $\log(e/e')$ 、 $\log(Y/Y')$ 和 $\log C^2$ 的特征函数依次为

$$\frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)}, \quad \frac{\tanh(\pi\lambda)}{\pi\lambda}, \quad \frac{1}{\cosh(\pi\lambda)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\lambda)\Gamma(\frac{1}{2} - i\lambda)}{\pi}.$$

因此

$$\log C^2 \stackrel{(d)}{=} \log(e/e') + \log(Y/Y').$$

最后, $\log C^2$ 的密度为

$$\frac{1}{2\pi \cosh(x/2)}.$$

上述双曲函数会在许多计算中出现。设 Φ 是其中一个函数, 下面给出 Φ 的级数表示, 以及由

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \phi(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 y/2} f(y) dy$$

所定义的概率密度 ϕ, f 的表示。相应分布函数为

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy.$$

a) 若 $\Phi(\lambda) = \tanh(\pi\lambda)/(\pi\lambda)$, 则

$$\Phi(\lambda) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 + (n - \frac{1}{2})^2},$$

并且

$$\phi(x) = -\frac{1}{\pi^2} \log \tanh\left(\frac{|x|}{4}\right), \quad f(y) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(n - \frac{1}{2})^2 y}{2}\right).$$

逐项积分即可得到 F 。¹

b) 若 $\Phi(\lambda) = \pi\lambda/\sinh(\pi\lambda)$, 则

$$\Phi(\lambda) = 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2},$$

并且

$$\phi(x) = \frac{1}{(2 \cosh(x/2))^2}, \quad F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 x}{2}\right).$$

c) 若 $\Phi(\lambda) = 1/\cosh(\pi\lambda)$, 则

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{\lambda^2 + (n + \frac{1}{2})^2},$$

并且

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi \cosh(x/2)}, \quad f(y) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{(n + \frac{1}{2})^2 y}{2}\right).$$

d) 若 $\Phi(\lambda) = (\pi\lambda/\sinh(\pi\lambda))^2$, 则

$$\Phi(\lambda) = 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 - n^2}{(\lambda^2 + n^2)^2},$$

并且

$$\phi(x) = \frac{(x/2) \coth(x/2) - 1}{2 \sinh^2(x/2)}, \quad F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 - n^2 x) \exp\left(-\frac{n^2 x}{2}\right).$$

¹校订注: 原书此处的级数下限及偶对称项有排印误; 由归一化条件 $\Phi(0) = 1$ 与密度的偶对称性, 改为 $n = 1$ 并补上 $|x|$ 。

第 I 章 引论

1 随机过程的例子；布朗运动

随机过程是随时间以随机方式演化的现象。自然界、日常生活和科学研究为我们提供了大量这样的现象；至少，这些现象可以看成同时依赖于时间和某种随机因素的函数。例如，某些商品的价格、某些种群的数量以及 Geiger 计数器记录到的粒子数，都是如此。

液体中花粉微粒的布朗运动是一个基本例子。这个现象由英国植物学家 R. Brown 于 1827 年发现，并因他而得名；其成因是液体中小得多的分子不断撞击花粉微粒。在任意很短的时间间隔内，碰撞都会大量发生，各次碰撞彼此独立，而单次碰撞的效应相对于总效应很小。Einstein 于 1905 年建立了这种运动的物理理论。该理论表明，这种运动是随机的，并具有如下性质：

- i) 具有独立增量；
- ii) 增量是高斯随机变量；
- iii) 运动是连续的。

性质 i) 是说，花粉微粒在互不相交的时间区间内的位移是相互独立的随机变量。由中心极限定理来看，性质 ii) 也并不令人意外。本书的大部分内容都将用于研究这一现象的数学模型。

随机过程理论的目标，是构造并研究那些按随机机制随时间演化的物理系统的数学模型，正如上面的例子。因此，随机过程就是一族以时间为指标的随机变量。

定义 1.1. 设 T 是一个集合， $(E, \mathcal{E})$ 是可测空间。一个以 T 为指标、取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的随机过程，是定义在某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一族到 $(E, \mathcal{E})$ 的可测映射

$$X_t, \quad t \in T.$$

空间 $(E, \mathcal{E})$ 称为该过程的状态空间。

可以把集合 T 看成“时间”。最常见的情形是 $T = \mathbb{N}$ 和 $T = \mathbb{R}_+$ ，但有意义的指标集远不止这些。本书主要讨论 $T = \mathbb{R}_+$ 的情形； E 通常是 $\mathbb{R}^d$ 或它的一个 Borel 子集，而 $\mathcal{E}$ 是 E 上的 Borel σ -代数。

对每个 $\omega \in \Omega$ ，映射 $t \mapsto X_t(\omega)$ 是 E 中的一条“曲线”，称为 X 的一条轨道或路径。可以把一条路径看成从所有 $T \rightarrow E$ 映射所成的空间 $\mathcal{F}(T, E)$ 中随机选出的一个点；或者像后文将看到的那样，看成从这个函数空间的某个适当子集中随机选出的点。

为了建立随机过程的基本例子——布朗运动的数学模型——我们要用到下述熟知的存在性结果。

定理 1.2. 给定 $\mathbb{R}$ 上的概率测度 μ ，存在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 以及定义在 Ω 上的一列相互独立的随机变量 X_n ，使得对每个 n ，都有

$$X_n(P) = \mu.$$

由此立即得到下面的结论。

命题 1.3. 设 H 是可分实 Hilbert 空间。存在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 以及该空间上的一族随机变量 $X(h)$ ($h \in H$), 使得:

- i) 映射 $h \mapsto X(h)$ 是线性的;
- ii) 对每个 $h \in H$, 随机变量 $X(h)$ 都是中心高斯随机变量, 并且

$$\mathbb{E}[X(h)^2] = \|h\|_H^2.$$

证明. 在 H 中选取一组规范正交基 (e_n) 。由定理 1.2, 存在一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 在其上可以定义一系列相互独立的标准实高斯随机变量 g_n 。级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (h, e_n)_H g_n$$

在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中收敛; 把它的极限记为 $X(h)$ 。其余结论立即由规范正交基的性质得到。□

上述级数还几乎必然收敛。严格说来, $X(h)$ 是随机变量的一个等价类, 而不是某个固定的随机变量代表元。此外, $\{X(h) : h \in H\}$ 是 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 的一个高斯子空间, 与 H 同构。特别地,

$$\mathbb{E}[X(h)X(h')] = (h, h')_H.$$

在高斯空间中, 独立性等价于正交性; 因此 $X(h)$ 与 $X(h')$ 相互独立, 当且仅当 h 与 h' 在 H 中正交。

定义 1.4. 设 $(A, \mathcal{A}, \mu)$ 是可分的 σ -有限测度空间。在命题 1.3 中取

$$H = L^2(A, \mathcal{A}, \mu).$$

此时映射 X 称为 $(A, \mathcal{A})$ 上强度为 μ 的高斯测度。若 $F \in \mathcal{A}$ 且 $\mu(F) < \infty$, 则把 $X(\mathbf{1}_F)$ 简记为 $X(F)$ 。

“测度”这一名称来自如下事实: 若 $F_n \in \mathcal{A}$ 两两不交, $\mu(F) < \infty$, 且 $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$, 则

$$X(F) = \sum_{n=0}^{\infty} X(F_n)$$

几乎必然成立, 并且也在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中成立。² 不过, 例外零测集依赖于 F 和序列 (F_n) 。因此通常不存在一个随 ω 变化的真正测度 $m(\omega, \cdot)$, 使得几乎必然有

$$X(F)(\omega) = m(\omega, F) \quad \text{对每个 } F \in \mathcal{A} \text{ 同时成立.}$$

还要注意, 对任意满足 $\mu(F) < \infty$ 、 $\mu(G) < \infty$ 的两个集合 F, G ,

$$\mathbb{E}[X(F)X(G)] = \mu(F \cap G).$$

若 $F \cap G = \emptyset$, 则 $X(F)$ 与 $X(G)$ 不相关, 因而相互独立。

现在向构造布朗运动迈出第一步。这里的方法也可以推广到其他过程, 习题 3.9 和 3.11 将给出相应例子。取

$$(A, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \text{Lebesgue 测度}).$$

对每个 $t \in \mathbb{R}_+$, 从等价类 $X([0, t])$ 中选取一个随机变量代表元 B_t 。下面考察由此定义的过程 B 。

²校订注: 原书在这里把 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 误印为 $L^2(A, \mathcal{A}, \mu)$ 。等式两边是定义在 Ω 上的随机变量, 故其 L^2 收敛只能位于底层概率空间。

1°) B 具有独立增量。也就是说, 对任意

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k,$$

随机变量 $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ ($i = 1, \dots, k$) 相互独立。事实上, $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ 属于等价类 $X((t_{i-1}, t_i])$, 而对应的区间两两不交, 所以这些等价类相互独立。

2°) B 是高斯过程。也就是说, 对任意

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n,$$

随机向量 $(B_{t_0}, \dots, B_{t_n})$ 是高斯随机向量。这由增量的独立性以及每个增量都是高斯随机变量立即得到。

3°) 对每个 t , 显然有

$$\mathbb{E}[B_t^2] = t;$$

特别地, $P(B_0 = 0) = 1$ 。因此, 对实直线上的任意 Borel 集 D 和任意 $t > 0$,

$$P(B_t \in D) = \int_D g_t(x) dx, \quad g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right).$$

同样, 增量 $B_t - B_s$ 的方差为 $t - s$ 。此外,

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = s \wedge t.$$

事实上, 当 $s < t$ 时, 利用增量独立性以及所有 B_t 都中心化可得

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}[B_s (B_s + B_t - B_s)] = \mathbb{E}[B_s^2] + \mathbb{E}[B_s (B_t - B_s)] = s.$$

按照我们对物理布朗运动模型的设想, 现在除了路径连续性以外, 其他性质都已经具备。然而, 从等价类 $X([0, t])$ 中任意选取 B_t , 并没有理由保证映射 $t \mapsto B_t(\omega)$ 连续。另一方面, 每个等价类中的代表元可以自由选择; 自然要问, 能否作出选择, 使得对几乎所有 ω , 所得函数都是连续的。下面就来处理这个问题。

先作一些一般性说明并给出几个定义。从现在起, 除非另有说明, 所有过程都以 $\mathbb{R}_+$ 为指标集。

定义 1.5。 设 E 是拓扑空间, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ 。若对几乎所有 ω , 函数

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

都连续, 则称取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的过程 X 几乎必然连续, 简称 *a.s.* 连续。

我们希望上面的过程 B 具有这一性质。这样, 只要舍去一个零测集, 就能得到路径处处连续的过程。但无论是舍去这个零测集, 还是验证某个过程 *a.s.* 连续, 都会遇到同一个问题: 集合

$$\{\omega : t \mapsto X_t(\omega) \text{ 连续}\}$$

未必可测。

由于我们要构造状态空间为 $\mathbb{R}$ 的过程, 一种自然想法是把所有可能路径组成的集合

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$$

本身作为概率空间, 并把时刻 t 的坐标映射

$$X_t(\omega) = \omega(t)$$

作为随机变量。使所有 X_t 都可测的最小 σ -代数正是乘积 σ -代数, 记为 $\mathcal{F}$ 。 $\mathcal{F}$ 中每个集合至多依赖可数多个坐标, 所以所有连续路径组成的集合不属于 $\mathcal{F}$ 。

连续性问题只是众多同类困难之一。例如, 对实值过程 X , 我们会希望考虑

$$T(\omega) = \inf\{t : X_t(\omega) > 0\}, \quad \lim_{s \downarrow t} X_s, \quad \int_0^t \mathbf{1}_{[-1,1]}(X_s) ds, \quad \sup_{s \leq t} |X_s|.$$

如果关于 X 唯一知道的只是它满足定义 1.1, 那么这些表达式未必可测, 甚至未必有意义。下述概念将帮助我们克服这一困难。

定义 1.6. 设过程 X 和 X' 分别定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 和 $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ 上, 并具有同一状态空间 $(E, \mathcal{E})$ 。若对任意有限个时刻 $t_1, \dots, t_n$ 以及任意 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$, 都有

$$\begin{aligned} P(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n) \\ = P'(X'_{t_1} \in A_1, \dots, X'_{t_n} \in A_n), \end{aligned}$$

则称 X 与 X' 等价。也称其中任一个是另一个的版本, 或称它们是同一过程的两个版本。

P 在映射 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ 下的像, 是 $(E^n, \mathcal{E}^n)$ 上的一个概率测度, 记为 $P_{t_1, \dots, t_n}$ 。令 $(t_1, \dots, t_n)$ 遍历所有有限时刻序列, 得到的测度族称为 X 的有限维分布族, 简称 f.d.d.。两个过程等价, 当且仅当它们具有相同的有限维分布。

X 的有限维分布构成一个投影相容族。具体说, 若 $(s_1, \dots, s_k)$ 是 $(t_1, \dots, t_n)$ 的一个子序列, 而 $\pi : E^n \rightarrow E^k$ 是相应的坐标投影, 则

$$P_{s_1, \dots, s_k} = \pi(P_{t_1, \dots, t_n}).$$

这个相容条件将在 Kolmogorov 扩张定理 3.2 中出现。过程 X 的有限维分布指标族记为 $\mathcal{M}_X$ 。于是

$$X \text{ 与 } Y \text{ 等价} \iff \mathcal{M}_X = \mathcal{M}_Y.$$

通常认为, 面对一个物理现象时, 统计实验或物理推理至多只能提供该过程有限维分布的信息。所以在建立数学模型时, 只要可能, 我们就应当在等价过程类中选取一个版本, 使定义 1.6 之前的那些表达式具有意义。下面针对布朗运动朝这一目标推进。

定义 1.7. 设过程 X, X' 定义在同一个概率空间上。若对每个固定的 t , 都有

$$X_t = X'_t \quad \text{a.s.},$$

则称 X 与 X' 互为修正。若对几乎所有 ω , 都有

$$X_t(\omega) = X'_t(\omega) \quad \text{对每个 } t \text{ 同时成立},$$

则称 X 与 X' 不可分辨。

显然, 互为修正的两个过程互为版本。还要注意, 若 X 与 X' 互为修正并且都 a.s. 连续, 则它们不可分辨。

下一节将证明如下结果。

定理 1.8 (Kolmogorov 连续性判别准则). 设实值过程 X 满足: 存在常数 $\alpha, \beta, C > 0$, 使

得对任意 $t, h \geq 0$,

$$\mathbb{E}[|X_{t+h} - X_t|^\alpha] \leq Ch^{1+\beta}.$$

则 X 有一个几乎必然连续的修正。

对上面构造的过程 B , 随机变量 $B_{t+h} - B_t$ 是方差为 h 的中心高斯随机变量, 因而

$$\mathbb{E}[(B_{t+h} - B_t)^4] = 3h^2.$$

应用 Kolmogorov 判别准则, 得到:

定理 1.9. 存在一个几乎必然连续且具有独立增量的过程 B , 使得对每个 t , 随机变量 B_t 都是均值为 0、方差为 t 的高斯随机变量。

这样的过程称为标准一维布朗运动, 也简称布朗运动; 英文缩写为 BM。它将是本书后续各章的主要研究对象。

定理 1.9 中的性质蕴含了此前得到的性质。例如, 当 $s < t$ 时, 增量 $B_t - B_s$ 是方差 $t - s$ 的中心高斯随机变量。事实上,

$$B_t = B_s + (B_t - B_s),$$

而 B_s 与 $B_t - B_s$ 相互独立。取特征函数得到

$$\exp\left(-\frac{tu^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{su^2}{2}\right) \mathbb{E}[\exp(iu(B_t - B_s))],$$

从而

$$\mathbb{E}[\exp(iu(B_t - B_s))] = \exp\left(-\frac{(t-s)u^2}{2}\right).$$

于是很容易看出, B 是协方差函数为 $s \wedge t$ 的高斯过程 (见定义 3.5)。反过来, 定理 1.9 也可以表述为: 存在一个 a.s. 连续的中心高斯过程, 其协方差函数为 $s \wedge t$ 。这一反向推论留给读者作为练习。

舍去一个零测集以后, 我们可以而且常常会假定 B 的每条路径都连续。

一旦构造出定理 1.9 的标准一维布朗运动, 就能进一步构造许多有趣的过程。先举几个例子。

1°) 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 过程

$$X_t^x = x + B_t$$

称为从 x 出发的布朗运动, 简称 $\text{BM}(x)$ 。显然, 对任意 $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 和 $t > 0$,

$$P(X_t^x \in D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_D \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) dy = \int_D g_t(y-x) dy.$$

2°) 若 $B^1, \dots, B^d$ 是 d 个相互独立的 B 的副本, 令 X_t 的第 i 个分量为 B_t^i , 便得到状态空间为 $\mathbb{R}^d$ 的过程 X 。它称为 d 维布朗运动, 是从原点出发的连续高斯过程。像上面一样加上 $x \in \mathbb{R}^d$, 即可使它从 x 出发; 相应过程简称 $\text{BM}^d(x)$ 。

3°) 状态空间为 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 的连续过程

$$X_t = (t, B_t)$$

称为热过程。把 B_t 换成 d 维布朗运动, 即得到 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 中的热过程。

4°) 由路径连续性,

$$\sup\{B_s : 0 \leq s \leq t\} = \sup\{B_s : 0 \leq s \leq t, s \in \mathbb{Q}\}.$$

因此可以定义过程

$$S_t = \sup_{s \leq t} B_s.$$

类似地, 还可以考虑过程 $|B_t|$ 、

$$B_t^* = \sup_{s \leq t} |B_s|, \quad B_t^+ = \max(0, B_t).$$

5°) 最后, 由路径连续性, 对任意 Borel 集 D , 映射

$$(\omega, s) \mapsto \mathbf{1}_D(B_s(\omega))$$

关于乘积可测空间

$$(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$$

可测。因此

$$X_t = \int_0^t \mathbf{1}_D(B_s) ds$$

有意义, 并定义了另一个过程: 布朗运动 B 在集合 D 中的占有时间。

本节最后给出布朗运动的几个几何不变性。它们在后文中极为重要, 尤其是性质 iii)。

命题 1.10. 设 B 是标准一维布朗运动, 则:

i) 时间齐次性: 对任意 $s \geq 0$, 过程

$$B_{s+t} - B_s, \quad t \geq 0,$$

是一个布朗运动, 并且与 $\sigma(B_u : u \leq s)$ 独立;

ii) 对称性: 过程 $(-B_t)_{t \geq 0}$ 是布朗运动;

iii) 尺度不变性: 对任意 $c > 0$, 过程

$$cB_{t/c^2}, \quad t \geq 0,$$

是布朗运动;

iv) 时间反演: 令 $X_0 = 0$, 且当 $t > 0$ 时令

$$X_t = tB_{1/t}.$$

则 X 是布朗运动。

证明. 对 i), 容易验证 $X_t = B_{s+t} - B_s$ 是具有连续路径和独立增量的中心高斯过程, 且 $\mathbb{E}[X_t^2] = t$, 因而是布朗运动。性质 ii) 显然; 性质 iii) 与 i) 一样验证即可。

为证明 iv), 先验证 X 是协方差函数为 $s \wedge t$ 的中心高斯过程。因此, 只要它的路径连续, X 就是布朗运动。路径在 $(0, +\infty)$ 上显然连续, 所以只需证明

$$\lim_{t \downarrow 0} X_t = 0.$$

过程 $(X_t)_{t>0}$ 与 $(B_t)_{t>0}$ 等价。由于

$$\lim_{\substack{t \downarrow 0 \\ t \in \mathbb{Q}}} B_t = 0 \quad \text{a.s.},$$

有限维分布的等价性给出

$$\lim_{\substack{t \downarrow 0 \\ t \in \mathbb{Q}}} X_t = 0 \quad \text{a.s.}$$

再利用 X 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 便得到所需的完整极限。 $\square$

注。

1°) 一旦在某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上构造出一个布朗运动, 命题 1.10 便在同一概率空间上给出许多其他布朗运动版本。

2°) 性质 iv) 的一个推论是布朗运动的大数定律:

$$P\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{t} = 0\right) = 1.$$

3°) 这些性质是 Lebesgue 测度的不变性在布朗运动语言下的对应表述; 习题 1.14 的第 2° 问将进一步说明这一点。

练习 1.11。 设 B 是区间 $[0, 1]$ 上的标准一维布朗运动, 即只考虑 $t \in [0, 1]$ 。证明过程

$$\tilde{B}_t = B_{1-t} - B_1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

是 B 的另一个版本; 换言之, 它也是 $[0, 1]$ 上的标准布朗运动。

练习 1.12。 令 H 为 $C([0, 1])$ 中所有满足下列条件的函数 h 所成的子空间: $h(0) = 0$, h 绝对连续, 并且其几乎处处存在的导数 h' 满足

$$\int_0^1 h'(s)^2 ds < +\infty.$$

1°) 证明 H 关于内积

$$(g, h) = \int_0^1 g'(s)h'(s) ds$$

构成 Hilbert 空间。

2°) 对 $[0, 1]$ 上任意有限有符号测度 μ , 证明存在 $h \in H$, 使得对每个 $f \in H$,

$$\int_0^1 f(x) d\mu(x) = (f, h),$$

并且

$$h'(s) = \mu((s, 1]).$$

提示。 从 H 到 $C([0, 1])$ 的典范嵌入是连续的; 使用 Riesz 表示定理。

3°) 设 B 是标准一维布朗运动, μ, ν 是两个有限有符号测度, 并按第 2° 问分别对应于 h, g 。证明

$$X^\mu(\omega) = \int_0^1 B_s(\omega) d\mu(s), \quad X^\nu(\omega) = \int_0^1 B_s(\omega) d\nu(s)$$

都是随机变量, 随机向量 (X^μ, X^ν) 是高斯的, 并且

$$\mathbb{E}[X^\mu X^\nu] = \int_0^1 \int_0^1 (s \wedge t) d\mu(s) d\nu(t) = (h, g).$$

4°) 使用下面习题 1.14 的记号, 再证明

$$X^\mu = \int_0^1 \mu((u, 1]) dB_u.$$

这个问题将在第 VIII 章第 2 节重新讨论。

练习 1.13 (*)。

1°) 设 B 是标准一维布朗运动。证明

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} > 0 \quad \text{a.s.}$$

事实上, 第 II 章将说明这个上极限等于 $+\infty$ 。

2°) 证明 B 是常返的, 即对每个 $x \in \mathbb{R}$, 集合

$$\{t : B_t = x\}$$

无界。

3°) 证明当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 布朗路径几乎必然在任何点附近都不是 α 阶 Hölder 连续的 (见第 2 节)。

提示。 使用命题 1.10 的不变性。

练习 1.14 (#)。

1°) 沿用命题 1.3 及其后文字的记号。设 f 有界; 更一般地, 设对某个 $\varepsilon > 0$, 有 $f \in L_{\text{loc}}^{2+\varepsilon}(\mathbb{R}_+)$ 。定义

$$Y_t = \int_0^t f(s) dB_s = X(f\mathbf{1}_{[0,t]}).$$

证明过程 Y 有一个连续版本。这是第 IV 章将定义的随机积分的一个特殊情形; 届时将看到, 对更一般的被积函数, 结论仍然成立。

2°) 对 $c > 0$ 及 $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 令

$$X^c(f) = cX(f^c), \quad f^c(t) = f(c^2t).$$

证明 X^c 仍是 $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ 上强度为 Lebesgue 测度的高斯测度。由此给出命题 1.10 iii) 的另一证明; 再以类似方法证明命题 1.10 的 i)、ii), 以及习题 1.11。

练习 1.15。 设 B 是标准一维布朗运动。证明

$$X(\omega) = \int_0^1 B_s(\omega)^2 ds$$

是随机变量, 并计算它的一阶矩和二阶矩。

练习 1.16 (#)。 设 B 是标准一维布朗运动。

1°) 对 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 以及 Borel 集 $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$, 证明

$$P(B_{t_1} \in A_1, \dots, B_{t_n} \in A_n) = \int_{A_1} g_{t_1}(x_1) dx_1 \int_{A_2} g_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) dx_2 \cdots \int_{A_n} g_{t_n-t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) dx_n.$$

这给出了 B 的有限维分布。

2°) 对 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$, 证明

$$P(B_t \in A \mid B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) = \int_A g_{t-t_n}(y - B_{t_n}) dy.$$

更一般地, 对 $s < t$, 证明

$$P(B_t \in A \mid \sigma(B_u : u \leq s)) = \int_A g_{t-s}(y - B_s) dy.$$

练习 1.17. 设 B 是标准二维布朗运动, λ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 Lebesgue 测度。

1°) 证明下列随机集合几乎必然是 $\mathbb{R}^2$ 的 Borel 子集:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\omega) &= \{B_t(\omega) : 0 \leq t \leq 1\}, & \gamma_2(\omega) &= \{B_t(\omega) : 0 \leq t \leq 2\}, \\ \gamma_3(\omega) &= \{B_{1-t}(\omega) - B_1(\omega) : 0 \leq t \leq 1\}, & \gamma_4(\omega) &= \{B_{1+t}(\omega) - B_1(\omega) : 0 \leq t \leq 1\}. \end{aligned}$$

并证明映射 $\omega \mapsto \lambda(\gamma_i(\omega))$ 是随机变量。

提示. 为证明后一结论, 可以使用例如

$$\gamma_1(\omega) = \left\{ z : \inf_{u \leq 1} \|z - B_u(\omega)\| = 0 \right\}.$$

2°) 证明

$$\mathbb{E}[\lambda(\gamma_2)] = 2\mathbb{E}[\lambda(\gamma_1)], \quad \mathbb{E}[\lambda(\gamma_1)] = \mathbb{E}[\lambda(\gamma_3)] = \mathbb{E}[\lambda(\gamma_4)].$$

3°) 由恒等式

$$\mathbb{E}[\lambda(\gamma_3 \cup \gamma_4)] = \mathbb{E}[\lambda(\gamma_3) + \lambda(\gamma_4) - \lambda(\gamma_3 \cap \gamma_4)]$$

推出 $\mathbb{E}[\lambda(\gamma_1)] = 0$, 进而证明布朗曲线几乎必然具有零 Lebesgue 测度。可能需要用到如下事实 (第 III 章命题 3.7): 若 β 是一维布朗运动, 则对每个 t ,

$$S_t = \sup_{s \leq t} \beta_s$$

可积。

练习 1.18 (*). 设 B 是标准一维布朗运动。利用尺度不变性证明, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时,

$$t^{-1/2} \log \left(\int_0^t \exp(B_s) ds \right)$$

依分布收敛到

$$S_1 = \sup_{s \leq 1} B_s.$$

提示. 使用 Laplace 方法: 当 $p \rightarrow +\infty$ 时, $\|f\|_p \rightarrow \|f\|_\infty$, 其中 $\|\cdot\|_p$ 是区间 $[0, 1]$ 上关于

Lebesgue 测度的 L^p 范数。 S_1 的分布见第 III 章命题 3.7。

练习 1.19 (#)。

1°) 若 X 是 d 维布朗运动, 证明: 对每个满足 $\|x\| = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^d$, 过程

$$(x, X_t)$$

都是一维布朗运动。

2°) 证明其逆命题不成立。可以使用如下例子: 若 $B = (B^1, B^2)$ 是二维布朗运动, 令

$$X_t^1 = B_{2t/3}^1 - B_{t/3}^2, \quad X_t^2 = B_{2t/3}^2 + B_{t/3}^1.$$

练习 1.20 (极函数与极点)。 若连续函数 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ 满足: 对每个 $x \in \mathbb{R}^2$, 事件

$$\Gamma_x = \{\exists t > 0 : B_t + x = f(t)\}$$

的概率均为零, 则称 f 对二维布朗运动是极函数。事件 Γ_x 的可测性将由第 4 节的结果推出。全体极函数组成的集合记为 π 。

1°) 证明 f 是极函数, 当且仅当

$$P(\exists t > 0 : B_t = f(t)) = 0.$$

提示。 参见习题 3.14 的第 1° 问。

2°) 证明 π 在下列变换下保持不变:

- a) $f \mapsto -f$;
- b) $f \mapsto T \circ f$, 其中 T 是 $\mathbb{R}^2$ 的刚性运动;
- c) $f \mapsto (t \mapsto tf(1/t))$ 。

3°) 证明: 若 $f \notin \pi$, 则

$$\mathbb{E}[\lambda(\{B_t + f(t) : t \geq 0\})] > 0,$$

其中 λ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 Lebesgue 测度。利用习题 1.17 的结果证明单点集是极集, 即对每个 $x \in \mathbb{R}^2$,

$$P(\exists t > 0 : B_t = x) = 0.$$

再把这个结论推广到 $d \geq 3$ 的 d 维布朗运动。第 V 章还会给出这一重要结论的另一证明。

4°) 证明二维布朗运动的几乎每条路径都属于 π 。

提示。 取两个相互独立的二维布朗运动副本 B^1, B^2 , 考察 $B^1 - B^2$, 并应用第 3° 问。

练习 1.21 ().** 设 B 是标准一维布朗运动, $X = B^+$ 或 $X = |B|$ 。设 $p > 1$, 而 q 是其共轭指数, 即

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1°) 证明随机变量

$$J_p = \sup_{t \geq 0} (X_t - t^{p/2})$$

几乎必然严格为正且有限, 并且与

$$\sup_{t \geq 0} \left(\frac{X_t}{1 + t^{p/2}} \right)^q$$

同分布。

2°) 利用时间反演证明

$$\sup_{t \geq 1} \frac{X_t}{1 + t^{p/2}} \stackrel{(d)}{=} \sup_{u \leq 1} \frac{1}{1 + u^{p/2}} \frac{X_u}{u^{1-p/2}},$$

并推出 $\mathbb{E}[J_p] < +\infty$ 。

提示。 使用定理 2.1。

3°) 证明存在常数 $C_p(X)$, 使得对任意正随机变量 L ,

$$\mathbb{E}[X_L] \leq C_p(X) \left\| L^{1/2} \right\|_p.$$

提示。 对 $\mu > 0$, 写成

$$\mathbb{E}[X_L] = \mathbb{E}[X_L - \mu L^{p/2}] + \mu \mathbb{E}[L^{p/2}],$$

并利用尺度性质证明右端第一项不超过

$$\mu^{-q/p} \mathbb{E}[J_p].$$

4°) 设随机时刻 L_μ 满足

$$X_{L_\mu} - \mu L_\mu^{p/2} = \sup_{t \geq 0} (X_t - \mu t^{p/2}).$$

证明 L_μ 几乎必然唯一, 并证明最优常数为

$$C_p(X) = p^{1/p} (q \mathbb{E}[J_p])^{1/q}.$$

5°) 证明

$$\mathbb{E}[X_{L_1} | J_p] = q J_p, \quad \mathbb{E}[L_1^{p/2} | J_p] = \frac{q}{p} J_p.$$

练习 1.22 ().** 若连续过程 X 对每个 $\lambda > 0$ 都满足

$$(X_{\lambda t}, t \geq 0) \stackrel{(d)}{=} (\lambda X_t, t \geq 0),$$

即两个过程同分布 (见第 3 节), 则称 X 是一阶自相似过程。

1°) 证明: 若 B 是标准布朗运动, 则

$$X_t = B_{t^2}$$

是自相似过程。

2°) 以下设 X 是正的自相似过程。对 $p > 1$, 令

$$S_p = \sup_{s \geq 0} (X_s - s^p), \quad X_t^* = \sup_{s \leq t} X_s.$$

证明存在只依赖于 p 的常数 c_p , 使得对每个 $a > 0$,

$$P(c_p (X_1^*)^q \geq a) \leq P(S_p \geq a), \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

提示。 注意

$$S_p = \sup_{t \geq 0} (X_t^* - t^p),$$

并对 X_t^* 使用自相似性。

3°) 设 $k > 1$ 。证明对任意 $a > 0$,

$$P(S_p \geq a) \leq 2P((kX_1^*)^q \geq a) + \sum_{n=1}^{\infty} P((kX_1^*)^q \geq k^{np}a).$$

提示。 注意

$$P(S_p \geq a) \leq \sup \{P(X_L^* - L^p \geq a) : L \text{ 为正随机变量}\},$$

并使用分解

$$\Omega = \{L \leq a^{1/p}\} \cup \bigcup_{n \geq 0} \{k^n a^{1/p} < L \leq k^{n+1} a^{1/p}\}.$$

4°) 若 g 是 $\mathbb{R}_+$ 上的非负凸函数且 $g(0) = 0$, 证明

$$\mathbb{E}[g(c_p(X_1^*)^q)] \leq \mathbb{E}[g(S_p)] \leq \left(2 + \frac{1}{k^p(k^p - 1)}\right) \mathbb{E}[g((kX_1^*)^q)].$$

提示。 若 U, V 是两个正随机变量, 并且

$$P(U \geq a) \leq \sum_n \alpha_n P(V \geq \beta_n a),$$

则

$$\mathbb{E}[g(U)] = \int_0^\infty P(U \geq a) dg(a) \leq \sum_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathbb{E}[g(V)].$$

2 布朗路径的局部性质

首先要弄清布朗路径究竟是什么样子。分析布朗路径时, 画出热过程的路径图会很有帮助; 换言之, 画出映射 $t \mapsto B_t(\omega)$ 的图像 (见图 2)。这条图线应当非常“曲折”。曲折到什么程度, 正是本节研究布朗路径局部行为时要回答的问题。

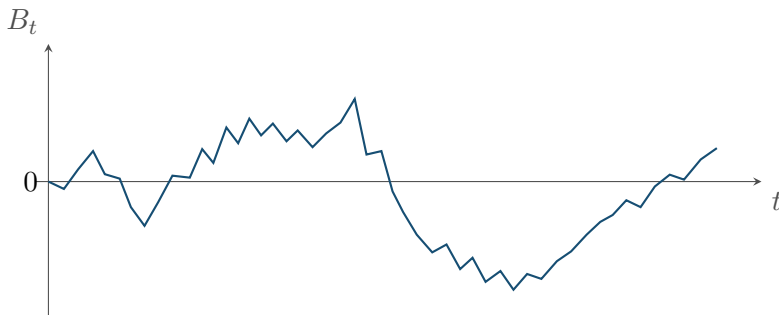


图 2

先证明上一节 Kolmogorov 判别准则的一个更一般版本。这里考虑由 d 维参数指标的 Banach 空间值过程 X 。在 $\mathbb{R}^d$ 上使用范数

$$|t| = \sup_i |t_i|,$$

并仍用 $|\cdot|$ 表示 X 的状态空间上的范数。回顾：若 Banach 空间值函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow E$ 对每个 $L > 0$ 都满足

$$\sup \left\{ \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha} : |t|, |s| \leq L, t \neq s \right\} < +\infty,$$

则称 f 局部 α 阶 Hölder 连续。

定理 2.1。 设 $(X_t)_{t \in [0,1]^d}$ 是 Banach 空间值过程。若存在严格正常数 γ, c, ε , 使得

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\gamma] \leq c|t - s|^{d+\varepsilon},$$

则 X 有一个修正 $\tilde{X}$, 并且对每个 $\alpha \in [0, \varepsilon/\gamma)$, 都有

$$\mathbb{E} \left[\left(\sup_{\substack{s, t \in [0,1]^d \\ s \neq t}} \frac{|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s|}{|t - s|^\alpha} \right)^\gamma \right] < +\infty.$$

特别地, $\tilde{X}$ 的路径是 α 阶 Hölder 连续的。

证明。 对 $m \in \mathbb{N}$, 令 D_m 为所有如下 d -元组所成的集合:

$$s = (2^{-m}i_1, \dots, 2^{-m}i_d), \quad 0 \leq i_k < 2^m, \quad i_k \in \mathbb{Z},$$

并令 $D = \bigcup_m D_m$ 。再令 Δ_m 为所有满足

$$s, t \in D_m, \quad |s - t| = 2^{-m}$$

的点对 (s, t) 所成的集合; 这样的点对少于 $2^{(m+1)d}$ 个。最后, 对 D 中的 s, t , 若 s 的每个分量都不超过 t 的相应分量, 则写作 $s \leq t$ 。

令

$$K_i = \sup_{(s,t) \in \Delta_i} |X_s - X_t|.$$

由假设, 存在常数 J , 使得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_i^\gamma] &\leq \sum_{(s,t) \in \Delta_i} \mathbb{E}[|X_s - X_t|^\gamma] \\ &\leq 2^{(i+1)d} c 2^{-i(d+\varepsilon)} = J 2^{-i\varepsilon}. \end{aligned}$$

对任意 $s \in D$, 存在 D 中的递增序列 (s_n) , 使得

$$s_n \in D_n, \quad s_n \leq s,$$

并且从某一项起 $s_n = s$ 。对 $t \in D$ 同样选取 (t_n) 。

现在设 $s, t \in D$ 且 $|s - t| \leq 2^{-m}$ 。此时或者 $s_m = t_m$, 或者 $(s_m, t_m) \in \Delta_m$; 无论哪种情形, 都有

$$\begin{aligned} X_s - X_t &= \sum_{i=m}^{\infty} (X_{s_{i+1}} - X_{s_i}) + X_{s_m} - X_{t_m} \\ &\quad + \sum_{i=m}^{\infty} (X_{t_i} - X_{t_{i+1}}), \end{aligned}$$

其中两个级数实际都是有限和。因此

$$|X_s - X_t| \leq K_m + 2 \sum_{i=m+1}^{\infty} K_i \leq 2 \sum_{i=m}^{\infty} K_i.$$

令

$$M_\alpha = \sup_{\substack{s, t \in D \\ s \neq t}} \frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^\alpha}.$$

由上式,

$$\begin{aligned} M_\alpha &\leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ 2^{(m+1)\alpha} \sup_{\substack{s, t \in D, s \neq t \\ |t-s| \leq 2^{-m}}} |X_t - X_s| \right\} \\ &\leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ 2^{\alpha+1} 2^{m\alpha} \sum_{i=m}^{\infty} K_i \right\} \\ &\leq 2^{\alpha+1} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\alpha} K_i. \end{aligned}$$

当 $\gamma \geq 1$ 且 $\alpha < \varepsilon/\gamma$ 时, 令 $J' = 2^{\alpha+1} J^{1/\gamma}$, 可得

$$\begin{aligned} \|M_\alpha\|_\gamma &\leq 2^{\alpha+1} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\alpha} \|K_i\|_\gamma \\ &\leq J' \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(\alpha-\varepsilon/\gamma)} < +\infty. \end{aligned}$$

当 $\gamma < 1$ 时, 对 $\mathbb{E}[M_\alpha^\gamma]$ 使用同样的论证即可。

特别地, 对几乎每个 ω , 映射 $s \mapsto X_s(\omega)$ 在 D 上一致连续。因此可以定义

$$\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in D}} X_s(\omega).$$

由 Fatou 引理和定理假设, $\tilde{X}_t = X_t$ 几乎必然成立; 显然 $\tilde{X}$ 就是所需的修正。 $\square$

注。 上面的单位立方体可以换成任意立方体。

对布朗运动,

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = |t - s|.$$

又因为增量是高斯的, 所以对每个 $p > 0$, 存在常数 C_p , 使得

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^{2p}] = C_p |t - s|^p.$$

由定理 2.1 得到:

定理 2.2. 对每个 $\alpha < \frac{1}{2}$, 一维布朗运动都局部 α 阶 Hölder 连续。

证明。如前所述，一个过程至多有一个连续修正（在不可分辨意义下）。定理 2.1 表明，当

$$\alpha < \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$$

时，布朗运动有一个局部 α 阶 Hölder 连续的修正。令 p 任意大，即得结论。 $\square$

从现在起，可以而且将要假定：一维布朗运动的每条路径对所有 $\alpha < \frac{1}{2}$ 都局部 α 阶 Hölder 连续。下面将证明，当 $\alpha \geq \frac{1}{2}$ 时，布朗路径不可能具有 α 阶 Hölder 连续性（另见习题 1.13）。先给出几个定义，并沿用第 0 章第 4 节的记号。

对定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的实值函数 X 以及 $[0, t]$ 的分割 $\Delta = \{t_i\}$ ，令

$$T_t^\Delta = \sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2.$$

与第 0 章的 S_t^Δ 不同，即使 Δ' 是 Δ 的加细，也未必有 $T_t^{\Delta'} \geq T_t^\Delta$ 。

定义 2.3。若存在一个取有限值的过程 $\langle X, X \rangle$ ，使得对每个 t ，以及任意一列 $[0, t]$ 的分割 (Δ_n) ，只要 $|\Delta_n| \rightarrow 0$ ，就有

$$T_t^{\Delta_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \langle X, X \rangle_t,$$

则称实值过程 X 具有有限二次变差。过程 $\langle X, X \rangle$ 称为 X 的二次变差。

当然也可以考察区间 $[s, t]$ 。采用显然的记号，有

$$T_{s,t}^{\Delta_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \langle X, X \rangle_t - \langle X, X \rangle_s.$$

因此 $\langle X, X \rangle$ 是递增过程。

注。需要强调：一个过程可以在定义 2.3 的意义下具有有限二次变差，而它的路径在经典意义下却几乎必然具有无穷二次变差，即对每个 $t > 0$ ，

$$\sup_{\Delta} T_t^\Delta = +\infty.$$

布朗运动正是如此。本书中的“二次变差”一词只按定义 2.3 理解。

定理 2.4。布朗运动具有有限二次变差，并且

$$\langle B, B \rangle_t = t \quad \text{a.s.}$$

更一般地，设 X 是强度为 μ 的高斯测度， $\mu(F) < \infty$ 。对每个 $n = 1, 2, \dots$ ，设 $(F_k^n)_k$ 是 F 的一个有限可测分割。若

$$\sup_k \mu(F_k^n) \rightarrow 0,$$

则

$$\sum_k X(F_k^n)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \mu(F).$$

证明。 随机变量 $X(F_k^n)$ 相互独立，并且

$$\mathbb{E}[X(F_k^n)^2] = \mu(F_k^n).$$

因此

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_k X(F_k^n)^2 - \mu(F) \right\|_2^2 \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_k (X(F_k^n)^2 - \mu(F_k^n)) \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

若 Y 是中心高斯随机变量，则

$$\mathbb{E}[Y^4] = 3\mathbb{E}[Y^2]^2.$$

利用独立性，上式等于

$$2 \sum_k \mu(F_k^n)^2 \leq 2\mu(F) \sup_k \mu(F_k^n),$$

故趋于 0。布朗运动的结论取 $F = [0, t]$ 、并令 F_k^n 为分割所对应的小区间即可得到。 $\square$

注。

1° 第 IV 章会把这个结果推广到半鞅。

2° 通过抽取子列，总可以选出一列分割 (Δ_n) ，使上述收敛几乎必然成立。对布朗运动，实际上任意逐次加细的分割列——即 $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ ——都几乎必然收敛（见第 II 章命题 2.12 和本节习题 2.8）。

推论 2.5。 布朗路径几乎必然在任意区间上都具有无穷变差。

证明。 由定理 2.4，存在 $\Omega_0 \subset \Omega$ ，使 $P(\Omega_0) = 1$ ，并且对任意一对有理数 $p < q$ ，都存在一列 $[p, q]$ 的分割

$$\Delta^n = \{t_i\}, \quad |\Delta^n| \rightarrow 0,$$

使得对每个 $\omega \in \Omega_0$ ，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \Delta^n} (B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega))^2 = q - p.$$

设 $V(\omega) \leq +\infty$ 是路径 $t \mapsto B_t(\omega)$ 在 $[p, q]$ 上的变差。则

$$\begin{aligned} & \sum_i (B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega))^2 \\ & \leq \left(\sup_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)| \right) V(\omega). \end{aligned}$$

若 $V(\omega) < +\infty$ ，则由布朗路径的连续性，右端会随 $n \rightarrow \infty$ 收敛到 0，这与极限为 $q - p > 0$ 矛盾。因此几乎必然有 $V(\omega) = +\infty$ 。任意非退化区间都包含端点为有理数的子区间，故结论成立。 $\square$

以下称函数处处非局部 α 阶 Hölder 连续，是指不存在任何区间，使它在该区间上 α 阶 Hölder 连续。

推论 2.6. 当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 布朗路径几乎必然处处非局部 α 阶 Hölder 连续。

证明. 证明与推论 2.5 几乎相同。若对 $p \leq s, t \leq q$ 有

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq k|t - s|^\alpha,$$

其中 $\alpha > \frac{1}{2}$, 则对 $[p, q]$ 的任意分割,

$$\sum_i (B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega))^2 \leq k^2(q-p) \sup_i |t_{i+1} - t_i|^{2\alpha-1}.$$

当分割网格趋于 0 时, 右端趋于 0; 再按上一证明即可得到矛盾。□

定理 2.2 与推论 2.6 尚未处理 $\alpha = \frac{1}{2}$ 的临界情形。下面的结果尤其说明, 布朗路径不是 $\frac{1}{2}$ 阶 Hölder 连续的 (另见第 III 章习题 2.31)。

定理 2.7 (Lévy 连续模定理). 令

$$h(t) = (2t \log(1/t))^{1/2}.$$

则

$$\mathbb{P} \left[\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \varepsilon}} \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{h(\varepsilon)} \right) = 1 \right] = 1.$$

证明. 取 $\delta \in (0, 1)$, 并令

$$L_n = \mathbb{P} \left[\max_{1 \leq k \leq 2^n} |B_{k2^{-n}} - B_{(k-1)2^{-n}}| \leq (1-\delta)h(2^{-n}) \right].$$

由增量的独立性,

$$L_n \leq \left[1 - 2 \int_{(1-\delta)\sqrt{2 \log 2^n}}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \right]^{2^n}.$$

对不等式

$$\int_a^{\infty} b^{-2} e^{-b^2/2} db < a^{-2} \int_a^{\infty} e^{-b^2/2} db$$

的左端作分部积分, 容易验证

$$\int_a^{\infty} e^{-b^2/2} db > \frac{a}{a^2 + 1} e^{-a^2/2}.$$

结合 $1 - s \leq e^{-s}$, 可知存在常数 $C > 0$, 使

$$L_n \leq \exp \left(-C \frac{2^{n(1-(1-\delta)^2)}}{\sqrt{n}} \right).$$

因此 $\sum_n L_n < \infty$ 。由 Borel–Cantelli 引理, 定理所述上极限几乎必然不小于 $1 - \delta$; 而 δ 任意, 故该上极限几乎必然不小于 1。

下面证明反向不等式。仍取 $\delta \in (0, 1)$, 再取 $\epsilon > 0$, 使

$$(1 + \epsilon)^2(1 - \delta) > 1 + \delta.$$

令 K_n 为所有满足

$$0 \leq i < j \leq 2^n, \quad 0 < j - i \leq 2^{n\delta}$$

的整数对 (i, j) 所成的集合, 并对每一对令 $k = j - i$ 。利用

$$\int_a^\infty e^{-b^2/2} db \leq \int_a^\infty e^{-b^2/2} \frac{b}{a} db = a^{-1} e^{-a^2/2},$$

并记

$$\hat{L}_n = \mathbb{P} \left[\max_{(i,j) \in K_n} \frac{|B_{j2^{-n}} - B_{i2^{-n}}|}{h(k2^{-n})} \geq 1 + \epsilon \right],$$

得到

$$\begin{aligned} \hat{L}_n &\leq \sum_{(i,j) \in K_n} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{(1+\epsilon)\sqrt{2\log(k^{-1}2^n)}}^\infty e^{-x^2/2} dx \\ &\leq D \sum_{(i,j) \in K_n} (\log(k^{-1}2^n))^{-1/2} \exp(-(1+\epsilon)^2 \log(k^{-1}2^n)), \end{aligned}$$

其中 D 表示逐行可以改变的正常数。由于 $k^{-1} \geq 2^{-n\delta}$, 进一步有

$$\hat{L}_n \leq D 2^{-n(1-\delta)(1+\epsilon)^2} \sum_{(i,j) \in K_n} (\log(k^{-1}2^n))^{-1/2}.$$

集合 K_n 至多含有 $2^{n(1+\delta)}$ 个点, 并且对其中每一点,

$$\log(k^{-1}2^n) \geq \log 2^{n(1-\delta)}.$$

所以最终得到

$$\hat{L}_n \leq D n^{-1/2} 2^{n((1+\delta)-(1-\delta)(1+\epsilon)^2)}.$$

由 ϵ, δ 的选择, 右端构成一个收敛级数的通项。再次使用 Borel–Cantelli 引理可知: 对几乎每个 ω , 存在整数 $n(\omega)$, 使得当 $n \geq n(\omega)$ 时, 对所有 $(i, j) \in K_n$, 都有

$$|B_{j2^{-n}}(\omega) - B_{i2^{-n}}(\omega)| < (1+\epsilon)h(k2^{-n}), \quad k = j - i.$$

此外, 读者容易验证: 给定任意 $\eta > 0$, 还可把 $n(\omega)$ 选得足够大, 使得对 $n \geq n(\omega)$,

$$\sum_{m>n} h(2^{-m}) \leq \eta h(2^{-(n+1)(1-\delta)}).$$

固定一条满足上述性质的路径 ω 。取 $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, 并假定

$$t_2 - t_1 < 2^{-n(\omega)(1-\delta)}.$$

令 $n \geq n(\omega)$ 为满足

$$2^{-n} < 2^{-(n+1)(1-\delta)} \leq t_2 - t_1 < 2^{-n(1-\delta)}$$

的整数。可以找到整数 i, j, p_r, q_s , 使

$$t_1 = i2^{-n} - 2^{-p_1} - 2^{-p_2} - \cdots, \quad t_2 = j2^{-n} + 2^{-q_1} + 2^{-q_2} + \cdots,$$

其中

$$n < p_1 < p_2 < \cdots, \quad n < q_1 < q_2 < \cdots,$$

并且

$$0 < j - i \leq (t_2 - t_1)2^n < 2^{n\delta}.$$

由布朗路径的连续性,

$$\begin{aligned} |B_{t_1}(\omega) - B_{t_2}(\omega)| &\leq |B_{i2^{-n}}(\omega) - B_{t_1}(\omega)| + |B_{j2^{-n}}(\omega) - B_{i2^{-n}}(\omega)| \\ &\quad + |B_{t_2}(\omega) - B_{j2^{-n}}(\omega)| \\ &\leq 2(1 + \epsilon) \sum_{m>n} h(2^{-m}) + (1 + \epsilon)h((j - i)2^{-n}) \\ &\leq 2(1 + \epsilon)\eta h\left(2^{-(n+1)(1-\delta)}\right) + (1 + \epsilon)h((j - i)2^{-n}). \end{aligned}$$

函数 h 在 0 的某个右邻域内递增。因此, 当 $t_2 - t_1$ 足够小时,

$$|B_{t_1}(\omega) - B_{t_2}(\omega)| \leq (2(1 + \epsilon)\eta + (1 + \epsilon))h(t_2 - t_1).$$

最后让 ϵ, η, δ 任意趋近于 0, 即得所需反向不等式。 $\square$

练习 2.8. 设 B 是布朗运动, Δ_n 是由点

$$t_j = j2^{-n}t, \quad j = 0, 1, \dots, 2^n,$$

给出的区间 $[0, t]$ 的分割。证明定理 2.4 的如下加强形式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_t^{\Delta_n} = t \quad \text{几乎必然.}$$

提示. 计算 $T_t^{\Delta_n} - t$ 的精确方差, 并使用 Borel–Cantelli 引理。
第 II 章命题 2.12 将在更一般的情形下证明这一结果。

练习 2.9 (布朗路径的不可微性)。

1°) 设 g 是 $\mathbb{R}_+$ 上的实值函数, 并且在 t 处可微。证明: 存在整数 l , 使得若 $i = [nt] + 1$, 则当 n 充分大时, 对 $i < j \leq i + 3$, 都有

$$|g(j/n) - g((j-1)/n)| \leq \frac{7l}{n}.$$

2°) 令 D_t 为所有在 $t \geq 0$ 处可微的布朗路径所成的集合。证明 $\bigcup_{t \geq 0} D_t$ 包含于事件

$$\Gamma = \bigcup_{l \geq 1} \liminf_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{i=1}^{n+1} \bigcap_{j=i+1}^{i+3} \left\{ |B(j/n) - B((j-1)/n)| \leq \frac{l}{n} \right\},$$

并最终证明 $\mathbb{P}(\Gamma) = 0$ 。

练习 2.10. 设 (X_t^a) 是一族取值于 $\mathbb{R}^k$ 的连续过程, 其中 t 取遍 $\mathbb{R}$ 的某个区间, 参数 $a \in \mathbb{R}^d$. 证明: 若存在常数 $\gamma, c, \varepsilon > 0$, 使得

$$\mathbb{E} \left[\sup_t |X_t^a - X_t^b|^\gamma \right] \leq c |a - b|^{d+\varepsilon},$$

则 (X_t^a) 存在一个关于 a, t 联合连续的修正; 而且对每个 $\alpha < \varepsilon/\gamma$, 该修正关于参数 a 是 α 阶 Hölder 连续的, 并且这种连续性关于 t 一致成立。

练习 2.11 (布朗运动的 p -变差)。

1°) 设 B 是标准一维布朗运动, 并对每个 n 令

$$t_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

证明: 对每个 $p > 0$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$n^{p/2-1} \sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^p$$

依概率收敛到一个常数 v_p 。

提示。 使用布朗运动的尺度不变性和弱大数定律。

2°) 进一步证明

$$n^{(p-1)/2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^p - n^{1-p/2} v_p \right)$$

依分布收敛到一个高斯随机变量。

练习 2.12. 给定 $p > 0$, 构造一个右连续但不连续的过程 X , 使得存在常数 $C > 0$, 对所有 $s, t \geq 0$ 都有

$$\mathbb{E}[|X_s - X_t|^p] \leq C|t - s|.$$

提示。 取适当的随机变量 Y , 并考虑

$$X_t = \mathbf{1}_{\{Y \leq t\}}.$$

3 典范过程与高斯过程

现在更系统地回到第 1 节引入的若干概念。那里已经指出: 对适当的指标集 T 和状态空间 E , 选取过程 X 的一条路径, 就等于在函数空间 $\mathcal{F}(T, E)$ 中选取一个元素。众所周知, 集合 $\mathcal{F}(T, E)$ 就是乘积空间 E^T : 函数 $\omega \in \mathcal{F}(T, E)$ 对应于 E^T 中由各点 $\omega(t)$ 组成的元素。以后不再区分 $\mathcal{F}(T, E)$ 与 E^T 。

在 E^T 上定义取值于 E 的映射

$$Y_t(\omega) = \omega(t), \quad t \in T.$$

这些映射称为坐标映射。给 E^T 配备乘积 σ -代数 $\mathcal{E}^T$ 后, 它们都是随机变量, 因而组成一个以 T 为指标集的过程。 $\mathcal{E}^T$ 是使所有 Y_t 可测的最小 σ -代数; 它也等于所有由可数个坐标映射生成的 σ -代

数之并。此外，它还是包含全部可测矩形

$$\prod_{t \in T} A_t$$

的最小 σ -代数，其中每个 $A_t \in \mathcal{E}$ ，并且除有限多个 $t_1, \dots, t_n$ 外都有 $A_t = E$ 。

设 $X = (X_t)_{t \in T}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上、状态空间为 $(E, \mathcal{E})$ 的过程。定义映射 $\phi: \Omega \rightarrow E^T$:

$$\phi(\omega)(t) = X_t(\omega).$$

因为对每个 t ，复合映射 $Y_t \circ \phi = X_t$ 都可测，所以 ϕ 关于 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{E}^T$ 可测。记 P_X 为 P 在 ϕ 下的像测度。显然，对 T 的任意有限子集 $(t_1, \dots, t_n)$ 以及 $A_i \in \mathcal{E}$,

$$P[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n] = P_X[Y_{t_1} \in A_1, \dots, Y_{t_n} \in A_n].$$

也就是说，过程 X 与坐标过程 Y 互为版本。

定义 3.1。 过程 Y 称为过程 X 的典范版本；概率测度 P_X 称为 X 的分布。

特别地，若 X 与 X' 是两个过程，它们甚至可以定义在不同的概率空间上，则二者互为版本，当且仅当它们具有相同分布，即在 E^T 上有 $P_X = P_{X'}$ 。以后常简写为

$$X \stackrel{(d)}{=} X', \quad \text{或} \quad (X_t, t \geq 0) \stackrel{(d)}{=} (X'_t, t \geq 0).$$

例如，命题 1.10 的性质 iii) 可以写成

$$(B_t, t \geq 0) \stackrel{(d)}{=} (cB_{c^{-2}t}, t \geq 0).$$

现在设要构造一个描述某种物理现象的过程。可以认为，“自然界”（统计实验、物理考虑等）提供了一族有限维分布，而目标是构造具有这些给定分布的过程。一旦构造成功，前面的讨论便给出它的典范版本。事实上，下面将在相当一般的框架中直接构造这个版本。

第 1 节已经说明，过程 X 的有限维分布族 $\mathcal{M}_X$ 构成一个投影相容族。具有给定有限维分布的过程之典范版本由 Kolmogorov 扩张定理保证存在。这里不加证明地回顾该定理。

定理 3.2 (Kolmogorov 扩张定理)。 设 E 是 Polish 空间， $\mathcal{E}$ 是其 Borel σ -代数。对任意指标集 T 以及有限乘积空间上的任意投影相容概率测度族，都存在唯一的概率测度定义在 $(E^T, \mathcal{E}^T)$ 上，使其在各有限乘积空间上的投影恰为给定的测度族。

就本书当前的用途而言，定理也可以表述为：若 $(E, \mathcal{E})$ 是 Polish 可测空间，给定一族有限维分布 $\mathcal{M}$ ，则在 $(E^T, \mathcal{E}^T)$ 上存在唯一概率测度，使坐标过程 Y 的有限维分布族满足 $\mathcal{M}_Y = \mathcal{M}$ 。

上述结果可以构造过程的典范版本。不过，出于第 1 节所述的同样原因，通常不会直接在这个典范版本上工作；它只是构造更便于处理的版本时的中间步骤。这些版本通常具有某种连续性。许多过程都有这样的版本：路径右连续，并且在每一点都有左极限，即

$$\lim_{s \downarrow t} X_s(\omega) = X_t(\omega), \quad \lim_{s \uparrow t} X_s(\omega) \text{ 存在.}$$

后一极限记作 $X_{t-}(\omega)$ 。所有这类函数组成的空间记为 $D(\mathbb{R}_+, E)$ ，或简记为 D ；这类函数称为 càdlàg 函数（右连续且有左极限的函数）。空间 D 是 E^T 的子集。称 X 有一个几乎必然为 càdlàg 的版本，等价于说：对 X 的典范版本，测度 P_X 对 $\mathcal{E}^T$ 中每个包含 D 的可测集合都赋概率 1。

在这种情况下，可以直接把 D 作为概率空间。仍以 Y_t 表示 D 上的坐标映射 $\omega \mapsto \omega(t)$ ，并令

$$\mathcal{E}_D^T = \sigma(Y_t : t \geq 0) = \{A \cap D : A \in \mathcal{E}^T\}.$$

虽然 D 本身不一定属于 $\mathcal{E}^T$ ，但可以在 $\mathcal{E}_D^T$ 上无歧义地定义概率测度 Q ：若 $\Gamma = \bar{\Gamma} \cap D$ ，其中 $\bar{\Gamma} \in \mathcal{E}^T$ ，则令

$$Q(\Gamma) = P_X(\bar{\Gamma}).$$

读者容易验证该定义与 $\bar{\Gamma}$ 的选择无关。于是定义在 $(D, \mathcal{E}_D^T, Q)$ 上的坐标过程 Y 又是 X 的一个版本。这个版本同样定义在函数空间上并由坐标映射组成，所以仍称为典范版本；只要明确当前所用的空间，也仍把 Q 记作 P_X ，不会引起混淆。

最后，若 X 定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上并且几乎必然具有连续路径，就可以把上面的 D 换成 $C(\mathbb{R}_+, E)$ ，并在一个概率为 1 的集合上定义映射 ϕ ，使

$$Y_t(\phi(\omega)) = \phi(\omega)(t) = X_t(\omega),$$

再取 P 在 ϕ 下的像测度。对布朗运动尤其可以这样做。

命题 3.3. 在 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 上存在唯一概率测度 W ，使坐标过程是布朗运动。该测度称为 *Wiener* 测度，空间 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 称为 *Wiener* 空间。

证明. 把已经构造出的布朗运动版本所在概率空间的概率测度，经上述映射 ϕ 推前，即得到 W 。唯一性来自典范坐标过程有限维分布的唯一性。 $\square$

事实上，即使不知道第 1 节的结果，也可以直接构造 Wiener 测度，从而直接构造布朗运动的连续版本。令 $\mathcal{A}$ 为 $C = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 上所有由有限个坐标映射生成的 σ -代数之并； $\mathcal{A}$ 是生成 C 上坐标 σ -代数的一个代数。可以在 $\mathcal{A}$ 上用练习 1.16 的 1° 中的公式定义 W ，然后只需证明如此定义的集合函数可以扩张为整个 σ -代数上的概率测度。

对 $\mathbb{R}^d$ 中的布朗运动，类似地定义 Wiener 空间 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ 以及其上的唯一概率测度 W ，使坐标过程是标准 d 维布朗运动。Wiener 空间常记作 $\mathbb{W}$ ，若要强调维数则记作 $\mathbb{W}^d$ 。把第 2 节的结论改用 Wiener 测度表述很有意义。例如：Wiener 测度集中在这样一类函数上，它们对每个 $\alpha < \frac{1}{2}$ 都是 α 阶 Hölder 连续的，而对每个 $\alpha \geq \frac{1}{2}$ 都处处非局部 α 阶 Hölder 连续。

下面引入一个重要概念。在刚才定义的三个典范空间

$$E^{\mathbb{R}_+}, \quad D(\mathbb{R}_+, E), \quad C(\mathbb{R}_+, E)$$

上，可以定义一族变换 $(\theta_t)_{t \geq 0}$ ：

$$Y_s(\theta_t(\omega)) = Y_{t+s}(\omega),$$

其中 Y 一如既往表示坐标过程。显然

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s},$$

并且 θ_t 关于 $\sigma(Y_s : s \geq t)$ 可测，因而也关于 $\sigma(Y_s : s \geq 0)$ 可测。变换 θ_t 的作用是删去路径在时刻 t 以前的部分，再把余下部分向时间原点平移。算子 θ_t 称为平移算子。

定义 3.4. 若对任意 $t_1, \dots, t_n, t \geq 0$ 以及任意 $A_i \in \mathcal{E}$ ，都有

$$P[X_{t+t_1} \in A_1, \dots, X_{t+t_n} \in A_n] = P[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n],$$

则称过程 X 是平稳过程。

借助典范版本，还可以把平稳性表述为：对每个 $t \geq 0$ ，

$$P_X \circ \theta_t^{-1} = P_X.$$

换言之, X 的分布在所有平移算子下不变。

下面以高斯过程为例说明上述概念。

定义 3.5。 实值过程 $(X_t)_{t \in T}$ 称为高斯过程, 如果对 T 的任意有限子族 $(t_1, \dots, t_n)$, 随机向量

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$$

都是高斯随机向量。若对每个 $t \in T$ 都有 $\mathbb{E}[X_t] = 0$, 则称 X 是中心高斯过程。

换言之, 若 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中包含全部随机变量 X_t , $t \in T$ 的最小闭子空间是高斯子空间, 则 X 是高斯过程。前面已经指出, 标准一维布朗运动是高斯过程。

定义 3.6。 若 $(X_t)_{t \in T}$ 是高斯过程, 则其协方差函数是定义在 $T \times T$ 上的函数

$$\Gamma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(X_s - \mathbb{E}[X_s])(X_t - \mathbb{E}[X_t])].$$

回顾: T 上的半正定函数 Γ 是指一个从 $T \times T$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数, 使得对 T 中任意 d 个点 $(t_1, \dots, t_d)$, 矩阵

$$(\Gamma(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq d}$$

都是半正定矩阵 (见第 0 章第 6 节)。

命题 3.7。 高斯过程的协方差函数是半正定函数。反之, 任意对称半正定函数都是某个中心高斯过程的协方差函数。

证明。 取 T 的一个有限子集 (t_i) 以及复数 a_i 。则

$$\sum_{i, j} \Gamma(t_i, t_j) a_i \overline{a_j} = \mathbb{E} \left[\left| \sum_i a_i (X_{t_i} - \mathbb{E}[X_{t_i}]) \right|^2 \right] \geq 0,$$

这证明了第一个结论。

反过来, 给定对称半正定函数 Γ 。对 T 的每个有限子集 $t_1, \dots, t_n$, 令 $P_{t_1, \dots, t_n}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上以

$$(\Gamma(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

为协方差矩阵的中心高斯概率测度 (见第 0 章第 6 节)。这显然定义了一个投影相容族。在 Kolmogorov 扩张定理所给出的概率测度下, 坐标过程就是以 Γ 为协方差函数的高斯过程。需要强调, 以上讨论适用于一般的集合 T , 而不只适用于 $\mathbb{R}$ 的子集。□

注。 定义 1.4 中的高斯测度可以这样构造: 在命题 3.7 中取

$$T = \mathcal{A}, \quad \Gamma(A, B) = \mu(A \cap B).$$

已经知道, 标准一维布朗运动的协方差函数为 $s \wedge t$ 。下面的方法给出另一大类例子。若 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的对称概率测度, 则其 Fourier 变换

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \mu(dx)$$

是实值函数。读者容易验证, 在 $T = \mathbb{R}$ 上令

$$\Gamma(t, t') = \phi(t - t')$$

便得到一个协方差函数。由命题 3.7, 与该协方差函数对应的过程是平稳过程。

特别地, 对 $\beta > 0$, 函数 $e^{-\beta|t|}$ 是参数为 β 的 Cauchy 分布的特征函数。因此, 对 $c > 0$,

$$\Gamma(t, t') = ce^{-\beta|t-t'|}$$

是一个平稳高斯过程的协方差函数。该过程称为参数为 β 、尺度为 c 的 平稳 Ornstein-Uhlenbeck 过程, 以后简称 OU 过程。若把它记作 X , 则

$$\mathbb{E}[(X_t - X_{t'})^2] \leq 2c\beta|t - t'|.$$

由 Kolmogorov 连续性判别准则, X 有连续修正。以后只考虑该过程的连续修正, 并常把时间指标集限制为 $\mathbb{R}_+$ 。

另一个重要例子是布朗桥。它是定义在 $T = [0, 1]$ 上的中心高斯过程; 当 $s \leq t$ 时, 其协方差为

$$\Gamma(s, t) = s(1 - t).$$

验证它确为协方差函数的最简单方法, 是取一个布朗运动 B 并令

$$X_t = B_t - tB_1.$$

此时当 $s \leq t$ 时,

$$\mathbb{E}[X_s X_t] = s(1 - t),$$

同时也立即得到布朗桥的连续版本。注意 $X_1 = 0$ 几乎必然成立, 所以路径几乎必然在时刻 0 从 0 出发, 并在时刻 1 回到 0; “布朗桥” 之名由此而来。它也称为 系紧布朗运动或钉住布朗运动。

更一般地, 可以考虑从 0 到 y 的布朗桥 X^y , 其实现为

$$X_t^y = B_t - t(B_1 - y) = X_t^0 + ty, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

其中 $X^0 = X$ 是从 0 到 0 的布朗桥。练习 3.16 将说明, 怎样把 X^y 看成以 “时刻 1 位于 y ” 为条件的布朗运动。以后若不加说明, “布朗桥” 总指从 0 到 0 的布朗桥。这个概念当然也可以推广到高维空间以及 $[0, 1]$ 之外的区间。

最后, 存在协方差函数为

$$\Gamma(s, t) = \mathbf{1}_{\{s=t\}}, \quad s, t \in \mathbb{R}_+,$$

的中心高斯过程。对这种过程, 只要 $s \neq t$, 随机变量 X_s, X_t 就相互独立; 这可以看成一种 “极端无序”。值得注意的是, 这个过程没有良好的版本。若它有一个可测版本, 即映射

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

可测 (见第 IV 章定义 1.14), 则对每个 t ,

$$Y_t = \int_0^t X_s \, ds$$

都是高斯随机变量。用 Fubini 定理论证容易得到 $\mathbb{E}[Y_t^2] = 0$, 因而 $Y_t = 0$ 几乎必然。于是

$$X_t(\omega) = 0 \quad dt \, P(d\omega)\text{-a.e.},$$

这与

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2 \, ds\right] = t$$

矛盾。

练习 3.8。

1°) 设 B 是一维布朗运动, $\lambda > 0$ 。证明过程

$$X_t = e^{-\lambda t} B_{\exp(2\lambda t)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

是平稳 Ornstein-Uhlenbeck 过程, 并求出它的参数和尺度。由此说明: 平稳 OU 过程有一个连续版本, 而且该版本的路径处处不可微。

2°) 设 X 是参数为 $\frac{1}{2}$ 、尺度为 1 的连续 OU 过程, 并令

$$\beta_t = X_t + \frac{1}{2} \int_0^t X_u \, du, \quad t \geq 0,$$

以及

$$\beta_t = X_t - \frac{1}{2} \int_t^0 X_u \, du, \quad t < 0.$$

证明 β 是具有连续路径的高斯过程。在哪一种意义下, β 是布朗运动?

提示。 参见练习 3.14。

本题与第 IX 章 Langevin 方程的解有关。

练习 3.9 (分数布朗运动)。 设 d 是正整数, p 是满足

$$\frac{d}{2} - 1 < p < \frac{d}{2}$$

的实数, 并令 $\alpha = d - 2p$ 。

1°) 对 $x, y \in \mathbb{R}^d$, 令

$$f_y(x) = |x - y|^{-p} - |x|^{-p}.$$

证明 $f_y \in L^2(\mathbb{R}^d, m)$, 其中 m 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度。

2°) 设 X 是强度为 m 的高斯测度, 并令 $Z_y = X(f_y)$ 。证明存在只依赖于 d, p 的常数 c , 使

$$\mathbb{E}[Z_y Z_{y'}] = c(|y|^\alpha + |y'|^\alpha - |y - y'|^\alpha).$$

过程 Z 称为指标为 α 的分数布朗运动。当 $\alpha = 1$ 时, Z 是具有 d 维参数的 Lévy 布朗运动。

3°) 设 X_1, X_2 是两个相互独立、强度均为 m 的高斯测度, 并令

$$X = X_1 + iX_2.$$

对 $y \in \mathbb{R}^d$, 定义

$$\widehat{f}_y(x) = \frac{1 - \exp(i y \cdot x)}{|x|^{d-p}},$$

其中 “ $\cdot$ ” 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的内积。证明

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_y(x) X(dx), \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

是指标为 α 的分数布朗运动的一个常数倍。

提示。 函数 f_y 的 Fourier-Plancherel 变换为 $\gamma \widehat{f}_y$, 其中常数 γ 与 y 无关。

练习 3.10 (布朗桥)。 设 X 是布朗桥。

1°) 证明过程

$$(X_{1-t})_{0 \leq t \leq 1}$$

仍是布朗桥, 并且

$$B_t = (t+1)X_{t/(t+1)}, \quad t \geq 0,$$

是布朗运动。反过来, 若 B 是布朗运动, 则

$$(1-t)B_{t/(1-t)} \quad \text{和} \quad tB_{t-1-1}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

都是布朗桥 (在端点处取连续延拓)。

2°) 以 $\bar{t}$ 表示 t 对 1 取模后的值。固定 $s \in [0, 1]$, 证明过程

$$Y_t = X_{\bar{t+s}} - X_s, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

是布朗桥。

3°) 继续练习 1.21, 证明

$$\sup_{t>0} \frac{|B_t| - 1}{t} \stackrel{(d)}{=} \sup_{t \geq 0} (|B_t| - t) \stackrel{(d)}{=} \sup_{0 \leq t \leq 1} X_t^2.$$

^a

^a校订注: 原书第一个上确界的指标写作 $t \geq 0$, 但被取上确界的表达式含有 $1/t$, 在 $t = 0$ 处无定义; 这里改为 $t > 0$ 。

练习 3.11 (布朗单)。

1°) 证明定义在 $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ 上的函数

$$\Gamma((u, s), (v, t)) = (u \wedge v)(s \wedge t)$$

是协方差函数, 并证明相应的高斯过程有连续版本。该过程称为布朗单。

2°) 证明: 正如第 1 节中从 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 得到布朗运动一样, 也可以从 $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ 得到布朗单。

设

$$\left\{ \mathbb{B}(\Gamma) : \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2), \iint_{\Gamma} ds du < +\infty \right\}$$

是与布朗单 $\mathbb{B}$ 关联的高斯测度。证明

$$(\mathbb{B}(R_t))_{0 \leq t \leq 1}$$

是布朗桥, 其中

$$R_t = \{(s, u) : 0 \leq s < t < u \leq 1\}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

3°) 若 $\mathbb{B}_{(s,t)}$ 是布朗单, 证明下列过程也都是布朗单:

a)

$$\frac{1}{ab} \mathbb{B}_{(a^2s, b^2t)},$$

其中 $a, b > 0$;

b)

$$s\mathbb{B}_{(s^{-1}, t)} \quad \text{和} \quad st\mathbb{B}_{(s^{-1}, t^{-1})};$$

c)

$$\mathbb{B}_{(s_0+s, t_0+t)} - \mathbb{B}_{(s_0+s, t_0)} - \mathbb{B}_{(s_0, t_0+t)} + \mathbb{B}_{(s_0, t_0)},$$

其中 $s_0, t_0 > 0$ 固定。4°) 若 $\mathbb{B}_{(s, t)}$ 是布朗单, 则固定 s 后, $t \mapsto \mathbb{B}_{(s, t)}$ 是一维布朗运动的常数倍。证明过程

$$t \mapsto \mathbb{B}_{(e^t, e^{-t})}$$

是 Ornstein–Uhlenbeck 过程。

练习 3.12 (再生核 Hilbert 空间)。 设 Γ 是 $T \times T$ 上的协方差函数, $(X_t)_{t \in T}$ 是以 Γ 为协方差函数的中心高斯过程。

1°) 证明: 存在唯一的、由 T 上函数组成的 Hilbert 空间 H , 满足i) H 是由

$$\{\Gamma(t, \cdot) : t \in T\}$$

张成的子空间之闭包;

ii) 对任意 $f \in H$,

$$\langle f, \Gamma(t, \cdot) \rangle_H = f(t).$$

2°) 令 $\mathcal{H}_X$ 为随机变量 $X_t, t \in T$ 生成的高斯空间。证明 H 与 $\mathcal{H}_X$ 等距同构; 该同构由

$$Z \in \mathcal{H}_X \mapsto (\mathbb{E}[ZX_t])_{t \in T}$$

给出。

3°) 对 $[0, 1]$ 上布朗运动的协方差函数, 证明这里的 H 正是本章练习 1.12 中的空间 H 。

练习 3.13。

1°) 设 ϕ 是 $[0, 1]$ 上局部有界的可测函数, 并且对某个 $\delta > 0$,

$$\limsup_{t \downarrow 0} t^{3/2-\delta} |\phi(t)| < +\infty.$$

若 B 是布朗运动, 证明积分

$$X_t^\phi = \int_0^t \phi(s) B_s \, ds$$

在 $[0, 1]$ 上定义了连续高斯过程。(第 III 章练习 2.31 将给出更精细的形式。) 刻画所有使 $B - X^\phi$ 仍为布朗运动的函数 ϕ 。

2°) 对布朗桥研究同样的问题。

练习 3.14。 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 在

$$\mathbb{W} = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$$

上定义平移

$$\tau_x(\omega)(t) = x + \omega(t),$$

并把 Wiener 测度 W 在 τ_x 下的像测度记为 W^x ; 特别地, $W^0 = W$ 。1°) 证明: 在 W^x 下, 坐标过程 X 是从 x 出发的标准 d 维布朗运动的一个版本。注意 W^x

集中在

$$\{\omega : \omega(0) = x\}$$

上, 并由此推出: 若 $x \neq y$, 则 W^x 与 W^y 相互奇异。另一方面, 证明: 对任意 $\varepsilon > 0$, W^x 与 W^y 在

$$\sigma(X_s : s \geq \varepsilon)$$

上等价。

2°) 对任意 $\Gamma \in \sigma(X_s : s \geq 0)$, 证明映射

$$x \mapsto W^x(\Gamma)$$

是 Borel 函数。若 μ 是 $\mathbb{R}^d$ 的 Borel 集上的概率测度, 则在 $\mathbb{W}$ 上定义概率测度

$$W^\mu(\Gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(dx) W^x(\Gamma).$$

在什么条件下, 坐标过程 X 在 W^μ 下是高斯过程? 在这种情况下求其协方差函数。

练习 3.15. 先回顾 Fourier 级数理论的一个结果。设 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 且

$$f(0) = f(1) = 0.$$

对 $k \geq 1$, 令

$$a_k = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \cos(2\pi kt) dt, \quad b_k = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \sin(2\pi kt) dt.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 则

$$f(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k (\cos(2\pi kt) - 1) + b_k \sin(2\pi kt)),$$

其中右端级数在 $L^2([0, 1])$ 中收敛。把这一结论应用于布朗桥

$$B_t - tB_1$$

的路径, 证明: 存在一族相互独立的标准高斯随机变量

$$(\xi_k)_{k=0}^{\infty}, \quad (\eta_k)_{k=1}^{\infty},$$

使得几乎必然有

$$B_t = t\xi_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\xi_k}{2\pi k} (\cos(2\pi kt) - 1) + \frac{\eta_k}{2\pi k} \sin(2\pi kt) \right).$$

练习 3.16 (作为条件布朗运动的布朗桥). 考虑

$$\Omega = C([0, 1], \mathbb{R}),$$

并给它配备 Borel σ -代数和 Wiener 测度 W 。由于 Ω 是 Polish 空间，而

$$\mathcal{B}_1 = \sigma(X_1)$$

可数生成，所以关于 $\mathcal{B}_1$ 的条件期望存在正则条件分布 $P(y, \cdot)$ 。

1°) 证明可以把 $P(y, \cdot)$ 取为从 0 到 y 的布朗桥之分布 P^y 。换言之，对 Ω 的任意 Borel 子集 Γ ，

$$W(\Gamma) = \int_{\mathbb{R}} P^y(\Gamma) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy.$$

2°) 映射 $y \mapsto P^y$ 关于弱拓扑连续（见第 0 章和第 XIII 章）。也就是说，对 Ω 上任意有界连续函数 f ，映射

$$y \mapsto \int_{\Omega} f(\omega) P^y(d\omega)$$

连续。

练习 3.17。

1°) 设 X 是 $[0, 1]$ 上协方差函数为 Γ 的高斯过程。假设对每个 t ，过程 X 在 t 处可微，即存在随机变量 X'_t ，使

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{X_{t+h} - X_t}{h} = X'_t \quad \text{几乎必然.}$$

证明混合偏导数

$$\frac{\partial^2 \Gamma(s, t)}{\partial s \partial t}$$

存在，并且等于过程 X' 的协方差函数。

2°) 设 B 是 $[0, 1]$ 上的标准一维布朗运动， $T(\omega)$ 是连续函数

$$t \mapsto B_t(\omega)$$

在 Schwartz 广义函数意义下的导数。若

$$f, g \in C_c^\infty([0, 1]),$$

证明 $\langle T(\omega), f \rangle$ 与 $\langle T(\omega), g \rangle$ 是中心高斯随机变量，其协方差为

$$\langle U, f \otimes g \rangle,$$

其中 U 是 $s \wedge t$ 在 Schwartz 广义函数意义下的二阶混合导数；也就是说， U 是单位正方形对角线上 Lebesgue 测度的适当常数倍。

4 滤过与停时

本节引入一些基本记号，它们将在后文中反复使用。

定义 4.1. 可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个滤过, 是 $\mathcal{F}$ 的一族单调递增子 σ -代数 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 。换言之, 对每个 t , $\mathcal{F}_t$ 都是 $\mathcal{F}$ 的子 σ -代数, 并且当 $s \leq t$ 时,

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

配备了滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 的可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 称为带滤过空间。

定义 4.2. 若定义在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的过程 X 对每个 t 都满足 X_t 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的, 则称 X 关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 是适应的。

任一过程 X 都适应于它的自然滤过

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s : s \leq t),$$

并且 $(\mathcal{F}_t^0)$ 是使 X 成为适应过程的最小滤过。因此, 称 X 适应于 $(\mathcal{F}_t)$, 等价于对每个 t 都有 $\mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_t$ 。

正是滤过的引入, 使参数 t 真正具有“时间”的含义。直观地说, σ -代数 $\mathcal{F}_t$ 是所有可能在时刻 t 以前或恰在 t 时发生的事件的集合; 换言之, 它描述截至时刻 t 的全部可能“过去”。对于分布不随时间平移而改变的平稳过程, 是关于 $\mathcal{F}_t$ 的可测性把事件定位在时间轴上。

滤过是随机过程理论的基本结构。鞅 (见下一章)、Markov 过程等本书主要研究对象的定义都离不开滤过。下面进一步研究这一概念, 并引入若干记号和定义。

给定滤过 $(\mathcal{F}_t)$, 可以定义另外两个滤过:

$$\mathcal{F}_{t-} = \bigvee_{s < t} \mathcal{F}_s, \quad \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s.$$

这里

$$\bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_{t-} = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_{t+},$$

这个共同的 σ -代数记为 $\mathcal{F}_\infty$ 。 $\mathcal{F}_{0-}$ 原本没有定义; 约定 $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0$ 。

总有

$$\mathcal{F}_{t-} \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+},$$

而且两个包含关系都可能是严格的。例如, 令 $\Omega = D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, 以坐标过程 X 的自然滤过 $(\mathcal{F}_t^0)$ 为滤过, 则事件 $\{X_t = a\}$ 属于 $\mathcal{F}_t^0$, 却不属于 $\mathcal{F}_{t-}^0$ 。稍后还会看到一个属于 $\mathcal{F}_{t+}^0$ 但不属于 $\mathcal{F}_t^0$ 的事件。

后文还会遇到两组滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 与 $(\mathcal{G}_t)$, 满足对所有 t 都有 $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ 。可以把它理解为两个观察者在时刻 t 掌握的信息不同: $\mathcal{G}$ -观察者比 $\mathcal{F}$ -观察者知道得更多。例如, 上述 $\mathcal{F}_{t+}^0$ -观察者能够预见紧接着的未来。

这也说明: 在同一问题中, 往往有许多滤过可供选择, 人们可以选取最方便的一个。因此, 引入滤过并不会限制所能研究的问题。极端地说, 可以选取常值滤过 $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ (对所有 t), 这实际上等于不作信息限制。

定义 4.3. 若对每个 t 都有

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+},$$

则称滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 是右连续的。

对任意滤过 $(\mathcal{F}_t)$, 滤过 $(\mathcal{F}_{t+})$ 都是右连续的。现在给出一个重要定义。

定义 4.4. 称取值于 $[0, \infty]$ 的映射 $T: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ 是关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 的停时, 如果对每个 t ,

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

特别地, T 是一个可以取值 $+\infty$ 的非负随机变量。若 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续, 则上述条件等价于对每个 t 都有 $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ 。在这种情形下, 定义还等价于: T 是停时, 当且仅当过程

$$X_t = \mathbf{1}_{[0, T]}(t)$$

是适应的。此时 X 是左连续适应过程, 因而是可料过程的一种特殊情形; 可料过程将在第 IV 章第 5 节以及练习 4.20 中引入。

所有满足

$$A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{对每个 } t$$

的集合 $A \in \mathcal{F}_\infty$ 构成一个 σ -代数, 记为 $\mathcal{F}_T$ 。其中的事件应理解为可能在时刻 T 以前发生的事件。常数时刻 $T(\omega) = s$ 是停时, 此时 $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_s$ 。因此, 停时可以看作常数时刻的推广, 而且可以为它定义一个与各常数时刻的“过去”相容的“过去”。

上述事实的证明留给读者。我们也建议读者完成练习 4.16–4.19, 以熟悉停时。

可以把停时理解为某个物理事件第一次发生的时刻。下面给出两个基本例子。

命题 4.5. 设 E 是度量空间, A 是 E 的闭子集, X 是

$$\mathbb{W} = C(\mathbb{R}_+, E)$$

上的坐标过程。令

$$D_A(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\},$$

并约定 $\inf \emptyset = +\infty$ 。则 D_A 是关于自然滤过 $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s : s \leq t)$ 的停时, 称为 A 的进入时刻。

证明. 设 d 是 E 上的一个度量, 则

$$\{D_A \leq t\} = \left\{ \omega : \inf_{s \in \mathbb{Q}, s \leq t} d(X_s(\omega), A) = 0 \right\},$$

右端显然属于 $\mathcal{F}_t^0$ 。

这是相对于 $(\mathcal{F}_t^0)$ 而言为数不多的有意义的停时之一。如果去掉 X 的路径连续性或 A 的闭性, 就必须使用更大的滤过。例如有如下结果。

命题 4.6. 设 A 是 E 的开子集, Ω 是所有从 $\mathbb{R}_+$ 到 E 的右连续路径组成的空间。令

$$T_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}, \quad (\inf \emptyset = +\infty).$$

则 T_A 是关于 $(\mathcal{F}_{t+}^0)$ 的停时, 称为 A 的击中时刻。

证明. 如前所述, T_A 是 $(\mathcal{F}_{t+}^0)$ -停时, 当且仅当对每个 t , $\{T_A < t\} \in \mathcal{F}_t^0$ 。若 A 是开集且 $X_s(\omega) \in A$, 则由路径的右连续性, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对所有 $u \in [s, s + \varepsilon]$ 都有 $X_u(\omega) \in A$ 。因此

$$\{T_A < t\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}, s < t} \{X_s \in A\} \in \mathcal{F}_t^0.$$

直接验证或利用练习 4.21 可以看出, T_A 并不是 $(\mathcal{F}_t^0)$ -停时; 因此在这一框架中, $\mathcal{F}_{t+}^0$ 严格大于 $\mathcal{F}_t^0$ 。这是一个普遍现象: 大多数有意义的停时是 $(\mathcal{F}_{t+}^0)$ -停时, 所以我们往往必须使用 $(\mathcal{F}_{t+}^0)$, 而不是 $(\mathcal{F}_t^0)$ 。

现在转向一般框架下停时的用法。设 $(\mathcal{F}_t)$ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的滤过, T 是停时。对过程 X , 在集合 $\{\omega : T(\omega) < \infty\}$ 上定义新映射 X_T :

$$X_T(\omega) = X_t(\omega) \quad \text{当 } T(\omega) = t.$$

这是过程 X 在时刻 T 的位置, 但 X_T 是否是 $\{T < \infty\}$ 上的随机变量并不显然。此外, 若 X 是适应过程, 我们还希望 X_T 关于 $\mathcal{F}_T$ 可测, 正如 X_t 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测。为此引入以下定义。其中 $\mathcal{B}([0, t])$ 表示 $[0, t]$ 的 Borel 子集构成的 σ -代数。

定义 4.7. 若对每个 t , 映射

$$(s, \omega) \mapsto X_s(\omega), \quad [0, t] \times \Omega \longrightarrow (E, \mathcal{E}),$$

关于 $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ 可测, 则称过程 X 关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 是逐步可测的, 或简称为逐步的。若 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 的子集 Γ 的示性过程 $X = \mathbf{1}_\Gamma$ 是逐步的, 则称 Γ 是逐步集。

所有逐步集构成 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上的一个 σ -代数, 称为逐步 σ -代数, 记为 Prog 。过程 X 是逐步的, 当且仅当映射 $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ 关于 Prog 可测。

显然, 逐步可测过程一定是适应过程。反过来有:

命题 4.8. 路径右连续或左连续的适应过程是逐步可测的。

证明. 留给读者作为练习。

下面给出引入逐步可测性这一概念的主要理由。

命题 4.9. 设 X 是逐步可测过程, T 是关于同一滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 的停时。则 X_T 在集合 $\{T < \infty\}$ 上关于 $\mathcal{F}_T$ 可测。

证明. 集合 $\{T < \infty\}$ 本身属于 $\mathcal{F}_T$ 。断言 X_T 在该集合上关于 $\mathcal{F}_T$ 可测, 等价于对每个 t , 随机变量 $X_T \mathbf{1}_{\{T \leq t\}}$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测。由于 T 是停时, 映射

$$T : (\{T \leq t\}, \{T \leq t\} \cap \mathcal{F}_t) \longrightarrow ([0, t], \mathcal{B}([0, t]))$$

可测。因此

$$\omega \mapsto (T(\omega), \omega)$$

从 $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ 到 $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ 可测, 而 X_T 正是这个映射与按假设关于 $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ 可测的 X 的复合。

给定停时 T 与过程 X , 定义相应的停住过程 X^T :

$$X_t^T(\omega) = X_{t \wedge T}(\omega).$$

由练习 4.16, $(\mathcal{F}_{t \wedge T})$ 是一个滤过, 并且有:

命题 4.10. 若 X 是逐步可测的, 则 X^T 关于滤过 $(\mathcal{F}_{t \wedge T})$ 也是逐步可测的。

证明。 留给读者作为练习。

下面这个事实在技术上十分重要。

命题 4.11。 每个停时都是一列只取有限多个值的停时的递减极限。

证明。 给定停时 T ，定义

$$T_k = +\infty \quad \text{若 } T \geq k,$$

以及

$$T_k = q2^{-k} \quad \text{若 } (q-1)2^{-k} \leq T < q2^{-k}, \quad q \leq k2^k.$$

^a 容易验证 T_k 是停时，并且 $T_k \downarrow T$ 。

^a**校订注：**原书此处写作 $q < k2^k$ ，这会漏掉 $T \in [k - 2^{-k}, k)$ 的情形；为使上述分段定义覆盖所有 $T < k$ ，应为 $q \leq k2^k$ 。

本节到目前为止的讨论没有涉及任何概率测度。现在必须考察：当 $(\Omega, \mathcal{F})$ 配备一个概率测度时，上述概念会发生什么变化。更一般地，为了研究 Markov 过程，还需要允许 $(\Omega, \mathcal{F})$ 配备一族概率测度。

定义 4.12。 设 $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一族概率测度。若一个性质对每个 $\theta \in \Theta$ 都 P_θ -几乎处处成立，则称该性质 几乎必然成立。

例如，在这个约定下，称两个过程不可分辨，是指它们对每个 P_θ 都不可分辨。若 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上带有滤过 $(\mathcal{F}_t)$ ，我们希望与适应过程不可分辨的过程本身也是适应的；特别地，希望适应过程列的极限（几乎处处极限、依概率极限或均值意义下的极限）仍然是适应的。换一种说法，与适应过程不可分辨的过程，应能通过在一个零测集上修改而成为适应过程。为此，需要所有零测集都属于每个 $\mathcal{F}_t$ ，从而得到下面的定义。

定义 4.13。 对每个 θ ，记 $\mathcal{F}_\infty^\theta$ 为 $\mathcal{F}_\infty$ 关于 P_θ 的完备化。若 $\mathcal{F}_0$ ，从而每个 $\mathcal{F}_t$ ，都包含 $\bigcap_\theta \mathcal{F}_\infty^\theta$ 的所有零测集，则称滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 是完备的。

由定义 4.12，这里的“零测”是指对每个 P_θ 都是零测的。换言之，集合 Γ 是零测集，是指对每个 θ ，都存在 $A_\theta \in \mathcal{F}_\infty^\theta$ ，使得

$$\Gamma \subset A_\theta, \quad P_\theta(A_\theta) = 0.$$

若 $(\mathcal{F}_t)$ 不完备，可以按如下方式得到一个更大而完备的滤过。对每个 θ ，令

$$\mathcal{F}_t^\theta = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N}^{-\theta}),$$

其中 $\mathcal{N}^{-\theta}$ 是所有关于 P_θ 零测且属于 $\mathcal{F}_\infty^\theta$ 的集合所成的类；再令

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \bigcap_\theta \mathcal{F}_t^\theta.$$

滤过 $(\tilde{\mathcal{F}}_{t+})$ 完备且右连续，称为 $(\mathcal{F}_t)$ 的通常增广。

当然，若使用 $(\mathcal{F}_t)$ 的通常增广而不是原滤过，就必须核查：一个过程相对于 $(\mathcal{F}_t)$ 所具有的某种性质，在通常增广下是否仍然成立。这并非总是显然的。例如，完备化并不是无关紧要的操作，它可能显著改变滤过的结构，后文会给出相应证据。事实上，状态空间相同的所有典范过程都具有相同的未完备自然滤过，但我们将看到，它们的完备自然滤过可能具有大相径庭的性质。

以一个一般性结果结束本节。它能用来证明许多随机变量实际上是停时。为此需要先回顾一个较深的测度论结果。

定理 4.14. 设 $(E, \mathcal{E})$ 是配备其 Borel σ -代数的具有可数基的局部紧空间 (LCCB 空间), $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是完备概率空间。则对任意 $A \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, A 在 Ω 上的投影 $\pi(A)$ 都属于 $\mathcal{F}$ 。

若 $\Gamma \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$, 定义 Γ 的初现时刻 D_Γ 为

$$D_\Gamma(\omega) = \inf\{t \geq 0 : (t, \omega) \in \Gamma\},$$

并约定 $\inf \emptyset = +\infty$ 。

定理 4.15. 若滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续且完备, 则任一逐步集的初现时刻都是停时。

证明。 只需讨论仅有一个概率测度的情形。设 Γ 是逐步集。对

$$\Gamma_t = \Gamma \cap ([0, t[\times \Omega) \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$$

应用定理 4.14, 得到

$$\{D_\Gamma < t\} = \pi(\Gamma_t) \in \mathcal{F}_t.$$

由滤过的右连续性, 这等价于 D_Γ 是停时。

练习 4.16. 设 $(\mathcal{F}_t)$ 是滤过, S, T 是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。

- 1°) 证明 $S \wedge T$ 与 $S \vee T$ 都是停时。
- 2°) 证明集合 $\{S = T\}$ 、 $\{S \leq T\}$ 、 $\{S < T\}$ 都属于 $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ 。
- 3°) 若 $S \leq T$, 证明 $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ 。

练习 4.17.

- 1°) 若 (T_n) 是一列 $(\mathcal{F}_t)$ -停时, 则随机变量 $\sup_n T_n$ 是停时。
- 2°) 若 $(\mathcal{F}_t)$ 还右连续, 则

$$\inf_n T_n, \quad \liminf_n T_n, \quad \limsup_n T_n$$

都是停时。若 $T_n \downarrow T$, 则

$$\mathcal{F}_T = \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}.$$

练习 4.18. 设 $(\mathcal{F}_t)$ 是滤过。若 T 是停时, 记 $\mathcal{F}_{T-}$ 为由 $\mathcal{F}_0$ 中的集合以及形如

$$\{T > t\} \cap \Gamma, \quad \Gamma \in \mathcal{F}_t,$$

的集合生成的 σ -代数。

- 1°) 证明 $\mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{F}_T$ 。Poisson 过程的第一次跳跃时刻 (第 II 章练习 1.14) 给出了严格包含的例子。
- 2°) 若 $S \leq T$, 证明 $\mathcal{F}_{S-} \subset \mathcal{F}_{T-}$ 。若进一步在 $\{S < \infty\} \cap \{T > 0\}$ 上有 $S < T$, 证明 $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{T-}$ 。

3°) 设 (T_n) 是一列递增到停时 T 的停时, 并且对每个 n 都有 $T_n < T$. 证明

$$\bigvee_n \mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_{T-}.$$

4°) 若 (T_n) 是任意一列递增到 T 的停时, 证明

$$\bigvee_n \mathcal{F}_{T_n-} = \mathcal{F}_{T-}.$$

练习 4.19. 设 T 是停时, $\Gamma \in \mathcal{F}$. 定义随机变量 T_Γ : 在 Γ 上令 $T_\Gamma = T$, 在 Γ^c 上令 $T_\Gamma = +\infty$. 证明: T_Γ 是停时, 当且仅当 $\Gamma \in \mathcal{F}_T$.

练习 4.20. 设 $(\mathcal{F}_t)$ 是右连续滤过。

1°) 证明下列两类过程在 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上生成的 σ -代数相同:

- i) 适应的连续过程;
- ii) 在 $]0, \infty[$ 上左连续的适应过程。

这个结论将在第 IV 章第 5 节证明。该 σ -代数记为 $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$, 或简记为 $\mathcal{P}$, 称为关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的可料 σ -代数。若映射 $(\omega, t) \mapsto Z_t(\omega)$ 关于 $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ 可测, 则称过程 Z 是可料的。证明可料过程是逐步可测的。

2°) 若 S, T 是两个停时且 $S \leq T$, 令

$$]S, T] = \{(\omega, t) : S(\omega) < t \leq T(\omega)\}.$$

证明 $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ 由所有这类集合 $]S, T]$ 生成。

3°) 若 S 是非负随机变量, 记 $\mathcal{F}_{S-}$ 为所有随机变量 Z_S 生成的 σ -代数, 其中 Z 遍历所有可料过程。证明: 若 S 是停时, 这个 σ -代数恰等于练习 4.18 中的 $\mathcal{F}_{S-}$ 。

提示: 对 $A \in \mathcal{F}_{S-}$, 考虑过程

$$Z_t(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega) \mathbf{1}_{]0, S(\omega)]}(t).$$

证明 S 关于 $\mathcal{F}_{S-}$ 可测。

4°) 一般情形下, 由 $S \leq T$ 并不能推出 $\mathcal{F}_{S-} \subset \mathcal{F}_{T-}$. 给出一个满足 $S \leq 1$ 且 $\mathcal{F}_{S-} = \mathcal{F}_\infty$ 的随机变量 S 的例子。

练习 4.21 (Galmarino 判别法). 令

$$\Omega = D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \quad \text{或} \quad C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d),$$

并采用本节开头的记号。

1°) 证明: T 是 $(\mathcal{F}_t^0)$ -停时, 当且仅当对每个 t , 由

$$T(\omega) \leq t, \quad X_s(\omega) = X_s(\omega') \quad (\text{所有 } s \leq t)$$

可推出 $T(\omega) = T(\omega')$. 证明命题 4.6 中的时刻 T_A 不是 $(\mathcal{F}_t^0)$ -停时。

2°) 若 T 是 $(\mathcal{F}_t^0)$ -停时, 证明: $A \in \mathcal{F}_T^0$, 当且仅当由

$$\omega \in A, \quad T(\omega) = T(\omega'), \quad X_s(\omega) = X_s(\omega') \quad (\text{所有 } s \leq T(\omega))$$

可推出 $\omega' \in A$ 。

3°) 令 $\omega_T \in \Omega$ 定义为

$$\omega_T(s) = \omega(s \wedge T(\omega)).$$

证明: f 关于 $\mathcal{F}_T^0$ 可测, 当且仅当对每个 ω 都有 $f(\omega) = f(\omega_T)$ 。

4°) 利用 $\mathcal{F}_\infty^0$ 是所有由可数个坐标映射子族生成的 σ -代数之并这一事实, 证明

$$\mathcal{F}_T^0 = \sigma(X_s^T : s \geq 0).$$

5°) 由第 4 问推出 $\mathcal{F}_T^0$ 是可数生成的。

练习 4.22. 设 ϕ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的非负 Borel 函数。若对任意滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 及其任意停时 T , $\phi(T)$ 都是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时, 则称 ϕ 具有性质 (P)。证明: ϕ 具有性质 (P), 当且仅当存在 $t_0 \leq +\infty$, 使得

$$\phi(t) \geq t \quad (t \leq t_0), \quad \phi(t) = t_0 \quad (t > t_0).$$

注释与评述

第 1 节. 布朗运动有许多严格构造, 其中一些可见于后续各节以及 Knight [5] 一书的第 1 章。这些构造通常以 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 的一组标准正交基为基础, 或者以依分布收敛为基础; 后一类的典型例子是第 XIII 章介绍的 Donsker 定理。从历史上看, 第一个构造由 Wiener [1] 给出, 这也是布朗运动常被称为 Wiener 过程的原因。

Föllmer [3] 和 Le Gall [8] 对布朗运动作了非常出色的教学性介绍。本章采用高斯测度的途径, 可以把上述不同构造统一起来; 我们从 Neveu [2] 的课程中采用了这一方法, 不过它至少可以追溯到 Kakutani。版本与修正早已成为概率论中的标准概念 (见 Dellacherie–Meyer [1])。

练习 1.17 源自 Lévy, 练习 1.18 源自 Durrett [1], 练习 1.19 源自 Hardin [1]。二维布朗运动的极性函数最早见于 Graversen [1]; 第 V 章将对此作更深入的讨论。练习 1.21 和 1.22 源自 Barlow 等 [1]、Song–Yor [1] 以及 Yor [14]。

第 2 节. 本书对 Kolmogorov 判别准则的证明取自 Meyer [8] (另见 Neveu 的课程 [2])。积分型的改进可见 Ibragimov [1], 也可参见 Weber [1]。Garsia 等 [1] 给出了一个非常有用的 Sobolev 型加强形式, 见 Stroock–Varadhan [1] (另见 Dellacherie–Maisonnette–Meyer [1])。它已经被用于流形上的问题; 例如, Barlow–Yor [2] 用它证明第 IV 章的 BDG 不等式。另见 Barlow [3,5] 和 Donati–Martin [1]。

本节其余内容源自 Lévy。定理 2.7 的证明取自 Itô–McKean [1], 该书还包含进一步的内容, 即 Chung–Erdős–Sirao 判别法。

练习 2.8 源自 Lévy, 练习 2.9 源自 Dvoretzky 等 [1]。

第 3 节. 本节内容如今已是概率论研究者的常识 (例如见 Dellacherie–Meyer [1] 第 I 卷)。关于高斯过程, 可参见 Neveu [1]。Wiener 测度存在性的一个直接证明见 Itô [4]。

练习 3.9 讨论分数布朗运动。关于这一族高斯过程的许多参考资料和若干原创结果, 可见 Kahane [1] 第 18 章。该练习第 2 问的来源见 Albeverio 等 [1, pp. 213–216]、Stoll [1] 以及 Yor [20]。分数布朗运动最初由 Mandelbrot 和 Van Ness [1] 引入; 它们包含 Lévy 的多参数布朗运动, 并且自然地出现在相交局部时极限定理中 (Weinryb–Yor [1], Biane [3])。

练习 3.11 源自 Aronszajn [1] (见 Neveu [1])。

第 4 节. 自 Doob 的奠基性工作以来, 滤过以及停时等与之相关的概念一直是概率论的基本组成部分。关于这一主题的历史, 以及本书改编为练习的许多性质, 这里仍推荐 Dellacherie–Meyer [1]。

第 II 章 鞅

鞅本身就是一个非常重要的研究主题，同时又与分析学有着密切联系。鞅和布朗运动之间的亲缘关系，使它既成为本书的主要研究对象之一，也成为最重要的工具之一。本章介绍若干贯穿全书的鞅论基本性质。

1 定义、极大不等式及其应用

以下始终给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 、 $\mathbb{N}$ 或 $\mathbb{R}_+$ 中的一个区间 T ，以及 $\mathcal{F}$ 的一族递增子 σ -代数 $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ 。如同第 I 章第 4 节讨论 $\mathbb{R}_+$ 指标集时一样，称它为滤过；该节的结果同样适用于这里的情形。

定义 1.1。 设实值过程 $(X_t)_{t \in T}$ 适应于 $(\mathcal{F}_t)$ 。若

- i) 对每个 $t \in T$, $E[X_t^+] < \infty$;
- ii) 对任意满足 $s < t$ 的 $s, t \in T$, 几乎必然有

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s,$$

则称 X 是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的下鞅。

若 $-X$ 是下鞅，则称 X 是上鞅；若 X 既是下鞅又是上鞅，则称 X 是鞅。

换言之，鞅是一族适应的可积随机变量，并且对任意 $s < t$ 以及 $A \in \mathcal{F}_s$ ，都有

$$\int_A X_s dP = \int_A X_t dP.$$

若下鞅（或上鞅）的每个随机变量 X_t 都可积，则称它为可积下鞅（或可积上鞅）。

显然，滤过与概率测度 P 在上述定义中都至关重要。需要强调时，我们会说 $(\mathcal{F}_t)$ -下鞅、 $(\mathcal{F}_t, P)$ -上鞅等。一个 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅 X 关于其自然滤过 $\sigma(X_s : s \leq t)$ 仍是鞅。反过来，若 $\mathcal{G}_t \supset \mathcal{F}_t$ ，则 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅一般没有理由也是 $(\mathcal{G}_t)$ -鞅。显然，关于给定滤过的所有鞅构成一个向量空间。

命题 1.2。 设 B 是标准一维布朗运动。则下列过程关于自然滤过 $\sigma(B_s : s \leq t)$ 都是鞅：

$$(i) B_t, \quad (ii) B_t^2 - t, \quad (iii) M_t^\alpha = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

证明。 留给读者作为练习。练习 1.18 将推广本命题。

第 IV 章将大幅推广这些性质。注意，本命题中的鞅都有连续路径。第 I 章练习 1.14 的 Poisson 过程则给出了 càdlàg 路径鞅的例子。最后，给定滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 与可积随机变量 Y ，可以对每个 t 从条件期望等价类 $E[Y | \mathcal{F}_t]$ 中选取一个随机变量，从而定义鞅 Y_t 。当然，这样得到的鞅的路径未必具有任何良好性质；后文的任务之一，正是证明一个良好版本的存在性。

另一个重要事实是：若 X_t 是鞅，且对每个 t 都有 $E[|X_t|^p] < \infty$ ，则由 Jensen 不等式，对每个 $p \geq 1$ ，过程 $|X_t|^p$ 都是下鞅。

现在系统研究鞅与下鞅。显然，把 X 换成 $-X$ ，任何关于下鞅的陈述都会相应地变成关于上鞅的陈述。

命题 1.3. 设 $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ 是关于离散滤过 $(\mathcal{F}_n)$ 的鞅（或下鞅）， $(H_n)_{n=1,2,\dots}$ 是有界非负过程，并且对每个 $n \geq 1$ ， $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ 。定义

$$Y_0 = X_0, \quad Y_n = Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1}).$$

则 Y 也是鞅（或下鞅）。特别地，若 T 是停时，则停住过程 X^T 是鞅（或下鞅）。

证明。 第一项结论可直接验证。这样定义的过程 Y 是第 IV 章将要定义的随机积分的离散版本，记为 $H \cdot X$ 。

第二项结论由第一项推出，因为

$$H_n = \mathbf{1}_{\{n \leq T\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{T \leq n-1\}}$$

是 $\mathcal{F}_{n-1}$ -可测的。

利用这个命题可以得到可选停止定理的第一个版本。更完整的定理将在第 3 节证明。以下框架与命题 1.3 相同。

命题 1.4. 设 S, T 是两个有界停时，并且 $S \leq T$ ，即存在常数 M ，使对每个 ω 都有

$$S(\omega) \leq T(\omega) \leq M < \infty.$$

则几乎必然有

$$X_S \leq E[X_T | \mathcal{F}_S],$$

若 X 是鞅，则等号成立。此外，一个适应且可积的过程 X 是鞅，当且仅当对任意这样的停时对 $S \leq T$ ，都有

$$E[X_S] = E[X_T].$$

证明。 先设 X 是鞅。令

$$H_n = \mathbf{1}_{\{n \leq T\}} - \mathbf{1}_{\{n \leq S\}}.$$

当 $n > M$ 时，

$$(H \cdot X)_n - X_0 = X_T - X_S.$$

又容易看出 $E[(H \cdot X)_n] = E[X_0]$ ，所以 $E[X_S] = E[X_T]$ 。

对 $B \in \mathcal{F}_S$ ，把这个等式应用于停时

$$S^B = S\mathbf{1}_B + M\mathbf{1}_{B^c}, \quad T^B = T\mathbf{1}_B + M\mathbf{1}_{B^c}$$

(见第 I 章练习 4.19)，得到

$$E[X_T\mathbf{1}_B + X_M\mathbf{1}_{B^c}] = E[X_S\mathbf{1}_B + X_M\mathbf{1}_{B^c}].$$

因此 $X_S = E[X_T | \mathcal{F}_S]$ 几乎必然成立。特别地，对每一对有界停时都有 $E[X_S] = E[X_T]$ ，足以保证 X 是鞅。

若 X 是下鞅，则对每个实数 a ， $\max(X, a)$ 都是可积下鞅。对它重复上述论证，把等式换成不等式，再令 $a \rightarrow -\infty$ ，便得到所需结论。

由此推出下面的极大不等式。

命题 1.5。 若 (X_n) 是以有限集 $\{0, 1, \dots, N\}$ 为指标的可积下鞅，则对每个 $\lambda > 0$,

$$\lambda P\left(\sup_n X_n \geq \lambda\right) \leq E[X_N \mathbf{1}_{\{\sup_n X_n \geq \lambda\}}] \leq E[|X_N| \mathbf{1}_{\{\sup_n X_n \geq \lambda\}}].$$

证明。 若集合 $\{n : X_n \geq \lambda\}$ 非空，令 $T = \inf\{n : X_n \geq \lambda\}$ ；否则令 $T = N$ 。这是一个停时，由上一命题，

$$\begin{aligned} E[X_N] &\geq E[X_T] \\ &= E[X_T \mathbf{1}_{\{\sup_n X_n \geq \lambda\}}] + E[X_T \mathbf{1}_{\{\sup_n X_n < \lambda\}}] \\ &\geq \lambda P\left(\sup_n X_n \geq \lambda\right) + E[X_N \mathbf{1}_{\{\sup_n X_n < \lambda\}}], \end{aligned}$$

因为在 $\{\sup_n X_n \geq \lambda\}$ 上有 $X_T \geq \lambda$ 。从两端减去 $E[X_N \mathbf{1}_{\{\sup_n X_n < \lambda\}}]$ ，便得到第一个不等式；第二个不等式显然成立。

推论 1.6。 若 X 是以有限集 $\{0, 1, \dots, N\}$ 为指标的鞅或非负下鞅，则对每个 $p \geq 1$ 和 $\lambda > 0$,

$$\lambda^p P\left(\sup_n |X_n| \geq \lambda\right) \leq E[|X_N|^p].$$

并且对任意 $p > 1$,

$$E[|X_N|^p] \leq E\left[\sup_n |X_n|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_N|^p].$$

证明。 由 Jensen 不等式，若 $X_N \in L^p$ ，则 $(|X_n|^p)$ 是下鞅；第一项结论由命题 1.5 立刻得到。第二项结论中左侧不等式显然。为证明右侧不等式，令 $X^* = \sup_n |X_n|$ 。由

$$\lambda P(X^* \geq \lambda) \leq E[|X_N| \mathbf{1}_{\{X^* \geq \lambda\}}]$$

可知，对固定的 $k > 0$,

$$\begin{aligned} E[(X^* \wedge k)^p] &= \int_0^k p \lambda^{p-1} P(X^* \geq \lambda) d\lambda \\ &\leq \int_0^k p \lambda^{p-2} E[|X_N| \mathbf{1}_{\{X^* \geq \lambda\}}] d\lambda \\ &= p E\left[|X_N| \int_0^{X^* \wedge k} \lambda^{p-2} d\lambda\right] \\ &= \frac{p}{p-1} E[|X_N| (X^* \wedge k)^{p-1}]. \end{aligned}$$

Hölder 不等式给出

$$E[(X^* \wedge k)^p] \leq \frac{p}{p-1} E[(X^* \wedge k)^p]^{(p-1)/p} E[|X_N|^p]^{1/p}.$$

约去公因子后得到（再令 $k \rightarrow \infty$ 即完成证明）

$$E[(X^* \wedge k)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_N|^p].$$

这些结果可以推广到一般指标集。若 X 是以 $\mathbb{R}$ 中区间 T 为指标的鞅，取 T 的可数子集 D ，再取递增的有限子集列 (D_n) ，使 $\bigcup_n D_n = D$ ，并对每个 D_n 应用上述结果。令 $n \rightarrow \infty$ ，便得到

$$\lambda^p P\left(\sup_{t \in D} |X_t| \geq \lambda\right) \leq \sup_t E[|X_t|^p],$$

以及当 $p > 1$ 时

$$E\left[\sup_{t \in D} |X_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_t E[|X_t|^p].$$

需要强调的是，这些结论不要求滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 完备或右连续。

定理 1.7 (Doob 的 L^p 不等式)。设 X 是以 $\mathbb{R}$ 中区间 T 为指标的右连续鞅或非负下鞅，并令

$$X^* = \sup_{t \in T} |X_t|.$$

则对 $p \geq 1$ ，

$$\lambda^p P(X^* \geq \lambda) \leq \sup_t E[|X_t|^p],$$

而对 $p > 1$ ，

$$\|X^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_t \|X_t\|_p.$$

证明。 取 T 的可数稠密子集 D 。由右连续性， $X^* = \sup_{t \in D} |X_t|$ ，结论遂由前面的讨论得到。

若 t_d 是 T 的右端点，则当 $t_d \in T$ 时， $\sup_t \|X_t\|_p = \|X_{t_d}\|_p$ ；当 T 在右端开时，

$$\sup_t \|X_t\|_p = \lim_{t \uparrow t_d} \|X_t\|_p.$$

取 $p = 2$ ，第二个不等式成为

$$\|X^*\|_2 \leq 2 \sup_t \|X_t\|_2,$$

这就是 Doob 的 L^2 不等式。又因为对每个 t 显然有 $\|X_t\|_2 \leq \|X^*\|_2$ ，所以 $X^* \in L^2$ 当且仅当 $\sup_t \|X_t\|_2 < \infty$ ，也就是说，当且仅当鞅在 L^2 中有界。此时随机变量族 $\{X_t : t \in T\}$ 一致可积。上述讨论对每个 $p > 1$ 都成立，但对 $p = 1$ 不成立：鞅可能在 L^1 中有界，却不一致可积，更不必有 X^* 可积。这里只指出

$$E[X^*] \leq \frac{e}{e-1} \left(1 + \sup_t E[|X_t| \log^+ |X_t|]\right).$$

³ 见练习 1.16。

下一节将用这些不等式建立鞅的收敛定理。本节最后给出它们在布朗运动中的若干重要应用。第一个应用称为指数不等式，第 IV 章练习 3.16 将对它作大幅推广。回顾

$$S_t = \sup_{s \leq t} B_s.$$

命题 1.8。 对 $a > 0$ ，

$$P(S_t \geq at) \leq \exp(-a^2 t/2).$$

³校订注：原书此处漏印了两个绝对值；与紧接着的练习 1.16 以及标准的 $L \log L$ 极大不等式一致，右端应为 $E[|X_t| \log^+ |X_t|]$ 。

证明。 取 $\alpha > 0$, 把命题 1.2 的鞅 M^α 限制在 $[0, t]$ 上, 并应用极大不等式。因为

$$\exp\left(\alpha S_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right) \leq \sup_{s \leq t} M_s^\alpha,$$

所以

$$\begin{aligned} P(S_t \geq at) &\leq P\left(\sup_{s \leq t} M_s^\alpha \geq \exp(\alpha at - \alpha^2 t/2)\right) \\ &\leq \exp(-\alpha at + \alpha^2 t/2) E[M_t^\alpha]. \end{aligned}$$

但 $E[M_t^\alpha] = E[M_0^\alpha] = 1$, 并且

$$\inf_{\alpha > 0} (-\alpha at + \alpha^2 t/2) = -a^2 t/2,$$

故结论成立。

注。 对固定 t , 分布恒等式

$$S_t \stackrel{(d)}{=} |B_t|$$

也能推出这个不等式。该恒等式可由布朗运动的强 Markov 性质推出 (见第 III 章练习 3.27)。

定理 1.9 (迭代对数律)。 对标准一维布朗运动 B ,

$$P\left(\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log_2(1/t)}} = 1\right) = 1,$$

其中当 $x > 1$ 时,

$$\log_2 x = \log(\log x).$$

证明。 令

$$h(t) = \sqrt{2t \log_2(1/t)},$$

并取 $\theta, \delta \in]0, 1[$ 。定义

$$\alpha_n = (1 + \delta)\theta^{-n}h(\theta^n), \quad \beta_n = \frac{1}{2}h(\theta^n).$$

与上一命题的证明相同, 存在常数 K , 使得

$$P\left(\sup_{s \leq 1} (B_s - \alpha_n s/2) \geq \beta_n\right) \leq e^{-\alpha_n \beta_n} = K n^{-1-\delta}.$$

由 Borel–Cantelli 引理,

$$P\left[\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{s \leq 1} (B_s - \alpha_n s/2) < \beta_n \right\}\right] = 1.$$

把 s 限制在 $[0, \theta^{n-1}]$ 上可知: 对几乎每个 ω , 存在整数 $n_0(\omega)$, 使得当 $n > n_0(\omega)$ 且 $s \in [0, \theta^{n-1}]$ 时,

$$B_s(\omega) \leq \frac{\alpha_n s}{2} + \beta_n \leq \frac{\alpha_n \theta^{n-1}}{2} + \beta_n = \left(\frac{1+\delta}{2\theta} + \frac{1}{2}\right) h(\theta^n).$$

容易验证, 函数 h 在某个区间 $[0, a[$ 上递增, 其中 $a > 0$. 因此, 当 n 充分大且 $s \in]\theta^n, \theta^{n+1}]$ 时,

$$B_s(\omega) \leq \left(\frac{1+\delta}{2\theta} + \frac{1}{2} \right) h(s).$$

所以几乎必然有

$$\limsup_{s \downarrow 0} \frac{B_s}{h(s)} \leq \frac{1+\delta}{2\theta} + \frac{1}{2}.$$

先令 $\theta \uparrow 1$, 再令 $\delta \downarrow 0$, 得到

$$\limsup_{s \downarrow 0} \frac{B_s}{h(s)} \leq 1 \quad \text{几乎必然.}$$

现在证明反向不等式。对 $\theta \in]0, 1[$, 事件

$$\Gamma_n = \left\{ B_{\theta^n} - B_{\theta^{n+1}} \geq (1 - \sqrt{\theta})h(\theta^n) \right\}$$

彼此独立。并且 (见第 I 章定理 2.7 的证明)

$$\sqrt{2\pi} P(\Gamma_n) = \int_a^\infty e^{-u^2/2} du \geq \frac{a}{1+a^2} e^{-a^2/2},$$

其中

$$a = (1 - \sqrt{\theta}) \left(\frac{2 \log_2 \theta^{-n}}{1 - \theta} \right)^{1/2}.$$

令

$$\gamma = \frac{1 - 2\sqrt{\theta} + \theta}{1 - \theta} < 1.$$

上述下界表明, 对充分大的 n , $P(\Gamma_n)$ 至少具有 $n^{-\gamma}/\sqrt{\log n}$ 的量级。因此 $\sum_{n=1}^\infty P(\Gamma_n) = +\infty$, 再由 Borel–Cantelli 引理, 几乎必然有

$$B_{\theta^n} \geq (1 - \sqrt{\theta})h(\theta^n) + B_{\theta^{n+1}} \quad \text{无穷多次.}$$

因为 $-B$ 也是布朗运动, 由证明的第一部分可知: 对几乎每个 ω , 从某个 $n_0(\omega)$ 起,

$$-B_{\theta^{n+1}}(\omega) < 2h(\theta^{n+1}).$$

又从某个 n 起,

$$h(\theta^{n+1}) \leq 2\sqrt{\theta} h(\theta^n).$$

合并这些不等式, 得到

$$\begin{aligned} B_{\theta^n} &> (1 - \sqrt{\theta})h(\theta^n) - 2h(\theta^{n+1}) \\ &> h(\theta^n)(1 - \sqrt{\theta} - 4\sqrt{\theta}) \quad \text{无穷多次.} \end{aligned}$$

因此几乎必然有

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{h(t)} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{\theta^n}}{h(\theta^n)} \geq 1 - 5\sqrt{\theta}.$$

最后令 $\theta \downarrow 0$, 便得到所需的反向不等式。

利用第 I 章第 1 节末尾证明的布朗运动各种不变性, 可以得到迭代对数律的若干有用推论。

推论 1.10。

$$P\left(\liminf_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log_2(1/t)}} = -1\right) = 1.$$

证明。 这是因为 $-B$ 也是布朗运动。

两个概率为 1 的事件之交仍有概率 1，所以实际上

$$P\left(\begin{array}{l} \limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log_2(1/t)}} = 1, \\ \liminf_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log_2(1/t)}} = -1 \end{array}\right) = 1.$$

这个结论有助于直观理解 B 离开零点时的行为。特别地，几乎必然地，0 是布朗运动零点集的聚点；换言之，在任意小区间 $[0, a[$ 内， B 几乎必然无穷多次取值 0。

由平移不变性，在每个固定时刻都有相同的行为。读者可以把它与第 I 章第 2 节的 Hölder 性质比较。

推论 1.11。 对任意固定的 s ,

$$P\left(\begin{array}{l} \limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_{t+s} - B_s}{\sqrt{2t \log_2(1/t)}} = 1, \\ \liminf_{t \downarrow 0} \frac{B_{t+s} - B_s}{\sqrt{2t \log_2(1/t)}} = -1 \end{array}\right) = 1.$$

证明。 $(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$ 也是布朗运动。

最后利用时间反演得到：

推论 1.12。

$$P\left(\begin{array}{l} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log_2 t}} = 1, \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log_2 t}} = -1 \end{array}\right) = 1.$$

注。 这个推论蕴含第 I 章练习 1.13 中证明的布朗运动常返性：对每个 $x \in \mathbb{R}$ ，集合

$$\{t : B_t = x\}$$

几乎必然无界。

练习 1.13 (#). 设 X 是从 0 出发的连续过程。假设对每个实数 α , 过程

$$M_t^\alpha = \exp\left(\alpha X_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)$$

都是关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 的鞅。证明 X 是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的布朗运动 (见第 III 章定义 2.20)。

提示. 使用以下两个事实:

i) 随机变量 $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 当且仅当对每个实数 λ ,

$$E[e^{\lambda Y}] = e^{\lambda^2/2};$$

ii) 若 Y 是随机变量, $\mathcal{B}$ 是子 σ -代数, 并且当 λ 属于 0 的某个邻域时,

$$E[e^{\lambda Y} | \mathcal{B}] = E[e^{\lambda Y}] < +\infty,$$

则 Y 与 $\mathcal{B}$ 独立。

练习 1.14 (Poisson 过程, #). 设 (X_n) 是一列相互独立、参数为 c 的指数随机变量。令

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}, \quad t \geq 0.$$

1°) 证明 N 的增量相互独立, 并且服从 Poisson 分布。

2°) 证明 $N_t - ct$ 关于 $\sigma(N_s : s \leq t)$ 是鞅。

3°) 证明 $(N_t - ct)^2 - ct$ 是鞅。

练习 1.15 (非负上鞅的极大不等式). 若 X 是右连续非负上鞅, 证明

$$P\left(\sup_t X_t > \lambda\right) \leq \lambda^{-1} E[X_0].$$

练习 1.16 ($L \log L$ 类).

1°) 在推论 1.6 的框架下, 设 ϕ 是 $\mathbb{R}_+$ 上递增、右连续且在 0 处为零的函数。证明

$$E[\phi(X^*)] \leq E\left[|X_N| \int_0^{X^*} \lambda^{-1} d\phi(\lambda)\right].$$

2°) 在第 1 问中取 $\phi(\lambda) = (\lambda - 1)^+$, 证明存在常数 C , 使

$$E[X^*] \leq C \left(1 + \sup_n E[|X_n| \log^+ |X_n|]\right).$$

提示. 对 $a, b > 0$, 有

$$a \log b \leq a \log^+ a + e^{-1}b.$$

使右端有限的鞅所构成的类称为 $L \log L$ 类。采用下一练习的记号, 有

$$L \log L \subset H^1.$$

练习 1.17 (空间 H^p)。设 $p \geq 1$ 。所有以 $\mathbb{R}_+$ 为指标、满足

$$X^* = \sup_t |X_t| \in L^p$$

的连续鞅组成的空间，在范数

$$\|X\|_{H^p} = \|X^*\|_p$$

下是 Banach 空间。

提示。 见第 IV 章命题 1.22。

注。 本书侧重连续过程，因此上面的练习只讨论连续鞅。事实上，对所有满足 $X^* \in L^p$ 的 càdlàg 鞅所成的空间 $\mathbb{H}^p$ ，结论同样成立；上面的 H^p 是 $\mathbb{H}^p$ 的闭子空间。

练习 1.18 (#)。沿用第 I 章练习 1.14 的记号，证明下列三个过程都是连续鞅：

$$\int_0^t f(s) dB_s, \quad \left(\int_0^t f(s) dB_s \right)^2 - \int_0^t f(s)^2 ds,$$

以及

$$\exp \left(\int_0^t f(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t f(s)^2 ds \right).$$

第 IV 章将大幅推广这一结论。

练习 1.19。设 X, Y 是关于同一滤过 $(\mathcal{F}_n)$ 的两个非负上鞅， T 是停时，并且在 $\{T < \infty\}$ 上有 $X_T \geq Y_T$ 。定义

$$Z_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega), & n < T(\omega), \\ Y_n(\omega), & n \geq T(\omega). \end{cases}$$

证明 Z 是上鞅。

练习 1.20 ()**。

1° 对 $\mathbb{R}_+$ 上的任意测度 μ ，证明

$$P \left[\limsup_{h \downarrow 0} \frac{|B_{s+h} - B_s|}{\sqrt{2h \log_2(1/h)}} = 1 \text{ 对 } \mu\text{-几乎处处的 } s \right] = 1.$$

下面各问讨论例外时刻集。

2° 利用 Lévy 连续模定理（第 I 章定理 2.7）证明：对几乎每个 ω 以及任意 $a < b$ ，都能找到 s_1, t_1 ，使

$$a < s_1 < t_1 < b, \quad |B_{t_1} - B_{s_1}| > \frac{1}{2}d(t_1 - s_1),$$

其中

$$d(h) = \sqrt{2h \log(1/h)}.$$

3° 假设已经选出 $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n$ ，使得

$$|B_{t_i} - B_{s_i}| > \frac{i}{i+1}d(t_i - s_i).$$

选择

$$s'_n \in]s_n, t_n[, \quad s'_n \leq s_n + 2^{-n},$$

并使得对每个 $s \in]s_n, s'_n]$, 都有

$$|B_{t_n} - B_s| > \frac{n}{n+1} d(t_n - s).$$

然后在 $]s_n, s'_n[$ 中选择 s_{n+1}, t_{n+1} , 依此继续。令

$$\{s_0\} = \bigcap_n [s_n, t_n].$$

证明

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{|B_{s_0+h} - B_{s_0}|}{d(h)} \geq 1.$$

4°) 由第 3 问推出: 对几乎每个 ω , 存在 $\mathbb{R}_+$ 中的稠密时刻集, 使其中每个时刻 t 都满足

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{2h \log_2(1/h)}} = +\infty.$$

5°) 证明上述时刻集甚至不可数。

提示。 仿照 Cantor 集的构造, 从 $]s_n, s'_n[$ 中删去中间三分之一, 并在余下的两部分中各选一个区间 $]s_{n+1}, t_{n+1}[$ 。

练习 1.21 (*)。 设 B 是标准 d 维布朗运动, 证明

$$P\left(\limsup_{t \downarrow 0} \frac{|B_t|}{\sqrt{2t \log_2(1/t)}} = 1\right) = 1.$$

提示。 在 $\mathbb{R}^d$ 的单位球面上取可数子集 (e_n) , 使对每个 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|x| = \sup_n |\langle x, e_n \rangle|.$$

利用不变性, 陈述并证明标准 d 维布朗运动的其他迭代对数律。

练习 1.22。 若 $\mathbb{B}$ 是布朗单, 则对固定的 s, t , 几乎必然有

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{B}_{(s+h,t)} - \mathbb{B}_{(s,t)}}{\sqrt{2h \log_2(1/h)}} = \sqrt{t}.$$

练习 1.23。 设 B 是标准 d 维布朗运动, 证明

$$P\left(\sup_{s \leq t} |B_s| \geq \delta\right) \leq 2d \exp\left(-\frac{\delta^2}{2dt}\right).$$

提示。 对单位向量 θ , 把命题 1.8 应用于 $\langle \theta, B_t \rangle$ 。

2 收敛定理与正则化定理

先回顾实值函数的一个基本事实。设函数 f 把 $\mathbb{R}$ 的某个子集 T 映到 $\mathbb{R}$ 。取 T 的有限子集

$$F = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_d\}.$$

给定实数 $a < b$ ，递归定义

$$s_1 = \inf\{t_i : f(t_i) > b\}, \quad s_2 = \inf\{t_i > s_1 : f(t_i) < a\},$$

以及

$$s_{2n+1} = \inf\{t_i > s_{2n} : f(t_i) > b\}, \quad s_{2n+2} = \inf\{t_i > s_{2n+1} : f(t_i) < a\},$$

其中约定 $\inf \emptyset = t_d$ 。令

$$D(f, F, [a, b]) = \sup\{n : s_{2n} < t_d\},$$

并把 f 在区间 $[a, b]$ 上的下穿次数定义为

$$D(f, T, [a, b]) = \sup\{D(f, F, [a, b]) : F \subset T, F \text{ 为有限集}\}.$$

类似地可以定义 f 对 $[a, b]$ 的上穿次数 $U(f, T, [a, b])$ 。函数 f 没有第二类不连续点——特别地，当 T 是开区间时， f 在 T 的端点处存在相应的单侧极限——当且仅当对每一对有理数 $a < b$ ， $D(f, T, [a, b])$ （等价地， $U(f, T, [a, b])$ ）都是有限的。

现在令 f 是下鞅 X 的一条样本路径。当 T 可数时， $D(X, T, [a, b])$ 显然是随机变量，并且有下面的不等式。

命题 2.1 (下穿不等式)。 若 X 是下鞅，且指标集 T 可数，则对任意 $a < b$ ，

$$(b - a)E[D(X, T, [a, b])] \leq \sup_{t \in T} E[(X_t - b)^+].$$

证明。 只需先证明 T 有限的情形，并沿用上面的记号。此时 s_k 是关于离散滤过 $(\mathcal{F}_{t_i})$ 的停时。可将命题 1.4 应用于每个 s_k 。令

$$A_k = \{s_k < t_d\};$$

则 $A_k \in \mathcal{F}_{s_k}$ ，且 $A_k \supset A_{k+1}$ 。在 A_{2n-1} 上有 $X_{s_{2n-1}} > b$ ，在 A_{2n} 上有 $X_{s_{2n}} < a$ ，所以

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{A_{2n-1}} (X_{s_{2n-1}} - b) dP \leq \int_{A_{2n-1}} (X_{s_{2n}} - b) dP \\ &\leq (a - b)P(A_{2n}) + \int_{A_{2n-1} \setminus A_{2n}} (X_{s_{2n}} - b) dP. \end{aligned}$$

又因为在 A_{2n}^c 上 $s_{2n} = t_d$ ，故

$$(b - a)P(A_{2n}) \leq \int_{A_{2n-1} \setminus A_{2n}} (X_{s_{2n}} - b)^+ dP = \int_{A_{2n-1} \setminus A_{2n}} (X_{t_d} - b)^+ dP.$$

注意到

$$P(A_{2n}) = P(D(X, T, [a, b]) \geq n),$$

而各集合 $A_{2n-1} \setminus A_{2n}$ 两两不交。对上式求和便得

$$(b - a)E[D(X, T, [a, b])] \leq E[(X_{t_d} - b)^+].$$

一般可数指标集的结论由有限子集递增逼近得到。

下面把这个不等式用于离散下鞅的收敛定理。

定理 2.2 (下鞅收敛定理)。若 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是下鞅, 并且

$$\sup_n E[X_n^+] < +\infty,$$

则 (X_n) 几乎必然收敛到一个几乎必然小于 $+\infty$ 的极限。

证明。 Fatou 引理保证

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < +\infty \quad \text{几乎必然.}$$

若结论不成立, 就存在实数 $a < b$, 使事件

$$\left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < a < b < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \right\}$$

有正概率。于是 $D(X, \mathbb{N}, [a, b]) = +\infty$ 有正概率, 这与命题 2.1 矛盾。

有时还需要考察递减而非递增的 σ -代数族, 也就是把鞅的时间“倒转”。设 $(\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ 是一列子 σ -代数, 并且当 $n \leq m \leq 0$ 时 $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$ 。关于 $(\mathcal{F}_n)$ 的下鞅, 是指一族适应的实值随机变量 (X_n) , 满足对每个 n , $E[X_n^+] < \infty$, 并且当 $n \leq m \leq 0$ 时

$$X_n \leq E[X_m | \mathcal{F}_n].$$

于是有下述反向下鞅收敛定理。

定理 2.3 (反向下鞅收敛定理)。若 $(X_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ 是下鞅, 则极限

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} X_n$$

几乎必然存在。若进一步

$$\sup_n E[|X_n|] < \infty,$$

则 (X_n) 一致可积, 上述收敛也在 L^1 中成立; 而且对每个 n ,

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} X_k \leq E[X_n | \mathcal{F}_{-\infty}], \quad \mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_n \mathcal{F}_n.$$

证明。 容易看出

$$\sup_n E[X_n^+] \leq E[X_0^+] < +\infty,$$

所以第一项结论可完全仿照定理 2.2 证明。为证明第二项, 先注意条件 $\sup_n E[|X_n|] < +\infty$ 等价于 $\lim_{n \rightarrow -\infty} E[X_n] > -\infty$ 。对任意 $c > 0$ 和任意 n ,

$$\int_{\{|X_n| > c\}} |X_n| dP = \int_{\{X_n \geq -c\}} X_n dP - E[X_n] + \int_{\{X_n > c\}} X_n dP.$$

给定 $\varepsilon > 0$, 可取整数 n_0 , 使当 $n \leq n_0$ 时 $E[X_n] > E[X_{n_0}] - \varepsilon$ 。结合下鞅不等式可得, 对 $n \leq n_0$,

$$\begin{aligned} \int_{\{|X_n| > c\}} |X_n| dP &\leq \int_{\{X_n \geq -c\}} X_n dP - E[X_n] + \int_{\{X_n > c\}} X_n dP + \varepsilon \\ &\leq \int_{\{|X_{n_0}| > c\}} |X_{n_0}| dP + \varepsilon. \end{aligned} \quad (*)$$

又有

$$P(|X_n| > c) \leq c^{-1} \sup_n E[|X_n|].$$

由 (*) 容易推出 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 一致可积, 因而收敛在 L^1 中也成立。最后, 若 $\Gamma \in \mathcal{F}_{-\infty}$, 则对 $m < n$,

$$\int_{\Gamma} X_m dP \leq \int_{\Gamma} X_n dP.$$

利用 L^1 收敛令 $m \rightarrow -\infty$, 便得到所断言的条件期望不等式。

校订注。 原书在 (*) 的第二行印作等号。第一行右端化简为

$$-\int_{\{X_n < -c\}} X_{n_0} dP + \int_{\{X_n > c\}} X_{n_0} dP + \varepsilon,$$

一般只能用绝对值估计得到 “ $\leq$ ”。

下面的推论经常有用。

推论 2.4. 设随机变量序列 (X_n) 几乎必然收敛到随机变量 X , 并且存在可积随机变量 Y , 使每个 n 都满足 $|X_n| \leq Y$ 。若 $(\mathcal{F}_n)$ 是递增 (分别地, 递减) 的子 σ -代数列, 则

$$E[X_n | \mathcal{F}_n] \longrightarrow E[X | \mathcal{F}] \quad \text{几乎必然,}$$

其中在递增情形

$$\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right),$$

而在递减情形

$$\mathcal{F} = \bigcap_n \mathcal{F}_n.$$

证明。 取 $\varepsilon > 0$, 并令

$$U = \inf_{n \geq m} X_n, \quad V = \sup_{n \geq m} X_n,$$

其中 m 取得足够大, 使 $E[V - U] < \varepsilon$ 。当 $n \geq m$ 时,

$$E[U | \mathcal{F}_n] \leq E[X_n | \mathcal{F}_n] \leq E[V | \mathcal{F}_n].$$

两端都是满足上述收敛定理条件的鞅, 因此

$$E[U | \mathcal{F}] \leq \liminf_n E[X_n | \mathcal{F}_n] \leq \limsup_n E[X_n | \mathcal{F}_n] \leq E[V | \mathcal{F}].$$

同样地,

$$E[U | \mathcal{F}] \leq E[X | \mathcal{F}] \leq E[V | \mathcal{F}].$$

从而

$$E\left[\limsup_n E[X_n | \mathcal{F}_n] - \liminf_n E[X_n | \mathcal{F}_n]\right] \leq \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 可知 $E[X_n | \mathcal{F}_n]$ 几乎必然收敛; 再由同一夹逼关系, 其极限必为 $E[X | \mathcal{F}]$ 。

现在转向连续时间（下）鞅的基本正则化定理。

定理 2.5（单侧极限的存在性）。 若 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是下鞅，则对几乎每个 ω ，同时有：

- 1°) 对每个 $t \in (0, +\infty)$ ，极限 $\lim_{r \uparrow t, r \in \mathbb{Q}} X_r(\omega)$ 存在；
- 2°) 对每个 $t \in [0, +\infty)$ ，极限 $\lim_{r \downarrow t, r \in \mathbb{Q}} X_r(\omega)$ 存在。

证明。 只需在任意一个紧子区间 I 上证明这些结论。设 t_d 是 I 的右端点。对任意 $t \in I$ ，

$$E[(X_t - b)^+] \leq E[X_{t_d}^+] + b^-.$$

由命题 2.1，存在 $\Omega_0 \subset \Omega$ ，使 $P(\Omega_0) = 1$ ，并且对每个 $\omega \in \Omega_0$ 及每一对有理数 $a < b$ ，

$$D(X(\omega), I \cap \mathbb{Q}, [a, b]) < \infty.$$

随后与定理 2.2 相同的论证给出所需结论。

对每个 $t \in [0, +\infty)$ ，定义

$$X_{t+} = \lim_{r \downarrow t, r \in \mathbb{Q}} X_r,$$

并对每个 $t \in (0, +\infty)$ 定义

$$X_{t-} = \lim_{r \uparrow t, r \in \mathbb{Q}} X_r.$$

由上一定理，这里的上极限与相应的下极限几乎必然相等。下面研究如此定义的过程。

命题 2.6（右极限过程）。 假设对每个 t ，都有 $E[|X_t|] < +\infty$ 。则对每个 t ， $E[|X_{t+}|] < +\infty$ ，并且

$$X_t \leq E[X_{t+} | \mathcal{F}_t] \quad \text{几乎必然.}$$

若函数 $t \mapsto E[X_t]$ 右连续，则上式取等号；特别地， X 为鞅时上式取等号。最后， (X_{t+}) 关于 $(\mathcal{F}_{t+})$ 是下鞅；若 X 是鞅，则 (X_{t+}) 也是鞅。

证明。 仍可把时间限制在一个紧子区间内。若有理数列 (t_n) 递减到 t ，则 (X_{t_n}) 是处于定理 2.3 情形的反向下鞅。因此 X_{t+} 可积，而且 $X_{t_n} \rightarrow X_{t+}$ 在 L^1 中成立。对不等式

$$X_t \leq E[X_{t_n} | \mathcal{F}_t]$$

令 $n \rightarrow \infty$ ，得到

$$X_t \leq E[X_{t+} | \mathcal{F}_t].$$

另外， L^1 收敛给出

$$E[X_{t+}] = \lim_n E[X_{t_n}].$$

若 $t \mapsto E[X_t]$ 右连续，则 $E[X_t] = E[X_{t+}]$ ，因而 $X_t = E[X_{t+} | \mathcal{F}_t]$ 几乎必然成立。最后，取 $s < t$ ，再取一列小于 t 且递减到 s 的有理数 (s_n) 。由刚证明的结论，

$$X_{s_n} \leq E[X_t | \mathcal{F}_{s_n}] \leq E[E[X_{t+} | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_{s_n}] = E[X_{t+} | \mathcal{F}_{s_n}].$$

再次应用定理 2.3，即得关于 $(\mathcal{F}_{t+})$ 的下鞅性质；鞅情形同理。

注。 把 X_t 换成 $X_t \vee a$, 可以去掉“每个 X_t 都可积”的假设; 此时应相应修改结论的表述。

左极限有完全类似的结论。

命题 2.7 (左极限过程)。 若对每个 t 都有 $E[|X_t|] < \infty$, 则对每个 $t > 0$, $E[|X_{t-}|] < +\infty$, 并且

$$X_{t-} \leq E[X_t | \mathcal{F}_{t-}] \quad \text{几乎必然.}$$

若 $t \mapsto E[X_t]$ 左连续, 则上式取等号; 特别地, X 为鞅时上式取等号。最后, $(X_{t-})_{t>0}$ 关于 $(\mathcal{F}_{t-})_{t>0}$ 是下鞅; 若 X 是鞅, 则它也是鞅。

证明。 留给读者验证: 对每个 $a \in \mathbb{R}$, 当 I 是紧子区间时, 族

$$\{X_t \vee a : t \in I\}$$

一致可积。此后完全仿照右极限过程的证明即可。

这些结论有如下重要推论。

定理 2.8 (右连续下鞅的路径正则性)。 若 X 是右连续下鞅, 则:

- 1°) X 关于 $(\mathcal{F}_{t+})$ 是下鞅; 对于 $(\mathcal{F}_{t+})$ 的完备化, 它仍是下鞅;
- 2°) X 的几乎每条路径都是 càdlàg 的, 即右连续且处处有左极限。

证明。 由命题 2.6、命题 2.7 和定理 2.5 立即得到。

定理 2.9 (下鞅的 càdlàg 修正)。 设 X 是关于右连续完备滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 的下鞅。若 $t \mapsto E[X_t]$ 右连续 (特别地, 若 X 是鞅), 则 X 有一个 càdlàg 修正, 并且该修正仍是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的下鞅。

证明。 回到定理 2.5 的证明, 并定义

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} X_{t+}(\omega), & \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \omega \notin \Omega_0. \end{cases}$$

由命题 2.6, $\tilde{X}$ 是 X 的右连续修正。由于滤过右连续且完备, 并且 Ω_0^c 是零测集, 所以 $\tilde{X}$ 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 适应。再由命题 2.6, $\tilde{X}$ 是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的下鞅; 最后由定理 2.5, 它的路径有左极限。

这些结果将在下一章中使用。这里已经可以回答第 1 节提出的一个问题: 若 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续且完备, Y 是可积随机变量, 那么可以在 $E[Y | \mathcal{F}_t]$ 的等价类中选取 Y_t , 使所得过程成为一个 càdlàg 鞅。这类特殊鞅的重要性将在下一节显现。

从现在起, 除非另有说明, 我们只考虑右连续下鞅。对此类过程, 命题 2.1 的不等式立即推广为

$$(b-a)E[D(X, \mathbb{R}_+, [a, b])] \leq \sup_t E[(X_t - b)^+].$$

再用定理 2.2 的论证, 得到下面的连续时间收敛定理。

定理 2.10 (连续时间下鞅收敛定理)。 若

$$\sup_t E[X_t^+] < \infty,$$

则 $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ 几乎必然存在。

常用的一个特殊情形如下。

推论 2.11。 非负上鞅在 $t \rightarrow \infty$ 时几乎必然收敛。

仿照定理 2.3, 还可得到定义在 $(0, +\infty)$ 上的下鞅在 $t \downarrow 0$ 时的收敛定理, 细节留给读者。

本节思想和结论将在后文多处使用。最后给出它们在布朗运动中的第一个应用, 继续使用第 I 章第 2 节的记号。

命题 2.12 (布朗运动的二次变差)。 设 (Δ_n) 是 $[0, t]$ 的一系列逐次加细的分割, 即 $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$, 并且网格 $|\Delta_n| \rightarrow 0$ 。则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 = t \quad \text{几乎必然.}$$

证明。 以 Wiener 空间 (见第 I 章第 3 节) 为概率空间, 并以 Wiener 测度为概率测度。设

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t$$

是 $[0, t]$ 的一个分割。对每个符号序列 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, 其中 $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, 在 Ω 上定义映射 θ_ε :

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon \omega(0) &= 0, \\ \theta_\varepsilon \omega(s) &= \theta_\varepsilon \omega(t_{i-1}) + \varepsilon_i (\omega(s) - \omega(t_{i-1})), \quad s \in [t_{i-1}, t_i], \\ \theta_\varepsilon \omega(s) &= \theta_\varepsilon \omega(t_k) + \omega(s) - \omega(t_k), \quad s \geq t_k. \end{aligned}$$

令 $\mathcal{B}$ 为所有在每个 θ_ε 下保持不变的事件所成的 σ -代数。容易验证, Wiener 测度 W 也在所有 θ_ε 下保持不变。因此, 对 Wiener 空间上的任意可积随机变量 Z ,

$$E[Z | \mathcal{B}] = 2^{-k} \sum_{\varepsilon} Z \circ \theta_\varepsilon.$$

从而当 $i \neq j$ 时,

$$E[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) | \mathcal{B}] = 0.$$

令 $\mathcal{B}_n$ 是与分割 Δ_n 对应的 σ -代数, 则 $(\mathcal{B}_n)$ 递减, 而且

$$E[B_t^2 | \mathcal{B}_n] = E \left[\sum_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \middle| \mathcal{B}_n \right] = \sum_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2.$$

由定理 2.3, 右端几乎必然收敛; 另一方面, 第 I 章命题 2.9 已说明它在 L^2 中收敛到 t , 故其几乎必然极限也等于 t 。

练习 2.13 (#)。

1°) 设带滤过 $(\mathcal{F}_n)$ 的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 满足

$$\sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right) = \mathcal{F}.$$

令 Q 是 $\mathcal{F}$ 上的另一概率测度, X_n 是 Q 在 $\mathcal{F}_n$ 上的限制相对于 P 在 $\mathcal{F}_n$ 上的限制的 Radon–Nikodym 密度。证明 (X_n) 是非负的 $(\mathcal{F}_n, P)$ -上鞅, 并且其极限 X_∞ 是 dQ/dP 。若 $Q \ll P$ 在 $\mathcal{F}$ 上成立, 则 (X_n) 是鞅, 并且

$$X_n = E[X_\infty | \mathcal{F}_n].$$

第 VIII 章第 1 节还会进一步讨论这个问题。

2°) 设 P 是可分可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 上的转移概率 (见第 III 章第 1 节), λ 是 $\mathcal{E}$ 上的概率测度。证明存在 $E \times E$ 上的双可测函数 f 和 $(E, \mathcal{E})$ 上的核 N , 使得对每个 x , 测度 $N(x, \cdot)$ 与 λ 奇异, 并且

$$P(x, A) = N(x, A) + \int_A f(x, y) \lambda(dy).$$

练习 2.14 (Dubins 不等式, *)。 设 $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ 是非负上鞅。沿用本节开头的记号, 证明

$$P(D(X, \mathbb{N}, [a, b]) \geq p) \leq a^{p-1} b^{-p} E[X_0 \wedge b].$$

并陈述、证明相应的上穿不等式。

练习 2.15 (#)。 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间, $(\mathcal{D}_n)_{n \geq 0}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一列子 σ -代数, 并且当 $0 \leq m \leq n$ 时 $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_m$ 。若 $\mathcal{C}$ 是另一个与 $\mathcal{D}_0$ 独立的子 σ -代数, 证明在忽略 P -零测集的意义下

$$\bigcap_n (\mathcal{C} \vee \mathcal{D}_n) = \mathcal{C} \vee \left(\bigcap_n \mathcal{D}_n \right).$$

提示。 证明: 若 $C \in \mathcal{C}$ 、 $D \in \mathcal{D}_0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(C \cap D | \mathcal{C} \vee \mathcal{D}_n) \in \mathcal{C} \vee \left(\bigcap_n \mathcal{D}_n \right).$$

练习 2.16。 对标准布朗运动, 令

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_u : u \geq t).$$

证明对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$, 过程

$$\exp\left(\frac{\lambda B_t}{t} - \frac{\lambda^2}{2t}\right), \quad t > 0,$$

关于递减族 $(\mathcal{F}_t)$ 是鞅。

提示。 当 $s < t$ 时, 注意 $B_s - (s/t)B_t$ 与 $\mathcal{F}_t$ 独立; 也可以使用时间反演。

练习 2.17. 设给定两个滤过 $(\mathcal{F}_t^0)$ 和 $(\mathcal{F}_t)$, 对每个 t 都有 $\mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_t$, 且这两个 σ -代数只相差 $\mathcal{F}_\infty$ 的零测集。再假设 $(\mathcal{F}_t^0)$ 右连续。

- 1°) 证明每个关于 $(\mathcal{F}_t)$ 适应的右连续过程, 都与某个关于 $(\mathcal{F}_t^0)$ 适应的过程不可区分。
- 2°) 证明每个右连续的 $(\mathcal{F}_t)$ -下鞅, 都与某个 càdlàg 的 $(\mathcal{F}_t^0)$ -下鞅不可区分。

练习 2.18 (Krickeberg 分解). 若存在有限常数 K , 使对每个 $t \geq 0$ 都有

$$E[|X_t|] \leq K,$$

则称过程 X 是 L^1 -有界的。

- 1°) 若 M 是 L^1 -有界鞅, 证明对每个 t , 极限

$$M_t^{(\pm)} = \lim_{n \rightarrow \infty} E[M_n^\pm | \mathcal{F}_t]$$

几乎必然存在, 并且如此定义的过程 $M^{(+)}$ 与 $M^{(-)}$ 都是非负鞅。

- 2°) 若滤过右连续且完备, 证明右连续鞅 M 是 L^1 -有界的, 当且仅当它可写成两个 càdlàg 非负鞅之差:

$$M = M^{(+)} - M^{(-)}.$$

- 3°) 证明可以选取 $M^{(+)}$ 和 $M^{(-)}$, 使

$$\sup_t E[|M_t|] = E[M_0^{(+)}] + E[M_0^{(-)}].$$

在这种选取下, 分解在不可区分的意义下唯一。

- 4°) 上述唯一性还可加强为: 若 Y, Z 是两个非负鞅, 且 $M = Y - Z$, 则

$$Y \geq M^{(+)}, \quad Z \geq M^{(-)},$$

其中 $M^{(\pm)}$ 是第 3 问中的鞅。

3 可选停止定理

回顾一下, 从现在起所考察的一切(下鞅、上鞅及)鞅都取为 càdlàg 过程。下文记

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_t \mathcal{F}_t.$$

上一节定理 2.10⁴中的极限随机变量 X_∞ 关于 $\mathcal{F}_\infty$ 可测。自然要问: 把 X_∞ 和 $\mathcal{F}_\infty$ 加入以后, 所得以 $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ 为指标的过程是否仍为(下)鞅。对鞅而言, 相应结果尤其重要。

定理 3.1 (一致可积鞅的刻画)。 设 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是鞅, 则下列三个条件等价:

- i) 当 $t \rightarrow \infty$ 时, X_t 在 L^1 中存在极限;
- ii) 存在 $X_\infty \in L^1$, 使

$$X_t = E[X_\infty | \mathcal{F}_t];$$

- iii) 随机变量族 $\{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ 一致可积。

若这些条件成立, 则

$$X_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} X_t \quad \text{几乎必然.}$$

此外, 若对某个 $p > 1$, 鞅在 L^p 中有界, 即

$$\sup_t E[|X_t|^p] < \infty,$$

则上述等价条件成立, 并且收敛也在 L^p 中成立。

证明。 先证 ii) 推出 iii)。这是一个经典练习。令

$$\Gamma_t = \{|E[X_\infty | \mathcal{F}_t]| > \alpha\}.$$

则

$$\begin{aligned} a_t &:= \int_{\Gamma_t} |E[X_\infty | \mathcal{F}_t]| dP \\ &\leq \int_{\Gamma_t} E[|X_\infty| | \mathcal{F}_t], dP = \int_{\Gamma_t} |X_\infty| dP. \end{aligned}$$

另一方面, Markov 不等式给出

$$P(\Gamma_t) \leq \frac{1}{\alpha} E[|E[X_\infty | \mathcal{F}_t]|] \leq \frac{E[|X_\infty|]}{\alpha}.$$

因此只要把 α 取得足够大, 就能使 a_t 对所有 t 一致地任意小, 故 iii) 成立。

若 iii) 成立, 则定理 2.10 的条件满足, 所以 X_t 几乎必然收敛到某个随机变量 X_∞ 。又因为 $\{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ 一致可积, 所以收敛也在 L^1 中成立, 因而 i) 成立。

若 i) 成立, 利用条件期望算子在 L^1 上的连续性, 在恒等式

$$X_t = E[X_{t+h} | \mathcal{F}_t]$$

中令 $h \rightarrow \infty$, 便得到 ii)。

最后, 若 $\sup_t E[|X_t|^p] < \infty$, 由定理 1.7, $\sup_t |X_t| \in L^p$ 。于是 $\{|X_t|^p : t \in \mathbb{R}_+\}$ 一致可积, 从而上述收敛在 L^p 中成立。

⁴校订注: 原书此处误引作定理 2.9; 极限随机变量 X_∞ 的存在性来自定理 2.10。

需要注意, 当 $p > 1$ 时, L^p -有界鞅自动一致可积, 而且它的上确界属于 L^p 。但 $p = 1$ 时情形完全不同: 鞅可以在 L^1 中有界却不一致可积, 也可以一致可积却不属于 $\mathcal{H}^1$, 其中 $\mathcal{H}^1$ 表示上确界可积的鞅空间 (见练习 1.17)。第一种现象的例子是

$$\exp(B_t - t/2).$$

由于 B_t 会在任意大的时刻取负值, 这个鞅在 $t \rightarrow \infty$ 时几乎必然收敛到 0; 由上一定理, 它不可能一致可积。第二种现象的例子见练习 3.15。

下鞅与上鞅也有相应结论, 只需在 ii) 中把等式换成相应的不等式; 其陈述和证明留给读者。

现在进入可选停止定理。它的第一个版本已经在命题 1.4 中给出。若 X 是一致可积鞅, 则 X_∞ 几乎必然存在; 对任意停时 S , 在 $\{S = \infty\}$ 上约定 $X_S = X_\infty$ 。

定理 3.2 (可选停止定理)。 若 X 是鞅, S, T 是两个有界停时且 $S \leq T$, 则

$$X_S = E[X_T | \mathcal{F}_S] \quad \text{几乎必然.}$$

若 X 一致可积, 则当 S 遍历全部停时时, 随机变量族 $\{X_S\}$ 一致可积; 而且只要 $S \leq T$, 就有

$$X_S = E[X_T | \mathcal{F}_S] = E[X_\infty | \mathcal{F}_S] \quad \text{几乎必然.}$$

注。 这两个陈述其实是同一个结果, 因为定义在右端点闭区间上的鞅必然一致可积。

证明。 证明第二项。由命题 1.4, 若 S, T 只取有限多个值且 $S \leq T$, 则

$$X_S = E[X_T | \mathcal{F}_S] = E[X_\infty | \mathcal{F}_S].$$

考虑随机变量族

$$\mathcal{U} = \{E[X_\infty | \mathcal{B}] : \mathcal{B} \text{ 是 } \mathcal{F} \text{ 的子 } \sigma\text{-代数}\}.$$

这是一个一致可积族, 它在 L^1 中的闭包 $\overline{\mathcal{U}}$ 仍一致可积。对任意停时 S , 可取一列只取有限多个值的停时 (S_k) , 使 $S_k \downarrow S$ 。由 X 的右连续性, $X_{S_k} \in \overline{\mathcal{U}}$ 。这证明了 $\{X_S : S \text{ 为停时}\}$ 一致可积, 并且还说明 $X_{S_k} \rightarrow X_S$ 在 L^1 中成立。

若 $\Gamma \in \mathcal{F}_S$, 则 $\Gamma \in \mathcal{F}_{S_k}$, 故

$$\int_{\Gamma} X_{S_k} dP = \int_{\Gamma} X_\infty dP.$$

令 $k \rightarrow \infty$, 得到

$$\int_{\Gamma} X_S dP = \int_{\Gamma} X_\infty dP,$$

即 $X_S = E[X_\infty | \mathcal{F}_S]$ 。结论得证。

必须强调上一结果中一致可积性的重要性。设 X 是从 $X_0 = 1$ 出发、收敛到 0 的非负连续鞅, 例如 $X_t = \exp(B_t - t/2)$ 。对 $\alpha < 1$, 令

$$T = \inf\{t : X_t \leq \alpha\}.$$

则 $X_T = \alpha$, 所以 $E[X_T] = \alpha$; 若可选停止定理能够直接应用, 就应有 $E[X_T] = E[X_0] = 1$, 矛盾。同一鞅还给出另一个有趣的例子: 取

$$d_t = \inf\{s > t : B_s = 0\}.$$

此时一般只能得到不等式; 对非负上鞅, 情形也正是如此。

定理 3.3 (非负上鞅的可选停止不等式)。设 X 是非负右连续上鞅，并约定 $X_\infty = 0$ 。对任意两个满足 $S \leq T$ 的停时，

$$X_S \geq E[X_T | \mathcal{F}_S].$$

证明。 证明留作练习；下鞅的相应陈述也留给读者。

继续之前，先指出已经出现的几类过程有如下严格包含关系：

$$\{\text{上鞅}\} \supsetneq \{\text{鞅}\} \supsetneq \{\text{一致可积鞅}\} \supsetneq \mathcal{H}^1.$$

下面给出可选停止定理的若干应用。

命题 3.4 (非负上鞅吸收于零)。设 X 是非负右连续上鞅，并令

$$T(\omega) = \inf\{t : X_t(\omega) = 0\} \wedge \inf\{t > 0 : X_{t-}(\omega) = 0\}.$$

则对几乎每个 ω ， $X_t(\omega)$ 在 $[T(\omega), \infty)$ 上恒等于零。

证明。 令

$$T_n = \inf\{t : X_t \leq 1/n\}.$$

显然 $T_{n-1} \leq T_n \leq T$ 。在 $\{T_n = \infty\}$ 上当然有 $T = \infty$ ，无需证明；在 $\{T_n < \infty\}$ 上有 $X_{T_n} \leq 1/n$ 。取 $q \in \mathbb{Q}_+$ ，则 $T+q$ 是严格大于 T_n 的停时。由定理 3.3，

$$\frac{1}{n} \geq E[X_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n < \infty\}}] \geq E[X_{T+q} \mathbf{1}_{\{T_n < \infty\}}].$$

令 $n \rightarrow \infty$ ，得到

$$E[X_{T+q} \mathbf{1}_{\{T_n < \infty, \forall n\}}] = 0.$$

又 $\{T < \infty\} \subset \{T_n < \infty, \forall n\}$ ，故在 $\{T < \infty\}$ 上几乎必然有 $X_{T+q} = 0$ 。让 q 遍历正有理数，再利用路径右连续性，即得结论。

命题 3.5 (由停止时刻刻画鞅)。一个 càdlàg 适应过程 X 是鞅，当且仅当对每个有界停时 T ，随机变量 $X_T \in L^1$ ，并且

$$E[X_T] = E[X_0].$$

证明。 “只有当”部分来自可选停止定理。反之，取 $s < t$ 和 $A \in \mathcal{F}_s$ ，则

$$T = t\mathbf{1}_{A^c} + s\mathbf{1}_A$$

是停时，所以

$$E[X_0] = E[X_T] = E[X_t \mathbf{1}_{A^c}] + E[X_s \mathbf{1}_A].$$

另一方面，常数 t 本身也是停时，故

$$E[X_0] = E[X_t] = E[X_t \mathbf{1}_{A^c}] + E[X_t \mathbf{1}_A].$$

比较两式，得到 $X_s = E[X_t | \mathcal{F}_s]$ 。

推论 3.6 (停止过程)。 若 M 是鞅, T 是停时, 则停止过程

$$M_t^T = M_{t \wedge T}$$

关于 $(\mathcal{F}_t)$ 仍是鞅。

证明。 过程 M^T 显然 càdlàg 且适应。若 S 是有界停时, 则 $S \wedge T$ 也是有界停时, 因此

$$E[M_S^T] = E[M_{S \wedge T}] = E[M_0] = E[M_0^T].$$

由命题 3.5 即得结论。

注。

1°) 若直接把可选停止定理应用于 M 以及停时 $T \wedge s$ 、 $T \wedge t$, 只能先看出 M^T 关于滤过 $(\mathcal{F}_{T \wedge t})$ 是鞅。不过, 关于 $(\mathcal{F}_{T \wedge t})$ 的鞅自动也是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的鞅。

2°) 与本推论等价的性质是: 条件期望算子 $E[\cdot | \mathcal{F}_S]$ 与 $E[\cdot | \mathcal{F}_T]$ 可交换, 并且

$$E[E[\cdot | \mathcal{F}_S] | \mathcal{F}_T] = E[\cdot | \mathcal{F}_{S \wedge T}].$$

这个事实也可不借助鞅来证明, 留作练习。

最后再次把本节结果用于一维标准布朗运动 B 。对 $a > 0$, 令

$$T_a = \inf\{t > 0 : B_t = a\}, \quad \tilde{T}_a = \inf\{t > 0 : |B_t| = a\}.$$

由路径连续性, 也可等价地写成

$$T_a = \inf\{t > 0 : B_t \geq a\}, \quad \tilde{T}_a = \inf\{t > 0 : |B_t| \geq a\}.$$

它们关于 B 的自然滤过都是停时; 由布朗运动的常返性, 它们几乎必然有限。

命题 3.7 (首达时刻的 Laplace 变换)。 T_a 与 $\tilde{T}_a$ 的分布的 Laplace 变换分别为

$$E[e^{-\lambda T_a}] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}, \quad E[e^{-\lambda \tilde{T}_a}] = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2\lambda})}.$$

证明。 对 $s \geq 0$,

$$M_t^s = \exp(sB_t - s^2 t/2)$$

是鞅, 而停止鞅 $M_{t \wedge T_a}^s$ 被 e^{sa} 控制, 故一致可积。可选停止定理给出

$$E[M_{T_a}^s] = E[M_0^s] = 1.$$

由于 $B_{T_a} = a$,

$$E[e^{-s^2 T_a/2}] = e^{-sa}.$$

令 $\lambda = s^2/2$, 得到第一个公式。

第二个公式同理, 只需使用鞅

$$N_t^s = \frac{M_t^s + M_t^{-s}}{2} = \cosh(sB_t) e^{-s^2 t/2},$$

因为 $N_{t \wedge \tilde{T}_a}^s$ 被 $\cosh(sa)$ 控制。

注。 反演 Laplace 变换可证明 T_a 的分布密度为

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right), \quad x > 0.$$

下一章将用另一种方法得到这一结论。现在已经可以看出

$$\mathcal{L}(T_a) * \mathcal{L}(T_b) = \mathcal{L}(T_{a+b}).$$

原因是 T_a 与 $T_{a+b} - T_a$ 独立；这将由下一章证明的布朗运动强 Markov 性质推出。

再给出一个应用。以下用 P_x 表示过程 $x + B$ 的分布。

命题 3.8 (区间端点的先达概率)。 若 $a < x < b$, 则

$$P_x(T_a < T_b) = \frac{b-x}{b-a}, \quad P_x(T_b < T_a) = \frac{x-a}{b-a}.$$

证明。 由布朗运动的常返性,

$$P_x(T_a < T_b) + P_x(T_b < T_a) = 1.$$

另一方面, $B^{T_a \wedge T_b}$ 是有界鞅。由可选停止定理, 并注意 $B_{T_a} = a$ 、 $B_{T_b} = b$,

$$aP_x(T_a < T_b) + bP_x(T_b < T_a) = x.$$

解这个二元一次方程组, 即得结论。

练习 3.9。 若 X 是非负上鞅, 并且

$$E\left[\lim_n X_n\right] = E[X_0] < \infty,$$

证明 X 是一致可积鞅。

练习 3.10。 设 $c, d > 0$, B 是一维标准布朗运动, 并令

$$T = T_c \wedge T_{-d}.$$

1°) 证明对每个 $s \in \mathbb{R}$,

$$E\left[e^{-s^2 T/2} \mathbf{1}_{\{T=T_c\}}\right] = \frac{\sinh(sd)}{\sinh(s(c+d))},$$

其中 $s = 0$ 时, 右端按连续延拓理解为 $d/(c+d)$ 。^a 并由此给出命题 3.8 的另一种证明。再证明

$$E[e^{-s^2 T/2}] = \frac{\cosh(s(c-d)/2)}{\cosh(s(c+d)/2)},$$

并与命题 3.7 的结果比较。

提示。 使用鞅

$$\exp\left(s\left(B_t - \frac{c-d}{2}\right) - \frac{s^2 t}{2}\right).$$

2°) 证明当 $0 \leq s < \pi/(c+d)$ 时,

$$E[e^{s^2 T/2}] = \frac{\cos(s(c-d)/2)}{\cos(s(c+d)/2)}.$$

提示。 可以使用解析延拓, 也可以使用复鞅

$$\exp\left(is\left(B_t - \frac{c-d}{2}\right) + \frac{s^2 t}{2}\right).$$

^a**校订注:** 原书称公式对每个实数 s 成立, 却没有说明 $s=0$ 时右端是 $0/0$; 这里补充连续延拓约定。

练习 3.11。

1°) 沿用命题 3.7 的记号。设 B 是一维标准布朗运动。通过考察鞅 $B_t^2 - t$, 证明 $\tilde{T}_a$ 可积, 并计算 $E[\tilde{T}_a]$ 。

提示。 为证明 $\tilde{T}_a \in L^1$, 先使用停时 $\tilde{T}_a \wedge n$ 。

2°) 证明 T_a 不可积。

提示。 若它可积, 就会有

$$a = E[B_{T_a}] = 0.$$

3°) 沿用命题 3.8 的记号, 证明

$$E_x[T_a \wedge T_b] = (x-a)(b-x).$$

第 VI 章练习 2.8 还会回到这个结论。

提示。 仍可使用鞅 $B_t^2 - t$; 也可由练习 3.10 的第 2 问推出。

练习 3.12 (#)。设 M 是非负连续鞅, 并在 $t \rightarrow \infty$ 时几乎必然收敛到 0。令

$$M^* = \sup_t M_t.$$

1°) 对 $x > 0$, 证明

$$P(M^* \geq x \mid \mathcal{F}_0) = 1 \wedge \frac{M_0}{x}.$$

提示。 在鞅第一次达到或超过 x 时停止。

2°) 更一般地, 若 X 是正的 $\mathcal{F}_0$ -可测随机变量, 证明

$$P(M^* \geq X \mid \mathcal{F}_0) = 1 \wedge \frac{M_0}{X}.$$

由此推出: M_0 是所有不超过 M^* 的 $\mathcal{F}_0$ -可测随机变量中最大的一个, 并且

$$M^* \stackrel{d}{=} \frac{M_0}{U},$$

其中 U 与 M_0 独立, 且在 $[0, 1]$ 上均匀分布。

3°) 设 B 是从 $a > 0$ 出发的布朗运动,

$$T_0 = \inf\{t : B_t = 0\}.$$

求随机变量 $Y = \sup_{t < T_0} B_t$ 的分布。

4°) 设 B 是一维标准布朗运动。利用

$$M_t = \exp(2\mu(B_t - \mu t)), \quad \mu > 0,$$

证明随机变量

$$Y = \sup_t (B_t - \mu t)$$

具有参数为 2μ 的指数分布。过程 $B_t - \mu t$ 称为漂移为 $-\mu$ 的布朗运动，练习 3.14 还会进一步研究它。

5°) 证明第 I 章练习 1.21 中的随机变量 J_2 可积，并计算常数 $C_2(X)$ 。

第 3-5 问彼此独立。

练习 3.13。 设 B 是一维标准布朗运动， f 是 $\mathbb{R}$ 上局部有界的 Borel 函数。

1°) 若 $f(B_t)$ 关于自然滤过

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(B_s : s \leq t)$$

是右连续鞅，证明 f 是仿射函数。也可以不对 f 作任何预先假设，而假设 $f(B_t)$ 是连续的 $(\mathcal{F}_t^0)$ -鞅。

注意，右连续性假设不可省略：若 f 是有理数集的示性函数，则 $f(B)$ 是鞅。

2°) 若 $f(B_t)$ 是连续的 $(\mathcal{F}_t^0)$ -下鞅，证明 f 没有真局部极大值。

提示。 对 $c > 0$ ，使用停时

$$T = T_c \wedge T_{-1}$$

以及

$$S = \inf\{t \geq T : B_t = -1 \text{ 或 } c + \varepsilon \text{ 或 } c - \varepsilon\}.$$

3°) 在第 2 问的条件下，证明 f 是凸函数。

提示。 连续函数 f 凸，当且仅当对任意 α, β ，函数 $f(x) + \alpha x + \beta$ 没有真局部极大值。

练习 3.14 (*)。 设 B 是一维标准布朗运动。对 $a > 0$ ，令

$$\sigma_a = \inf\{t : B_t < t - a\}.$$

1°) 证明 σ_a 是几乎必然有限的停时，并且

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sigma_a = +\infty \quad \text{几乎必然.}$$

2°) 证明

$$E[e^{\sigma_a/2}] = e^a.$$

提示。 对 $\lambda > 0$ ，使用停止在 σ_a 的鞅

$$\exp\left(-(\sqrt{1+2\lambda}-1)(B_t - t) - \lambda t\right),$$

先证明

$$E[e^{-\lambda\sigma_a}] = \exp\left(-a(\sqrt{1+2\lambda}-1)\right),$$

再使用解析延拓。

3°) 证明鞅 $\exp(B_t - t/2)$ 停止在 σ_a 后一致可积。

4°) 对 $a, b > 0$, 定义

$$\sigma_{a,b} = \inf\{t : B_t < bt - a\};$$

特别地, $\sigma_a = \sigma_{a,1}$. 证明

$$E[e^{b^2\sigma_{a,b}/2}] = e^{ab}.$$

提示。 利用布朗运动的尺度不变性证明

$$\sigma_{a,b} \stackrel{d}{=} b^{-2}\sigma_{ab,1}.$$

5°) 当 $b < 1$ 时, 证明

$$E[e^{\sigma_{1,b}/2}] = +\infty.$$

提示。 使用第 2 问。

练习 3.15 (*)。 设

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), d\omega),$$

其中 $d\omega$ 是 Lebesgue 测度。对 $0 \leq t < 1$, 令 $\mathcal{F}_t$ 为包含 $[0, t]$ 的所有 Borel 子集以及 $[0, 1]$ 的所有零测集的最小子 σ -代数。

1°) 对 $f \in L^1([0, 1], d\omega)$, 写出鞅

$$X_t(\omega) = E[f | \mathcal{F}_t](\omega), \quad 0 \leq t < 1,$$

的右连续版本的显式表达式。

2°) 定义

$$\tilde{H}f(t) = \frac{1}{1-t} \int_t^1 f(u) du.$$

对 $p > 1$, 证明 Hardy 的 L^p 不等式

$$\|\tilde{H}f\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p.$$

提示。 使用 Doob 的 L^p 不等式。

3°) 利用上述构造, 给出一个不属于 $\mathcal{H}^1$ 的一致可积鞅。

4°) 若

$$\int_0^1 |f(\omega)| \log^+ |f(\omega)| d\omega < \infty,$$

直接验证 $\tilde{H}f$ 可积。也可由练习 1.16 的连续时间版本得到这一点。

练习 3.16 (BMO 鞅, **).

1°) 设 Y 是连续一致可积鞅。证明对任意 $p \in [1, \infty)$, 下列两个条件等价:

i) 存在常数 C , 使对任意停时 T ,

$$E[|Y_\infty - Y_T|^p | \mathcal{F}_T] \leq C^p \quad \text{几乎必然};$$

ii) 存在常数 C , 使对任意停时 T ,

$$E[|Y_\infty - Y_T|^p] \leq C^p P(T < \infty).$$

提示。 使用第 I 章练习 4.19 的停时 T_Γ 。

使上述条件成立的最小常数在两种表述中相同, 记为 $\|Y\|_{\text{BMO}_p}$ 。空间

$$\{Y : \|Y\|_{\text{BMO}_p} < \infty\}$$

称为 BMO_p , 而 $\|\cdot\|_{\text{BMO}_p}$ 是其上的半范数。证明当 $p < q$ 时, $\text{BMO}_q \subset \text{BMO}_p$ 。反向包含将在后面各问证明, 因此以后将这个空间简记为 BMO 。

2°) 条件 i)、ii) 还等价于:

iii) 存在常数 C , 使对任意停时 T , 都存在一个 $\mathcal{F}_T$ -可测的 L^p 随机变量 α_T , 满足

$$E[|Y_\infty - \alpha_T|^p | \mathcal{F}_T] \leq C^p.$$

3°) 若 $Y_t = E[Y_\infty | \mathcal{F}_t]$, 且 Y_∞ 有界, 则 $Y \in \text{BMO}$, 并且

$$\|Y\|_{\text{BMO}_1} \leq 2\|Y_\infty\|_\infty.$$

第 III 章练习 3.30 将给出无界 BMO 鞅的例子。

4°) 若 $Y \in \text{BMO}$, T 是停时, 则

$$Y^T \in \text{BMO}, \quad \|Y^T\|_{\text{BMO}_1} \leq \|Y\|_{\text{BMO}_1}.$$

5°) **John–Nirenberg 不等式。** 设 $Y \in \text{BMO}$, 且 $\|Y\|_{\text{BMO}_1} \leq 1$ 。取 $a > 1$ 和停时 T , 递归定义

$$R_0 = T, \quad R_n = \inf\{t > R_{n-1} : |Y_t - Y_{R_{n-1}}| > a\}.$$

证明

$$P(R_n < \infty) \geq aP(R_{n+1} < \infty).$$

再证明存在常数 C , 使对任意停时 T ,

$$P\left(\sup_{t \geq T} |Y_t - Y_T| > \lambda\right) \leq Ce^{-\lambda/e} P(T < \infty).$$

特别地, 若 $Y^* = \sup_t |Y_t|$, 则

$$P(Y^* \geq \lambda) \leq Ce^{-\lambda/e}.$$

所以对每个 p , 都有 $Y^* \in L^p$ 。

提示。 对 $S \geq T$, 使用

$$E[|Y_S - Y_T|] \leq \|Y\|_{\text{BMO}_1} P(T < \infty),$$

并把它应用于 R_n, R_{n+1} 。

6°) 由第 5 问推出: 所有 p 对应的 BMO_p 都相同, 并且各半范数 $\|\cdot\|_{\text{BMO}_p}$ 两两等价。

练习 3.17 (练习 1.17 的续篇: $\mathcal{H}^1$ 的对偶空间, **)。

1°) 若连续鞅 A 满足: 存在停时 T , 使

$$A_t = 0 \quad (t \leq T), \quad |A_t| \leq P(T < \infty)^{-1} \quad \text{对每个 } t,$$

则称 A 为一个原子。给出原子的例子, 并证明每个原子都属于 $\mathcal{H}^1$ 的单位球。

2°) 设 $X \in \mathcal{H}^1$ 且 $X_0 = 0$. 对每个 $p \in \mathbb{Z}$, 定义

$$T_p = \inf\{t : |X_t| > 2^p\}, \quad C_p = 3 \cdot 2^p P(T_p < \infty).$$

证明对每个 p ,

$$A^p = \frac{X^{T_{p+1}} - X^{T_p}}{C_p}$$

是原子, 并且

$$X = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_p A^p \quad \text{在 } \mathcal{H}^1 \text{ 中成立,} \quad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |C_p| \leq 6 \|X\|_{\mathcal{H}^1}.$$

3°) 设 Y 是连续一致可积鞅。证明

$$\frac{1}{2} \|Y\|_{\text{BMO}_1} \leq \sup\{|E[A_\infty Y_\infty]| : A \text{ 是原子}\} \leq \|Y\|_{\text{BMO}_1},$$

并推出 $\mathcal{H}^1$ 的对偶空间 $(\mathcal{H}^1)^*$ 包含在 BMO 中。

提示。 最后一步使用第 IV 章第 1 节中的 Hilbert 空间 $\mathcal{H}^2$ 在 $\mathcal{H}^1$ 中稠密这一事实。

4°) 若 $X, Y \in \mathcal{H}^2$, 证明 Fefferman 不等式

$$|E[X_\infty Y_\infty]| \leq 6 \|X\|_{\mathcal{H}^1} \|Y\|_{\text{BMO}_1},$$

并推出

$$(\mathcal{H}^1)^* = \text{BMO}.$$

提示。 使用第 2 问, 并注意

$$\left| \sum_{p=-N}^N C_p A^p \right| \leq 2X^*.$$

读者会注意到: 若 X 是 $\mathcal{H}^1$ 的任意元素, Y 是 BMO_1 的任意元素, 目前还不知道与 Y 对应的线性泛函在 X 上的取值。第 IV 章练习 4.24 将继续讨论这个问题。

练习 3.18 (可预测停止, *)。 若存在一列递增停时 (T_n) , 满足

$$\lim_n T_n = T, \quad T_n < T \quad \text{在 } \{T > 0\} \text{ 上对每个 } n \text{ 成立,}$$

则称停时 T 是可预测的 (见第 IV 章第 5 节)。

若 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是一致可积鞅, $S \leq T$ 是两个可预测停时, 证明

$$X_{S-} = E[X_{T-} | \mathcal{F}_{S-}] = E[X_T | \mathcal{F}_{S-}].$$

提示。 使用第 I 章练习 4.18 的第 3 问和推论 2.4。

注释与评述

第 1 节。 本节以及随后两节材料都是经典结果，主要可追溯到 Doob (见 Doob [1])。相关教材多得无法在此一一列举；这里只说明，本书使用了 Dellacherie–Meyer [1] 与 Ikeda–Watanabe [2] 的材料。

不同背景下的迭代对数律分别归功于 Khintchine [1]、Kolmogorov [1] 和 Hartman–Wintner [1]。本书的证明取自 McKean [1]；其中的指数不等式有时称为 Bernstein 不等式，此前已在类似问题中使用。关于迭代对数律，还应提到 Kolmogorov 检验和 Dvoretzky–Erdős 检验；读者可参见 Itô–McKean [1] (另见第 III 章练习 2.32 和 3.31)。

大多数练习都是经典题目。 $L \log L$ 类由 Doob 研究 (见 Doob [1])。练习 1.20 可参见 Walsh [6] 和 Orey–Taylor [1]。

第 2 节。 命题 2.12 的证明取自 Neveu [2]，练习 2.14 取自 Dubins [1]。练习 2.13 的结果在若干场合很重要，例如研究 Markov 链时；该结果来自 Doob [1]，也是鞅收敛定理最早的一批应用之一。鞅与微分之间的关系后来得到了更深入的研究；可参阅以鞅论为主题的专著。

第 3 节。 可选停止定理及其对布朗运动的应用也早已为人熟知。练习 3.10 取自 Itô–McKean [1] 和 Lépingle [2]。

本节及后续各节关于 $\mathcal{H}^1$ 与 BMO 的系列练习录自 Durrett [2]；其中也可查到文献归属和这一主题的历史。鞅语境中的“原子”概念见 Bernard–Maisonnette [1]。练习 3.15 的例子来自 Dellacherie 等 [1]。

Knight–Maisonnette [1] 证明了：对每个一致可积鞅都成立的可选停止性质可以刻画停时。Williams [14] 中有一个相关结果 (另见 Chaumont–Yor [1]，练习 6.18)。

第 III 章 马尔可夫过程

本章介绍马尔可夫过程。之所以在这里讨论它们，是因为布朗运动以及研究布朗运动时自然出现的许多过程都是马尔可夫过程；它们甚至具有强马尔可夫性质，而这一性质在许多应用中都会用到。本章还将引入后文频繁出现的布朗滤过。

1 基本定义

直观地说，设过程 X 的状态空间为 $(E, \mathcal{E})$ 。若要在时刻 s 预测未来，知道直至时刻 s 的全部过去并不比只知道当前状态 X_s 提供更多信息，就称 X 是马尔可夫过程。

过程 X 在时刻 s 的最小“过去”是

$$\mathcal{F}_s^0 = \sigma(X_u : u \leq s).$$

对 $A \in \mathcal{E}$ 和 $s < t$ ，考虑条件概率

$$P[X_t \in A \mid \sigma(X_u : u \leq s)].$$

若 X 具有上述直观意义下的马尔可夫性，它应当是 X_s 的函数，即形如 $g(X_s)$ ，其中 g 是取值于 $[0, 1]$ 的 $\mathcal{E}$ -可测函数。为体现它对 s, t 的依赖，更准确地应写成 $g_{s,t}$ 。另一方面，这个条件期望还依赖于 A ；显然，把它看成 A 的函数时，它应当是一项概率测度，用以描述在已知过程于时刻 s 所处状态的条件下，过程在时刻 t 位于 A 中的概率。因此，上述条件期望应可写成 $g_{s,t}(X_s, A)$ ：对每个 A ，映射 $x \mapsto g_{s,t}(x, A)$ 可测；对每个 x ，映射 $A \mapsto g_{s,t}(x, A)$ 是概率测度。下面给出严格定义。

定义 1.1。 设 $(E, \mathcal{E})$ 是可测空间。 E 上的一个核 N 是从 $E \times \mathcal{E}$ 到 $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ 的映射，并且满足：

- i) 对每个 $x \in E$ ，映射 $A \mapsto N(x, A)$ 是 $\mathcal{E}$ 上的正测度；
- ii) 对每个 $A \in \mathcal{E}$ ，映射 $x \mapsto N(x, A)$ 是 $\mathcal{E}$ -可测的。

若对每个 $x \in E$ 都有 $\pi(x, E) = 1$ ，则称核 π 是一个转移概率。在马尔可夫过程的语境中，转移概率常记为 P_i ，其中 i 取遍某个适当的指标集。

若 $f \in \mathcal{E}_+$ 且 N 是核，定义 E 上的函数 Nf 为

$$Nf(x) = \int_E N(x, dy) f(y).$$

容易看出 $Nf \in \mathcal{E}_+$ 。若 M, N 是两个核，则

$$MN(x, A) := \int_E M(x, dy) N(y, A)$$

仍是一个核；其证明留给读者作为练习。

一个转移概率 π 给出了状态空间 E 中随机运动的机制：若在时刻 0 从 x 出发，则时刻 1 的位置 x_1 按照概率 $\pi(x, \cdot)$ 随机选取，时刻 2 的位置 x_2 按照 $\pi(x_1, \cdot)$ 随机选取，依此类推。这样得到的过程称为齐次马尔可夫链；马尔可夫过程就是这一机制的连续时间版本。

现在设过程 X 满足：对任意 $s < t$ ，存在转移概率 $P_{s,t}$ ，使得

$$P[X_t \in A \mid \sigma(X_u : u \leq s)] = P_{s,t}(X_s, A) \quad \text{a.s.}$$

由通常的线性与单调逼近论证，对任意 $f \in \mathcal{E}_+$ ，有

$$E[f(X_t) \mid \sigma(X_u : u \leq s)] = P_{s,t}f(X_s).$$

若 $s < t < v$ ，则

$$\begin{aligned} P[X_v \in A \mid \sigma(X_u : u \leq s)] &= E[P[X_v \in A \mid \sigma(X_u : u \leq t)] \mid \sigma(X_u : u \leq s)] \\ &= E[P_{t,v}(X_t, A) \mid \sigma(X_u : u \leq s)] \\ &= \int_E P_{s,t}(X_s, dy) P_{t,v}(y, A). \end{aligned}$$

但这个条件期望还应等于 $P_{s,v}(X_s, A)$ 。这便引出下述定义。

定义 1.2. 可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 上的一个转移函数（简称 t.f.）是一族转移概率 $P_{s,t}$ ($0 \leq s < t$)，使得对任意实数 $s < t < v$ 、任意 $x \in E$ 及 $A \in \mathcal{E}$ ，都有

$$\int_E P_{s,t}(x, dy) P_{t,v}(y, A) = P_{s,v}(x, A).$$

这个关系称为 *Chapman–Kolmogorov* 方程。

若 $P_{s,t}$ 对 s, t 的依赖只通过差 $t - s$ 体现，则称该转移函数是齐次的。此时记 $P_t = P_{0,t}$ ，Chapman–Kolmogorov 方程变为

$$P_{t+s}(x, A) = \int_E P_s(x, dy) P_t(y, A), \quad s, t \geq 0.$$

换言之，族 $\{P_t : t \geq 0\}$ 构成一个半群。

读者将在练习中看到转移函数的若干重要例子。回顾前面对马尔可夫过程的启发式描述，可以看出：对齐次转移函数，支配过程演化的随机机制不随时间改变；对非齐次转移函数，这一机制本身会随时间演化。

现在可以给出基本定义。

定义 1.3. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), Q)$ 是带滤过的概率空间， X 是适应过程。若对任意 $f \in \mathcal{E}_+$ 以及任意 $s < t$ ，都有

$$E[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = P_{s,t}f(X_s) \quad Q\text{-a.s.},$$

则称 X 是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 、以 $P_{s,t}$ 为转移函数的马尔可夫过程。概率测度 $X_0(Q)$ 称为 X 的初始分布。若转移函数是齐次的，则称该过程是齐次的；此时上式写成

$$E[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = P_{t-s}f(X_s).$$

若 X 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 是马尔可夫过程，则它关于自然滤过

$$(\mathcal{F}_t^0) = (\sigma(X_u : u \leq t))$$

也是马尔可夫过程。以后若不指明滤过而直接说 X 是马尔可夫过程，就默认使用 $(\mathcal{F}_t^0)$ 。还要强调定义中 Q 的重要性：改变 Q 后， X 没有理由仍是马尔可夫过程。由第 I 章练习 1.16，布朗运动

是马尔可夫过程；鉴于其增量的独立性，这并不令人意外。第 2 节将把这一结论作为某个更一般结果的特例加以证明。

下面建立马尔可夫过程的存在性。先给出一个判别命题。

命题 1.4. 过程 X 关于 $(\mathcal{F}_t^0) = (\sigma(X_u : u \leq t))$ 是一个以 $P_{s,t}$ 为转移函数、以 ν 为初始测度的马尔可夫过程，当且仅当：对任意 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ 以及 $f_i \in \mathcal{E}_+$ ，都有

$$E \left[\prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i}) \right] = \int_E \nu(dx_0) f_0(x_0) \int_E P_{0,t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \cdots \\ \cdots \int_E P_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, dx_k) f_k(x_k).$$

证明。 先设 X 是马尔可夫过程。可以写成

$$E \left[\prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i}) \right] = E \left[\prod_{i=0}^{k-1} f_i(X_{t_i}) E[f_k(X_{t_k}) | \mathcal{F}_{t_{k-1}}^0] \right] \\ = E \left[\prod_{i=0}^{k-1} f_i(X_{t_i}) P_{t_{k-1}, t_k} f_k(X_{t_{k-1}}) \right].$$

后一表达式与原表达式同型，只是少了一个函数，并把 f_{k-1} 换成了 $f_{k-1} P_{t_{k-1}, t_k} f_k$ 。归纳即得命题中的公式。

反过来，由单调类定理，要证明 X 是马尔可夫过程，只需对时刻 $t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq t < v$ 以及函数 $f_1, \dots, f_k, g \in \mathcal{E}_+$ ，证明

$$E \left[\prod_{i=1}^k f_i(X_{t_i}) g(X_t) \right] = E \left[\prod_{i=1}^k f_i(X_{t_i}) P_{t_i, v} g(X_t) \right].^a$$

把命题所给的等式分别应用于两端，即立刻得到这个等式。

^a**校订注：**原书此处两端连乘的下标均印为 $i = 0$ ，但本段只引入了 $t_1, \dots, t_k$ 与 $f_1, \dots, f_k$ ；故应为 $i = 1$ 。

注。 命题中看似繁复的公式其实相当直观。它可以不太严格地写成

$$Q[X_{t_0} \in dx_0, X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_k} \in dx_k] \\ = \nu(dx_0) P_{0,t_1}(x_0, dx_1) \cdots P_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, dx_k).$$

它表示：过程的初始位置 x_0 按概率测度 ν 选取；随后，时刻 t_1 的位置 x_1 按 $P_{0,t_1}(x_0, \cdot)$ 选取；依此类推。这正是定义 1.1 后所述方案的连续时间版本。

下面构造具有给定转移函数的马尔可夫过程的典范版本。事实上，由上一命题，一旦知道马尔可夫过程的转移函数，也就知道了它的全部有限维分布，因而可以应用 Kolmogorov 扩张定理。

从现在起，设 $(E, \mathcal{E})$ 是赋予 Borel 子集 σ -代数的 Polish 空间。这一假设实际上只在下面的定理 1.5 中使用，本节其余内容都不需要它。令

$$\Omega = E^{\mathbb{R}_+}, \quad \mathcal{F}_\infty^0 = \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+}, \quad \mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_u : u \leq t),$$

其中 X 是坐标过程。

定理 1.5. 给定 $(E, \mathcal{E})$ 上的转移函数 $P_{s,t}$, 对 $(E, \mathcal{E})$ 上任意概率测度 ν , 存在唯一的 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^0)$ 上的概率测度 P_ν , 使得 X 关于 $(\mathcal{F}_t^0)$ 是以 $P_{s,t}$ 为转移函数、以 ν 为初始测度的马尔可夫过程。

证明. 定义投影协调的测度族

$$\begin{aligned} P_\nu^{t_1, \dots, t_n}(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_n) \\ = \int_{A_0} \nu(dx_0) \int_{A_1} P_{0,t_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} P_{t_1,t_2}(x_1, dx_2) \cdots \int_{A_n} P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n). \end{aligned}$$

然后应用 Kolmogorov 扩张定理。由命题 1.4, 在所得概率测度 P_ν 下, 坐标过程 X 是马尔可夫过程。□

从现在起, 除非另有说明, 只考虑齐次转移函数和齐次过程。在这种情形下,

$$\begin{aligned} P_\nu[X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n] \\ = \int_{A_0} \nu(dx) \int_{A_1} P_{t_1}(x, dx_1) \int_{A_2} P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \cdots \int_{A_n} P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n). \end{aligned} \quad (1.1)$$

于是, 对每个 x , 取初始测度 ε_x 得到一个概率测度 P_{ε_x} , 以后简记为 P_x 。若 Z 是 $\mathcal{F}_\infty^0$ -可测的非负随机变量, 则它关于 P_x (相应地, 关于 P_ν) 的数学期望记为 $E_x[Z]$ (相应地, 记为 $E_\nu[Z]$)。特别地, 若 Z 是一个矩形集的示性函数, 并且该矩形除时刻 t 所对应的分量外, 其余分量都等于 E , 也就是说 $Z = \mathbf{1}_{\{X_t \in A\}}$, 其中 $A \in \mathcal{E}$, 则

$$P_x[X_t \in A] = P_t(x, A).$$

这就是说: 从 x 出发的过程在时刻 t 位于 A 中的概率, 正是转移函数的值 $P_t(x, A)$ 。特别地, 这说明 $x \mapsto P_x[X_t \in A]$ 是可测的。更一般地, 有下述命题。

命题 1.6. 若 Z 是 $\mathcal{F}_\infty^0$ -可测并且非负或有界, 则映射 $x \mapsto E_x[Z]$ 是 $\mathcal{E}$ -可测的, 并且

$$E_\nu[Z] = \int_E \nu(dx) E_x[Z].$$

证明. 使得命题对 $Z = \mathbf{1}_\Gamma$ 成立的集合 $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty^0$ 构成一个单调类。另一方面, 若

$$\Gamma = \{X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\},$$

则 $P_x[\Gamma]$ 由式 (1.1) (其中 $\nu = \varepsilon_x$) 给出; 不难归纳证明它是 x 的 $\mathcal{E}$ -可测函数。由单调类定理, 命题对所有 $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty^0$ 成立。于是它先对简单函数成立, 再通过单调递增取极限, 对任意 $Z \in (\mathcal{F}_\infty^0)_+$ 成立; 有界情形再由正部与负部的分解得到。□

注. 对 d 维布朗运动, 概率测度族 P_ν 已在第 I 章练习 3.14 中引入。

依照第 I 章定义 4.12, 若一个关于路径 ω 的性质所成立的集合对每个 ν 都具有 P_ν -概率 1, 就称该性质几乎必然成立。显然, 只需对每个 $x \in E$ 验证该集合具有 P_x -概率 1 即可。

利用第 I 章第 3 节的平移算子, 现在给出马尔可夫性质的一种便于使用的形式。

命题 1.7 (马尔可夫性质)。若 Z 是 $\mathcal{F}_\infty^0$ -可测并且非负 (或有界), 则对每个 $t > 0$ 及每个初始测度 ν , 都有

$$E_\nu[Z \circ \theta_t \mid \mathcal{F}_t^0] = E_{X_t}[Z] \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

上式右端是两个可测映射 $\omega \mapsto X_t(\omega)$ 与 $x \mapsto E_x[Z]$ 复合所得的随机变量; 公式断言, 这个随机变量属于左端所表示的等价类。由 θ_t 的定义, 随机变量 $Z \circ \theta_t$ 只依赖于时刻 t 之后的未来; 它关于过去的条件期望只应是当前状态 X_t 的函数, 上式正表达了这一点。特别地, 若取 $Z = \mathbf{1}_{\{X_s \in A\}}$, 则上式变为

$$P_\nu[X_{t+s} \in A \mid \mathcal{F}_t^0] = P_{X_t}[X_s \in A] = P_s(X_t, A),$$

这正是定义 1.3 中的公式。

还应特别注意, 命题 1.7 所表述的马尔可夫性质是整个概率测度族 P_x ($x \in E$) 的性质。

命题 1.7 的证明。要证对任意 $\mathcal{F}_t^0$ -可测非负随机变量 Y , 都有

$$E_\nu[Z \circ \theta_t Y] = E_\nu[E_{X_t}[Z]Y].$$

由通常的扩张论证, 只需证明如下特殊情形:

$$Y = \prod_{i=1}^k f_i(X_{t_i}), \quad f_i \in \mathcal{E}_+, \quad t_i \leq t, \quad Z = \prod_{j=1}^n g_j(X_{s_j}), \quad g_j \in \mathcal{E}_+.$$

在这种情形下, 所需等式直接由命题 1.4 得到。 □

下面去掉对 P_t 的一项限制。此前假设 $P_t(x, E) = 1$, 但有些重要情形中, 对某些 x, t 可能有 $P_t(x, E) < 1$ 。前一种情形称 P_t 是马尔可夫型的; 一般情形, 即允许 $P_t(x, E)$ 小于 1 时, 称其为次马尔可夫型的。若把马尔可夫过程理解为一个粒子的随机运动, 那么次马尔可夫情形就对应于粒子可能在有限时间内消失或死亡。

有一个简单方法可以把次马尔可夫情形转化为已经讨论过的马尔可夫情形。在状态空间 E 中添加一个新点 Δ , 称为墓地状态, 并令

$$E_\Delta = E \cup \{\Delta\}, \quad \mathcal{E}_\Delta = \sigma(\mathcal{E}, \{\Delta\}).$$

在 $(E_\Delta, \mathcal{E}_\Delta)$ 上定义新的转移函数 $\tilde{P}_t$:

$$\tilde{P}_t(x, A) = P_t(x, A) \quad (A \subset E), \quad \tilde{P}_t(x, \{\Delta\}) = 1 - P_t(x, E), \quad \tilde{P}_t(\Delta, \{\Delta\}) = 1.$$

以后在记号上不再区分 P_t 与 $\tilde{P}_t$ 。在本书关心的情形中, Δ 是吸收状态, 即从 Δ 出发的过程将永远停留在 Δ 。

约定把 E 上的所有函数延拓到 E_Δ , 并令 $f(\Delta) = 0$ 。相应地, 马尔可夫性质应写成

$$E_\nu[Z \circ \theta_t \mid \mathcal{F}_t^0] = E_{X_t}[Z] \quad P_\nu\text{-a.s., 在集合}\{X_t \neq \Delta\}\text{上.}$$

这是因为上述约定使右端在 $\{X_t = \Delta\}$ 上为零, 而左端并没有理由在那里也为零。

最后, 正如第 I 章第 1 节所指出的, 依靠目前构造出的马尔可夫过程还无法继续深入: 过程 X 的路径与滤过 $(\mathcal{F}_t^0)$ 都没有足够好的性质。因此, 下一节将研究一类具有良好版本的特殊马尔可夫过程。

练习 1.8. 证明下列各族核都是齐次转移函数。

(i) (以速度 v 向右匀速平移) $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 且

$$P_t(x, \cdot) = \varepsilon_{x+vt}.$$

(ii) (布朗运动) $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 并且 $P_t(x, \cdot)$ 具有密度

$$g_t(y-x) = (2\pi t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right).$$

(iii) (Poisson 过程) $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 且

$$P_t(x, dy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t} t^n}{n!} \varepsilon_{x+n}(dy).$$

这个例子可作如下推广。设 π 是空间 $(E, \mathcal{E})$ 上的转移概率。证明可以归纳定义转移概率 π^n :

$$\pi^n(x, A) = \int_E \pi(x, dy) \pi^{n-1}(y, A).$$

于是

$$P_t(x, dy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t} t^n}{n!} \pi^n(x, dy)$$

是一个转移函数。描述与之相应的随机运动。

练习 1.9. 证明下列两族核都是 $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ 上的马尔可夫型转移函数:

$$(i) \quad P_t f(x) = e^{-t/x} f(x) + \int_x^{\infty} t y^{-2} e^{-t/y} f(y) dy,$$

$$(ii) \quad Q_t f(x) = \frac{x}{x+t} f(x+t) + \int_x^{\infty} t(t+y)^{-2} f(t+y) dy.$$

练习 1.10 (时空马尔可夫过程). 设 X 是非齐次马尔可夫过程。证明状态空间为 $\mathbb{R}_+ \times E$ 的过程 (t, X_t) 是齐次马尔可夫过程, 称为与 X 相伴的“时空”过程; 写出它的转移函数。例如, 热过程 (见第 I 章第 1 节) 就是与布朗运动相伴的时空过程。

练习 1.11. 设 X 是以 (P_t) 为转移函数的马尔可夫过程, f 是有界 Borel 函数。证明对每个 x , 过程

$$(P_{t-s} f(X_s), 0 \leq s \leq t)$$

是一个 P_x -鞅。

练习 1.12. 设 B 是一维布朗运动, 并令

$$X_t = \int_0^t B_s ds.$$

证明 X 不是马尔可夫过程, 但二元过程 (B, X) 是状态空间为 $\mathbb{R}^2$ 的马尔可夫过程。第 X 章第 1 节将在更一般的框架下重新讨论本题。

练习 1.13 (高斯马尔可夫过程)。

1°) 证明中心高斯过程 X_t ($t \geq 0$) 是马尔可夫过程, 当且仅当其协方差函数满足

$$\Gamma(s, u)\Gamma(t, t) = \Gamma(s, t)\Gamma(t, u), \quad s < t < u.$$

若 $\Gamma(t, t) = 0$, 则过程族 $(X_s : s \leq t)$ 与 $(X_s : s \geq t)$ 相互独立。过程

$$B_t - tB_1, \quad t \geq 0,$$

就是这类过程的一个例子; 它在 $[0, 1]$ 上的限制是布朗桥, 且其 $\Gamma(t, t)$ 在 $t = 1$ 处为零。

第 I 章练习 1.14 中的过程 Y 是中心高斯马尔可夫过程的另一个例子。

2°) 若 Γ 在 $\mathbb{R}_+^2$ 上连续且处处为正, 证明

$$\Gamma(s, t) = a(s)a(t)\rho(s \wedge t),$$

其中 a 连续且处处不为零, ρ 连续、严格为正且单调不减。证明 $(X_t/a(t) : t \geq 0)$ 是高斯鞅。

3°) 设 a, ρ 如上, B 是定义在区间 $[\rho(0), \rho(\infty))$ 上的布朗运动。则

$$Y_t = a(t)B_{\rho(t)}$$

是协方差为第 2° 问中 Γ 的高斯过程。证明由 Y 生成的高斯空间与 $L^2(\mathbb{R}_+, d\rho)$ 同构, 其中随机变量 Y_t 对应于函数 $a(t)\mathbf{1}_{[0,t]}$ 。

4°) 证明: 平稳高斯马尔可夫过程只有参数为 β 、尺度为 c 的平稳 Ornstein–Uhlenbeck 过程 (见第 I 章第 3 节)。证明其转移函数具有密度

$$p_t(x, y) = (2\pi c(1 - e^{-2\beta t}))^{-1/2} \exp\left(-\frac{(y - e^{-\beta t}x)^2}{2c(1 - e^{-2\beta t})}\right).$$

还要给出初始测度 m , 并验证它是不变测度 (见第 X 章第 3 节); 由于过程平稳, 这本应如此。还请注意

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(x, A) = m(A).$$

5°) 参数为 β 、尺度为 c 的 Ornstein–Uhlenbeck 过程 (这里不要求“平稳”) 是具有上述转移函数的马尔可夫过程。为使 X 在 P_ν 下仍是高斯过程, 初始测度 ν 必须满足什么条件? 在这种情形下计算其协方差。

6°) 设 u, v 是两个连续且处处不为零的函数。则

$$\Gamma(s, t) = u(s \wedge t)v(s \vee t)$$

是一个协方差函数, 当且仅当 u/v 严格为正且单调不减。本问与前面三问无关。

练习 1.14。

1°) 设 B 是一维布朗运动。证明对任意概率测度 P_ν , $|B|$ 是 $[0, \infty)$ 上的齐次马尔可夫过程, 其转移函数具有密度

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) + \exp\left(-\frac{(y+x)^2}{2t}\right) \right].$$

这就是在 0 处反射的布朗运动。更一般的结论见练习 1.17。

2°) 更一般地, 证明对每个整数 d , d 维布朗运动的模是一个马尔可夫过程。(本问将在第 VI 章第 3 节解答。)

3°) 定义在 0 和 1 处反射的一维布朗运动; 证明它是齐次马尔可夫过程, 并计算其转移函数。

提示: 可在集合 $\{|B_t - 2n| \leq 1\}$ 上定义 $X_t = |B_t - 2n|$ 。

第 2° 问与第 3° 问相互独立。

练习 1.15 (被杀死的布朗运动)。

1°) 证明当 $x > 0, y > 0$ 时, 密度

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(y+x)^2}{2t}\right) \right]$$

定义了 $(0, \infty)$ 上的次马尔可夫型转移半群 Q_t 。它就是布朗运动到达 0 时被杀死所得过程的转移函数, 参见练习 3.29。

2°) 证明恒等函数在 Q_t 下不变, 即

$$\int_0^\infty Q_t(x, dy)y = x.$$

因此, 由

$$H_t f(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty Q_t(x, dy) y f(y)$$

定义的算子 H_t 也构成半群。令

$$H_t(0, dy) = \left(\frac{2}{\pi t^3}\right)^{1/2} y^2 e^{-y^2/(2t)} dy,$$

便可把它延拓到 $[0, \infty)$ 。这个半群属于三维 Bessel 过程; 该过程将在第 VI 章研究, 并在本书后几部分中发挥重要作用。

练习 1.16 (斜布朗运动的转移函数)。 设 $0 \leq \alpha \leq 1$, g_t 是布朗运动的转移密度 (即转移函数关于 Lebesgue 测度的密度)。证明下列函数是转移密度:

$$p_t^\alpha(0, y) = 2\alpha g_t(y) \mathbf{1}_{\{y>0\}} + 2(1-\alpha) g_t(y) \mathbf{1}_{\{y<0\}},$$

以及

$$\begin{aligned} p_t^\alpha(x, y) = & \mathbf{1}_{\{x>0\}} \left[(g_t(y-x) + (2\alpha-1)g_t(y+x)) \mathbf{1}_{\{y>0\}} + 2(1-\alpha)g_t(y-x) \mathbf{1}_{\{y<0\}} \right] \\ & + \mathbf{1}_{\{x<0\}} \left[(g_t(y-x) + (1-2\alpha)g_t(y+x)) \mathbf{1}_{\{y<0\}} + 2\alpha g_t(y-x) \mathbf{1}_{\{y>0\}} \right]. \end{aligned}$$

当 $\alpha = 0$ 、 $\alpha = 1$ 及 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 分别得到什么?

练习 1.17 (马尔可夫过程的像)。

1°) 设 X 是以 (P_t) 为转移函数的马尔可夫过程, ϕ 是从 $(E, \mathcal{E})$ 到 $(E', \mathcal{E}')$ 的 Borel 函数, 并且对每个 $A \in \mathcal{E}$ 都有 $\phi(A) \in \mathcal{E}'$ 。再假设对每个 t 和每个 $A' \in \mathcal{E}'$, 只要 $\phi(x) = \phi(y)$,

就有

$$P_t(x, \phi^{-1}(A')) = P_t(y, \phi^{-1}(A')).$$

证明：对每个 $x \in E$ ，在 P_x 下，过程 $X'_t = \phi(X_t)$ 是状态空间为 $(E', \mathcal{E}')$ 的马尔可夫过程。布朗运动在 0 处反射的情形见练习 1.14。

2°) 设 X 是 d 维布朗运动， ϕ 是 $\mathbb{R}^d$ 中以 x 为中心的旋转。对 $\omega \in \Omega$ ，以

$$X_t(\tilde{\phi}(\omega)) = \phi(X_t(\omega))$$

定义 $\tilde{\phi}(\omega)$ 。证明 $\tilde{\phi}$ 可测，并且对任意 $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty^0$ ，都有

$$P_x[\Gamma] = P_x[\tilde{\phi}^{-1}(\Gamma)].$$

3°) 令

$$T_r = \inf\{t > 0 : |X_t - X_0| \geq r\}.$$

证明 T_r 与 X_{T_r} 相互独立。此外，在 P_x 下， X_{T_r} 的分布是以 x 为球心、 r 为半径的球面上的均匀分布。

提示：利用下述事实：球面上的均匀分布是球面上唯一在所有旋转下不变的概率分布。这些问题将在第 VIII 章第 3 节再次讨论。

2 Feller 过程

回顾一下，本书所考虑的转移函数和过程都是时间齐次的。设 E 是局部紧且具有可数基的空间（简称 LCCB 空间）， $C_0(E)$ 表示 E 上所有在无穷远处消失的连续函数所成的空间；不会引起混淆时简记为 C_0 。还要回顾：正算子把非负函数映成非负函数。

定义 2.1。 $C_0(E)$ 上的一个 Feller 半群是一族正线性算子 $(T_t)_{t \geq 0}$ ，满足：

- i) $T_0 = \text{Id}$ ，且对每个 t ， $\|T_t\| \leq 1$ ；
- ii) 对任意 $s, t \geq 0$ ， $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ ；
- iii) 对每个 $f \in C_0(E)$ ，

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T_t f - f\| = 0.$$

下面的命题说明这个定义与马尔可夫过程的关系。

命题 2.2。 对 E 上每个 Feller 半群，都唯一对应一个 $(E, \mathcal{E})$ 上的齐次转移函数 $(P_t)_{t \geq 0}$ ，使得对任意 $f \in C_0$ 和 $x \in E$ ，

$$T_t f(x) = P_t f(x).$$

证明。 对每个 $x \in E$ ，映射 $f \mapsto T_t f(x)$ 是 C_0 上的正线性泛函。由 Riesz 表示定理，存在 $\mathcal{E}$ 上的测度 $P_t(x, \cdot)$ ，使得

$$T_t f(x) = \int_E P_t(x, dy) f(y), \quad f \in C_0.$$

映射

$$x \longmapsto \int_E P_t(x, dy) f(y)$$

属于 C_0 ，因而是 Borel 可测的。再用单调类定理可知，对任意 $A \in \mathcal{E}$ ，映射 $x \mapsto P_t(x, A)$ 都是 Borel 可测的。这样便定义了转移概率 P_t 。由 T_t 的半群性质（性质 ii）以及再次应用单调类定理可知， (P_t) 构成转移函数。 $\square$

定义 2.3。 与 Feller 半群相联系的转移函数称为 *Feller 转移函数*。

除广义 Poisson 过程可能例外外，练习 1.8 中的转移函数都是 Feller 转移函数。检验这一点时，下面的命题很方便；它说明定义 2.1 中的连续性条件 iii) 其实等价于一个看似更弱的条件。

命题 2.4。 一个转移函数是 Feller 转移函数，当且仅当：

- i) 对每个 t ， $P_t C_0 \subset C_0$ ；
- ii) 对每个 $f \in C_0$ 和每个 $x \in E$ ，

$$\lim_{t \downarrow 0} P_t f(x) = f(x).$$

证明。 只需证明充分性。若 $f \in C_0$ ，由 i) 知 $P_t f \in C_0$ ；再由 ii)，对每个 x ，

$$\lim_{s \downarrow 0} P_{t+s} f(x) = P_t f(x).$$

因此 $(t, x) \mapsto P_t f(x)$ 关于 t 右连续，从而在 $\mathbb{R}_+ \times E$ 上可测。于是对 $p > 0$ ，函数

$$x \mapsto U_p f(x) = \int_0^\infty e^{-pt} P_t f(x) dt$$

可测，并且由 ii) 有

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p U_p f(x) = f(x).$$

此外 $U_p f \in C_0$ 。事实上，若 $x_n \rightarrow x$ （当 E 非紧时，也可令 x_n 趋于无穷远点），则容易验证

$$U_p f(x_n) \rightarrow U_p f(x) \quad (\text{相应地，趋于 } 0).$$

映射 $f \mapsto U_p f$ 称为半群 (P_t) 的 p 阶预解式，并满足 预解方程

$$U_p f - U_q f = (q - p) U_p U_q f = (q - p) U_q U_p f.$$

因此 U_p 的像

$$D = U_p(C_0)$$

与 $p > 0$ 无关。还有

$$\|p U_p f\| \leq \|f\|.$$

下面说明 D 在 C_0 中稠密。若有界测度 μ 在 D 上为零，则对任意 $f \in C_0$ ，由支配收敛定理，

$$\int f d\mu = \lim_{p \rightarrow \infty} \int p U_p f d\mu = 0.$$

故 $\mu = 0$ ，从而 D 稠密。

再由 Fubini 定理，

$$P_t U_p f(x) = e^{pt} \int_t^\infty e^{-ps} P_s f(x) ds,$$

于是

$$\|P_t U_p f - U_p f\| \leq (e^{pt} - 1) \|U_p f\| + t \|f\|.$$

这说明对每个 $f \in D$,

$$\lim_{t \downarrow 0} \|P_t f - f\| = 0.$$

最后用通常的稠密性论证, 即得对每个 $f \in C_0$ 都成立。 $\square$

由 Fubini 定理容易看出, 预解式 U_p 由一个核给出; 仍把这个核记为 U_p 。也就是说, 对 $f \in C_0$,

$$U_p f(x) = \int_E U_p(x, dy) f(y).$$

对每个 $x \in E$, 有 $U_p(x, E) \leq 1/p$, 而且这些核满足预解方程

$$\begin{aligned} U_p(x, A) - U_q(x, A) &= (q - p) \int_E U_p(x, dy) U_q(y, A) \\ &= (q - p) \int_E U_q(x, dy) U_p(y, A). \end{aligned}$$

还可验证, 对 $f \in C_0$,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|p U_p f - f\| = 0.$$

事实上,

$$\begin{aligned} \|p U_p f - f\| &= \sup_x |p U_p f(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_x \int_0^\infty p e^{-pt} |P_t f(x) - f(x)| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-s} \|P_{s/p} f - f\| ds, \end{aligned}$$

最后一项由定义 2.1 的性质 iii) 和 Lebesgue 支配收敛定理趋于 0。预解式实际上就是半群的 Laplace 变换, 所以半群在 0 附近的性质会转化成预解式在无穷远处的性质。

本节后文及练习中还会给出 Feller 半群的基本例子。

定义 2.5。 具有 Feller 转移函数的马尔可夫过程称为 *Feller 过程*。

从现在起, 研究 Feller 过程的典范版本 X , 并证明它存在一个良好修正。

命题 2.6。 对任意 $\alpha > 0$ 以及 $f \in C_0^+$, 过程

$$e^{-\alpha t} U_\alpha f(X_t)$$

关于滤过 $(\mathcal{F}_t^0)$, 在任意概率测度 P_ν 下都是上鞅。

证明。 由命题 1.7 的马尔可夫性质, 对 $s < t$, 有

$$\begin{aligned} E_\nu[e^{-\alpha t} U_\alpha f(X_t) | \mathcal{F}_s^0] &= e^{-\alpha t} E_\nu[U_\alpha f(X_{t-s} \circ \theta_s) | \mathcal{F}_s^0] \\ &= e^{-\alpha t} P_{t-s} U_\alpha f(X_s). \end{aligned}$$

又容易看出, 处处有

$$e^{-\alpha(t-s)} P_{t-s} U_\alpha f \leq U_\alpha f.$$

因此

$$E_\nu[e^{-\alpha t} U_\alpha f(X_t) | \mathcal{F}_s^0] \leq e^{-\alpha s} U_\alpha f(X_s),$$

结论得证。 □

现在来到本节的一个主要结果。以后始终约定：若 E 非紧，则 E_Δ 是 E 的单点紧化， Δ 是无穷远点；若 E 紧，则 Δ 是 E_Δ 中的一个孤立点。回顾第 I 章第 3 节：取值于 E_Δ 的 càdlàg 函数，是指相对于 E_Δ 上的这一拓扑，在 $\mathbb{R}_+$ 上右连续并在 $(0, \infty)$ 上有左极限的函数。

定理 2.7. 过程 X 存在一个 càdlàg 修正。

这里处理的并非第 I 章第 1 节那样的单个概率测度，而是整个概率测度族 (P_ν) 。因此要强调：上面的结论是说，在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上存在一个 càdlàg 过程 $\tilde{X}$ ，使对每个 t 以及每个概率测度 P_ν ，都有

$$X_t = \tilde{X}_t \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

证明需要下面的引理。

引理 2.8. 设随机变量 X, Y 定义在同一概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上，取值于 LCCB 空间 E 。则 $X = Y$ 几乎必然成立，当且仅当对 E 上任意一对有界连续函数 (f, g) ，都有

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)g(X)].$$

证明. 只需证明充分性。由单调类定理容易得到，对 $E \times E$ 上任意非负 Borel 函数 f ，

$$E[f(X, Y)] = E[f(X, X)].$$

由于 E 可度量，集合

$$\{(x, y) \in E \times E : x \neq y\}$$

的示性函数就是这样的 Borel 函数。因此 $X = Y$ 几乎必然成立。 □

定理 2.7 的证明. 取 C_0^+ 中一个可分离点的序列 (f_n) ，即对 E_Δ 中任意不同的 x, y ，序列中存在 f_n 使 $f_n(x) \neq f_n(y)$ 。由于当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时， $\alpha U_\alpha f_n$ 一致收敛到 f_n ，可数集

$$\mathcal{H} = \{U_\alpha f_n : \alpha, n \geq 1\}$$

也可分离点。

设 S 是 $\mathbb{R}_+$ 的一个可数稠密子集。由命题 2.6 与第 II 章定理 2.5，对每个 $h \in \mathcal{H}$ ，过程 $h(X_t)$ 几乎必然沿 S 存在右极限。由于 $\mathcal{H}$ 可数且可分离点，几乎必然地，函数 $t \mapsto X_t(\omega)$ 沿 S 在 E_Δ 中存在右极限。

对这些极限存在的 ω ，令

$$\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in S}} X_s(\omega);$$

对极限不存在的 ω ，令 $\tilde{X}_t(\omega) \equiv x$ ，其中 $x \in E$ 是任取的固定点。断言：对每个 t ，都有 $\tilde{X}_t = X_t$ 几乎必然成立。事实上，若 $g, h \in C(E_\Delta)$ ，则

$$\begin{aligned} E_\nu[g(X_t)h(\tilde{X}_t)] &= \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in S}} E_\nu[g(X_t)h(X_s)] \\ &= \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in S}} E_\nu[g(X_t)P_{s-t}h(X_t)] \\ &= E_\nu[g(X_t)h(X_t)], \end{aligned}$$

因为当 $s \downarrow t$ 时, $P_{s-t}h$ 一致收敛于 h 。由引理 2.8, 断言成立, 所以 $\tilde{X}$ 是 X 的右连续修正。这个修正还有左极限。事实上, 对每个 $h \in \mathcal{H}$, 过程 $h(\tilde{X}_t)$ 现在是右连续上鞅; 由第 II 章定理 2.8, 它几乎必然沿 $\mathbb{R}_+$ 有左极限。再利用 $\mathcal{H}$ 可分离点, 便知 $\tilde{X}$ 几乎必然在 E_Δ 中沿 $\mathbb{R}_+$ 有左极限。 $\square$

注。 用与证明 $\tilde{X}_t = X_t$ 几乎完全相同的方法, 可以证明: 对每个固定 t 以及每个初始分布 ν ,

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_{t-} \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

换言之, $\tilde{X}_{t-}$ 是 X 的左连续修正。也可以说 X 没有固定的不连续时刻, 即不存在固定 t 使

$$P_\nu[\tilde{X}_{t-} \neq \tilde{X}_t] > 0.$$

以后只考虑 X 的 càdlàg 版本。对这种版本有下述命题。

命题 2.9。 若

$$\zeta(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_{t-}(\omega) = \Delta \text{ 或 } X_t(\omega) = \Delta\},$$

则几乎必然地, 在 $[\zeta, \infty)$ 上恒有 $X = \Delta$ 。

证明。 取严格为正的函数 $\phi \in C_0$, 则 $g = U_1\phi$ 也严格为正。上鞅

$$Z_t = e^{-t}g(X_t)$$

是 càdlàg 的, 并且

$$Z_{t-} = 0 \iff X_{t-} = \Delta, \quad Z_t = 0 \iff X_t = \Delta.$$

所以

$$\zeta(\omega) = \inf\{t \geq 0 : Z_{t-}(\omega) = 0 \text{ 或 } Z_t(\omega) = 0\}.$$

结论由第 II 章命题 3.4 得到。 $\square$

与第 I 章第 3 节略有不同, 现在用 D 表示所有函数 $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow E_\Delta$ 所成的空间, 其中 ω 是 càdlàg 的, 并且只要 $\omega(s-) = \Delta$ 或 $\omega(s) = \Delta$, 便对一切 $t \geq s$ 都有 $\omega(t) = \Delta$ 。空间 D 包含在

$$\Omega = E^{\mathbb{R}_+}$$

中; 与第 I 章第 3 节相同, 可以把它用作概率空间。坐标映射在 D 上的限制仍记为 X_t , 而 P_ν 在典范映射下的像仍记为 P_ν 。对每个 P_ν , X 都是具有转移函数 P_t 的 càdlàg 马尔可夫过程; 称它为半群 P_t 的典范 càdlàg 实现。

在典范实现上显然有一族平移算子 θ_t , 因而可以使用命题 1.7 形式的马尔可夫性质。后文会经常使用这一版本, 但下一节将看到它不是唯一会遇到的版本。通常可以把问题转移到典范实现上, 从而自由使用平移算子; 例如, 下面的结果对所有 càdlàg 版本都成立。不过有时必须使用另一个版本; 若需要平移算子, 就必须另行确认它们可以定义并使用。

到目前为止 (例如命题 1.7), 一直使用自然滤过 $(\mathcal{F}_t^0)$ 。第 I 章第 4 节已经指出, 这个滤过既不右连续也不完备, 因此必须对其作增广。

记 $\mathcal{F}_\infty^\nu$ 为 $\mathcal{F}_\infty^0$ 关于 P_ν 的完备化; 在每个 $\mathcal{F}_t^0$ 中加入 $\mathcal{F}_\infty^\nu$ 内所有 P_ν -零测集, 所得滤过记为

$(\mathcal{F}_t^\nu)$ 。最后令

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{\nu} \mathcal{F}_t^\nu, \quad \mathcal{F}_\infty = \bigcap_{\nu} \mathcal{F}_\infty^\nu.$$

命题 2.10. 滤过 $(\mathcal{F}_t^\nu)$ 与 $(\mathcal{F}_t)$ 都是右连续的。

证明. 显然, 只需证明 $(\mathcal{F}_t^\nu)$ 右连续。又因为 $\mathcal{F}_t^\nu$ 与 $\mathcal{F}_{t+}^\nu$ 都是 P_ν -完备的, 只需对每个 $\mathcal{F}_\infty^0$ -可测非负随机变量 Z 证明

$$E_\nu[Z | \mathcal{F}_t^\nu] = E_\nu[Z | \mathcal{F}_{t+}^\nu] \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

由单调类定理, 只需考虑

$$Z = \prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i}), \quad f_i \in C_0, \quad t_1 < t_2 < \cdots < t_n.$$

注意对每个 t , 都有

$$E_\nu[Z | \mathcal{F}_t^\nu] = E_\nu[Z | \mathcal{F}_t^0] \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

固定实数 t , 取整数 k 使 $t_{k-1} \leq t < t_k$ 。当 $h > 0$ 充分小时,

$$E_\nu[Z | \mathcal{F}_{t+h}^\nu] = \prod_{i=1}^{k-1} f_i(X_{t_i}) g_h(X_{t+h}) \quad P_\nu\text{-a.s.},$$

其中

$$\begin{aligned} g_h(x) &= \int_E P_{t_k-t-h}(x, dx_k) f_k(x_k) \int_E P_{t_{k+1}-t_k}(x_k, dx_{k+1}) f_{k+1}(x_{k+1}) \cdots \\ &\quad \cdots \int_E P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) f_n(x_n). \end{aligned}$$

令 $h \downarrow 0$, 则 g_h 在 E 上一致收敛于

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_E P_{t_k-t}(x, dx_k) f_k(x_k) \int_E P_{t_{k+1}-t_k}(x_k, dx_{k+1}) f_{k+1}(x_{k+1}) \cdots \\ &\quad \cdots \int_E P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) f_n(x_n). \end{aligned}$$

此外, 由路径右连续性, $X_{t+h} \rightarrow X_t$ 。所以利用第 II 章定理 2.3,

$$\begin{aligned} E_\nu[Z | \mathcal{F}_{t+}^\nu] &= \lim_{h \downarrow 0} E_\nu[Z | \mathcal{F}_{t+h}^\nu] \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} f_i(X_{t_i}) g(X_t) = E_\nu[Z | \mathcal{F}_t^\nu] \quad P_\nu\text{-a.s.} \end{aligned}$$

证明完成。 □

由命题 2.10, $(\mathcal{F}_t)$ 是 $(\mathcal{F}_t^0)$ 的通常增广 (第 I 章第 4 节); 若只考虑单个概率测度 P_ν , 则 $(\mathcal{F}_t^\nu)$ 也是通常增广。值得注意的是, 仅作完备化就已经足以使滤过右连续。

后文最常使用的正是 $(\mathcal{F}_t)$ 与 $(\mathcal{F}_t^\nu)$, 所以必须判断此前关于 $(\mathcal{F}_t^0)$ 叙述的性质是否仍适用于 $(\mathcal{F}_t)$ 。这里显然会遇到若干可测性问题, 下面依次解决。

命题 2.11. 若 Z 是 $\mathcal{F}_\infty$ -可测的有界随机变量, 则映射

$$x \mapsto E_x[Z]$$

是 $\mathcal{E}^*$ -可测的, 并且

$$E_\nu[Z] = \int_E E_x[Z] \nu(dx).$$

证明. 任取 ν . 由完备化 σ -代数的定义, 存在两个 $\mathcal{F}_\infty^0$ -可测随机变量 Z_1, Z_2 , 使得

$$Z_1 \leq Z \leq Z_2, \quad E_\nu[Z_2 - Z_1] = 0.$$

显然, 对每个 x ,

$$E_x[Z_1] \leq E_x[Z] \leq E_x[Z_2].$$

映射 $x \mapsto E_x[Z_i]$ ($i = 1, 2$) 是 $\mathcal{E}$ -可测的, 而且

$$\int_E (E_x[Z_2] - E_x[Z_1]) \nu(dx) = E_\nu[Z_2 - Z_1] = 0.$$

因此 $E[Z]$ 是 $\mathcal{E}^\nu$ -可测的. 由于 ν 任意, 它是 $\mathcal{E}^*$ -可测的, 结论得证. $\square$

命题 2.12. 对每个 t , 随机变量 X_t 是 $\mathcal{F}_t/\mathcal{E}^*$ -可测的.

证明. 这是第 0 章命题 3.2 的直接推论. $\square$

下面把命题 1.7 的马尔可夫性质推广到 σ -代数 $\mathcal{F}_t$. 先证明:

命题 2.13. 对每个 t 和 $h > 0$, 都有

$$\theta_h^{-1}(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{F}_{t+h}.$$

证明. 对自然滤过, 显然有 $\theta_h^{-1}(\mathcal{F}_t^0) \subset \mathcal{F}_{t+h}^0$. 由第 0 章命题 3.2, 只需证明: 对任意初始测度 ν , 存在初始测度 μ , 使

$$\theta_h(P_\nu) = P_\mu.$$

令 $\mu = X_h(P_\nu)$. 由命题 1.7 的马尔可夫性质, 对任意 $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty^0$,

$$P_\nu[\mathbf{1}_\Gamma \circ \theta_h] = E_\nu[E_{X_h}[\mathbf{1}_\Gamma]] = \int_E \mu(dy) P_y[\Gamma] = P_\mu[\Gamma].$$

证明完成. $\square$

命题 2.14 (马尔可夫性质). 若 Z 是 $\mathcal{F}_\infty$ -可测并且非负 (或有界), 则对每个 $t > 0$ 及任意初始测度 ν ,

$$E_\nu[Z \circ \theta_t | \mathcal{F}_t] = E_{X_t}[Z] \quad P_\nu\text{-a.s.}, \text{ 在 } \{X_t \neq \Delta\} \text{ 上.}$$

特别地, X 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 仍是马尔可夫过程.

证明。 由命题 2.11 与 2.12, 映射 $E_{X_t}[Z]$ 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。因此只需对每个 $A \in \mathcal{F}_t$ 证明

$$E_\nu[\mathbf{1}_A Z \circ \theta_t] = E_\nu[\mathbf{1}_A E_{X_t}[Z]]. \quad (*)$$

可以假设 Z 有界。由 $\mathcal{F}_\infty$ 的定义, 存在 $\mathcal{F}_\infty^0$ -可测随机变量 Z' 以及 $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty^0$, 使得

$$\{Z \neq Z'\} \subset \Gamma, \quad P_\mu[\Gamma] = 0,$$

其中 $\mu = X_t(P_\nu)$, 与上一证明相同。于是

$$\{Z \circ \theta_t \neq Z' \circ \theta_t\} \subset \theta_t^{-1}(\Gamma),$$

而且 $P_\nu[\theta_t^{-1}(\Gamma)] = P_\mu[\Gamma] = 0$ 。又由上一证明中得到的积分关系,

$$E_\nu[E_{X_t}[|Z - Z'|]] = E_\mu[|Z - Z'|] = 0.$$

因此

$$E_{X_t}[Z] = E_{X_t}[Z'] \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

于是可以把 (*) 两端的 Z 都换成 Z' ; 此时 (*) 直接由命题 1.7 得到。 $\square$

Feller 过程并不是仅有的具有良好版本的马尔可夫过程。事实上, 可以用若干方式改造 Feller 过程, 从而得到第 1 节意义下的马尔可夫过程; 它们仍具有马尔可夫过程的良好概率性质, 却不再具有 Feller 转移函数的解析性质。马尔可夫过程的一般理论不是本书的主题; 对本书而言, 马尔可夫理论更像是研究各类具体过程时必须始终牢记的背景。因此不再深入上述问题, 因为那会迫使我们建立“良好”马尔可夫过程的公理化定义。

后文若有需要, 会把取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的马尔可夫过程写成资料组

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{H}_t), P_x, x \in E, (\theta_t));$$

其中各符号的含义和使用方式与 Feller 过程相同。例如, 默认映射 $t \mapsto X_t$ 几乎必然是 càdlàg 的。这样处理似乎牺牲了一点形式上的严谨, 但本书只会非常节制地使用这一自由, 读者不必因此不安。练习 3.21 将给出不是 Feller 过程的马尔可夫过程例子。

下面讨论良好版本存在性的若干推论。首先是一项非常重要的结论。

定理 2.15 (Blumenthal 零一律)。 对任意 $x \in E$ 以及 $\Gamma \in \mathcal{F}_0^{\varepsilon_x}$, 必有

$$P_x[\Gamma] = 0 \quad \text{或} \quad P_x[\Gamma] = 1.$$

证明。 若 $\Gamma \in \sigma(X_0)$, 则由 $P_x[X_0 = x] = 1$, 有 $P_x[\Gamma] = 0$ 或 1。而 $\mathcal{F}_0^{\varepsilon_x}$ 正是向 $\sigma(X_0)$ 中加入 P_x -零测集所得, 故结论成立。 $\square$

推论 2.16。 若 T 是关于 $(\mathcal{F}_t^{\varepsilon_x})$ 的停时, 则

$$P_x[T = 0] = 1 \quad \text{或} \quad P_x[T > 0] = 1.$$

这个推论影响深远, 尤其与下面的结果有关 (见练习 2.25)。回顾第 I 章第 4 节: 对集合 A , 过程 X 进入 A 的进入时与击中时分别定义为

$$D_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}, \quad T_A = \inf\{t > 0 : X_t \in A\},$$

其中照例约定 $\inf \emptyset = +\infty$ 。对任意 s ,

$$s + D_A \circ \theta_s = s + \inf\{t \geq 0 : X_{t+s} \in A\} = \inf\{t \geq s : X_t \in A\}.$$

因此, 在 $\{D_A \geq s\}$ 上,

$$s + D_A \circ \theta_s = D_A,$$

并且

$$T_A = \lim_{s \downarrow 0} (s + D_A \circ \theta_s).$$

类似地, 在 $\{T_A > t\}$ 上有

$$t + T_A \circ \theta_t = T_A.$$

定理 2.17. 若 A 是 Borel 集, 则 D_A 与 T_A 都是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的停时。

证明. 由于 X 右连续, 它显然是逐步可测的; 又因为 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续且完备, 第 I 章定理 4.15 表明, 集合

$$\Gamma = \{(t, \omega) : X_t(\omega) \in A\}$$

的首入时 D_A 是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。

读者现在容易验证 (见命题 3.3): 对每个 s , 随机时刻 $s + D_A \circ \theta_s$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。作为 $(\mathcal{F}_t)$ -停时的极限, T_A 本身也是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。□

下面用两个有趣的结果说明马尔可夫性质的用法。第一个结果从 Feller 半群的一个基本例子开始: 卷积半群, 即 $\mathbb{R}^d$ 上的一族概率测度 $(\mu_t)_{t \geq 0}$, 满足

- i) 对任意 $s, t \geq 0$, $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$;
- ii) $\mu_0 = \varepsilon_0$, 且在模糊拓扑下 $\lim_{t \downarrow 0} \mu_t = \varepsilon_0$ 。

若令

$$P_t(x, A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x+y) \mu_t(dy),$$

则由命题 2.4 及卷积的熟知性质容易验证, 它给出一个 Feller 转移函数。练习 1.8 中的大多数例子, 特别是 d 维布朗运动的转移函数, 都属于这种类型。具有这种转移函数的 Feller 过程有特殊性质。

命题 2.18. 若 X 的转移函数由卷积半群 (μ_t) 给出, 则 X 具有平稳独立增量; 增量 $X_t - X_s$ 的分布是 μ_{t-s} 。

这里“平稳”是指增量 $X_t - X_s$ 的分布只依赖于 $t - s$, 因而在时间平移下不变; 过程 X 本身并不一定是第 I 章第 3 节意义下的平稳过程。

证明. 对任意 $f \in \mathcal{E}_+$ 和任意 t , 由 $P_x[X_0 = x] = 1$,

$$E_x[f(X_t - X_0)] = E_x[f(X_t - x)] = \mu_t(f),$$

它已经不依赖于 x 。因此由马尔可夫性质, 对 $s < t$,

$$E_\nu[f(X_t - X_s) | \mathcal{F}_s] = E_{X_s}[f(X_{t-s} - X_0)] = \mu_{t-s}(f) \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

结论得证。□

反过来, 若 Feller 过程具有平稳独立增量, 则容易验证它的转移函数由一个满足命题 2.18 前性质 ii) 的卷积半群给出。这类过程称为平稳独立增量过程或 Lévy 过程。第 4 节将汇集这类过程的若干事实。

下面转向另一个对任何具有良好版本的马尔可夫过程都成立的结果。

命题 2.19. 设 $x \in E$, 并令

$$\sigma_x = \inf\{t > 0 : X_t \neq x\}.$$

则存在依赖于 x 的常数 $a \in [0, \infty]$, 使得

$$P_x[\sigma_x > t] = e^{-at}.$$

证明. σ_x 是开集 $\{x\}^c$ 的击中时, 因而是停时 (见第 I 章第 4 节)。又如定理 2.17 前所指出的, 在 $\{\sigma_x > t\}$ 上有

$$\sigma_x = t + \sigma_x \circ \theta_t.$$

所以

$$\begin{aligned} P_x[\sigma_x > t + s] &= P_x[(\sigma_x > t) \cap (\sigma_x > t + s)] \\ &= E_x[\mathbf{1}_{\{\sigma_x > t\}}(\mathbf{1}_{\{\sigma_x > s\}} \circ \theta_t)]. \end{aligned}$$

在 $\{\sigma_x > t\}$ 上显然有 $X_t \neq \Delta$, 故由马尔可夫性质,

$$P_x[\sigma_x > t + s] = E_x[\mathbf{1}_{\{\sigma_x > t\}} E_{X_t}[\sigma_x > s]].$$

而在 $\{\sigma_x > t\}$ 上 $X_t = x$, 于是

$$P_x[\sigma_x > t + s] = P_x[\sigma_x > t] P_x[\sigma_x > s].$$

这就给出所需指数形式。 □

这个命题还给出了点的分类。若 $a = +\infty$, 则 σ_x 在 P_x 下几乎必然为零, 即过程立即离开 x 。对布朗运动, 每个点都属于这种情形, 因为对每个 $t > 0$,

$$P_t(x, \{x\}) = 0.$$

若 $a = 0$, 过程永不离开 x , 此时 x 称为陷阱或吸收点。若 $a \in (0, \infty)$, 则 σ_x 服从参数为 a 的指数分布; 此时称 x 为滞留点, 或称过程在 x 停留一个指数分布的时间。Poisson 过程对每个 x 都是这种情形, 且 $a = 1$; 一般地, a 实际上是 x 的函数。还要指出, 命题 3.13 将证明过程只能通过跳跃离开滞留点。因此, 对连续路径过程, 只可能出现 $a = 0$ 与 $a = \infty$ 两种情形。

本节最后对布朗运动作几点说明。现在有两种理解布朗运动的方式: 其一是第 I 章构造的、在时刻零取值为零且只考虑一个概率测度的过程; 其二是可从任意点出发的马尔可夫过程, 因而必须考虑整个概率测度族 P_ν 。第一种观点中的概率测度, 在典范框架下就是 Wiener 测度; 它与第二种观点中的

$$P_0 = P_{\varepsilon_0}$$

相同。因此, 在马尔可夫过程框架下对 P_0 证明的任何结果, 也都对 Wiener 测度成立。

以后“布朗运动”一词可能采用其中任一种观点; 我们会尽量根据上下文说明当时采用哪一种。形容词“标准”则表示只考虑使 $B_0 = 0$ 几乎必然成立的概率测度, 即 Wiener 测度。

定义 2.20. 设 $(\mathcal{G}_t)$ 是滤过, B 是适应过程。若

- i) B 是布朗运动;
 - ii) 对每个 $t \geq 0$, 过程 $(B_{t+s} - B_t)_{s \geq 0}$ 与 $\mathcal{G}_t$ 独立,
- 则称 B 是一个 $(\mathcal{G}_t)$ -布朗运动。

等价地说, B 关于 $(\mathcal{G}_t)$ 是一个马尔可夫过程, 其转移函数就是练习 1.8 第 ii) 项中的转移函数。

这个定义中的独立性可以相对于单个概率测度, 也可以相对于一族概率测度。在本节的记号下应特别强调: 若考虑整个概率测度族 P_ν , 则 B 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动; 若只考虑单个概率测度 P_μ , 则它是 $(\mathcal{F}_t^\mu)$ -布朗运动。在各自语境中, 这两个滤过都是使 B 成为布朗运动的最小右连续完备滤过。

定义 2.21. 设过程 X 定义在空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上, 该空间配备一族概率测度 $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ 。以 $(\mathcal{F}_t^X)$ 表示使 X 适应的最小右连续完备滤过。关于 $(\mathcal{F}_t^X)$ 的停时称为 X 的停时。

对布朗运动, 依语境不同, 有

$$\mathcal{F}_t^B = \mathcal{F}_t \quad \text{或} \quad \mathcal{F}_t^B = \mathcal{F}_t^\mu.$$

这些滤过称为布朗滤过。

练习 2.22. 证明练习 1.8 (广义 Poisson 转移函数除外)、练习 1.14 及练习 1.15 中给出的转移函数都是 Feller 转移函数。再对练习 1.13 中的 Ornstein-Uhlenbeck 过程证明同一结论。

练习 2.23. 证明一维布朗运动半群的预解核为

$$U_p(x, dy) = u_p(x, y) dy,$$

其中

$$u_p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp(-\sqrt{2p}|x - y|).$$

练习 2.24. 设 X 是马尔可夫过程, e_p, e_q 是参数分别为 p, q 的两个相互独立指数随机变量, 并且都与 X 独立。证明对任意非负 Borel 函数 f ,

$$pU_p f(x) = E_x[f(X_{e_p})], \quad pqU_p U_q f(x) = E_x[f(X_{e_p+e_q})],$$

并由此推出预解方程。

练习 2.25.

- 1°) 若对每个 ν , 都存在两个 Borel 集 A_1, A_2 , 使

$$A_1 \subset A \subset A_2, \quad P_\nu[D_{A_2 \setminus A_1} < \infty] = 0,$$

则称 E 的子集 A 是近 Borel 集。证明近 Borel 集族是普遍可测集族的一个子 σ -代数。

证明若 A 是近 Borel 集, 则 D_A, T_A 都是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。

- 2°) 若 A 是近 Borel 集且 $x \in E$, 证明

$$P_x[T_A = 0] = 1 \quad \text{或} \quad P_x[T_A = 0] = 0.$$

在前一种（后一种）情形下，称点 x 对 A 是正则的（非正则的）。

3°) 若对每个 $x \in O$ ，都存在近 Borel 集 G ，使

$$x \in G \subset O,$$

且 x 对 G^c 非正则，则称集合 O 是精细开的。证明精细开集是一种拓扑的开集，并且该拓扑比 E 的局部紧拓扑更细；它称为精细拓扑。

4°) 若近 Borel 集 A 的势为零，即

$$\int_0^\infty P_t(\cdot, A) dt = 0$$

（见练习 2.29），证明 A^c 在精细拓扑下稠密。

5°) 若 f 普遍可测，并且 $t \mapsto f(X_t)$ 右连续，则 f 精细连续。

6°) 证明第 5° 问的逆命题。

提示：固定 $\varepsilon > 0$ ，令 $T_0 = 0$ 。对任意第一类序数（即可数序数） α ，递归定义

$$T_{\alpha+1} = \inf\{t > T_\alpha : |f(X_t) - f(X_{T_\alpha})| > \varepsilon\};$$

若 α 是极限序数，则令

$$T_\alpha = \sup_{\beta < \alpha} T_\beta.$$

证明在 $\{T_\alpha < \infty\}$ 上几乎必然有 $T_\alpha < T_{\alpha+1}$ ，从而有限的 T_α 只能有可数多个。

练习 2.26。 证明对 Feller 过程 X ，集合

$$\{X_s(\omega) : 0 \leq s \leq t, t < \zeta(\omega)\}$$

几乎必然有界。

提示：把练习 2.33 的拟左连续性应用于适当紧集的离开时。

练习 2.27（路径连续性的一个判据）。

1°) 设 d 是 E_Δ 上的一个度量，函数 $f : [0, 1] \rightarrow E_\Delta$ 在 $(0, 1]$ 上有左极限、在 $[0, 1)$ 上有右极限。证明 f 不连续，当且仅当存在 $\varepsilon > 0$ ，使得当 n 充分大时恒有

$$N_n(f) = \max_{0 \leq k \leq n-1} d\left(f\left(\frac{k}{n}\right), f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right) > \varepsilon.$$

2°) 令

$$B(x, \varepsilon) = \{y : d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

对 $\varepsilon > 0$ 及紧集 K ，定义

$$M_n^\varepsilon = \{\omega : N_n(X(\omega)) > \varepsilon; X_s(\omega) \in K \text{ 对每个 } s \in [0, 1]\}.$$

证明

$$P_\nu(M_n^\varepsilon) \leq n \sup_{x \in K} P_{1/n}(x, B(x, \varepsilon)^c).$$

3°) 利用上一练习的结论，证明：若对每个 $\varepsilon > 0$ 及每个紧集 K ，过程 X 都满足

$$\limsup_{t \downarrow 0} \sup_{x \in K} \frac{1}{t} P_t(x, B(x, \varepsilon)^c) = 0,$$

则 X 的路径几乎必然连续。

4°) 验证布朗运动满足第 3° 问的条件。因此, 本节的结果连同第 3° 问, 给出了另一个独立于第 I 章的布朗运动构造。

练习 2.28. 设 B 是 d 维布朗运动, 并令

$$\mathcal{A}_t = \sigma(B_s : s \geq t), \quad \mathcal{A} = \bigcap_t \mathcal{A}_t,$$

其中 $\mathcal{A}$ 是其渐近 σ -代数。

1°) 利用第 I 章第 1 节的时间反演与 Blumenthal 零一律, 证明 $\mathcal{A}$ 在 P_0 下几乎必然平凡: 对任意 $A \in \mathcal{A}$, 都有

$$P_0(A) = 0 \quad \text{或} \quad P_0(A) = 1.$$

2°) 若 $A \in \mathcal{A}$, 则对每个固定的 t , 存在事件 $B \in \mathcal{A}$, 使

$$\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B \circ \theta_t.$$

证明

$$P_x[A] = \int_{\mathbb{R}^d} P_t(x, dy) P_y(B),$$

并推出 $P[A]$ 要么恒等于 0, 要么恒等于 1。

3°) 证明: 对任意初始分布 ν 与 $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{A}_t} |P_\nu(A \cap \Gamma) - P_\nu(A)P_\nu(\Gamma)| = 0.$$

提示: 使用第 II 章定理 2.3。

4°) 若 ν_1, ν_2 是两个初始测度, 证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|(\nu_1 - \nu_2)P_t\| = 0,$$

其中范数是有界测度上的全变差范数。

提示: 对 $\nu_1 - \nu_2$ 作 Jordan-Hahn 分解。

练习 2.29. 设 X 是 Feller 过程。对 $x \in E$ 和 $A \in \mathcal{E}$, 令

$$U(x, A) = \int_0^\infty P_t(x, A) dt.$$

1°) 证明该积分有定义, U 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的核, 并且对 $f \in \mathcal{E}_+$,

$$Uf(x) = E_x \left[\int_0^\infty f(X_t) dt \right].$$

核 U 称为 X 的势核。

2°) 验证

$$Uf = \lim_{\lambda \downarrow 0} U_\lambda f,$$

并证明对每个 $\lambda > 0$,

$$U = U_\lambda + \lambda U_\lambda U = U_\lambda + \lambda U U_\lambda.$$

3°) 证明: 当 X 是 d 维布朗运动且 $d \leq 2$ 时, 势核在 $\mathcal{E}_+$ 上只取 0 与 $+\infty$ 两个值。这与一、二维布朗运动的常返性有关 (见第 X 章第 3 节)。

4°) 证明: 对 $d \geq 3$ 的 d 维布朗运动, 势核是与函数

$$\frac{\Gamma(\frac{d}{2} - 1)}{2\pi^{d/2}} |x|^{2-d}$$

相联系的卷积核, 即 Newton 势理论中的核。特别地, 当 $d = 3$ 时,

$$Uf(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy.$$

5°) 计算在到达 0 时被杀死的一维布朗运动 (练习 3.29) 的势核, 并证明它关于 $\mathbb{R}_+$ 上 Lebesgue 测度的密度是

$$2(x \wedge y).$$

6°) 证明 g_t 是热过程势核的一个密度。

练习 2.30. 设 A 是 Borel 集。

1°) 证明对任意 $s, t \geq 0$,

$$\mathbf{1}_{\{T_A > s+t\}} = \mathbf{1}_{\{T_A > s\}} (\mathbf{1}_{\{T_A > t\}} \circ \theta_s).$$

2°) 设 ν 是满足 $\nu(\bar{A}) = 0$ 的概率测度。在 P_ν 下定义过程

$$Y_t = \begin{cases} X_t, & t < T_A, \\ \Delta, & t \geq T_A. \end{cases}$$

证明 Y 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 是马尔可夫过程。称 Y 为过程 X 在进入 A 时被杀死所得的过程。一个特例见练习 3.29。

练习 2.31. 设 X 是标准一维布朗运动, 并令

$$\psi(t) = t^{-\alpha}, \quad \alpha \geq 0.$$

证明下列三个性质等价:

i) 极限

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 B_t \psi(t) dt$$

在一个概率严格为正的集合上存在;

ii) $\alpha < 3/2$;

iii) 几乎必然有

$$\int_0^1 \psi(t) |B_t| dt < \infty.$$

提示: 先利用 Blumenthal 零一律证明 i) 等价于一个更强的性质。再证明 i) 蕴含 ii) 时, 使用下述事实: 对高斯随机变量, 几乎必然收敛蕴含 L^2 收敛, 从而 L^2 -范数收敛。

例如, 对 $(0, 1]$ 上任意正连续函数 ψ , 断言 i) 与 iii) 等价是错误的。事实上, 可以证明: 若 $\psi \in L^1_{\text{loc}}((0, 1])$, 则 iii) 等价于

$$\text{iv)} \quad \int_0^1 \psi(t) t^{1/2} dt < \infty,$$

而且存在满足 i) 却不满足 iv) 的函数 ψ 。第 IV 章练习 3.19 将继续讨论这个问题。

练习 2.32。 设 B 是标准一维布朗运动, h 是 $(0, 1)$ 上的连续函数。令 Γ 为事件

$$\{\omega : B_t(\omega) < h(t) \text{ 在某个区间 } (0, T(\omega)) \subset (0, 1) \text{ 上成立}\}.$$

证明 $P(\Gamma) = 0$ 或 $P(\Gamma) = 1$ 。在前一种 (后一种) 情形下, 称 h 属于 下类 (上类)。对每个 $\varepsilon > 0$, 函数

$$h(t) = (1 + \varepsilon)\sqrt{2t \log_2(1/t)}$$

属于上类, 而

$$h(t) = (1 - \varepsilon)\sqrt{2t \log_2(1/t)}$$

属于下类。

^a

^a**阅读提示：**这里的 $\log_2 x$ 表示二重迭代对数 $\log \log x$, 不是以 2 为底的对数。

练习 2.33。

1°) (拟左连续性) 设 X 是 Feller 过程, (T_n) 是一列递增至 T 的 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = X_T \quad \text{a.s., 在 } \{T < \infty\} \text{ 上.}$$

提示：只需对有界 T 证明。令

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n}$$

(为什么该极限存在?), 并对连续函数 f, g 证明

$$E_x[f(Y)g(X_T)] = \lim_{t \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} E_x[f(X_{T_n})g(X_{T_n+t})] = E_x[f(Y)g(Y)].$$

对连续路径过程, 这个结论当然完全显然。对有跳过程, 它说明: 若在 $\{0 < T < \infty\}$ 上 $X_{T-} \neq X_T$, 则一列 (T_n) 只能以平凡方式递增至 T : 对几乎每个 ω , 存在整数 $n(\omega)$, 使得当 $n \geq n(\omega)$ 时恒有 $T_n(\omega) = T(\omega)$ 。这样的时刻称为 完全不可达时刻, 与第 IV 章第 5 节的可料时刻相对; Poisson 过程的跳跃时刻是典型例子。

2°) 只使用第 1° 问及第 I 章命题 4.6, 证明若 A 是闭集, 则 T_A 是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。

3 强马尔可夫性质

在马尔可夫过程的研究中，停时会反复出现；原因在于，马尔可夫性质可以推广到停时，正如下文将要证明的那样。先引入一些记号。

我们考虑 Feller 过程的典范 càdlàg 版本，并沿用第 2 节的结果与记号。若 T 是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时，就在整个空间 Ω 上定义 X_T ，约定在 $\{T = \infty\}$ 上 $X_T = \Delta$ 。由第 I 章第 4 节，随机变量 X_T 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的；它表示过程在时刻 T 的位置。进一步定义映射 $\theta_T : \Omega \rightarrow \Omega$ ：

$$\theta_T(\omega) = \theta_t(\omega) \quad \text{若 } T(\omega) = t, \quad \theta_T(\omega) = \omega_\Delta \quad \text{若 } T(\omega) = +\infty,$$

其中 ω_Δ 是恒等于 Δ 的路径。显然

$$X_t \circ \theta_T = X_{T+t}, \quad \theta_T^{-1}(\mathcal{F}_\infty^0) \subset \sigma(X_{T+t} : t \geq 0).$$

下面证明 Feller 过程的强马尔可夫性质。

定理 3.1 (强马尔可夫性质)。 设 Z 是 $\mathcal{F}_\infty$ -可测的非负（或有界）随机变量， T 是停时。则对任意初始测度 ν ，

$$E_\nu[Z \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T] = E_{X_T}[Z]$$

在集合 $\{X_T \neq \Delta\}$ 上 P_ν -几乎必然成立。

证明。 先设 T 的取值落在可数集 D 中。此时

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{X_T \neq \Delta\}} E_\nu[Z \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T] &= \sum_{d \in D} \mathbf{1}_{\{T=d\}} \mathbf{1}_{\{X_d \neq \Delta\}} E_\nu[Z \circ \theta_d \mid \mathcal{F}_d] \\ &= \sum_{d \in D} \mathbf{1}_{\{T=d\}} \mathbf{1}_{\{X_d \neq \Delta\}} E_{X_d}[Z], \end{aligned}$$

所以结论成立。

对一般的 T ，令

$$T_n = \frac{\lfloor 2^n T \rfloor + 1}{2^n}.$$

这样得到一列取值于可数集且递减到 T 的停时。取 $f_i \in C_0^+$ ($i = 1, \dots, k$) 以及 $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ ，令

$$g(x) = \int P_{t_1}(x, dx_1) f_1(x_1) \int P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \cdots \int P_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k) f_k(x_k).$$

由于 X 是 Feller 过程， $g \in C_0^+$ 。由刚才证明的特殊情形，

$$E_\nu \left[\prod_{i=1}^k f_i(X_{t_i}) \circ \theta_{T_n} \mid \mathcal{F}_{T_n} \right] = g(X_{T_n}).$$

利用路径的右连续性以及第 II 章推论 2.4，可令 $n \rightarrow \infty$ ，从而对 $\prod_i f_i(X_{t_i})$ 得到所需结论。再应用单调类定理，结论便对所有非负的 $\mathcal{F}_\infty^0$ -可测随机变量 Z 成立。

还需把结论推广到 $Z \in (\mathcal{F}_\infty)_+$ 。考察概率测度

$$P'_\nu(\cdot) = \frac{P_\nu(\cdot \cap \{X_T \neq \Delta\})}{P_\nu(X_T \neq \Delta)}.$$

在该测度下, 给定 $\mathcal{F}_T$ 的条件期望与在 P_ν 下相同。因此可以假设 $X_T \neq \Delta$ 几乎必然成立, 并省略这一限制。记 μ 为 P_ν 在 X_T 下的像测度, 即

$$\mu(A) = P_\nu[X_T \in A].$$

由 $\mathcal{F}_\infty$ 的定义, 存在两个 $\mathcal{F}_\infty^0$ -可测随机变量 Z' 与 Z'' , 使

$$Z' \leq Z \leq Z'', \quad P_\mu[Z'' - Z' > 0] = 0.$$

由证明的第一部分,

$$P_\nu[Z'' \circ \theta_T - Z' \circ \theta_T > 0] = E_\nu[E_{X_T}[Z'' - Z' > 0]] = 0.$$

由于 ν 任意, 可知 $Z \circ \theta_T$ 是 $\mathcal{F}_\infty$ -可测的。于是条件期望 $E_\nu[Z \circ \theta_T | \mathcal{F}_T]$ 有意义, 并且

$$E_\nu[Z' \circ \theta_T | \mathcal{F}_T] \leq E_\nu[Z \circ \theta_T | \mathcal{F}_T] \leq E_\nu[Z'' \circ \theta_T | \mathcal{F}_T].$$

上式两端由前面的结论均 P_ν -几乎必然等于 $E_{X_T}[Z]$, 证明完成。 $\square$

注。 若 $\zeta = +\infty$ 几乎必然成立且 $T < \infty$ 几乎必然成立, 则可以去掉 $\{X_T \neq \Delta\}$ 这一限制; 以后在这种情形下常从记号中完全省略它。

在上述证明中, 我们已经看到 θ_T 是 $\mathcal{F}_\infty$ -可测映射。事实上还有下面的结论。

引理 3.2。 对任意 $t > 0$, $T + t$ 是停时, 并且

$$\theta_T^{-1}(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{F}_{T+t}.$$

证明。 由单调类论证容易看出 $\theta_T^{-1}(\mathcal{F}_t^0) \subset \mathcal{F}_{T+t}$; 再沿用定理 3.1 证明中的论证即可得到结论。 $\square$

我们用这个引理证明:

命题 3.3。 若 S, T 是两个 $(\mathcal{F}_t)$ -停时, 则

$$S + T \circ \theta_S$$

也是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。

证明。 由于 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续, 只需证明对每个 t , 事件 $\{S + T \circ \theta_S < t\}$ 属于 $\mathcal{F}_t$ 。而

$$\{S + T \circ \theta_S < t\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{S < t - q\} \cap \{T \circ \theta_S < q\}.$$

由引理, $\{T \circ \theta_S < q\} \in \mathcal{F}_{S+q}$; 根据 $\mathcal{F}_{S+q}$ 的定义,

$$\{S < t - q\} \cap \{T \circ \theta_S < q\} = \{S + q < t\} \cap \{T \circ \theta_S < q\} \in \mathcal{F}_t.$$

命题得证。 $\square$

若把停时理解为某个物理事件首次发生的时刻, 那么 $S + T \circ \theta_S$ 就是与 S 相关的事件发生后, 与 T 相关的事件首次发生的时刻。例如沿用第 2 节的记号, 若 $A, B \in \mathcal{E}$, 则

$$T_A + T_B \circ \theta_{T_A}$$

是过程先到达 A 后再到达 B 的第一个时刻。本节后面将用到这一点。

下面给出强马尔可夫性质的几个初步应用。对停时 T , 定义 $(E, \mathcal{E})$ 上的核 P_T :

$$P_T(x, A) = P_x[X_T \in A],$$

或更一般地, 对 $f \in \mathcal{E}_+$,

$$P_T f(x) = E_x[f(X_T)].$$

下面的结果说明这些核如何复合 (参见定义 1.1)。

命题 3.4. 若 S, T 是两个停时, 则

$$P_S P_T = P_{S+T \circ \theta_S}.$$

证明。 由定义,

$$P_S(P_T f)(x) = E_x[E_{X_S}[f(X_T)]].$$

利用强马尔可夫性质,

$$\begin{aligned} P_S(P_T f)(x) &= E_x[\mathbf{1}_{\{X_S \neq \Delta\}} E_x[f(X_T) \circ \theta_S \mid \mathcal{F}_S]] \\ &= E_x[\mathbf{1}_{\{X_S \neq \Delta\}} f(X_T) \circ \theta_S]. \end{aligned}$$

又

$$f(X_T) \circ \theta_S = f(X_{S+T \circ \theta_S}),$$

并且在 $\{X_S = \Delta\}$ 上 $f(X_T) \circ \theta_S = 0$, 故结论成立。 $\square$

注。 这把半群的基本性质推广到了停时。事实上, 若 $T = t$ 几乎必然成立, 则

$$P_T = P_t, \quad S + T \circ \theta_S = S + t.$$

下面证明: 若从一个停时开始观察马尔可夫过程, 所得过程仍是具有相同转移函数的马尔可夫过程。

命题 3.5. 若 T 是停时, 则过程

$$Y_t = X_{T+t}$$

关于 $(\mathcal{F}_{T+t})$ 是具有同一转移函数的马尔可夫过程。

证明。 取 $f \in \mathcal{E}_+$ 。对任意 ν 及 $s \geq 0$,

$$E_\nu[f(X_{T+t+s}) \mid \mathcal{F}_{T+t}] = E_\nu[f(X_s) \circ \theta_{T+t} \mid \mathcal{F}_{T+t}] = P_s f(X_{T+t})$$

在 $\{X_{T+t} \neq \Delta\}$ 上成立; 而在 $\{X_{T+t} = \Delta\}$ 上该等式也成立。所以 X_{T+t} 满足定义 1.3 的条件。 $\square$

注。

- 1) 过程 Y 是 Feller 过程 X 的另一个版本。这说明, 即使从典范版本出发, 也会自然产生非典范版本。
- 2) 上述性质实际上与强马尔可夫性质等价, 见练习 3.16。

对具有独立增量的过程, 上一命题可写成更鲜明的形式。

推论 3.6. 若 X 具有平稳独立增量, 则过程

$$(X_{T+t} - X_T, t \geq 0)$$

与 $\mathcal{F}_T$ 独立, 并且它在 P_ν 下的分布与 X 在 P_0 下的分布相同。

证明。 对 $f_i \in \mathcal{E}_+, t_i \in \mathbb{R}_+ (i = 1, \dots, n)$,

$$E_\nu \left[\prod_i f_i(X_{T+t_i} - X_T) \middle| \mathcal{F}_T \right] = E_{X_T} \left[\prod_i f_i(X_{t_i} - X_0) \right].$$

与命题 2.18 的论证相同, 右端是只依赖于 f_i, t_i 的常数。 □

特别地, 对布朗运动而言, $B_{T+t} - B_T$ 是与 $\mathcal{F}_T$ 独立的 $(\mathcal{F}_{T+t})$ -布朗运动。第 IV 章练习 3.21 还会给出这一事实的另一种证明。本节余下部分将把强马尔可夫性质应用于一维布朗运动。

回顾第 II 章第 3 节引入的连续递增过程

$$S_t = \sup_{s \leq t} B_s$$

与停时 T_a 。二者互为反函数, 意即

$$T_a = \inf\{t : S_t \geq a\}, \quad S_t = \inf\{a : T_a \geq t\}.$$

映射 $a \mapsto T_a$ 递增且左连续 (见第 0 章第 4 节和第 V 章第 1 节)。

在下面的结果中, P 表示从 0 出发的布朗运动所对应的概率测度; 采用典范版本时, 它就是 Wiener 测度。

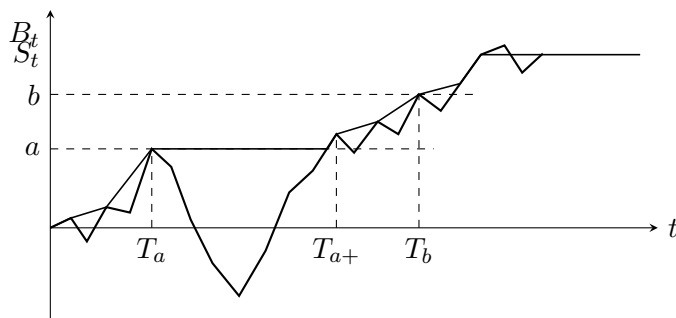
命题 3.7 (反射原理)。 对任意 $a > 0$ 与 $t \geq 0$,

$$P[S_t \geq a] = P[T_a \leq t] = 2P[B_t \geq a] = P(|B_t| \geq a).$$

“反射原理”这个名称来自如下启发式论证。在时刻 t 以前到达 a 的路径中, 有“一半”在时刻 t 位于 a 上方。事实上, 在通常的路径图像中, 把路径从 T_a 到 t 的部分关于直线 $y = a$ 对称反射, 就在时刻 t 位于 a 上方与下方的两类路径之间建立了一一对应。时刻 t 恰好位于 a 的概率为零, 因而

$$\begin{aligned} P[S_t \geq a] &= P[S_t \geq a, B_t > a] + P[S_t \geq a, B_t < a] \\ &= 2P[S_t \geq a, B_t > a] = 2P[B_t > a], \end{aligned}$$

这里最后一步用了 $\{B_t > a\} \subset \{S_t \geq a\}$ 。这个启发式论证可以严格化, 但直接使用强马尔可夫性质更简单; 另见练习 3.14。

图 3: 在水平 b 处的反射示意图 (矢量重绘)

证明。 由于 $B_{T_a} = a$,

$$P[S_t \geq a, B_t < a] = P(T_a \leq t, B_{T_a+t-T_a} - B_{T_a} < 0).$$

而 $B_{T_a+} - B_{T_a}$ 是与 $\mathcal{F}_{T_a}$ 独立的布朗运动, 所以右端等于

$$\frac{1}{2}P[T_a \leq t] = \frac{1}{2}P[S_t \geq a].$$

又

$$P[S_t \geq a] = P[B_t \geq a] + P[S_t \geq a, B_t < a],$$

结论随即成立。 □

注。

- 1°) 对每个 t , 随机变量 S_t 与 $|B_t|$ 同分布。当然, 过程 S 与 $|B|$ 并不同分布, 因为 S 递增而 $|B|$ 不递增。第 VI 章将进一步讨论这一点。
- 2°) 读者也可以借助强马尔可夫性质, 证明 $P(T_a \leq t)$ 与 $2P(B_t \geq a)$ 关于 t 的 Laplace 变换相等, 从而得到上述结果。

由上一结果, 可以从 B_t 的分布推出这里其他随机变量的分布。已经指出, S_t 与 $|B_t|$ 同分布, 因而它在 $[0, \infty)$ 上的密度为

$$2(2\pi t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right).$$

至于 T_a , 当然也可以反演第 II 章命题 3.7 得到的 Laplace 变换 $\exp(-a\sqrt{2s})$; 不过现在可以直接写出

$$P[T_a \leq t] = 2 \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy.$$

对 t 求导可知, T_a 在 $[0, \infty)$ 上的密度 f_a 为

$$f_a(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{s^{3/2}} \int_a^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2s}\right) dy + \frac{1}{s^{5/2}} \int_a^\infty y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2s}\right) dy \right).$$

对右端积分作分部积分, 得到

$$f_a(s) = a(2\pi s^3)^{-1/2} \exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right).$$

命题 3.10 将用缩放性质给出另一种证明。密度 f_a 构成卷积半群:

$$f_a * f_b = f_{a+b}.$$

这很容易由 Laplace 变换推出, 也可由下面把 T_a 看成 a 的函数的命题得到。

命题 3.8. 过程 $(T_a, a \geq 0)$ 是具有平稳独立增量的左连续递增过程，并且是纯不连续的；也就是说，几乎必然不存在任何区间，使 $a \mapsto T_a$ 在该区间上连续。

证明。 前面已经指出它左连续且递增。为了证明

$$P\{\omega : a \mapsto T_a(\omega) \text{ 在某个区间上连续}\} = 0,$$

只需对任意满足 $p < q$ 的有理数对 (p, q) 证明

$$P\{\omega : a \mapsto T_a(\omega) \text{ 在 } [p, q] \text{ 上连续}\} = 0.$$

注意， $a \mapsto T_a(\omega)$ 在 $[p, q]$ 上连续，当且仅当 S 在 $[T_p, T_q]$ 上严格递增（见第 0 章第 4 节）。但

$$B_{T_p+t} - B_{T_p}$$

是布朗运动，由重对数律，这种严格递增不可能发生。

再证增量独立。取 $0 < a < b$ 。由于 $T_b > T_a$ 几乎必然成立，

$$T_b = T_a + T_b \circ \theta_{T_a} \quad \text{a.s.}$$

故对 $f \in \mathcal{E}_+$,

$$\begin{aligned} E[f(T_b - T_a) \mid \mathcal{F}_{T_a}] &= E[f(T_b \circ \theta_{T_a}) \mid \mathcal{F}_{T_a}] \\ &= E_{B_{T_a}}[f(T_b)] \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

而 $B_{T_a} = a$ 几乎必然成立；由布朗运动的平移不变性，上式最后一项等于常数

$$E[f(T_{b-a})].$$

所以 $T_b - T_a$ 与 $\mathcal{F}_{T_a}$ 独立，证明完成。 $\square$

于是我们已经证明， $(T_a, a \geq 0)$ 具有平稳独立增量，因而是 Feller 过程（见第 2 节）。当然，它不是这个过程的典范版本，因为它定义在原布朗运动的概率空间上；事实上它甚至不是右连续的。令

$$T_{a+} = \lim_{b \downarrow a} T_b,$$

便得到一个右连续版本。下面证明：

命题 3.9. 对每个固定的 a ,

$$T_a = T_{a+} \quad P\text{-a.s.}$$

证明。 还有

$$T_{a+} = \inf\{t : S_t > a\}$$

（见第 0 章第 4 节与第 V 章第 1 节）。由强马尔可夫性质，对每个 $t > 0$ ，都有

$$S_{T_{a+}+t} > a.$$

结论立即得到。 $\square$

注。 也可以在等式

$$E\left[\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}(T_{a+h} - T_a)\right\}\right] = \exp(-\lambda h)$$

中令 $h \downarrow 0$, 从而证明命题 3.9; 该等式是第 II 章结果的推论。

此外, 由于 $(T_a, a \geq 0)$ 是 Feller 过程, 命题 3.9 也可由定理 2.8 后面的注推出。

上面关于 T_a 分布的结果尤其可用于研究半空间上的 Dirichlet 问题 (见练习 3.24)。它们也可由族 (T_a) 的缩放性质导出; 这些缩放性质本身就很重, 并将在第 XI 章中使用。对正实数 a , 记

$$B_t^{(a)} = a^{-1}B_{a^2t};$$

它仍是布朗运动。任何由 $B^{(a)}$ 定义的对象都加上上标 (a) 。例如

$$T_1^{(a)} = \inf\{t : B_t^{(a)} = 1\}.$$

命题 3.10。 有

$$T_a = a^2 T_1^{(a)}, \quad \text{从而} \quad T_a \stackrel{(d)}{=} a^2 T_1.$$

此外,

$$T_a \stackrel{(d)}{=} \left(\frac{a}{S_1}\right)^2 \stackrel{(d)}{=} \left(\frac{a}{|B_1|}\right)^2.$$

证明。 由定义,

$$\begin{aligned} T_a &= \inf\{t : a^{-1}B_t = 1\} \\ &= \inf\{a^2t : B_t^{(a)} = 1\} = a^2 T_1^{(a)}. \end{aligned}$$

对第二个断言, 只需证明

$$T_1 \stackrel{(d)}{=} S_1^{-2}.$$

这由 S_t 的缩放性质 $S_t \stackrel{(d)}{=} \sqrt{t} S_1$ 得到。事实上,

$$P[T_1 \geq u] = P[S_u \leq 1] = P[\sqrt{u} S_1 \leq 1] = P[S_1^{-2} \geq u].$$

再用 $S_1 \stackrel{(d)}{=} |B_1|$ 即得结论。 □

由 $S_1 \stackrel{(d)}{=} |B_1|$, 很容易重新得到 T_1 的分布。这里改用上述结果证明第 X 章中一个重要性质; 本节练习 3.24 是它的推广。

命题 3.11。 设 β 是与 B 独立的另一个标准一维布朗运动, 则

$$\beta_{T_a} \stackrel{(d)}{=} aC,$$

其中 C 是参数为 1 的 Cauchy 随机变量。

证明。 由 β 与 B 的独立性以及 β 的缩放性质,

$$\beta_{T_a} \stackrel{(d)}{=} \sqrt{T_a} \beta_1 \stackrel{(d)}{=} \frac{a}{S_1} \beta_1 \stackrel{(d)}{=} \frac{a}{|B_1|} \beta_1.$$

而 $\beta_1/|B_1|$ 服从 Cauchy 分布, 结论得证。 $\square$

注。

- (i) 过程 (T_{a+}, β_{T_a}) ($a \geq 0$) 的性质见第 4 节。
- (ii) 命题 3.11 也给出了二维布朗运动首次到达一条直线时的位置分布。

下面给出一维布朗运动零点集的一个基本性质。

命题 3.12. 集合

$$Z = \{t : B_t = 0\}$$

几乎必然是闭集、没有孤立点, 并且 Lebesgue 测度为零。

证明。 由路径连续性, Z 是闭集。对任意 x ,

$$E_x \left[\int_0^\infty \mathbf{1}_Z(s) ds \right] = \int_0^\infty P_s(x, \{0\}) ds = 0,$$

因为对每个 $s > 0$ 与 x , 都有 $P_s(x, \{0\}) = 0$ 。所以 Z 几乎必然具有零 Lebesgue 测度, 因而内点为空。

时刻 0 属于 Z , 而且由重对数律已知它不是 Z 的孤立点。这里再用本节方法证明一次。令

$$T_0 = \inf\{t : B_t = 0\}.$$

时刻 $t + T_0 \circ \theta_t$ 是 t 之后 Z 中的第一个点。由马尔可夫性质以及 $E_x[\exp(-\alpha T_0)]$ 的显式值,

$$\begin{aligned} E_0[\exp\{-\alpha(t + T_0 \circ \theta_t)\}] &= \exp(-\alpha t) E_0[E_{B_t}[\exp(-\alpha T_0)]] \\ &= \exp(-\alpha t) E_0[\exp\{-|B_t|\sqrt{2\alpha}\}]. \end{aligned}$$

当 $t \downarrow 0$ 时, 右端趋于 1。由 Fatou 引理,

$$P_0 \left[\lim_{t \downarrow 0} (t + T_0 \circ \theta_t) = 0 \right] = 1.$$

也就是说, 0 几乎必然是 Z 中点的极限。

对任意有理数 q , 令

$$d_q = q + T_0 \circ \theta_q;$$

它是 q 之后 Z 中的第一个点。由推论 3.6, $(B_{d_q+t})_{t \geq 0}$ 是标准一维布朗运动, 故 d_q 几乎必然是 Z 中点的极限。因此零测集

$$N = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{d_q \text{ 不是 } Z \text{ 中点的极限}\}$$

可以忽略。若 $h \in Z(\omega)$, 取一列递增到 h 的有理数 q_n , 则要么 $h = d_{q_n}$ 对某个 n 成立, 要么 h 是 d_{q_n} 的极限。因此当 $\omega \notin N$ 时, 无论哪种情形, h 都是 $Z(\omega)$ 中点的极限。 $\square$

所以 Z 是一个完全集, 其形态类似 Cantor 三分集。第 VI 章将说明, 它是一个无原子、关于 Lebesgue 测度奇异的随机测度的支集; 该测度在某种意义上记录了一维布朗运动在 0 点停留的时间。此外, Z 的补集是至多可数个互不相交区间 I_n 的并, 这些区间称为游程区间; B 在这样的区

间的限制称为 B 的一个游程。第 XII 章将详细研究游程。

最后, 补全命题 2.19: 过程 X 只能通过跳跃离开一个滞留点。沿用该命题的记号:

命题 3.13. 若 $0 < a < \infty$, 则

$$P_x[X_{\sigma_x} = x] = 0.$$

证明. 若 $a < \infty$, 则 $P_x[\sigma_x < \infty] = 1$ 。在 $\{X_{\sigma_x} = x\}$ 上有

$$\sigma_x \circ \theta_{\sigma_x} = 0.$$

由强马尔可夫性质,

$$\begin{aligned} P_x[\sigma_x < \infty; X_{\sigma_x} = x] &= P_x[\sigma_x < \infty; X_{\sigma_x} = x, \sigma_x \circ \theta_{\sigma_x} = 0] \\ &= E_x[\mathbf{1}_{\{\sigma_x < \infty; X_{\sigma_x} = x\}} P_{X_{\sigma_x}}[\sigma_x = 0]] \\ &= P_x[\sigma_x = 0] P_x[\sigma_x < \infty; X_{\sigma_x} = x]. \end{aligned}$$

若 $P_x[X_{\sigma_x} = x] > 0$, 便有 $P_x[\sigma_x = 0] = 1$, 这与 $P_x[\sigma_x > t] = e^{-at}$ ($0 < a < \infty$) 矛盾。因此结论成立。 $\square$

练习 3.14 (反射原理的进一步结果). 沿用命题 3.7 的情形与记号。第 3° 问与第 4° 问彼此独立。

1°) 证明由

$$B_t^a = \begin{cases} B_t, & t < T_a, \\ 2a - B_t, & t \geq T_a \end{cases}$$

定义的过程 B^a 与 B 同分布。

2°) 对 $a \leq b, b > 0$, 证明

$$P[S_t \geq b, B_t \leq a] = P[B_t \leq a - 2b] = P_{2b}[B_t \leq a],$$

并证明随机向量 (B_t, S_t) 在 $\{(a, b) : a \leq b, b > 0\}$ 上的密度为

$$\left(\frac{2}{\pi t^3}\right)^{1/2} (2b - a) \exp\left(-\frac{(2b - a)^2}{2t}\right).$$

也可以通过计算 Laplace 变换

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} P[S_t \geq b, B_t \leq a] dt$$

来证明。

3°) 证明: 对每个 t , 随机变量 $S_t - B_t$ 与 $|B_t|$ 同分布, $2S_t - B_t$ 与三维布朗运动在时刻 t 的模 $|\mathbf{BM}_t^3|$ 同分布; 进一步证明, 在给定 $2S_t - B_t$ 的条件下, S_t 与 $S_t - B_t$ 都在 $[0, 2S_t - B_t]$ 上服从均匀分布。第 VI 章将给出强得多的结果。

4°) 令

$$s_t = \inf_{s \leq t} B_s, \quad a > 0.$$

证明: 在测度 P_a 限制于 $\{s_t > 0\}$ 后, 随机变量 B_t 在 $b > 0$ 上的密度为

$$(2\pi t)^{-1/2} \left[\exp\left(-\frac{(b-a)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(b+a)^2}{2t}\right) \right].$$

与练习 3.29 比较。

练习 3.15。

1°) 设 $a < 0 < b$ 。对 $F \subset (-\infty, a]$ 及 $t > 0$, 证明

$$P[T_b < T_a, B_t \in F] = P[B_t \in \sigma_b F] - P[T_a < T_b, B_t \in \sigma_b F],$$

其中

$$\sigma_b F = \{2b - y : y \in F\}.$$

2°) 沿用练习 3.14 的记号。证明: 对 $[a, b]$ 的任意 Borel 子集 E ,

$$P[a \leq s_t < S_t \leq b, B_t \in E] = \int_E k(x) dx,$$

其中

$$k(x) = (2\pi t)^{-1/2} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left\{-\frac{(x + 2j(b-a))^2}{2t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x - 2b + 2j(b-a))^2}{2t}\right\} \right].$$

提示:

$$P[T_a < T_b, T_a \leq t, B_t \in E] = P[T_a < T_b, B_t \in \sigma_a E].$$

对右端反复应用第 1° 问的公式。

3°) 写出

$$B_t^* = \sup_{s \leq t} |B_s|, \quad \tilde{T}_a = \inf\{t : |B_t| > a\}$$

的分布。即使不使用第 2° 问也可以完成。

练习 3.16。 设 X 是转移半群为 (P_t) 的马尔可夫过程的典范版本。假设对每个停时 T 、每个初始分布 ν 以及每个 $f \in \mathcal{E}_+$, 在 $\{X_T \neq \Delta\}$ 上都有

$$E_\nu[f(X_{T+t}) | \mathcal{F}_T] = P_t f(X_T) \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

证明 X 具有强马尔可夫性质。

练习 3.17。 证明 (B_t, S_t) 是取值于

$$E = \{(a, b) : a \leq b, b > 0\}$$

的马尔可夫过程, 并利用练习 3.14 的第 2° 问计算其转移函数。

练习 3.18。 对标准一维布朗运动, 证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} P[B_s \leq 1, \forall s \leq t] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

练习 3.19。

1°) 设 X 是 Feller 过程, T 是有限停时。证明: 任意 $\mathcal{F}_\infty$ -可测非负随机变量 Z 都可写成

$$Z(\omega) = \phi(\omega, \theta_T(\omega)),$$

其中 ϕ 是 $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{F}_\infty$ -可测的。进一步证明

$$E_\nu[Z | \mathcal{F}_T](\omega) = \int \phi(\omega, \omega') P_{X_T(\omega)}(d\omega') \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

2°) 设 $S \geq 0$ 且 S 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的。对非负 Borel 函数 f , 证明

$$E_\nu[f(X_{T+S}) | \mathcal{F}_T](\omega) = E_{X_T(\omega)}[f(X_{S(\omega)}(\cdot))] \quad P_\nu\text{-a.s.}$$

可以利用第 1° 问, 也可以直接由强马尔可夫性质证明。

3°) 取 $T = T_a$, 利用第 2° 问写出命题 3.7 的证明。

练习 3.20 (第一反正弦律)。 第 3° 至第 5° 问可以不依赖第 1°、第 2° 问而独立求解。

1°) 对实数 u , 像命题 3.12 的证明那样令

$$d_u = u + T_0 \circ \theta_u.$$

利用布朗运动 $(B_{t+u} - B_u, t \geq 0)$, 证明

$$d_u \stackrel{(d)}{=} u + B_u^2 T_1,$$

其中 T_1 与 B_u 独立。因此

$$d_u \stackrel{(d)}{=} u(1 + C^2),$$

其中 C 是参数为 1 的 Cauchy 随机变量。

提示:

$$d_u = u + T_{-B_u},$$

这里的 T 是相对于布朗运动 $B_{t+u} - B_u$ 定义的。

2°) 证明随机变量

$$g_1 = \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$$

在 $[0, 1]$ 上的密度为

$$\frac{1}{\pi \sqrt{y(1-y)}}.$$

提示: $\{g_1 < u\} = \{d_u > 1\}$ 。

3°) 利用强马尔可夫性质以及定理 2.17 以前回顾的击中时性质, 给出第 2° 问的另一种证明。

4°) 令

$$d_1 = \inf\{t > 1 : B_t = 0\}.$$

仿照第 3° 问证明: 随机向量 (g_1, d_1) 在

$$0 \leq y \leq 1 \leq z$$

上的密度为

$$\frac{1}{2\pi} y^{-1/2} (z - y)^{-3/2}.$$

5°) 计算 $d_1 - g_1$ 的分布。用第 XII 章的语言, 这就是跨越时刻 1 的游程长度的分布 (见第 XII 章练习 3.7)。关于 g_1, d_1 的更多结果, 见练习 3.23。

练习 3.21. 设 η 是 Bernoulli 随机变量。在 $\mathbb{R} \cup \{\Delta\}$ 上定义一族过程 (X^x) :

$$X_t^x = \begin{cases} x+t, & x < 0, x+t < 0, \\ x+t, & x < 0, x+t \geq 0, \eta = 1, \\ \Delta, & x < 0, x+t \geq 0, \eta = -1, \\ x+t, & x \geq 0. \end{cases}$$

令 P_x 为 X^x 的分布。证明: 在 P_x ($x \in \mathbb{R}$) 下, 典范过程是强马尔可夫过程, 但不是 Feller 过程。

练习 3.22. 令 E 是 $\mathbb{R}^2$ 中以下三个集合的并:

$$\{x \leq 0, y = 0\}, \quad \{x > 0, y = x\}, \quad \{x > 0, y = -x\}.$$

在 E 上定义转移函数:

$$\begin{aligned} x \leq 0, \quad P_t((x, 0), \cdot) &= \delta_{(x+t, 0)}, & x+t \leq 0, \\ x \leq 0, \quad P_t((x, 0), \cdot) &= \frac{1}{2}\delta_{(x+t, x+t)} + \frac{1}{2}\delta_{(x+t, -x-t)}, & x+t > 0, \\ x > 0, \quad P_t((x, x), \cdot) &= \delta_{(x+t, x+t)}, \\ x > 0, \quad P_t((x, -x), \cdot) &= \delta_{(x+t, -x-t)}. \end{aligned}$$

构造一个以 E 为状态空间、转移函数为 P_t 的马尔可夫过程 X , 并证明它既不满足 Blumenthal 零一律, 也不满足强马尔可夫性质。

提示: 对后一个结论, 考察

$$T = \inf\{t : X_t \in \{x > 0, y = x\}\}.$$

练习 3.23. 对标准布朗运动和 $t > 0$, 令

$$g_t = \sup\{s < t : B_s = 0\}, \quad d_t = \inf\{s > t : B_s = 0\}.$$

1°) 简单应用马尔可夫性质, 证明随机向量 (B_t, d_t) 的密度为

$$\frac{|x|}{2\pi} (t(s-t)^3)^{-1/2} \exp\left(-\frac{sx^2}{2t(s-t)}\right) \mathbf{1}_{\{s \geq t\}}.$$

2°) 利用第 I 章命题 1.10 的时间反演不变性, 由第 1° 问推出 (B_t, g_t) 的密度为

$$\frac{|x|}{2\pi} (s(t-s)^3)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) \mathbf{1}_{\{s \leq t\}}.$$

第 XII 章第 3 节将给出同类的更精细结果。

练习 3.24.

1°) 记 (X_t, Y_t) 为从 $(0, a)$ 出发的 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 中的布朗运动, 其中 $a > 0$ 。令

$$S_a = \inf\{t : Y_t = 0\}.$$

证明 X_{S_a} 的特征函数为

$$\exp(-a|u|).$$

换言之, X_{S_a} 服从参数为 a 的 Cauchy 分布; 这推广了命题 3.11。相应密度为

$$\frac{\Gamma((n+1)/2) a}{\pi^{(n+1)/2}(|x|^2 + a^2)^{(n+1)/2}}.$$

2°) 若 (X_t, Y_t) 从 (x, a) 出发, 写出 X_{S_a} 的密度 $P_{(x,a)}(z)$ 。该密度就是 Poisson 核。若 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, 证明

$$g(x, a) = \int_{\mathbb{R}^n} P_{(x,a)}(z) f(z) dz$$

是 $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 上的调和函数。

练习 3.25。 设 (X, Y) 是标准二维布朗运动; 对 $a > 0$, 令

$$\tilde{T}_a = \inf\{t : |X_t| = a\}.$$

证明随机变量 $Y_{\tilde{T}_a}$ 的密度为

$$\frac{1}{2a \cosh(\pi x/(2a))}.$$

练习 3.26 (布朗运动的局部极值)。 设 B 是标准一维布朗运动。

1°) 证明: 任意固定实数 x 成为布朗路径某个局部极值的概率为零。

2°) 对任意正实数 r , 证明

$$P\{\omega : S_r(\omega) \text{ 是函数 } t \mapsto B_t(\omega), t > r \text{ 的一个局部极值}\} = 0.$$

3°) 由此证明, 几乎每条布朗路径都没有两个取值相同的局部极值。特别地, 对每个 r , 几乎必然至多存在一个 $s < r$, 使

$$B_s = S_r.$$

4°) 证明布朗路径的局部极值点集几乎必然至多可数。

练习 3.27。 由反射原理推出第 II 章命题 1.8 的指数不等式。

练习 3.28。

1°) 证明第 II 章练习 3.14 中的停时 $\sigma_{a,b}$ 的密度为

$$a(2\pi t^3)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(a-bt)^2}{2t}\right).$$

提示: 利用第 II 章练习 3.14 的缩放性质, 以及 T_a 的密度和 Laplace 变换的已知形式。

2°) 由此给出上述练习第 5° 问的另一种证明。

练习 3.29。

1°) 设 B 是一维布朗运动, 并令

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t = 0\}.$$

设初始分布 ν 支持在 $(0, \infty)$ 上。在 P_ν 下定义

$$X_t = \begin{cases} B_t, & t < T, \\ \Delta, & t \geq T. \end{cases}$$

证明 X 是 $(0, \infty)$ 上的马尔可夫过程, 其转移函数为练习 1.15 中的 Q_t 。该过程称为在 0 处被杀死的布朗运动。因此, 对 $a > 0$,

$$Q_t(a, (0, \infty)) = P_0(T_a > t).$$

将此式与命题 3.10 对照。

^a

提示: 参见练习 2.30。求转移函数时, 使用练习 3.14 得到的 (B_t, S_t) 的联合分布。

2°) 对在 0 处吸收的布朗运动作同样讨论, 即令

$$X_t = B_{t \wedge T}.$$

^a**校订注:** 原文此处把生存概率写成 $P_0(T_a < t)$ 。由定义, $Q_t(a, (0, \infty)) = P_a(T_0 > t)$, 再由平移与对称性应为 $P_0(T_a > t)$, 故校正不等号方向。

练习 3.30 (BMO 中无界鞅的例子)。

1°) 若 B 是标准一维布朗运动, 证明 B^1 (即在时刻 1 停止的布朗运动) 属于 BMO, 并且

$$\|B^1\|_{\text{BMO}_1} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}.$$

证明鞅

$$E[B_1^2 \mid \mathcal{F}_t]$$

不属于 BMO。

2°) 若 B 是标准一维布朗运动, S 是与 B 独立的正随机变量, 则

$$X_t = B_{t \wedge S}$$

关于滤过

$$\mathcal{G}_t = \sigma(S, \mathcal{F}_t)$$

是 BMO 鞅, 当且仅当 S 几乎必然有界。

练习 3.31 (Kolmogorov 检验)。设 h 是 $(0, 1)$ 上取实值、连续且递增的函数, 并且

$$\frac{h(t)}{\sqrt{t}}$$

递减。若

$$\int_{0+} t^{-3/2} h(t) \exp\left(-\frac{h^2(t)}{2t}\right) dt < \infty,$$

证明

$$P[B_t \geq h(t) \text{ 对某个 } t \in (0, b)] \leq \int_{0+}^b \frac{h(t)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{h^2(t)}{2t}\right) dt.$$

由此证明 h 属于上类 (见练习 2.32)。

提示: 对 $0 < a < b$ 及 (a, b) 的一个分割 (t_k) ,

$$P[B_t \geq h(t) \text{ 对某个 } t \in (a, b)] \leq P[T_{h(a)} \leq a] + \sum_k P[t_{k-1} < T_{h(t_{k-1})} \leq t_k].$$

反过来, 如果上述积分发散, 那么 h 属于下类; 这个结论同样成立, 但证明更困难。由此得到的判据称为 *Kolmogorov* 检验。

4 Lévy 过程结果概要

第 2 节定义了 Lévy 过程, 其中包括布朗运动和 Poisson 过程。在第 3 节研究布朗运动时, 我们又遇到另一个 Lévy 过程, 即 (T_{a+}) 。这只是布朗运动研究中自然出现的众多 Lévy 过程之一。因此, 不妨稍作停留, 不加证明地陈述若干后文会用到的 Lévy 过程事实。Lévy 过程本身已有广泛而深入的研究; 即使只从启发角度看, 它的性质也常常预示一般马尔可夫过程的性质, 第 VII 章讨论无穷小生成元时就会看到这一点。

以下只讨论实值 Lévy 过程。回顾: 若 $\mathbb{R}$ 上的概率测度 μ , 或分布为 μ 的实随机变量 Y , 满足对每个 $n \geq 1$, 都存在概率测度 μ_n , 使

$$\mu = \mu_n^{*n},$$

则称 μ (或 Y) 是无限可分的。等价地, Y 的分布可以写成 n 个独立同分布随机变量之和的分布。容易看出, 高斯、Poisson 与 Cauchy 随机变量都是无限可分的。

显然, 若 X 是 Lévy 过程, 则每个随机变量 X_t 都是无限可分的。反过来, Lévy 证明了: 任意无限可分随机变量 Y 都可嵌入唯一的卷积半群; 换言之, 存在 Lévy 过程 X , 使

$$Y \stackrel{(d)}{=} X_1.$$

证明思路如下。用解析方法可以证明, μ 无限可分, 当且仅当它的 Fourier 变换 $\hat{\mu}$ 可写为 $\exp(\psi)$, 其中

$$\psi(u) = i\beta u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \nu(dx),$$

这里 $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$, 而 ν 是 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上的 Radon 测度, 满足

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{x^2}{1+x^2} \nu(dx) < \infty.$$

这个公式称为 *Lévy-Khintchine* 公式, ν 称为 *Lévy* 测度。对每个 $t \in \mathbb{R}_+$, $\exp(t\psi)$ 显然是某个概率测度 μ_t 的 Fourier 变换, 并且

$$\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}, \quad \lim_{t \downarrow 0} \mu_t = \varepsilon_0.$$

这就证明了 Lévy 的定理。

Lévy-Khintchine 公式中的各项都有概率意义, 第 VII 章还会进一步强调。若 $\sigma = 0$ 且 $\nu = 0$, 则 $\mu = \varepsilon_\beta$, 相应半群是在速度 β 下作平移; 若 $\beta = 0$ 且 $\nu = 0$, 相应半群来自布朗运动的常数倍,

对应 Lévy 过程具有连续路径；若 $\beta = 0$ 且 $\sigma = 0$ ，则得到“纯跳”过程，上一节的 T_{a+} 就是例子。每个 Lévy 过程都可表示为上述三类相互独立过程之和。因此，Lévy 测度描述 X 的跳跃；已知 ν 后，可以给出 X 的概率构造，第 XII 章练习 1.18 对此有所提示。

在无限可分随机变量中，所谓稳定随机变量构成一个特别重要的子类。

定义 4.1. 若对每个正整数 k ，都存在与 Y 同分布且相互独立的随机变量 $Y_1, \dots, Y_k$ ，以及常数 $a_k > 0, b_k$ ，使

$$Y_1 + \dots + Y_k \stackrel{(d)}{=} a_k Y + b_k,$$

则称随机变量 Y 是稳定的。

可以证明，上式必然迫使

$$a_k = k^{1/\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 2.$$

数 α 称为稳定分布的指数。稳定分布显然无限可分。当 $\alpha = 2$ 时得到高斯随机变量；当 $0 < \alpha < 2$ 时，对应的函数 ψ 有如下刻画。

定理 4.2. 若 Y 是指数 $\alpha \in (0, 2)$ 的稳定随机变量，则 $\sigma = 0$ ，并且其 Lévy 测度的密度为

$$(m_1 \mathbf{1}_{\{x < 0\}} + m_2 \mathbf{1}_{\{x > 0\}}) |x|^{-(1+\alpha)},$$

其中 $m_1, m_2 \geq 0$ 。

如前所述，对每个指数为 α 的稳定随机变量，都可联系一个 Lévy 过程；该过程也称为指数为 α 的稳定过程。上一节的 T_{a+} 因而是指数 $1/2$ 的稳定过程。在定理 4.2 中取 $\beta = 0$ 且 $m_1 = m_2$ ，得到指数为 α 的对称稳定过程。此时

$$\psi(u) = -c|u|^\alpha,$$

其中 $c > 0$ 是参数。这类过程包括一维布朗运动与 Cauchy 过程；后者是指数为 1 且

$$\hat{\mu}_t(u) = \exp(-t|u|)$$

的对称稳定过程。它们具有与布朗运动相仿的缩放不变性：对任意 $c > 0$ ，

$$(c^{-1} X_{c^\alpha t})_{t \geq 0}$$

与 $(X_t)_{t \geq 0}$ 同分布。

稳定过程的另一个重要子类是稳定次序过程，即非减的稳定过程；等价地，它们是满足 $X_t \geq 0$ 几乎必然成立的稳定过程。相应稳定分布支持在 $[0, \infty)$ 上，并可由 Laplace 变换刻画。指数为 α 时，在 $0 < \alpha < 1$ 的情形，该 Laplace 变换为

$$\exp(-c\lambda^\alpha).$$

事实上，当 $\alpha \in (1, 2]$ 时，这个函数不是 Laplace 变换，指数为 α 的稳定次序过程不存在； $\alpha = 1$ 的情形是显然的。过程 T_{a+} 再次给出了指数 $1/2$ 的稳定次序过程例子。

设 (τ_a) 是从 0 出发、指数 $\alpha \in (0, 1)$ 的稳定次序过程， X 是与 (τ_a) 独立的 Lévy 过程，则映射

$$a \mapsto X_{\tau_a}$$

有意义，并且仍是 Lévy 过程，读者可把这作为练习证明。若 X 是一维布朗运动，简单计算表明 X_{τ_a} 是指数 2α 的对称稳定过程。特别地，当 $\alpha = 1/2$ 时， X_{τ_a} 是对称 Cauchy 过程，这推广了命题 3.11。

练习 4.3. 若 X 是 Lévy 过程, 证明对每个实数 u ,

$$\exp(iuX_t - t\psi(u))$$

是复值鞅。

练习 4.4. 由布朗运动的缩放不变性推出过程 T_{a+} 的缩放不变性。

练习 4.5. 设 $(T_a, a \geq 0)$ 是从零出发、指数为 α 的右连续稳定次序过程。由于其路径右连续且递增, 对 $\mathbb{R}_+$ 上每个正 Borel 函数 f , Stieltjes 积分

$$\int_0^t f(a) dT_a$$

都有意义; 记由此定义的随机变量为 $T(f)_t$ 。

1°) f 满足什么充要条件, 才能使对每个 t , 都有

$$T(f)_t < \infty \quad \text{a.s.}?$$

在这种情形下, $T(f)_t$ 服从什么分布?

2°) 证明存在常数 c_α , 使由

$$S_t = c_\alpha \int_0^{t^{1/(1-\alpha)}} a^{-1} dT_a$$

定义的过程 (S_t) 与 $(T_a, a \geq 0)$ 同分布。

练习 4.6 (Harness 过程与 Lévy 过程). 设 X 是可积 Lévy 过程, 即 $E[|X_1|] < \infty$ 。对 $0 \leq s < t$, 定义

$$\mathcal{F}_{s,t} = \sigma\{X_u : u \leq s; X_v : v \geq t\}.$$

1°) 证明: 对任意 $0 \leq c \leq a < b \leq d$,

$$E\left[\frac{X_b - X_a}{b - a} \middle| \mathcal{F}_{c,d}\right] = \frac{X_d - X_c}{d - c}.$$

满足这一条件的过程称为 *harness* 过程。

2°) 固定 $T > 0$ 。证明: 若 X 是 harness 过程, 则

$$X_t - \int_0^{t \wedge T} \frac{X_T - X_s}{T - s} ds, \quad t \leq T,$$

是 $(\mathcal{F}_{t,T})$ -鞅。与第 IV 章练习 3.18 比较。

3°) 证明由

$$X'_t = tX_{1/t}, \quad t > 0,$$

定义的过程 X' 也是 harness 过程。

注释与评述

本章所含材料都是经典结果，并且只保留了理解后文所需的最低限度。我们参考了 Blumenthal–Gettoor [1]、Meyer [1] 与 Chung [2]。其中 Chung 的著作是进一步熟悉马尔可夫过程及其势理论的极好读物，也很好补充了本书。读者还可参考 Dellacherie–Meyer [1] 第 4 卷。若希望阅读更深入且较新的马尔可夫过程论述，我们推荐 Sharpe [3]。

本章大部分结果都可在上述资料中找到。这里只补充说明：练习 1.16 取自 Walsh [3]；练习 1.17 的第 1° 问取自 Dynkin [1]，其余各问取自 Chung [2]。关于这个练习，Pitman–Rogers [1] 还给出了另一个很有用的判据，用来判断马尔可夫过程的函数何时仍是马尔可夫过程。

练习 3.31 的 Kolmogorov 检验见 Itô–McKean [1]。练习 2.31 中 iii) 与 iv) 的等价性见 Jeulin–Yor [2] 和 Jeulin [4]。练习 3.15 取自 Freedman [1]。

关于 Lévy 过程的高阶专著，可参考 Bertoin [7] 与 Sato [1]。

练习 4.6 中 harness 的概念由 Hammersley 提出，Williams 在数篇论文中讨论过它（见 Chaumont–Yor [1]，练习 6.19）。对 Lévy 过程而言，第 2° 问的结果见 Jacod–Protter [1]；第 3° 问的结果由 Williams 得到，未公开发表。

第 IV 章 随机积分

本章介绍后文将反复使用的一些基本方法和概念。以下始终考虑一个带滤过的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ ，并假设每个 $\mathcal{F}_t$ 都包含 $\mathcal{F}$ 中所有的 P -零测集。于是，适应过程的任何极限（几乎处处极限、平均意义下的极限等）仍是适应过程；与某个适应过程不可分辨的过程也仍是适应过程。

1 二次变差

定义 1.1。 若过程 A 适应，并且对几乎所有 ω ，路径 $t \mapsto A_t(\omega)$ 有限、右连续且递增（相应地，具有有限变差），则称 A 是递增过程（相应地，有限变差过程）。

用 $\mathcal{A}^+$ （相应地， $\mathcal{A}$ ）表示递增过程（相应地，有限变差过程）所成的空间。显然 $\mathcal{A}^+ \subset \mathcal{A}$ 。反过来，由第 0 章第 4 节容易看出，任意 $A \in \mathcal{A}$ 都可写为

$$A_t = A_t^+ - A_t^-,$$

其中 $A^+, A^- \in \mathcal{A}^+$ 。而且可以选取 A^+ 与 A^- ，使得对几乎所有 ω ， $A^+(\omega) - A^-(\omega)$ 是路径 $A(\omega)$ 的最小分解。过程

$$\int_0^t |dA|_s = A_t^+ + A_t^-$$

属于 $\mathcal{A}^+$ ；对几乎所有 ω ，与它相联系的测度是与 $A(\omega)$ 相联系的测度的全变差，称为 A 的变差。

显然可以关于与 $A(\omega)$ 相联系的测度对适当的函数积分，从而得到一种“随机积分”。更准确地说，若 X 是逐次可测过程，并且例如对几乎所有 ω ， $X(\omega)$ 在每个区间 $[0, t]$ 上有界，则可以对几乎所有 ω 定义 Stieltjes 积分

$$(X \cdot A)_t(\omega) = \int_0^t X_s(\omega) dA_s(\omega).$$

若 $A(\omega)$ 不是有限变差函数，或者 $X(\omega)$ 关于 $dA(\omega)$ 不是局部可积的，就规定 $X \cdot A = 0$ 。读者不难验证，这样定义的过程 $X \cdot A$ 属于 $\mathcal{A}$ 。要求 X 逐次可测，正是为了保证 $X \cdot A$ 适应。它称为 X 关于 $\mathcal{A}$ 中过程 A 的“随机积分”。

现在的目标是定义关于鞅的“随机积分”。下述命题揭示了这一工作的困难；在布朗运动的情形，我们已经遇到过这种困难。

命题 1.2。 连续鞅 M 若属于 $\mathcal{A}$ ，就必为常值过程。

证明。 不妨设 $M_0 = 0$ ；我们要证明，若 M 具有有限变差，则 M 恒等于零。令 V_t 为 M 在 $[0, t]$ 上的变差，并定义

$$S_n = \inf\{s : V_s \geq n\}.$$

于是鞅 M^{S_n} 具有有界变差。因此，只需证明 M 的变差被某个数 K 所界时的结论。

设

$$\Delta = \{t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_k = t\}$$

是 $[0, t]$ 的一个分割。因为 M 是鞅,

$$\begin{aligned} E[M_t^2] &= E \left[\sum_{i=0}^{k-1} (M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2) \right] \\ &= E \left[\sum_{i=0}^{k-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \right]. \end{aligned}$$

因此

$$E[M_t^2] \leq E \left[V_t \sup_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \right] \leq KE \left[\sup_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \right].$$

当 Δ 的网格趋于零时, 由 M 的连续性, 最后一个量趋于零, 故 $M = 0$ 几乎必然成立。 $\square$

注。 读者也许会觉得练习 1.32 所提示的证明更直观。

由命题 1.2, 无法通过逐条路径的办法定义关于 M 的积分; 我们必须采用一种整体方法, 而下面将引入的概念正是这一方法的关键。沿用第 I 章第 2 节的记号。若

$$\Delta = \{t_0 = 0 < t_1 < \cdots\}$$

是 $\mathbb{R}_+$ 的分割, 并且每个区间 $[0, t]$ 中只含有限多个分点, 则对过程 X 定义

$$T_t^\Delta(X) = \sum_{i=0}^{k-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + (X_t - X_{t_k})^2,$$

其中 k 满足 $t_k \leq t < t_{k+1}$ 。不会引起混淆时, 简记为 T_t^Δ 。回顾第 I 章第 2 节: 若存在过程 $\langle X, X \rangle$, 使得对每个 t , 当 Δ 在 $[0, t]$ 上的网格趋于零时, T_t^Δ 依概率收敛到 $\langle X, X \rangle_t$, 就称 X 具有有限二次变差。本节的主要结果如下。

定理 1.3。 连续有界鞅 M 具有有限二次变差; 并且 $\langle M, M \rangle$ 是唯一的、从零出发的连续递增适应过程, 使得

$$M^2 - \langle M, M \rangle$$

是鞅。

证明。 唯一性是命题 1.2 的直接推论: 若存在两个这样的过程 A, B , 则 $A - B$ 是从零出发且属于 $\mathcal{A}$ 的连续鞅。

下面证明 $\langle M, M \rangle$ 的存在性。先注意到, 当 $t_i < s < t_{i+1}$ 时,

$$E[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | \mathcal{F}_s] = E[(M_{t_{i+1}} - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] + (M_s - M_{t_i})^2.$$

由此容易得到

$$\begin{aligned} E[T_t^\Delta(M) - T_s^\Delta(M) | \mathcal{F}_s] &= E[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= E[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

因而 $M_t^2 - T_t^\Delta(M)$ 是连续鞅。下文把 $T_t^\Delta(M)$ 简记为 T_t^Δ 。

固定 $a > 0$ 。我们将证明: 若 (Δ_n) 是 $[0, a]$ 的分割序列且 $|\Delta_n| \rightarrow 0$, 则 $(T_a^{\Delta_n})$ 在 L^2 中收敛。若 Δ, Δ' 是两个分割, 记 $\Delta\Delta'$ 为由二者全部分点组成的分割。由 (1.1), 过程 $X = T^\Delta - T^{\Delta'}$ 是鞅; 再把 (1.1) 应用于 X , 得到

$$E[X_a^2] = E[(T_a^\Delta - T_a^{\Delta'})^2] = E[T_a^{\Delta\Delta'}(X)].$$

对任意实数 x, y , 有 $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$, 故

$$T_a^{\Delta\Delta'}(X) \leq 2 \left\{ T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta) + T_a^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta'}) \right\}.$$

所以, 为了证明上述结论, 只需证明当 $|\Delta| + |\Delta'| \rightarrow 0$ 时,

$$E \left[T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta) \right] \rightarrow 0.$$

设 $s_k \in \Delta\Delta'$, 并令 t_i 为 Δ 中满足 $t_i \leq s_k < s_{k+1} \leq t_{i+1}$ 的最右分点。于是

$$\begin{aligned} T_{s_{k+1}}^\Delta - T_{s_k}^\Delta &= (M_{s_{k+1}} - M_{t_i})^2 - (M_{s_k} - M_{t_i})^2 \\ &= (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})(M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_i}), \end{aligned}$$

从而

$$T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta) \leq \left(\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_i}|^2 \right) T_a^{\Delta\Delta'}.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$E \left[T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta) \right] \leq E \left[\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_i}|^4 \right]^{1/2} E \left[(T_a^{\Delta\Delta'})^2 \right]^{1/2}.$$

当 $|\Delta| + |\Delta'| \rightarrow 0$ 时, 由 M 的连续性, 第一个因子趋于零; 因此只需证明第二个因子被一个与 Δ, Δ' 无关的常数所界。为此, 写 $a = t_n$, 则

$$\begin{aligned} (T_a^\Delta)^2 &= \left(\sum_{k=1}^n (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 \right)^2 \\ &= 2 \sum_{k=1}^n (T_a^\Delta - T_{t_k}^\Delta)(T_{t_k}^\Delta - T_{t_{k-1}}^\Delta) + \sum_{k=1}^n (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4. \end{aligned}$$

由 (1.1),

$$E[T_a^\Delta - T_{t_k}^\Delta \mid \mathcal{F}_{t_k}] = E[(M_a - M_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_{t_k}],$$

故

$$\begin{aligned} E[(T_a^\Delta)^2] &= 2 \sum_{k=1}^n E \left[(M_a - M_{t_k})^2 (T_{t_k}^\Delta - T_{t_{k-1}}^\Delta) \right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n E[(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4] \\ &\leq E \left[\left(2 \sup_k |M_a - M_{t_k}|^2 + \sup_k |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}|^2 \right) T_a^\Delta \right]. \end{aligned}$$

设 $|M| \leq C$ 。由 (1.1) 易见 $E[T_a^\Delta] \leq 4C^2$, 因此

$$E[(T_a^\Delta)^2] \leq 12C^2 E[T_a^\Delta] \leq 48C^4.$$

我们已经证明: 对任意满足 $|\Delta_n| \rightarrow 0$ 的序列, $(T_a^{\Delta_n})$ 在 L^2 中、因而也依概率收敛到某个极限 $\langle M, M \rangle_a$ 。还须在其等价类中选取适当版本, 使由此得到的过程 $\langle M, M \rangle$ 具有定理所需的性质。

仍取上述 (Δ_n) 。对鞅 $T^{\Delta_n} - T^{\Delta_m}$ 应用 Doob 不等式,

$$E \left[\sup_{t \leq a} |T_t^{\Delta_n} - T_t^{\Delta_m}|^2 \right] \leq 4E[(T_a^{\Delta_n} - T_a^{\Delta_m})^2].$$

从 L^2 收敛序列中可以抽出一个几乎必然收敛的子列。因此, 存在子列 (Δ_{n_k}) , 使 $T^{\Delta_{n_k}}$ 在 $[0, a]$ 上几乎必然一致收敛到 $\langle M, M \rangle$; 该极限必然几乎必然连续。

此外, 一开始便可以让 Δ_{n+1} 细分 Δ_n , 且 $\bigcup_n \Delta_n$ 在 $[0, a]$ 中稠密。任取 $\bigcup_n \Delta_n$ 中的 $s < t$, 存在 n_0 , 使 $n \geq n_0$ 时 $s, t \in \Delta_n$ 。于是 $T_s^{\Delta_n} \leq T_t^{\Delta_n}$, 故 $\langle M, M \rangle$ 在 $\bigcup_n \Delta_n$ 上递增; 由连续性, 它处处递增 (尽管 T^{Δ_n} 本身未必是递增过程)。

最后, 在 (1.1) 中取极限可知 $M^2 - \langle M, M \rangle$ 是鞅。证明完毕。 $\square$

为了扩大上述结果的适用范围, 还需要下述命题。

命题 1.4. 对任意停时 T ,

$$\langle M^T, M^T \rangle = \langle M, M \rangle^T.$$

证明. 由可选停止定理, $(M^T)^2 - \langle M, M \rangle^T$ 是鞅, 所以结论来自定理 1.3 中的唯一性。 $\square$

定理 1.3 虽然很有意义, 却还不足以满足我们的需要; 例如, 它没有涵盖布朗运动 B , 因为 B 不是有界鞅。然而我们已经知道, B 的“二次变差”为 t , 而且与定理 1.3 完全类似, $B_t^2 - t$ 是鞅。下面借助富有成效的局部化思想, 把布朗运动与有界鞅这两种情形纳入同一个结果。

定义 1.5. 若适应右连续过程 X 存在一系列停时 T_n ($n \geq 1$), 满足:

- i) (T_n) 递增, 并且 $\lim_n T_n = +\infty$ 几乎必然成立;
 - ii) 对每个 n , 过程 $X^{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}}$ 都是一致可积的 $(\mathcal{F}_t, P)$ -鞅,
- 则称 X 是一个 $(\mathcal{F}_t, P)$ -局部鞅。

不会引起歧义时, 略去 $(\mathcal{F}_t, P)$ 。条件 ii) 中可以不要要求一致可积, 而只要求 $X^{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}}$ 是鞅: 事实上, 总可以把 T_n 换成 $T_n \wedge S_n$, 从而得到一致可积鞅。同样, 若 X 连续——本书几乎总是这种情形——令

$$S_n = \inf\{t : |X_t| = n\},$$

并把 T_n 换成 $T_n \wedge S_n$, 便可假定 ii) 中的鞅有界。后文将反复使用这一点。在第 3 节中, 我们将见到许多连续局部鞅的例子。

还规定: 若 $X^T \mathbf{1}_{\{T > 0\}}$ 是一致可积鞅, 就称停时 T 约化 X 。引入过程 $Y_t = X_t - X_0$ 后, 这一性质可以分成两部分: T 约化 X 当且仅当

- i) X_0 在 $\{T > 0\}$ 上可积;
- ii) Y^T 是一致可积鞅。

但常见情形是 X_0 为常数, 此时无需顾及 i)。这也解释了为何后文常略去限定因子 $\mathbf{1}_{\{T > 0\}}$ 。请读者作为练习证明下列简单性质 (另见练习 1.30):

- i) 若 T 约化 X 且 $S \leq T$, 则 S 约化 X ;
- ii) 两个局部鞅之和仍是局部鞅;
- iii) 若 Z 是 $\mathcal{F}_0$ -可测随机变量, 且 X 是局部鞅, 则 ZX 仍是局部鞅; 特别地, 局部鞅全体构成向量空间;
- iv) 停止后的局部鞅仍是局部鞅;
- v) 正局部鞅是上鞅。

取 $T_n = n$ 即知, 布朗运动乃至更一般的任意右连续鞅都是局部鞅。但须强调: 局部鞅远比鞅一般。一个常见的错误观念是, 以为局部鞅只要可积便一定是鞅。第 V 章练习 2.13 将说明, 某些局部鞅即使具有很强的可积性, 仍然不是鞅。不过, 我们先作如下定义。

定义 1.6。 称实值适应过程 X 属于 D 类, 如果当 T 取遍所有停时时, 随机变量族

$$\{X_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}\}$$

一致可积。称 X 属于 DL 类, 如果对每个 $a > 0$, 当 T 取遍所有小于 a 的停时时, 随机变量族 $\{X_T\}$ 一致可积。

一致可积鞅属于 D 类。事实上, 由第 II 章第 3 节,

$$X_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} = E[X_\infty | \mathcal{F}_T] \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}.$$

又已知, 若 Y 在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上可积, 则当 $\mathcal{B}$ 取遍 $\mathcal{F}$ 的子 σ -域时, 条件期望族 $\{E[Y | \mathcal{B}]\}$ 一致可积。另一方面, 一个过程即使本身一致可积, 也未必属于 D 类。对局部鞅, 有如下结论。

命题 1.7。 局部鞅是鞅, 当且仅当它属于 DL 类。

证明。 留给读者作为练习; 另见练习 1.46。

现在给出引入局部鞅概念所要得到的结果。

定理 1.8。 若 M 是连续局部鞅, 则存在唯一的、从零出发的连续递增过程 $\langle M, M \rangle$, 使得

$$M^2 - \langle M, M \rangle$$

是连续局部鞅。此外, 对每个 t , 以及任意满足 $|\Delta_n| \rightarrow 0$ 的 $[0, t]$ 分割序列 (Δ_n) , 随机变量

$$\sup_{s \leq t} |T_s^{\Delta_n}(M) - \langle M, M \rangle_s|$$

依概率收敛到零。

证明。 取递增至 $+\infty$ 的停时序列 (T_n) , 使

$$X_n = M^{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}}$$

是有界鞅。由定理 1.3, 对每个 n , 存在从零出发的连续过程 $A_n \in \mathcal{A}^+$, 使 $X_n^2 - A_n$ 是鞅。于是

$$(X_{n+1}^2 - A_{n+1}) \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}} = X_n^2 - A_{n+1}^{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}}$$

也是鞅。由定理 1.3 的唯一性, 在 $\{T_n > 0\}$ 上有

$$A_{n+1}^{T_n} = A_n.$$

所以可以无歧义地定义过程 $\langle M, M \rangle$: 在 $\{T_n > 0\}$ 上令它等于 A_n 。显然

$$(M^{T_n})^2 \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}} - \langle M, M \rangle^{T_n}$$

是鞅, 故 $\langle M, M \rangle$ 正是所求过程。唯一性来自每个区间 $[0, T_n]$ 上的唯一性。

为证明后一结论, 固定 $\delta, \varepsilon > 0$ 与 t 。可取停时 S , 使 $M^S \mathbf{1}_{\{S > 0\}}$ 有界且 $P[S \leq t] \leq \delta$ 。在 $[0, S]$ 上, $T^\Delta(M)$ 与 $\langle M, M \rangle$ 分别同 $T^\Delta(M^S)$ 与 $\langle M^S, M^S \rangle$ 一致。因此

$$\begin{aligned} & P \left[\sup_{s \leq t} |T_s^\Delta(M) - \langle M, M \rangle_s| > \varepsilon \right] \\ & \leq \delta + P \left[\sup_{s \leq t} |T_s^\Delta(M^S) - \langle M^S, M^S \rangle_s| > \varepsilon \right], \end{aligned}$$

当 $|\Delta| \rightarrow 0$ 时, 最后一项趋于零。 $\square$

通过极化, 还可以进一步推广定理 1.8。

定理 1.9。 若 M, N 是两个连续局部鞅, 则存在唯一的、从零出发的连续过程 $\langle M, N \rangle \in \mathcal{A}$, 使得

$$MN - \langle M, N \rangle$$

是局部鞅。此外, 对每个 t , 以及任意满足 $|\Delta_n| \rightarrow 0$ 的 $[0, t]$ 分割序列 (Δ_n) , 有

$$P\text{-}\lim_n \sup_{s \leq t} |\tilde{T}_s^{\Delta_n} - \langle M, N \rangle_s| = 0,$$

其中

$$\tilde{T}_s^{\Delta_n} = \sum_{t_i \in \Delta_n} (M_{t_{i+1}}^s - M_{t_i}^s)(N_{t_{i+1}}^s - N_{t_i}^s).$$

证明。 适当停止以后, 唯一性再次由命题 1.2 得到。另一方面, 容易验证过程

$$\langle M, N \rangle = \frac{1}{4} [\langle M + N, M + N \rangle - \langle M - N, M - N \rangle]$$

具有所要求的性质。 $\square$

定义 1.10。 过程 $\langle M, N \rangle$ 称为 M 与 N 的括号过程; $\langle M, M \rangle$ 称为与 M 相联系的递增过程, 或简称 M 的递增过程。

后面几节将给出计算括号过程的一般例子; 读者现在也可以先看本节练习 1.36 与 1.44。特别地, 若 M, N 相互独立, 则乘积 MN 是局部鞅, 因而 $\langle M, N \rangle = 0$ (见练习 1.27)。

命题 1.11。 若 T 是停时, 则

$$\langle M^T, N^T \rangle = \langle M, N^T \rangle = \langle M, N \rangle^T.$$

证明。 这是定理 1.9 最后一部分的直接推论。作为练习, 读者也可以注意到

$$M^T N^T - \langle M, N \rangle^T \quad \text{和} \quad M^T (N - N^T)$$

都是局部鞅; 两式相减可知 $M^T N - \langle M, N \rangle^T$ 也是局部鞅。 $\square$

括号运算的性质很像内积: 映射 $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle$ 是双线性的、对称的, 且 $\langle M, M \rangle \geq 0$ 。下述命题还说明它是非退化的。

命题 1.12. $\langle M, M \rangle = 0$ 当且仅当 M 是常值过程, 即对每个 t ,

$$M_t = M_0 \quad \text{a.s.}$$

证明. 由命题 1.11, 只需考虑 M 有界的情形。此时由定理 1.3,

$$E[(M_t - M_0)^2] = E[\langle M, M \rangle_t],$$

结论立即得到。 $\square$

这一性质还可以推广如下。

命题 1.13. M 与 $\langle M, M \rangle$ 的常值区间相同。也就是说, 对几乎所有 ω ,

$$M_t(\omega) = M_a(\omega) \quad (a \leq t \leq b)$$

当且仅当

$$\langle M, M \rangle_b(\omega) = \langle M, M \rangle_a(\omega).$$

证明. 先注意, 若 M 在 $[a, b]$ 上为常值, 它的二次变差显然也在该区间上为常值。反过来, 对有理数 q , 过程

$$N_t = M_{t+q} - M_q$$

是关于滤过 $(\mathcal{F}_{t+q})$ 的局部鞅, 其递增过程为

$$\langle N, N \rangle_t = \langle M, M \rangle_{t+q} - \langle M, M \rangle_q.$$

随机变量

$$T_q = \inf\{s > 0 : \langle N, N \rangle_s > 0\}$$

是关于 $(\mathcal{F}_{t+q})$ 的停时; 对停止后的局部鞅 N^{T_q} , 有

$$\langle N^{T_q}, N^{T_q} \rangle = \langle N, N \rangle^{T_q} = \langle M, M \rangle_{q+T_q} - \langle M, M \rangle_q = 0.$$

由命题 1.12, M 几乎必然在 $[q, q + T_q]$ 上为常值。因此, 当 q 取遍 $\mathbb{Q}_+$ 时, M 几乎必然在全部区间 $[q, q + T_q]$ 上为常值。而 $\langle M, M \rangle$ 的任一常值区间都是某些这类区间的可数并之闭包, 故证明完成。 $\square$

下面的不等式在定义随机积分时非常有用。特别地, 它说明 $d\langle M, N \rangle$ 关于 $d\langle M, M \rangle$ 绝对连续。

定义 1.14. 若映射

$$(\omega, t) \mapsto H_t(\omega)$$

关于 $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 可测, 则称实值过程 H 可测。

可测过程类显然包含逐次可测过程类, 而且通常更大。

命题 1.15. 对任意两个连续局部鞅 M, N 以及任意可测过程 H, K , 几乎必然有

$$\int_0^t |H_s| |K_s| |d\langle M, N \rangle_s| \leq \left(\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_0^t K_s^2 d\langle N, N \rangle_s \right)^{1/2},$$

其中 $0 \leq t \leq \infty$ 。

证明. 取递增极限即可把问题化为 $t < \infty$ 且 H, K 有界的情形。进一步, 只需证明左端换成

$$\left| \int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s \right|$$

后的不等式。事实上, 若 J_s 是 $d\langle M, N \rangle_s / |d\langle M, N \rangle_s|$ 的一个取值于 $[-1, 1]$ 的密度, 并在该式中把 H 换为 $HJ \operatorname{sgn}(HK)$, 便得到命题中的左端。

由稠密性论证, 只需对形如

$$K = K_0 \mathbf{1}_{\{0\}} + K_1 \mathbf{1}_{(0, t_1]} + \cdots + K_n \mathbf{1}_{(t_{n-1}, t_n]}$$

的 K 证明结论, 其中

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$$

是 $[0, t]$ 的有限分割, K_i 是有界可测随机变量。再作一次稠密性论证, 也可设 H 具有相同形式并使用同一个分割。

记

$$\langle M, N \rangle_s^t = \langle M, N \rangle_t - \langle M, N \rangle_s.$$

则几乎必然有

$$|\langle M, N \rangle_s^t| \leq (\langle M, M \rangle_s^t)^{1/2} (\langle N, N \rangle_s^t)^{1/2}.$$

事实上, 几乎必然地, 对每个 $r \in \mathbb{Q}$,

$$\langle M, M \rangle_s^t + 2r \langle M, N \rangle_s^t + r^2 \langle N, N \rangle_s^t = \langle M + rN, M + rN \rangle_s^t$$

非负; 由连续性, 对每个 $r \in \mathbb{R}$ 也非负。通常的二次型判别即给出上述断言。因此

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s \right| &\leq \sum_i |H_i| |K_i| |\langle M, N \rangle_{t_i}^{t_{i+1}}| \\ &\leq \sum_i |H_i| |K_i| (\langle M, M \rangle_{t_i}^{t_{i+1}})^{1/2} (\langle N, N \rangle_{t_i}^{t_{i+1}})^{1/2}. \end{aligned}$$

对 i 求和使用 Cauchy-Schwarz 不等式, 最后一个量不超过

$$\begin{aligned} &\left(\sum_i H_i^2 \langle M, M \rangle_{t_i}^{t_{i+1}} \right)^{1/2} \left(\sum_i K_i^2 \langle N, N \rangle_{t_i}^{t_{i+1}} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_0^t K_s^2 d\langle N, N \rangle_s \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

证明完成。 □

推论 1.16 (Kunita–Watanabe 不等式). 对每个 $p \geq 1$ 及满足 $p^{-1} + q^{-1} = 1$ 的 q ,

$$E \left[\int_0^\infty |H_s| |K_s| |d\langle M, N \rangle_s| \right] \leq \left\| \left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right)^{1/2} \right\|_p \left\| \left(\int_0^\infty K_s^2 d\langle N, N \rangle_s \right)^{1/2} \right\|_q.$$

证明. 直接应用 Hölder 不等式即可。

下面引入一类基本的有限二次变差过程。

定义 1.17. 若连续过程 X 可以写成

$$X = M + A,$$

其中 M 是连续 $(\mathcal{F}_t, P)$ -局部鞅, A 是连续适应有限变差过程, 则称 X 是连续 $(\mathcal{F}_t, P)$ -半鞅。

照例, 常略去 $(\mathcal{F}_t, P)$ 。由命题 1.2, 局部鞅与有限变差过程的分解是唯一的。但是, 若过程 X 关于两个不同的滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 与 $(\mathcal{G}_t)$ 都是连续半鞅, 那么即使对每个 t 都有 $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, 两个分解也可能不同 (见练习 3.18)。

更一般地, 可以把半鞅定义为局部鞅与有限变差过程之和。可以证明——但这超出本书范围——若一个半鞅同时又是连续过程, 则它必是定义 1.17 意义下的连续半鞅; 也就是说, 它必有一个把它分解为连续局部鞅与连续有限变差过程之和的分解, 而这个分解必然唯一。

后文将看到引入这类过程的许多理由。现在已经可以注意到, 它们的定义类似于把许多物理系统分解成信号 (有限变差过程) 与噪声 (局部鞅)。

命题 1.18. 连续半鞅 $X = M + A$ 具有有限二次变差, 并且

$$\langle X, X \rangle = \langle M, M \rangle.$$

证明. 若 Δ 是 $[0, t]$ 的一个分割, 则

$$\left| \sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) \right| \leq \left(\sup_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \right) \text{Var}_t(A),$$

其中 $\text{Var}_t(A)$ 是 A 在 $[0, t]$ 上的变差。由 M 的连续性, 当 $|\Delta| \rightarrow 0$ 时, 右端趋于零。同样,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2 = 0.$$

□

基本注记 1.19. 过程 $\langle X, X \rangle$ 是和 $T^{\Delta_n}(X)$ 的依概率极限。因此, 若把 $(\mathcal{F}_t)$ 换成另一个仍使 X 成为半鞅的滤过, 它不会改变; 同样, 若把 P 换成满足 $Q \ll P$ 且仍使 X 成为 Q -半鞅的概率测度 Q , 它也不会改变 (见第 VIII 章第 1 节)。

定义 1.20. 若 $X = M + A$ 、 $Y = N + B$ 是两个连续半鞅, 定义 X, Y 的括号过程为

$$\langle X, Y \rangle = \langle M, N \rangle = \frac{1}{4} [\langle X + Y, X + Y \rangle - \langle X - Y, X - Y \rangle].$$

显然, $\langle X, Y \rangle_t$ 是

$$\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

的依概率极限。更一般地, 若 H 左连续且适应, 则

$$P\text{-}\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sup_{s \leq t} \left| \sum_i H_{t_i} (X_{t_{i+1}}^s - X_{t_i}^s)(Y_{t_{i+1}}^s - Y_{t_i}^s) - \int_0^s H_u d\langle X, Y \rangle_u \right| = 0.$$

其证明留给读者作为练习 (另见练习 1.33)。

最后, 在局部鞅类与有界鞅类之间, 还有若干有趣的过程空间; 其中下述空间在下一节尤其重要。为使下面讨论中的量成为真正的范数而不只是半范数, 我们照例不再区分过程与不可分辨过程的等价类。

定义 1.21. 用 $\mathbb{H}^2$ 表示 L^2 -有界鞅空间, 即满足

$$\sup_t E[M_t^2] < +\infty$$

的 $(\mathcal{F}_t, P)$ -鞅 M 所成的空间。用 H^2 表示 $\mathbb{H}^2$ 中由连续鞅组成的子集, 用 H_0^2 表示 H^2 中从零出发的过程所成的子集。

一个 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动不属于 $\mathbb{H}^2$, 但适当停止后便属于, 例如在常数时刻停止。有界鞅属于 $\mathbb{H}^2$ 。此外, 由 Doob 不等式 (第 II 章第 1 节), 若 $M \in \mathbb{H}^2$, 则

$$M_\infty^* = \sup_t |M_t| \in L^2.$$

因此 M 一致可积, 并且

$$M_t = E[M_\infty | \mathcal{F}_t], \quad M_\infty \in L^2.$$

这建立了 $\mathbb{H}^2$ 与 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ 之间的一一对应, 从而得到下述命题。

命题 1.22. 空间 $\mathbb{H}^2$ 关于范数

$$\|M\|_{\mathbb{H}^2} = E[M_\infty^2]^{1/2} = \lim_{t \rightarrow \infty} E[M_t^2]^{1/2}$$

是 Hilbert 空间, 并且 H^2 是 $\mathbb{H}^2$ 的闭子集。

证明. 第一个断言显然。为证明第二个断言, 设 $(M^n) \subset H^2$ 在 $\mathbb{H}^2$ 中收敛到 M 。由 Doob 不等式,

$$E \left[\left(\sup_t |M_t^n - M_t| \right)^2 \right] \leq 4 \|M^n - M\|_{\mathbb{H}^2}^2.$$

因此可以抽取一个子列, 使 $\sup_t |M_t^{n_k} - M_t|$ 几乎必然收敛到零。这说明 $M \in H^2$ 。 $\square$

映射

$$M \mapsto \|M_\infty^*\|_2 = E \left[\left(\sup_t |M_t| \right)^2 \right]^{1/2}$$

也是 $\mathbb{H}^2$ 上的范数。它与 $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^2}$ 等价, 因为显然

$$\|M\|_{\mathbb{H}^2} \leq \|M_\infty^*\|_2,$$

而由 Doob 不等式,

$$\|M_\infty^*\|_2 \leq 2 \|M\|_{\mathbb{H}^2}.$$

不过, 它不再是 Hilbert 空间范数。

下面研究 H^2 中元素的二次变差。

命题 1.23. 连续局部鞅 M 属于 H^2 , 当且仅当:

- i) $M_0 \in L^2$;
- ii) $\langle M, M \rangle$ 可积, 即

$$E[\langle M, M \rangle_\infty] < \infty.$$

在这种情形, $M^2 - \langle M, M \rangle$ 一致可积; 并且对任意一对停时 $S \leq T$,

$$E[M_T^2 - M_S^2 \mid \mathcal{F}_S] = E[(M_T - M_S)^2 \mid \mathcal{F}_S] = E[\langle M, M \rangle_S^T \mid \mathcal{F}_S].$$

证明. 取递增到 $+\infty$ 的停时序列 (T_n) , 使 $M^{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}}$ 有界。于是

$$E[M_{T_n \wedge t}^2 \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}}] - E[\langle M, M \rangle_{T_n \wedge t} \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}}] = E[M_0^2 \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}}].$$

若 $M \in H^2$, 则 i) 显然成立; 又因为 $M_\infty^* \in L^2$, 可在上式中取极限, 得到

$$E[M_\infty^2] - E[\langle M, M \rangle_\infty] = E[M_0^2],$$

这证明了 ii)。

反过来, 若 i)、ii) 成立, 同一等式给出

$$E[M_{T_n \wedge t}^2 \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}}] \leq E[\langle M, M \rangle_\infty] + E[M_0^2] = K < \infty.$$

由 Fatou 引理,

$$E[M_t^2] \leq \liminf_n E[M_{T_n \wedge t}^2 \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}}] \leq K.$$

所以随机变量族 (M_t) 在 L^2 中有界。再者, 同一不等式说明

$$\{M_{T_n \wedge t} \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}} : n \geq 1\}$$

在 L^2 中有界, 因而一致可积。于是可在等式

$$E[M_{t \wedge T_n} \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}} \mid \mathcal{F}_s] = M_{s \wedge T_n} \mathbf{1}_{\{T_n > 0\}}$$

中取极限, 得到 $E[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ 。所以 M 是 L^2 -有界鞅。

为了证明 $M^2 - \langle M, M \rangle$ 一致可积, 注意到

$$\sup_t |M_t^2 - \langle M, M \rangle_t| \leq (M_\infty^*)^2 + \langle M, M \rangle_\infty,$$

右端是可积随机变量。命题最后的等式直接来自可选停止定理。 □

推论 1.24. 若 $M \in H_0^2$, 则

$$\|M\|_{\mathbb{H}^2} = \left\| \langle M, M \rangle_\infty^{1/2} \right\|_2 = E[\langle M, M \rangle_\infty]^{1/2}.$$

证明。 当 $M_0 = 0$ 时, 由前一证明,

$$E[M_\infty^2] = E[\langle M, M \rangle_\infty].$$

注。 M_∞^* 与 $\langle M, M \rangle_\infty^{1/2}$ 的 L^p -范数之间更一般的比较将在第 4 节讨论。

在 $[0, \infty]$ 上的上述论证, 可以原封不动地改在 $[0, t]$ 上进行, 从而得到:

推论 1.25。 若 M 是连续局部鞅, 则下列两个条件等价:

- i) $M_0 \in L^2$ 且 $E[\langle M, M \rangle_t] < \infty$;
- ii) $(M_s, s \leq t)$ 是 L^2 -有界鞅。

注。 L^2 -有界局部鞅并不一定是鞅 (见第 V 章练习 2.13)。同样, 对一个 L^2 -有界连续局部鞅, 也可能有

$$E[\langle M, M \rangle_\infty] = \infty.$$

注意, 对 $M \in H^2$, 既有 $\langle M, M \rangle_\infty \in L^1$, 又有 $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t$ 几乎必然存在。下述命题推广了这一事实。

命题 1.26。 在集合

$$\{\langle M, M \rangle_\infty < \infty\}$$

上, 连续局部鞅 M 在 $t \rightarrow \infty$ 时几乎必然收敛。

证明。 不妨设 $M_0 = 0$ 。令

$$T_n = \inf\{t : \langle M, M \rangle_t \geq n\}.$$

由命题 1.23, 局部鞅 M^{T_n} 在 L^2 中有界, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t^{T_n}$ 几乎必然存在。但在 $\{\langle M, M \rangle_\infty < \infty\}$ 上, 从某个 n 起, T_n 几乎必然等于无穷, 结论随即得到。□

注。 逆命题也成立: 在 M_t 几乎必然收敛的集合上, $\langle M, M \rangle_\infty < \infty$ 。这将在第 V 章第 1 节证明。读者也可参看本节练习 1.42。

练习 1.27。

- 1°) 若 M, N 是两个相互独立的连续局部鞅, 即 $\sigma(M_s : s \geq 0)$ 与 $\sigma(N_s : s \geq 0)$ 相互独立, 证明

$$\langle M, N \rangle = 0.$$

特别地, 若 $B = (B^1, \dots, B^d)$ 是 d 维布朗运动, 证明

$$\langle B^i, B^j \rangle_t = \delta^{ij}t.$$

也可注意到 $(B^i + B^j)/\sqrt{2}$ 与 $(B^i - B^j)/\sqrt{2}$ 都是一维布朗运动, 再应用极化公式来证明。

- 2°) 若 B 是一维布朗运动而 T 是停时, 考察 B^T 与 $B - B^T$, 证明第 1° 问的逆命题不成立。

提示: T 关于 B^T 生成的 σ -域可测, 因为

$$\langle B^T, B^T \rangle_t = t \wedge T;$$

T 也关于 $B - B^T$ 生成的 σ -域可测。因此, 若 T 不是几乎必然为常数, 它们便不独立。若 (X, Y) 是二维布朗运动而 T 是停时, 则 X^T, Y^T 给出另一个例子。

练习 1.28。若 X 是连续半鞅, T 是停时, 则

$$\tilde{X}_t = X_{T+t}$$

是关于 $(\mathcal{F}_{T+t})$ 的半鞅。用 $\langle X, X \rangle$ 表示 $\langle \tilde{X}, \tilde{X} \rangle$ 。

练习 1.29。若 $X = (X^1, \dots, X^d)$ 是向量值连续局部鞅, 证明存在唯一的 $A \in \mathcal{A}$, 使

$$|X|^2 - A$$

是连续局部鞅。

练习 1.30。

- 1°) 若停时 S, T 都约化 M , 证明 $S \vee T$ 约化 M 。
- 2°) 若停时序列 (T_n) 几乎必然递增到 $+\infty$, 并且对每个 n , M^{T_n} 都是连续局部鞅, 证明 M 是连续局部鞅。这个结果也可以表述为: 局部上为连续局部鞅的过程, 本身就是连续局部鞅。
- 3°) 若 M 是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的连续局部鞅, 证明停时

$$S_k = \inf\{t : |M_t| \geq k\}$$

约化 M 。利用这些停时证明, M 关于其自然滤过 $(\mathcal{F}_t^M)$, 甚至关于 $(\sigma(M_s : s \leq t))$, 也是连续局部鞅。半鞅的相应结论 (Stricker 定理) 较难证明, 而在不连续情形下更难。

- 4°) 在第 II 章练习 2.17 的设定中, 证明: 若 X 是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的连续半鞅, 则存在关于 $(\mathcal{F}_t^0)$ 适应的过程 M', A', B' , 使得:
 - i) M' 是关于 $(\mathcal{F}_t^0)$ 的连续局部鞅;
 - ii) A', B' 连续, A' 具有有限变差, B' 递增;
 - iii) X 与 $X' = M' + A'$ 不可分辨;
 - iv) B' 与 $\langle X, X \rangle$ 不可分辨, 且 $(M')^2 - B'$ 是关于 $(\mathcal{F}_t^0)$ 的连续局部鞅。
 把 B' 记为 $\langle X', X' \rangle$ 。
- 5°) 证明 $\langle X', X' \rangle$ 是 X' 的二次变差, 并且基本注记 1.19 仍然成立。把这些结论推广到两个连续半鞅 X, Y 的括号过程。

练习 1.31。若 Z 是有界随机变量, A 是从零出发的有界连续递增过程, 证明

$$E[ZA_\infty] = E\left[\int_0^\infty E[Z | \mathcal{F}_t] dA_t\right].$$

练习 1.32 (命题 1.2 的另一个证明)。 设 M 是有界的连续有限变差鞅。证明

$$M_t^2 = M_0^2 + 2 \int_0^t M_s dM_s$$

是鞅 (此时积分可以逐条路径理解)。利用平方函数的严格凸性, 再给出命题 1.2 的一个证明。

* **练习 1.33。** 以下所有过程均有界。对 $[0, t]$ 的分割 $\Delta = (t_i)$ 及 $\lambda \in [0, 1]$, 令

$$t_i^\lambda = t_i + \lambda(t_{i+1} - t_i).$$

1°) 若 $X = M + A$ 、 $Y = N + B$ 是两个连续半鞅, H 是连续适应过程, 令

$$K_\Delta^\lambda = \sum_i H_{t_i} \left\{ (X_{t_i^\lambda} - X_{t_i})(Y_{t_i^\lambda} - Y_{t_i}) - \langle X, Y \rangle_{t_i^\lambda}^{t_i} \right\}.$$

证明

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sup_\lambda E[(K_\Delta^\lambda)^2] = 0.$$

2°) 若 $\lambda = 1$, 或者 $d\langle X, Y \rangle$ 关于 Lebesgue 测度绝对连续, 则在 L^2 意义下,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i H_{t_i} (X_{t_i^\lambda} - X_{t_i})(Y_{t_i^\lambda} - Y_{t_i}) = \lambda \int_0^t H_s d\langle X, Y \rangle_s.$$

在后一种情形, 收敛关于 λ 一致。

3°) 若 F 是 $\mathbb{R}$ 上的 C^1 函数, 证明: 对任意网格趋于零的分割序列 (Δ_n) ,

$$P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\Delta_n} (F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i}))^2 = \int_0^t F'(X_s)^2 d\langle X, X \rangle_s.$$

练习 1.34。 若 B 是标准一维布朗运动, $S \leq T$ 是两个可积停时, 证明

$$E[(B_T - B_S)^2] = E[B_T^2 - B_S^2] = E[T - S].$$

练习 1.35 (高斯鞅)。 若 M 既是连续鞅又是高斯过程, 证明 $\langle M, M \rangle$ 是确定性的: 存在 $\mathbb{R}_+$ 上的函数 f , 使

$$\langle M, M \rangle_t = f(t) \quad \text{a.s.}$$

其逆命题将在第 V 章第 1 节证明。

练习 1.36。

1°) 若 M 是连续局部鞅, 证明 M^2 具有有限二次变差, 并且

$$\langle M^2, M^2 \rangle_t = 4 \int_0^t M_s^2 d\langle M, M \rangle_s.$$

提示: 使用练习 1.33 的第 2° 问。后面几节将解释 M^2 为何具有有限二次变差的深层原因, 并给出计算 $\langle M^2, M^2 \rangle$ 的简便方法; 不过, 在这里也可以直接计算。

* 2°) 设 R^i ($i = 1, 2, \dots, r$) 分别是 r 个相互独立的 d_i 维布朗运动的模平方, λ_i 是 r 个互异

的非零实数。令

$$X_t^{(k)} = \sum_i \lambda_i^k R_t^i, \quad k = 1, 2, \dots$$

证明每个 $X^{(k)}$ 都具有有限二次变差, 并且

$$\langle X^{(1)}, X^{(k)} \rangle_t = 4 \int_0^t X_s^{(k+1)} ds.$$

证明每个 R^i 都关于 $(\mathcal{F}_t^{X^{(1)}})$ 适应。

练习 1.37. 令 $W = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, X 为坐标过程, 并令 $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s : s \leq t)$. 证明: 在 $(W, \mathcal{F}_\infty^0)$ 上, 使 X 成为 $(\mathcal{F}_t^0)$ -局部鞅的概率测度全体构成凸集。若用 càdlàg 函数空间 D 代替 W , 这一结论还成立吗?

* **练习 1.38.** 若对每个 ω 都有 $X_t(\omega) = f(t)$, 证明: X 是连续半鞅, 当且仅当 f 连续且在每个区间上具有有界变差。

提示: 把半鞅 f 分解为

$$f(t) = f(0) + M_t + A_t.$$

固定 $a > 0$. 取充分大的 $c > 0$, 使停时

$$T = \inf \left\{ t : |M_t| + \int_0^t |dA|_s \geq c \right\}$$

满足 $P[T \geq a] > 0$, 且 $|f|$ 在 $[0, a]$ 上被 c 所界。对 $[0, a]$ 的有限分割 $\Delta = (t_i)$, 把 $S^\Delta(f)$ 与

$$S = \sum_{t_i \leq T} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

比较, 证明

$$S^\Delta(f) \leq \frac{3c}{P[T \geq a]}.$$

练习 2.21 还提示了另一种证明; 第三种证明可以建立在 Stricker 定理上 (见 “注释与评述”)。

*# **练习 1.39.** 设 $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ ($t \in [0, 1]$) 是带滤过的概率空间。对右连续适应过程 X 和 $[0, 1]$ 的分割 $\Delta = (t_i)$, 令

$$V_\Delta(X) = \sum_{i=1}^n E[|E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]|].$$

1°) 若 Δ' 细分 Δ , 证明

$$V_{\Delta'}(X) \geq V_\Delta(X).$$

若

$$V(X) = \sup_{\Delta} V_\Delta(X) < +\infty,$$

则称 X 是拟鞅。若 $M \in H^2$, 证明 M^2 是拟鞅。

2°) 设 B 是一维布朗运动, 令

$$(\mathcal{G}_t) = (\mathcal{F}_t \vee \sigma(B_1))_+,$$

其中 $(\mathcal{F}_t)$ 是第 III 章的布朗滤过。证明：对 $0 \leq s \leq t \leq 1$,

$$E[B_t - B_s | \mathcal{G}_s] = \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s).$$

证明 $(B_t, t \in [0, 1])$ 不再是 $(\mathcal{G}_t)$ -鞅，但仍是拟鞅，并计算 $V(B)$ 。
本练习将在练习 3.18 中继续。

**** 练习 1.40 (第 II 章练习 3.16 关于 BMO 的续题)。**

1°) 若 $M \in \text{BMO}$ ，证明 $\|M\|_{\text{BMO}_2}$ 是使下式对每个停时 T 成立的最小常数 C ：

$$E[\langle M, M \rangle_\infty - \langle M, M \rangle_T | \mathcal{F}_T] \leq C^2.$$

2°) 对每个 T 与 n ，证明

$$E[(\langle M, M \rangle_\infty - \langle M, M \rangle_T)^n | \mathcal{F}_T] \leq n! \|M\|_{\text{BMO}_2}^{2n}.$$

提示：可使用第 V 章练习 1.13。

3°) 若 $\|M\|_{\text{BMO}_2} < 1$ ，则

$$E[\exp(\langle M, M \rangle_\infty - \langle M, M \rangle_T) | \mathcal{F}_T] \leq (1 - \|M\|_{\text{BMO}_2}^2)^{-1}.$$

*** 练习 1.41 (BMO 的一个弱定义)。**

1°) 设 A 是连续递增过程，并且存在常数 a, b, α, β ，使对任意停时 T ，

$$P[A_\infty - A_T > a | \mathcal{F}_T] \leq \alpha, \quad P[A_\infty - A_T > b | \mathcal{F}_T] \leq \beta.$$

证明

$$P[A_\infty - A_T > a + b | \mathcal{F}_T] \leq \alpha\beta.$$

提示：使用停时

$$U = \inf\{t : A_t - A_T > b\},$$

并证明事件 $\{A_\infty - A_T > b\}$ 属于 $\mathcal{F}_U$ 。

2°) 连续局部鞅属于 BMO，当且仅当存在两个常数 a 与 $\varepsilon > 0$ ，使对每个停时 T ，

$$P[\langle M, M \rangle_\infty - \langle M, M \rangle_T > a | \mathcal{F}_T] \leq 1 - \varepsilon.$$

若此条件成立，证明对充分小的 α ，

$$E[\exp\{\alpha(\langle M, M \rangle_\infty - \langle M, M \rangle_T)\} | \mathcal{F}_T]$$

有界。

*** 练习 1.42。** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间， $(\mathcal{F}_t)$ 是完备右连续滤过。定义 $]0, \infty[$ 上的局部鞅为适应过程 $(M_t, t \in]0, \infty[)$ ，并要求：对每个 $\varepsilon > 0$ ，过程 $(M_{\varepsilon+t}, t \geq 0)$ 关于 $(\mathcal{F}_{\varepsilon+t})$ 是连续局部鞅。用 $\mathcal{M}$ 表示这些过程所成的集合。

1°) 若 $A \in \mathcal{F}_0$ 、 $M \in \mathcal{M}$ ，则 $\mathbf{1}_A M \in \mathcal{M}$ 。若 T 是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时且 $M \in \mathcal{M}$ ，则 $M^T \mathbf{1}_{\{T > 0\}} \in \mathcal{M}$ 。

2°) 对任意 $M \in \mathcal{M}$, 存在 $]0, \infty[$ 上唯一的随机测度 $\langle M \rangle(\omega, \cdot)$, 使对每个 $\varepsilon > 0$,

$$M_{t+\varepsilon}^2 - \langle M \rangle(\cdot,]\varepsilon, t + \varepsilon])$$

是关于 $(\mathcal{F}_{t+\varepsilon})$ 的连续局部鞅。

3°) 对任意 $M \in \mathcal{M}$, 证明下列两个集合几乎必然相等:

$$A = \{\omega : \lim_{t \downarrow 0} M_t(\omega) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 中存在}\},$$

$$B = \{\omega : \langle M \rangle(\omega,]0, 1]) < \infty\}.$$

进一步证明, $1_A M$ 是通常意义下的连续局部鞅。

提示: 用第 1° 问把问题化到 M 有界的情形, 再使用第 II 章定理 2.3 的连续时间版本。
本练习将在练习 3.26 中继续。

* **练习 1.43 (第 II 章练习 3.15 的续题)**。假设 $f \in L^2([0, 1])$, 并令

$$[X, X]_t(\omega) = (\tilde{H}f(\omega) - f(\omega))^2 \mathbf{1}_{\{t \geq \omega\}}.$$

证明

$$X_t^2 - [X, X]_t$$

是一致可积鞅。

提示: 计算

$$\tilde{H}((\tilde{H}f)^2 - 2f(\tilde{H}f)).$$

虽然这里处理的是不连续鞅 X , 读者会注意到, 过程 $[X, X]$ 正是 X 的二次变差过程, 其作用类似于连续情形下的 $\langle X, X \rangle$ 。

练习 1.44。设 X 是正随机变量, 并且与一维布朗运动 B 独立。令

$$M_t = B_{tX}, \quad t \geq 0,$$

并令 $(\mathcal{F}_t^M)$ 为使 M 适应的最小右连续完备滤过。

1°) 证明 M 是 $(\mathcal{F}_t^M)$ -局部鞅, 并且 M 是鞅当且仅当

$$E[X^{1/2}] < \infty.$$

2°) 求过程 $\langle M, M \rangle$ 。

3°) 把上述结果推广到 $M_t = B_{A_t}$, 其中 A 是从零出发、与 B 独立的连续递增过程。

练习 1.45。设 M, N 是两个从零出发的连续局部鞅, 并满足

$$\langle M, N \rangle^2 = \langle M, M \rangle \langle N, N \rangle.$$

若

$$R = \inf\{s : \langle M, M \rangle_s > 0\}, \quad S = \inf\{s : \langle N, N \rangle_s > 0\},$$

证明几乎必然有: 或者 $R \vee S = \infty$, 或者 $R = S$, 并且存在一个 $\mathcal{F}_R \cap \mathcal{F}_S$ -可测随机变量 γ ,

它在 $\{R \vee S = \infty\}$ 上为零, 且

$$M = \gamma N.$$

练习 1.46. 设局部鞅 X 满足: 对每个整数 N , 过程 $(X^-)^N$ 都属于 D 类. 证明 X 是上鞅. 特别地, 正局部鞅是上鞅.

练习 1.47. 设 M, N 是两个连续局部鞅, T 是有限停时. 证明几乎必然有

$$\left| \langle M, M \rangle_T^{1/2} - \langle N, N \rangle_T^{1/2} \right| \leq \langle M - N, M - N \rangle_T^{1/2}.$$

提示: 映射 $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle$ 具有内积的性质, 结论来自相应的 “Minkowski” 不等式.

* **练习 1.48 (随机区间上的连续局部鞅).** 设 T 是停时. 定义 $[0, T[$ 上的连续局部鞅 M 为 $[0, T[$ 上满足下述条件的过程: 存在递增到 T 的停时序列 (T_n) 与连续鞅序列 (M^n) , 使得在 $\{t < T_n\}$ 上有 $M_t = M_t^n$. 下文始终假设 $T > 0$ 几乎必然成立.

1°) 证明在 $[0, T[$ 上存在唯一的连续递增过程 $\langle M, M \rangle$, 使 $M^2 - \langle M, M \rangle$ 是 $[0, T[$ 上的连续局部鞅. 证明 M 与 $\langle M, M \rangle$ 几乎必然具有相同的常值区间.

2°) 若

$$E \left[\sup_{t < T} |M_t| \right] < \infty,$$

则 $\lim_{t \uparrow T} M_t = M_{T-}$ 几乎必然存在且有限. 若对 $t \geq T$ 令 $M_t = M_{T-}$, 证明 $(M_t, t \in \mathbb{R}_+)$ 是一致可积鞅.

3°) 若 $M_0 = 0$ 且

$$E[\langle M, M \rangle_T] < \infty,$$

证明 M 可以延拓为连续一致可积鞅.

练习 1.49 (局部鞅的 Krickeberg 分解; 第 II 章练习 2.18 的续题). 设 X 是局部鞅, 并令

$$N_1(X) = \sup_T E[|X_T|],$$

其中 T 取遍有限停时.

1°) 若 (T_n) 是约化 X 且几乎必然趋于无穷的停时序列, 证明

$$N_1(X) = \sup_n E[|X_{T_n}|].$$

局部鞅 X 在 L^1 中有界, 当且仅当 $N_1(X) < \infty$.

** 2°) 若 $N_1(X) < \infty$, 证明存在唯一一对正局部鞅 $(X^{(+)}, X^{(-)})$, 使得

$$\text{i) } X = X^{(+)} - X^{(-)}, \quad \text{ii) } N_1(X) = E[X_0^{(+)}] + E[X_0^{(-)}].$$

提示: 参见第 II 章练习 2.18, 并记住正局部鞅是上鞅.

3°) 若 $N_1(X) < \infty$, 证明当 $t \rightarrow \infty$ 时, X_t 几乎必然收敛到一个可积随机变量.

2 随机积分

出于多方面的原因——其中一个原因将在第 VII 章第 1 节末详细说明——我们需要定义关于布朗运动路径的积分。自然的想法是考虑“Riemann 和”

$$\sum_i K_{u_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}),$$

其中 K 是被积过程, $u_i \in [t_i, t_{i+1}]$ 。但由积分理论可知, 这些和不逐路径收敛, 因为 B 的路径几乎必然不具有有界变差 (见练习 2.21)。我们将证明它们依概率收敛; 第一步先使用 L^2 收敛, 为 H^2 中的过程定义积分。被积过程类定义如下。

定义 2.1。 若 $M \in H^2$, 用 $\mathcal{L}^2(M)$ 表示满足

$$\|K\|_M^2 = E \left[\int_0^\infty K_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] < +\infty$$

的逐次可测过程 K 所成的空间。

对任意 $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty$, 令

$$P_M(\Gamma) = E \left[\int_0^\infty \mathbf{1}_\Gamma(s, \omega) d\langle M, M \rangle_s(\omega) \right].$$

这在 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty$ 上定义了一个有限测度 P_M ; $\mathcal{L}^2(M)$ 正是关于 P_M 平方可积的逐次可测函数空间。照例, 用 $L^2(M)$ 表示 $\mathcal{L}^2(M)$ 中元素的等价类所成的空间。关于范数 $\|\cdot\|_M$, 它当然是 Hilbert 空间。

由于这些正是我们将要积分的过程, 值得回顾: 其中包括所有有界的、左连续或右连续的适应过程, 特别是所有有界连续适应过程。

定理 2.2。 设 $M \in H^2$ 。对每个 $K \in \mathcal{L}^2(M)$, 存在唯一的 H_0^2 中元素, 记为 $K \cdot M$, 使得对每个 $N \in H^2$,

$$\langle K \cdot M, N \rangle = K \cdot \langle M, N \rangle.$$

映射 $K \mapsto K \cdot M$ 是从 $\mathcal{L}^2(M)$ 到 H_0^2 的等距映射。

证明。 a) 唯一性。若 $L, L' \in H_0^2$, 并且对每个 $N \in H^2$ 都有 $\langle L, N \rangle = \langle L', N \rangle$, 则特别地

$$\langle L - L', L - L' \rangle = 0.$$

由命题 1.12, $L - L'$ 为常值; 又因二者都从零出发, 故 $L = L'$ 。

b) 存在性。先设 $M \in H_0^2$ 。由 Kunita-Watanabe 不等式 (推论 1.16) 与推论 1.24, 对每个 $N \in H_0^2$, 有

$$\left| E \left[\int_0^\infty K_s d\langle M, N \rangle_s \right] \right| \leq \|N\|_{H^2} \|K\|_M.$$

所以映射

$$N \mapsto E[(K \cdot \langle M, N \rangle)_\infty]$$

是 Hilbert 空间 H_0^2 上的连续线性泛函。由 Riesz 表示定理, 存在 $K \cdot M \in H_0^2$, 使对每个 $N \in H_0^2$,

$$E[(K \cdot M)_\infty N_\infty] = E[(K \cdot \langle M, N \rangle)_\infty]. \quad (2.1)$$

设 T 是停时。由于 H^2 中的鞅一致可积，可以写成

$$\begin{aligned} E[(K \cdot M)_T N_T] &= E[E[(K \cdot M)_\infty | \mathcal{F}_T] N_T] \\ &= E[(K \cdot M)_\infty N_T] = E[(K \cdot M)_\infty N_\infty^T] \\ &= E[(K \cdot \langle M, N^T \rangle)_\infty] \\ &= E[(K \cdot \langle M, N \rangle^T)_\infty] = E[(K \cdot \langle M, N \rangle)_T]. \end{aligned}$$

由第 II 章命题 3.5,

$$(K \cdot M)N - K \cdot \langle M, N \rangle$$

是鞅。此外，由 (2.1),

$$\|K \cdot M\|_{\mathbb{H}^2}^2 = E[(K \cdot M)_\infty^2] = E[(K^2 \cdot \langle M, M \rangle)_\infty] = \|K\|_M^2,$$

这证明了等距性。

若 $N \in H^2$ 而未必属于 H_0^2 , 上述等式仍成立, 因为任意鞅与常值鞅的括号过程为零。最后, 若 $M \in H^2$ 但未必从零出发, 定义

$$K \cdot M = K \cdot (M - M_0),$$

容易验证定理中的性质仍然成立。 □

定义 2.3. 鞅 $K \cdot M$ 称为 K 关于 M 的随机积分, 也记为

$$\int_0^\cdot K_s dM_s.$$

它也称为 Itô 积分, 以区别于练习 2.18 中定义的其他积分。在这些积分中, 只有 Itô 积分保证所得过程是鞅。

要强调的是, 随机积分 $K \cdot M$ 从零出发。此外, 把 t 视为变量时, 过程 $(K \cdot M)_t$ 也可看成一种原函数 (参见练习 2.17)。

为什么称 $K \cdot M$ 为随机积分, 后文会越来越清楚。这里先给出一个理由。用 $\mathcal{E}$ 表示初等过程空间, 即形如

$$K = K_{-1}\mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_i K_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$$

的过程, 其中

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots, \quad \lim_i t_i = +\infty,$$

随机变量 K_i 是 $\mathcal{F}_{t_i}$ -可测且一致有界的, 并且 K_{-1} 是有界的 $\mathcal{F}_0$ -可测随机变量。空间 $\mathcal{E} \subset L^2(M)$ 。对 $K \in \mathcal{E}$, 定义所谓的初等随机积分

$$(K \cdot M)_t = \sum_{i=0}^{n-1} K_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + K_n (M_t - M_{t_n}), \quad t_n \leq t < t_{n+1}.$$

容易看出 $K \cdot M \in H_0^2$ 。进一步, 考察包含所有 t_i 的分割, 利用括号过程的定义可以证明: 对任意 $N \in H^2$,

$$\langle K \cdot M, N \rangle = K \cdot \langle M, N \rangle.$$

所以, 初等随机积分与定理 2.2 构造的随机积分一致。以后用它证明 Riemann 和的收敛性质时, 这一事实很重要; 该收敛性质将使我们能够显式计算随机积分。

下面列出随机积分的一些性质。第一个称为结合律。

命题 2.4. 若 $K \in L^2(M)$ 且 $H \in L^2(K \cdot M)$, 则 $HK \in L^2(M)$, 并且

$$(HK) \cdot M = H \cdot (K \cdot M).$$

证明. 由于

$$\langle K \cdot M, K \cdot M \rangle = K^2 \cdot \langle M, M \rangle,$$

显然 $HK \in L^2(M)$ 。再者, 对 $N \in H^2$, 由 Stieltjes 积分的结合律,

$$\begin{aligned} \langle (HK) \cdot M, N \rangle &= HK \cdot \langle M, N \rangle \\ &= H \cdot (K \cdot \langle M, N \rangle) \\ &= H \cdot \langle K \cdot M, N \rangle \\ &= \langle H \cdot (K \cdot M), N \rangle. \end{aligned}$$

定理 2.2 的唯一性给出结论。 □

下一个结果说明随机积分与可选停止如何相容; 它对把随机积分的定义推广到局部鞅至关重要。

命题 2.5. 若 T 是停时, 则

$$K \cdot M^T = (K \mathbf{1}_{[0,T]}) \cdot M = (K \cdot M)^T.$$

证明. 先注意

$$M^T = \mathbf{1}_{[0,T]} \cdot M.$$

事实上, 对 $N \in H^2$,

$$\langle M^T, N \rangle = \langle M, N \rangle^T = \mathbf{1}_{[0,T]} \cdot \langle M, N \rangle = \langle \mathbf{1}_{[0,T]} \cdot M, N \rangle.$$

由命题 2.4, 一方面

$$K \cdot M^T = K \cdot (\mathbf{1}_{[0,T]} \cdot M) = (K \mathbf{1}_{[0,T]}) \cdot M;$$

另一方面

$$(K \cdot M)^T = \mathbf{1}_{[0,T]} \cdot (K \cdot M) = (\mathbf{1}_{[0,T]} K) \cdot M.$$

□

固定时刻 t 停止的布朗运动属于 H^2 。因此, 若过程 K 满足

$$E \left[\int_0^t K_s^2 ds \right] < \infty \quad \text{对每个 } t,$$

就可对每个 t 定义 $\int_0^t K_s dB_s$, 从而在整个正半轴上定义该过程; 所得过程是鞅, 尽管未必属于 H^2 。这一思想当然适用于所有连续局部鞅。

定义 2.6. 若 M 是连续局部鞅, 用 $L_{\text{loc}}^2(M)$ 表示具有下述性质的逐次可测过程 K 的等价类

所成空间：存在递增到无穷的停时序列 (T_n) ，使

$$E \left[\int_0^{T_n} K_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] < +\infty.$$

注意， $L_{\text{loc}}^2(M)$ 恰由满足下述条件的逐次可测过程 K 构成：对每个 t ，几乎必然有

$$\int_0^t K_s^2 d\langle M, M \rangle_s < \infty.$$

命题 2.7. 对每个 $K \in L_{\text{loc}}^2(M)$ ，存在唯一的从零出发的连续局部鞅，记为 $K \cdot M$ ，使对任意连续局部鞅 N ，

$$\langle K \cdot M, N \rangle = K \cdot \langle M, N \rangle.$$

证明。 可以选取递增到无穷的停时 T_n ，使 $M^{T_n} \in H^2$ ，且 $K^{T_n} \in L^2(M^{T_n})$ 。因此对每个 n ，可以定义随机积分

$$X^{(n)} = K^{T_n} \cdot M^{T_n}.$$

由命题 2.5， $X^{(n+1)}$ 与 $X^{(n)}$ 在 $[0, T_n]$ 上一致。因此可无歧义地定义过程 $K \cdot M$ ：令它在 $[0, T_n]$ 上等于 $X^{(n)}$ 。该过程显然是连续局部鞅；再作局部化即可看出，对每个局部鞅 N ，

$$\langle K \cdot M, N \rangle = K \cdot \langle M, N \rangle.$$

□

注。 要证明连续局部鞅 L 等于 $K \cdot M$ ，只需对所有有界鞅 N 验证

$$\langle L, N \rangle = K \cdot \langle M, N \rangle.$$

仍称 $K \cdot M$ 为 K 关于 M 的随机积分，并记为

$$\int_0^\cdot K_s dM_s.$$

作显然的修改后，命题 2.4 与 2.5 也适用于这一一般情形。若 $K \in \mathcal{E}$ ，该随机积分仍与初等随机积分一致。前面已经提到逐路径的 Stieltjes 积分，现在很容易把随机积分的定义推广到半鞅。

定义 2.8. 若存在递增到无穷的停时序列 (T_n) 与常数 C_n ，使

$$|K^{T_n}| \leq C_n,$$

则称逐次可测过程 K 局部有界。

所有连续适应过程 K 都局部有界；只需取

$$T_n = \inf\{t : |K_t| \geq n\}.$$

对每个连续局部鞅 M ，局部有界过程都属于 $L_{\text{loc}}^2(M)$ 。

定义 2.9. 设 K 局部有界, $X = M + A$ 是连续半鞅. 定义 K 关于 X 的随机积分为连续半鞅

$$K \cdot X = K \cdot M + K \cdot A,$$

其中 $K \cdot M$ 是命题 2.7 中的积分, $K \cdot A$ 是关于 dA 的逐路径 Stieltjes 积分. 也记

$$K \cdot X = \int_0^\cdot K_s dX_s.$$

命题 2.10. 映射 $K \mapsto K \cdot X$ 具有下列性质:

i) 对任意两个局部有界过程 H, K ,

$$H \cdot (K \cdot X) = (HK) \cdot X;$$

ii) 对每个停时 T ,

$$(K \cdot X)^T = (K \mathbf{1}_{[0, T]}) \cdot X = K \cdot X^T;$$

iii) 若 X 是局部鞅或有限变差过程, 则 $K \cdot X$ 也具有相应性质;

iv) 若 $K \in \mathcal{E}$, 且 $t_n \leq t < t_{n+1}$, 则

$$(K \cdot X)_t = \sum_{i=0}^{n-1} K_i(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + K_n(X_t - X_{t_n}).^a$$

^a校订注: 原书此处求和上限印为 n , 但这会把尚未发生的增量 $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ 计入, 并与同页前面对初等积分的正确定义矛盾; 因而改为 $n-1$ 。

证明. 直接验证即可。

这里需要作几条重要说明. 虽然在对 $M \in H^2$ 构造 $K \cdot M$ 时使用了 Doob 不等式与 L^2 收敛, 随机积分对 P 的依赖却只通过 P 的等价类体现. 这由命题 2.7 与基本注记 1.19 即可看出. 事实上, 如果 X 是 P -半鞅且 $Q \ll P$, 那么 X 也是 Q -半鞅; 第 VIII 章将给出这一方向的一个部分结果. 对 P 依概率收敛的序列也对 Q 依概率收敛, 故例如一个有界过程关于 P 定义的随机积分, 与它关于 Q 定义的随机积分是 Q -不可分辨的.

同样, 若把滤过换成另一个仍使 X 成为半鞅的滤过, 那么对两个滤过都逐次可测的过程, 其随机积分相同.

最后, 尽管我们通过整体方法构造了随机积分, 它仍具有某种局部性质, 如下述命题所示.

命题 2.11. 对几乎所有 ω , 在满足下列任一条件的区间 $[a, b]$ 上, $(K \cdot X)(\omega)$ 为常值:

$$K(\omega) = 0, \quad \text{或} \quad X(\omega) = X_a(\omega).$$

证明. 只需证明 X 是局部鞅的情形. 由命题 1.13, 在上述区间上

$$K^2 \cdot \langle X, X \rangle$$

为常值, 因而 $K \cdot X$ 也为常值. □

因此, 设 $K, \tilde{K}$ 是局部有界可预测过程, $X, \tilde{X}$ 是半鞅。在任意满足

$$K = \tilde{K}, \quad X - X_a = \tilde{X} - \tilde{X}_a$$

的区间 $[a, b]$ 上, 几乎必然有

$$(K \cdot X)_t - (K \cdot X)_a = (\tilde{K} \cdot \tilde{X})_t - (\tilde{K} \cdot \tilde{X})_a.$$

这是恒等式

$$K \cdot X - \tilde{K} \cdot \tilde{X} = K \cdot (X - \tilde{X}) + (K - \tilde{K}) \cdot \tilde{X}$$

的直接推论。

注。 练习 2.18 的第 3° 问也说明了随机积分具有逐路径意义。

下面讨论随机积分的一个极重要性质, 即 Lebesgue 控制收敛定理的对应版本。

定理 2.12。 设 X 是连续半鞅。若局部有界过程序列 (K^n) 逐点收敛到零, 并且存在局部有界过程 K , 使对每个 n 都有

$$|K^n| \leq K,$$

则 $K^n \cdot X$ 在每个紧区间上一致地依概率收敛到零。

证明。 所述收敛可以写成

$$P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t} |(K^n \cdot X)_s| = 0.$$

当 X 是有限变差过程时, 这是显然的。若 X 是局部鞅, 而 T 约化 X , 则 $(K^n)^T$ 在 $L^2(X^T)$ 中收敛到零; 由定理 2.2, $(K^n \cdot X)^T$ 在 H^2 中收敛到零。再使用定理 1.8 中相同的论证, 即可得到所需收敛。□

下面关于 “Riemann 和” 的结果将在下一节起关键作用。

命题 2.13。 若 K 左连续且局部有界, (Δ^n) 是 $[0, t]$ 的分割序列, 并满足 $|\Delta^n| \rightarrow 0$, 则

$$\int_0^t K_s dX_s = P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \Delta^n} K_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}).$$

证明。 若 K 有界, 右端各和是初等过程

$$\sum_i K_{t_i} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}.$$

的随机积分。这些初等过程逐点收敛到 K , 并被 $\|K\|_\infty$ 所界, 故结论来自定理 2.12。一般情形由局部化得到。□

练习 2.14。 设 X 是连续半鞅, 用 $b\mathcal{F}_0$ 表示有界 $\mathcal{F}_0$ -可测随机变量所成的代数。证明映射

$$H \longmapsto H \cdot X$$

关于 $b\mathcal{F}_0$ 线性, 即对 $a, b \in b\mathcal{F}_0$,

$$\int_0^t (aH + bK) dX = a \int_0^t H dX + b \int_0^t K dX.$$

练习 2.15. 设 B^1, B^2 是两个相互独立的一维布朗运动。对连续逐次可测过程 K , 定义

$$O_i(K)_t = \int_0^t K_s dB_s^i, \quad i = 1, 2,$$

$$O_3(K)_t = \int_0^t K_s ds, \quad O_4(K_1, K_2)_t = K_1(t)K_2(t).$$

用 $\mathcal{C}$ 表示从 $\{B^1, B^2\}$ 出发, 有限次施行上述运算 O_i 所得到的过程类。在 $\mathcal{C}$ 上归纳定义实值映射 d :

$$d(B^1) = d(B^2) = \frac{1}{2},$$

$$d(O_1(K)) = d(O_2(K)) = d(K) + \frac{1}{2}, \quad d(O_3(K)) = d(K) + 1,$$

$$d(O_4(K_1, K_2)) = d(K_1) + d(K_2).$$

证明: 对每个 $K \in \mathcal{C}$, 存在一个可能为零的常数 C_K , 使

$$E[K_t] = C_K t^{d(K)}.$$

练习 2.16. 设 f 是 $\mathbb{R}_+$ 上的局部有界 Borel 函数, B 是布朗运动。证明过程

$$Z_t = \int_0^t f(s) dB_s$$

是高斯过程, 并计算其协方差 $\Gamma(s, t)$ 。证明

$$\exp \left\{ Z_t - \frac{1}{2} \Gamma(t, t) \right\}$$

是鞅。这推广了第 II 章命题 1.2 iii) 中的例子。

* **练习 2.17.**

1°) 设 B 是布朗运动, H 是有界、右连续的适应过程。证明: 对固定的 t ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} (B_{t+h} - B_t)^{-1} \int_t^{t+h} H_s dB_s = H_t$$

依概率成立。若 H 连续, 即使它无界, 结论也成立。

提示: 可以对下式应用 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$E \left[\left| \frac{1}{B_\varepsilon} \int_0^\varepsilon (H_u - H_0) dB_u \right|^{1/4} \right].$$

2°) 设 $B = (B^1, \dots, B^d)$ 是 d 维布朗运动; 对每个 j , H^j 是有界、右连续的适应过程。证

明：对固定的 t ，当 $h \rightarrow 0$ 时，

$$(B_{t+h}^1 - B_t^1)^{-1} \sum_j \int_t^{t+h} H_s^j dB_s^j$$

依分布收敛到

$$H_t^1 + \sum_{j=2}^d H_t^j \frac{N^j}{N^1},$$

其中 $(N^1, \dots, N^d)$ 是协方差矩阵为 I_d 的中心高斯随机向量，并且与 $(H_t^1, \dots, H_t^d)$ 独立。

* **练习 2.18.** 设 X, Y 是两个连续半鞅。对 $[0, t]$ 的分割 Δ 、函数 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 以及 $[0, 1]$ 上的概率测度 μ ，定义

$$S_\Delta^\mu = \sum_i (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \int_0^1 f(X_{t_i} + s(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) d\mu(s).$$

1°) 证明当 $|\Delta| \rightarrow 0$ 时，依概率有

$$S_\Delta^\mu \rightarrow \int_0^t f(X_s) dY_s + \bar{\mu} \int_0^t f'(X_s) d\langle X, Y \rangle_s,$$

其中

$$\bar{\mu} = \int_0^1 s d\mu(s).$$

当 $\mu = \delta_{1/2}$ 、 $f(x) = x$ 时，这个极限称为 X 关于 Y 的 *Stratonovich* 积分。当 $\mu = \delta_0$ 时，得到 $f(X)$ 关于 Y 的 Itô 随机积分。注意：当 Y 是局部鞅时，在这些积分中，只有 Itô 积分保证所得过程是局部鞅。

提示：使用练习 1.33。

当 $\mu = \delta_1$ 时，该极限称为后向积分。

2°) 若令

$$\tilde{S}_\Delta^\mu = \sum_i (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \int_0^1 f(X_{t_i + s(t_{i+1} - t_i)}) d\mu(s),$$

并且 $d\langle X, Y \rangle$ 关于 Lebesgue 测度绝对连续，证明当 $|\Delta| \rightarrow 0$ 时， $\tilde{S}_\Delta^\mu$ 与 S_Δ^μ 依概率具有相同极限。

3°) 设

$$\tilde{\omega} = \sum_i f_i(x_1, \dots, x_d) dx_i$$

是 $\mathbb{R}^d$ 中开集 U 上的 C^1 闭微分形式， $X = (X^1, \dots, X^d)$ 是取值于 U 的向量半鞅，即

$$P[\exists t : X_t \notin U] = 0.$$

证明

$$\int_{X(0,t)} \tilde{\omega} = \sum_{i=1}^d \int_0^t f_i(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$

这里 $X(0, t)$ 是连续路径 $(X_s(\omega), 0 \leq s \leq t)$ 。回顾：闭形式 $\tilde{\omega}$ 沿连续但未必可微路径 $\gamma: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^d$ 的积分定义为

$$\pi(\gamma(t)) - \pi(\gamma(0)),$$

其中，在一串覆盖 γ 的球上，函数 π 满足 $d\pi = \tilde{\omega}$ 。

- 4°) 若 B 是平面布朗运动，把当 s 从 0 变到 t 时，连接 0 与 B_s 的线段所扫过的面积表示为随机积分。

* **练习 2.19 (Fubini–Wiener 分布恒等式)。**

- 1°) 设 B, C 是两个相互独立的标准布朗运动。若 $\phi \in L^2([0, 1]^2, ds dt)$ ，利用适当的滤过赋予下列积分以意义：

$$\int_0^1 dB_u \int_0^1 dC_s \phi(u, s), \quad \int_0^1 dC_s \int_0^1 dB_u \phi(u, s),$$

并证明二者几乎必然相等。

- 2°) 由第 1° 问推出

$$\int_0^1 du \left(\int_0^1 dB_s \phi(u, s) \right)^2 \stackrel{(d)}{=} \int_0^1 du \left(\int_0^1 dB_s \phi(s, u) \right)^2.$$

- 3°) 若 f 是 $[0, 1]$ 上的 C^1 函数且 $f(1) = 1$ ，证明

$$\int_0^1 ds \left(B_s - \int_0^1 f'(t) B_t dt \right)^2 \stackrel{(d)}{=} \int_0^1 ds (B_s - f(s) B_1)^2.$$

特别地，若 $\tilde{B}$ 是布朗桥，则

$$\int_0^1 ds \left(B_s - \int_0^1 B_t dt \right)^2 \stackrel{(d)}{=} \int_0^1 \tilde{B}_s^2 ds.$$

提示：取

$$\phi(s, u) = \mathbf{1}_{\{u \leq s\}} + f(u) - 1.$$

练习 2.20。 证明：定理 2.12 中 (K_n) 的逐点收敛可以换成适当的依概率收敛。

练习 2.21。 设 X 是 $[0, 1]$ 上的实值函数。对 $[0, 1]$ 的有限分割 Δ 与 $h \in W = C([0, 1], \mathbb{R})$ ，令

$$S_\Delta(h) = \sum_{t_i \in \Delta} h(t_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}).$$

- 1°) 证明映射 $h \mapsto S_\Delta(h)$ 是 W 上的连续线性泛函，其范数为

$$\|S_\Delta\| = \sum_{t_i \in \Delta} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|.$$

- 2°) 若对每个 $h \in W$ 以及任意满足 $|\Delta_n| \rightarrow 0$ 的序列 (Δ_n) ， $S_{\Delta_n}(h)$ 都收敛到有限极限，证明 X 具有有界变差。这说明了为什么关于连续局部鞅的随机积分不能用通常办法定义。
提示：应用 Banach–Steinhaus 定理。

- 3°) 用相同思想解练习 1.38。

练习 2.22 (正交鞅)。

1°) 称两个从零出发的 H^2 鞅 M, N 弱正交, 如果对每个 $s, t \geq 0$, 都有 $E[M_s N_t] = 0$ 。证明下列四个性质等价:

- i) M, N 弱正交;
- ii) 对每个 $s \geq 0$, $E[M_s N_s] = 0$;
- iii) 对每个 $s \geq 0$, $E[\langle M, N \rangle_s] = 0$;
- iv) 对每个 $s \geq 0$ 及每个满足 $T \geq s$ 的停时 T , $E[M_T N_s] = 0$ 。

2°) 若 MN 是鞅, 则称 M, N 正交 (另见练习 5.11)。证明 M, N 正交, 当且仅当对每个 $s \geq 0$ 及每个满足 $T \leq s$ 的停时 T , 都有

$$E[M_T N_s] = 0.$$

还要证明: M, N 正交, 当且仅当对每个有界可预测过程 H , $H \cdot M$ 与 N 弱正交。

3°) 给出弱正交但不正交的鞅的例子。

提示: 可以使用关于布朗运动的随机积分。

4°) 若二维过程 (M, N) 是高斯过程, 并且 M, N 弱正交, 证明它们正交。

关于鞅的正交性与独立性之间关系的进一步结果, 见第 V 章练习 4.25。

3 Itô 公式及其初步应用

本节具有基础性地位。我们将建立随机积分的一个“变量替换”公式; 借助这一公式, 随机积分会变得易于处理, 并可进行显式计算。

也可以从另一个角度理解这个公式: 我们要寻找能够作用于连续半鞅类的函数。也就是说, 希望找出这样的函数 F : 无论 X 是哪一个连续半鞅, $F(X_t)$ 都仍是连续半鞅。我们从特殊情形 $F(x) = x^2$ 开始。

命题 3.1 (分部积分公式)。 若 X, Y 是两个连续半鞅, 则

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t.$$

特别地,

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \langle X, X \rangle_t.$$

证明。 只需证明后一特殊情形, 因为一般情形可由极化恒等式推出。若 Δ 是 $[0, t]$ 的一个分割, 则

$$\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = X_t^2 - X_0^2 - 2 \sum_i X_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}).$$

令 $|\Delta| \rightarrow 0$, 左边使用 $\langle X, X \rangle$ 的定义, 右边的和使用命题 2.13, 即得所需结论。

如果 X, Y 都是有限变差过程, 这个公式就退化为 Stieltjes 积分通常的分部积分公式。下面的变量替换公式也有同样的性质。还要注意, 若 M 是局部鞅, 则由上式

$$M_t^2 - \langle M, M \rangle_t = M_0^2 + 2 \int_0^t M_s dM_s.$$

我们已经知道 $M^2 - \langle M, M \rangle$ 是局部鞅; 上式进一步给出了这个局部鞅的显式表示。对布朗运动 B ,

有

$$B_t^2 - t = 2 \int_0^t B_s dB_s,$$

这也可以看成右端随机积分的显式计算。读者应注意，与普通积分相比，这里出现了额外的 t 项；它来自二次变差。

下面的定理推广了上述结果。先约定如下记号。

定义与记号 3.2。 d 维向量局部鞅（分别地，向量连续半鞅）是一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 的过程

$$X = (X^1, \dots, X^d),$$

其中每个 X^i 都是局部鞅（分别地，连续半鞅）。复局部鞅（分别地，复连续半鞅）是一个取值于 $\mathbb{C}$ 的过程，其实部与虚部都是局部鞅（分别地，连续半鞅）。

定理 3.3 (Itô 公式)。 设 $X = (X^1, \dots, X^d)$ 是连续向量半鞅，且 $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 。则 $F(X)$ 是连续半鞅，并且

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_i \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$

证明。 若结论对函数 F 成立，则由分部积分公式可直接看出：对每个 i ，结论也对

$$G(x_1, \dots, x_d) = x_i F(x_1, \dots, x_d)$$

成立。因此，结论对多项式函数成立。通过停时化，只需考虑 X 的取值落在 $\mathbb{R}^d$ 的某个紧集 K 内的情形。在 K 上，每个 $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 都可以在 $C^2(K, \mathbb{R})$ 中由多项式逼近。分别应用通常的控制收敛定理和随机积分的控制收敛定理（定理 2.12），即得结论。

注。

- 1°) 对 F 的可微性要求可以适当放宽。例如，若某些 X^i 具有有限变差，则 F 关于相应坐标只需为 C^1 类，证明完全相同。特别地，若 X 是连续半鞅， $A \in \mathcal{A}$ ，并且 $\partial^2 F / \partial x^2$ 与 $\partial F / \partial y$ 存在且连续，则

$$\begin{aligned} F(X_t, A_t) &= F(X_0, A_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_s, A_s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial y}(X_s, A_s) dA_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X_s, A_s) d\langle X, X \rangle_s. \end{aligned}$$

- 2°) 若 F 只定义在一个开集上，而 X 几乎必然始终取值于该开集，同样可得到显然的推广。细节留给读者。

- 3°) Itô 公式可以写成“微分”形式

$$dF(X_t) = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_t) d\langle X^i, X^j \rangle_t.$$

更一般地，若 X 是向量半鞅，记号

$$dY_t = \sum_i H_t^i dX_t^i$$

表示

$$Y_t = Y_0 + \sum_i \int_0^t H_s^i dX_s^i.$$

在这种记号下, Itô 公式可以理解为“随机微分的链式法则”。

- 4°) Itô 公式恰好说明: 半鞅类在与 C^2 函数复合后保持不变, 这也是引入半鞅的另一个理由。若 M 是局部鞅, 甚至是鞅, 则 $F(M)$ 通常并非局部鞅, 而只是半鞅。
- 5°) 设 ϕ 是紧支于 $]0, 1[$ 的 C^1 函数。它具有有限变差, 故可视为半鞅; 分部积分公式给出

$$X_1\phi(1) = X_0\phi(0) + \int_0^1 \phi(s) dX_s + \int_0^1 X_s \phi'(s) ds + \langle X, \phi \rangle_1,$$

从而化为

$$\int_0^1 \phi(s) dX_s = - \int_0^1 X_s \phi'(s) ds.$$

因此, 随机积分可以看成是一个随机 Schwartz 广义函数, 即连续函数 $t \mapsto X_t(\omega)$ 在广义函数意义下的导数。上述公式是分部积分公式的特殊情形; 在随机积分理论发展的早期, 它曾被用作随机积分的定义, 并且在某些情形下仍然有用 (参见第 VIII 章练习 2.14)。当然, 现代理论能够处理远为一般的被积过程, 因而更为有力。

在某种意义上, 本书后续内容不过是 Itô 公式的一连串应用。换言之, Itô 公式彻底改变了人们研究布朗运动以及其他重要过程类的方式。下面先给出若干说明与一个基本结果。

下一个命题引入指数局部鞅这一极为重要的过程类。它们用于许多证明, 并在第 VIII 章发挥基础作用。眼下, 它们先为我们提供大量新的局部鞅例子。

命题 3.4. 设 f 是定义在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ 上的复值函数, 并且 $\partial^2 f / \partial x^2$ 与 $\partial f / \partial y$ 存在、连续, 且满足

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

则对任意连续局部鞅 M , 过程

$$f(M_t, \langle M, M \rangle_t)$$

是局部鞅。特别地, 对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, 过程

$$\mathcal{E}^\lambda(M)_t = \exp \left\{ \lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M, M \rangle_t \right\}$$

是局部鞅。

当 $\lambda = 1$ 时, 简记为 $\mathcal{E}(M)$, 并称其为 M 的指数过程。

证明。 在定理 3.3 后注的第 1° 项中取 $A = \langle M, M \rangle$, 结论立即得到。

注。

1°) 命题 3.4 的逆命题见练习 3.14。

2°) 对布朗运动, 我们已经知道

$$\exp \left\{ \lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t \right\}$$

是鞅。进一步, 若 $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, 则

$$\mathcal{E}_t^f = \exp \left\{ \int_0^t f(u) dB_u - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(u) du \right\}$$

是鞅。事实上, 对 $s < t$, 随机变量 $\int_s^t f(u) dB_u$ 是均值为零、方差为 $\int_s^t f^2(u) du$ 的高斯随机变量, 并且与 $\mathcal{F}_s$ 独立。类似地, 对 d 维布朗运动以及 $f = (f_1, \dots, f_d)$, 其中各 $f_k \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, 同理可得

$$\mathcal{E}_t^f = \exp \left\{ \sum_{k=1}^d \int_0^t f_k(s) dB_s^k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \int_0^t f_k^2(s) ds \right\}$$

是鞅。这些鞅将在下一章中使用。

3°) 沿用上一项的思路, 可以进一步追问: 在什么条件下, 指数过程是真鞅, 而不只是局部鞅? 第 VIII 章将结合 Girsanov 定理对此作详细研究。现在先注意:

a) 如第 1 节已经指出的, 非负局部鞅是上鞅。这可由等式

$$E[M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s] = M_{s \wedge T_n}$$

中令 $n \rightarrow \infty$, 并使用 Fatou 引理看出。若要得到鞅, 则需要能够应用 Lebesgue 控制收敛定理。若 M 有界, 这一点成立; 因而有界鞅的指数过程是鞅。

b) 若 $M_0 = 0$ 且 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则 $\mathcal{E}^\lambda(M)$ 是鞅, 当且仅当

$$E[\mathcal{E}^\lambda(M)_t] = 1.$$

必要性显然; 充分性来自期望恒定的上鞅必为鞅。^a

4°) 对连续半鞅 X , 同样可以定义

$$\mathcal{E}^\lambda(X)_t = \exp \left\{ \lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle X, X \rangle_t \right\},$$

并且仍有

$$\mathcal{E}^\lambda(X)_t = \mathcal{E}^\lambda(X)_0 + \int_0^t \lambda \mathcal{E}^\lambda(X)_s dX_s.$$

换言之, $\mathcal{E}^\lambda(X)$ 是随机微分方程

$$dY_t = \lambda Y_t dX_t$$

的一个解。当 $X_0 = 0$ 时, 它事实上是满足 $Y_0 = 1$ 的唯一解 (见练习 3.10)。

^a校订注: 原书此处仍沿用命题中的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 但其证明使用了“非负局部鞅是上鞅”; 这一论证只适用于实数 λ 。故此处明确补上 $\lambda \in \mathbb{R}$ 的条件。

沿用上述结果的思路, 还可得到下面的命题。

命题 3.5. 若 B 是 d 维布朗运动, 且 $f \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, 则

$$M_t^f = f(t, B_t) - \int_0^t \left(\frac{1}{2} \Delta f + \frac{\partial f}{\partial t} \right) (s, B_s) ds$$

是局部鞅。特别地, 若 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上调和, 则 $f(B)$ 是局部鞅。

证明。 由于各分量 B^i 相互独立,

$$\langle B^i, B^j \rangle_t = \delta_{ij}t$$

(见练习 1.27)。因此结论是 Itô 公式的直接推论。

上述命题将被推广到一大类 Markov 过程, 并成为鞅问题这一基本方法的出发点 (见第 VII 章)。粗略地说, 这一思想是用一族上述类型的局部鞅刻画 Markov 过程。对布朗运动, 实际需要的条件少得多: 只须对 $f(x) = x^i$ 和 $f(x) = x^i x^j$ 考察 M^f 即可。这正是下面基本定理的内容。

定理 3.6 (P. Lévy 刻画定理)。 设 X 是一个从 0 出发、适应于 $(\mathcal{F}_t)$ 的连续 d 维过程。下列三个条件等价:

- i) X 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动;
- ii) X 是连续局部鞅, 并且对每个 $1 \leq i, j \leq d$,

$$\langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{ij}t;$$

- iii) X 是连续局部鞅, 并且对每一组 $f = (f_1, \dots, f_d)$, 其中 $f_k \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 过程

$$\mathcal{E}_t^{if} = \exp \left\{ i \sum_k \int_0^t f_k(s) dX_s^k + \frac{1}{2} \sum_k \int_0^t f_k^2(s) ds \right\}$$

是复鞅。

证明。 i) $\Rightarrow$ ii) 已在练习 1.27 中证明。

若 ii) 成立, 对

$$M_t = \sum_k \int_0^t f_k(s) dX_s^k$$

在命题 3.4 中取 $\lambda = i$, 便知 $\mathcal{E}^{if}$ 是局部鞅; 由于它有界, 故为复鞅。

最后设 iii) 成立。对任意 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 和 $T > 0$, 取 $f = \xi \mathbf{1}_{[0, T]}$, 则

$$\mathcal{E}_t^{if} = \exp \left\{ i(\xi, X_{t \wedge T}) + \frac{1}{2} |\xi|^2 (t \wedge T) \right\}$$

是鞅。对 $A \in \mathcal{F}_s$ 及 $s < t < T$, 可得

$$E[\mathbf{1}_A \exp\{i(\xi, X_t - X_s)\}] = P(A) \exp \left\{ -\frac{|\xi|^2}{2} (t - s) \right\}.$$

这里及下文, (x, y) 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的 Euclidean 内积, 并记 $|x|^2 = (x, x)$ 。

上述等式对每个 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 都成立, 因此增量 $X_t - X_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立, 并服从协方差矩阵为 $(t - s)I_d$ 的中心高斯分布。故 i) 成立。

推论 3.7。 一维布朗运动是以 t 为增过程的唯一连续局部鞅。

证明。 定理 3.6 在 $d = 1$ 时说明: X 是一维布朗运动, 当且仅当 X_t 与 $X_t^2 - t$ 都是连续局部鞅。

注。 “连续”这一条件不可缺少。例如，若 N 是参数 $c = 1$ 的 Poisson 过程，则 $N_t - t$ 与 $(N_t - t)^2 - t$ 也都是鞅（见第 II 章练习 1.14）。

命题 3.4 中的同一原理还可以从给定的局部鞅 M 构造出许多其他鞅。先作一些准备。Hermite 多项式 h_n 由恒等式

$$\sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} h_n(x) = \exp \left\{ ux - \frac{u^2}{2} \right\}, \quad u, x \in \mathbb{R},$$

定义。由此可推出

$$h_n(x) = \exp(x^2/2)(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (\exp(-x^2/2)).$$

对 $a > 0$ ，还有

$$\begin{aligned} \exp \left(ux - \frac{au^2}{2} \right) &= \exp \left(u\sqrt{a} \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{(u\sqrt{a})^2}{2} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} a^{n/2} h_n \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} H_n(x, a), \end{aligned}$$

其中

$$H_n(x, a) = a^{n/2} h_n(x/\sqrt{a}), \quad H_n(x, 0) = x^n.$$

命题 3.8。 若 M 是局部鞅且 $M_0 = 0$ ，则对每个 n ，过程

$$L_t^{(n)} = H_n(M_t, \langle M, M \rangle_t)$$

都是局部鞅，而且

$$L_t^{(n)} = n! \int_0^t dM_{s_1} \int_0^{s_1} dM_{s_2} \cdots \int_0^{s_{n-1}} dM_{s_n}.$$

证明。 容易验证

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial a} \right) H_n(x, a) = 0, \quad \frac{\partial H_n}{\partial x} = nH_{n-1}.$$

因此，Itô 公式给出

$$L_t^{(n)} = n \int_0^t L_s^{(n-1)} dM_s.$$

这既说明 $L^{(n)}$ 是局部鞅，也通过归纳给出了它的多重随机积分表示。

注。 读者可尝试显式计算较小 n 对应的 $L^{(n)}$ 。当 $n = 0, 1, 2$ 时，分别得到常数 1、 M 以及 $M^2 - \langle M, M \rangle$ ；从 $n = 3$ 开始，就会得到新的局部鞅例子。

练习 3.9。 证明分部积分公式的如下推广。若 $f(t)$ 是在每个紧区间上有界变差的右连续函数， X 是连续半鞅，则

$$f(t)X_t = f(0)X_0 + \int_0^t f(s) dX_s + \int_0^t X_s df(s).$$

练习 3.10。

1°) 若 X 是半鞅且 $X_0 = 0$, 证明 $\mathcal{E}^\lambda(X)_t$ 是方程

$$dZ_t = \lambda Z_t dX_t, \quad Z_0 = 1$$

的唯一解。

提示: 若 Y 是另一个解, 利用分部积分公式以及 Itô 公式后注的第 2° 项, 计算 $Y\mathcal{E}^\lambda(X)^{-1}$ 。

2°) 设 X, Y 是两个连续半鞅。计算 $\mathcal{E}(X+Y)$, 并与 $\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y)$ 比较。何时二者相等? 第 IX 章练习 2.9 将推广本题。

练习 3.11。

1°) 设 $X = M + A$ 、 $Y = N + B$ 是两个连续半鞅。证明

$$XY - \langle X, Y \rangle$$

是连续局部鞅, 当且仅当

$$X \cdot B + Y \cdot A = 0.$$

特别地, $X^2 - \langle X, X \rangle$ 是连续局部鞅, 当且仅当

$$X_s = 0, \quad dA_s\text{-几乎处处}, P\text{-几乎必然}.$$

2°) 若第 1° 问最后的条件成立, 证明对每个 C^2 函数 f ,

$$f(X_t) - f(X_0) - f'(0)A_t - \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

是连续局部鞅。

满足第 1° 问最后条件的半鞅 X 所组成的类 Σ , 将在第 VI 章定义 4.4 中再次讨论。

练习 3.12 (Itô 公式的另一证明与推广)。设 X 是连续半鞅, 且

$$g: \mathbb{R} \times (\Omega \times \mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}$$

满足:

- i) 对每个 ω , 映射 $(x, u) \mapsto g(x, \omega, u)$ 连续;
- ii) 对每个 (ω, u) , 映射 $x \mapsto g(x, \omega, u)$ 为 C^2 类;
- iii) 对每个 x , 过程 $(\omega, u) \mapsto g(x, \omega, u)$ 是适应过程。

1°) 证明, 在命题 2.13 的记号下,

$$\begin{aligned} P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \Delta_n} (g(X_{t_{i+1}}, t_i) - g(X_{t_i}, t_i)) &= \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(X_u, u) dX_u \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(X_u, u) d\langle X, X \rangle_u. \end{aligned}$$

2°) 再设 $g(0, \omega, u) = 0$ 。证明

$$P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \Delta_n} g(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}, t_i) = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(0, u) dX_u$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, u) d\langle X, X \rangle_u.$$

3°) 回到第 1° 问的情形, 并进一步假设:

iv) 对每个 (x, ω) , 映射 $u \mapsto g(x, \omega, u)$ 为 C^1 类, 且其导数关于变量 x 连续. 证明如下 Itô 公式的推广:

$$\begin{aligned} g(X_t, t) &= g(X_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(X_u, u) dX_u + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial u}(X_u, u) du \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(X_u, u) d\langle X, X \rangle_u. \end{aligned}$$

4°) 将上述结果推广到向量值连续半鞅 X .

练习 3.13 (Itô 公式的又一证明)。

1°) 设 x 是 $[0, t]$ 上的连续函数, 并且在如下意义下具有有限二次变差: 存在 $[0, t]$ 的一系列分割 (Δ_n) , 使 $|\Delta_n| \rightarrow 0$, 且测度

$$\sum_{t_i \in \Delta_n} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \delta_{t_i}$$

模糊收敛到一个有限测度; 该测度的分布函数记为 $\langle x, x \rangle$, 并假设它连续. 证明, 对 C^2 函数 F ,

$$F(x_t) = F(x_0) + \int_0^t F'(x_s) dx_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(x_s) d\langle x, x \rangle_s,$$

其中

$$\int_0^t F'(x_s) dx_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \Delta_n} F'(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}).$$

提示: 把 Taylor 公式写到二阶, 并使余项 r 满足

$$r(a, b) \leq \phi(|a - b|)(b - a)^2,$$

其中 ϕ 递增且 $\lim_{c \rightarrow 0} \phi(c) = 0$.

2°) 应用第 1° 问的结论, 证明连续半鞅的 Itô 公式。

练习 3.14. 设 M 是适应的连续过程, A 是适应的连续有限变差过程. 若对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$, 过程

$$\exp \left\{ \lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} A_t \right\}$$

都是局部鞅, 证明 M 是局部鞅且 $\langle M, M \rangle = A$.

提示: 在 $\lambda = 0$ 处对 λ 求导。

练习 3.15. 若 X, Y 是两个连续半鞅, 以

$$\int_0^t X_s \circ dY_s$$

表示练习 2.18 中定义的 Stratonovich 积分. 证明: 若 $F \in C^3(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, 且 $X = (X^1, \dots, X^d)$

是向量半鞅, 则

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_i \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) \circ dX_s^i.$$

练习 3.16 (指数不等式, 也称 Bernstein 不等式). 若 M 是从 0 出发的连续局部鞅, 证明

$$P[M_\infty^* \geq x, \langle M, M \rangle_\infty \leq y] \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2y}\right).$$

由此推出: 若存在常数 c , 使得对每个 t 都有 $\langle M, M \rangle_t \leq ct$, 则

$$P\left[\sup_{s \leq t} M_s \geq at\right] \leq \exp\left(-\frac{a^2 t}{2c}\right).$$

提示: 对非负上鞅使用极大不等式, 并仿照第 II 章命题 1.8 的证明。

* **练习 3.17**. 设 μ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的正测度, 并且函数

$$f_\mu(x, t) = \int_0^\infty \exp\left(yx - \frac{y^2}{2}t\right) d\mu(y)$$

并非处处为无穷。对 $\varepsilon > 0$, 定义

$$A(t, \varepsilon) = \inf\{x : f_\mu(x, t) \geq \varepsilon\},$$

并假设它是 t 的连续函数。

1°) 证明: 对一维布朗运动的任意停时 T ,

$$P\left[\sup_{t \geq T} (B_t - A(t, \varepsilon)) \geq 0 \mid \mathcal{F}_T\right] = 1 \wedge \frac{f_\mu(B_T, T)}{\varepsilon}.$$

提示: 使用第 II 章练习 3.12 的结论。为证明所需的趋零性, 考察 B 取零值的时刻。

2°) 适当改变 μ , 证明对 $h \geq 0$ 及 $b \in \mathbb{R}$,

$$P\left[\sup_{t \geq T} (B_t - A(t+h, \varepsilon)) \geq -b \mid \mathcal{F}_T\right] = 1 \wedge \frac{f_\mu(b+B_T, h+T)}{\varepsilon}.$$

3°) 若 μ 是概率测度, 证明

$$\sup_{t \geq 0} (B_t - A(t, 1)) \stackrel{(d)}{=} \frac{e}{Y},$$

其中 e 是参数为 1 的指数随机变量, Y 的分布为 μ , 且 e, Y 相互独立。

4°) 若 $\mu(\{0\}) = 0$, 并且存在 $N > 0$ 使

$$\int \exp(-Ny) \mu(dy) < \infty,$$

则对每个 n , 下列断言等价:

i)

$$E\left[\left(\sup_{t \geq 0} (B_t - A(t, \varepsilon))^+\right)^n\right] < \infty;$$

ii)

$$\int_{0+} y^{-n} \mu(dy) < \infty.$$

*# 练习 3.18 (布朗桥)。

1°) 沿用练习 1.39 第 2° 问的情形与记号, 证明

$$\beta_t = B_t - \int_0^{t \wedge 1} \frac{B_1 - B_s}{1-s} ds$$

是 $(\mathcal{G}_t)$ -布朗运动, 并且与 B_1 独立。特别地, B 是 $(\mathcal{G}_t)$ -半鞅。

2°) 若

$$X_t^x = xt + B_t - tB_1$$

是第 I 章第 3 节中的布朗桥, 则

$$X_t^x = \beta_t + \int_0^t \frac{x - X_s^x}{1-s} ds.$$

也可把 X^x 定义为在时刻 1 条件取值为 x 的布朗运动, 然后由第 1° 问直接得到同一等式。

下面两问与第 2° 问相互独立, 旨在给出 Hardy L^2 不等式的另一个概率证明 (另见第 II 章练习 3.15)。具体而言, 对 $f \in L^2([0, 1])$, 令

$$Hf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy;$$

要证明 $Hf \in L^2([0, 1])$ 且 $\|Hf\|_2 \leq 2\|f\|_2$ 。

3°) 证明: 若 $f \in L^2([0, 1])$, 则存在 $[0, 1[$ 上的 Borel 函数 F , 使对任意 $t < 1$,

$$\int_0^t f(u) \frac{B_1 - B_u}{1-u} du = \int_0^1 F(v \wedge t) dB_v.$$

然后注意到

$$\int_0^1 f(u) dB_u = \int_0^1 (f(u) - F(u)) dB_u.$$

4°) 证明

$$\int_0^1 F(v)^2 dv \leq 4 \int_0^1 f(u)^2 du.$$

再对积分作初等变换, 证明这个不等式等价于 Hardy L^2 不等式。

* 练习 3.19。

1°) 设 ψ 是 $]0, 1]$ 上的 Borel 函数, 并且对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\int_\varepsilon^1 |\psi(u)| du < \infty.$$

定义

$$\phi(u) = \int_u^1 \psi(s) ds.$$

若 B 是标准一维布朗运动, 证明极限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \psi(s) B_s ds$$

依概率存在, 当且仅当

$$\int_0^1 \phi^2(u) du < \infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} \phi(\varepsilon) = 0.$$

并与第 III 章练习 2.31 比较。

提示: 对高斯随机变量, 依概率收敛蕴含 L^2 收敛。

2°) 由练习 3.18 第 3° 问推出: 对 $f \in L^2([0, 1])$, 极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 f(u) u^{-1} B_u du$$

几乎必然存在。若 H^* 是 Hardy 算子 H 的伴随算子 (见练习 3.18), 证明对每个 $f \in L^2([0, 1])$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} H^* f(\varepsilon) = 0.$$

3°) 承认第 III 章练习 2.31 中断言 iii) 与 iv) 等价。证明存在正函数 $f \in L^2([0, 1])$, 使

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 f(u) u^{-1} B_u du$$

几乎必然存在, 而

$$\int_0^1 f(u) u^{-1} |B_u| du = \infty \quad \text{几乎必然.}$$

提示: 取

$$f(u) = \frac{\mathbf{1}_{\{u \leq 1/2\}}}{u^{1/2}(-\log u)^\alpha}, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1.$$

4°) 设 X 是平稳 Ornstein–Uhlenbeck 过程。证明对每个 $g \in L^2([0, \infty[)$, 极限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(s) X_s ds$$

几乎必然且在 L^2 中存在。

提示: 使用第 I 章练习 3.8 给出的 X 的表示, 并利用如下事实: 当 $\beta > 0$ 时, 映射

$$g \mapsto (2\beta u)^{-1/2} g((2\beta)^{-1} \log(1/u))$$

是从 $L^2([0, \infty[)$ 到 $L^2([0, 1])$ 的同构。

再使用第 3° 问中的同一等价性, 证明: 若 g 是 $L^1_{\text{loc}}([0, \infty[)$ 中的正函数, 则

$$\int_0^\infty g(s) |X_s| ds < \infty \quad \text{几乎必然} \iff \int_0^\infty g(s) ds < \infty.$$

5°) 对 $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 及局部可积函数 g , 证明: 对某个适当的平稳 Ornstein–Uhlenbeck 过程 X ,

$$E \left[\left| \int_0^t g(s) e^{i\mu B_s} ds \right|^2 \right] = \mu^{-2} E \left[\left(\int_0^t g(s) X_s ds \right)^2 \right].$$

由此推出: 若 $g \in L^2([0, \infty[)$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(s) e^{i\mu B_s} ds$$

在 L^2 中存在; 并证明几乎必然收敛也成立。

* **练习 3.20.** 设 A 是 $d \times d$ 矩阵, B 是从 0 出发的 d 维布朗运动。证明下列两个过程具有相同的滤过:

$$(AB_t, B_t) \quad \text{与} \quad \int_0^t ((A + A^\top)B_s, dB_s),$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的内积。

练习 3.21. 利用 P. Lévy 刻画定理证明布朗运动的强 Markov 性。更确切地, 设 B 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。证明: 对任意初始分布 ν 以及任意 $(\mathcal{F}_t)$ -停时 T , 过程

$$(B_{T+t} - B_T)\mathbf{1}_{\{T < \infty\}}$$

在条件概率 $P_\nu(\cdot | T < \infty)$ 下是标准布朗运动, 并且与 $\mathcal{F}_T$ 独立。

** **练习 3.22.** 设 B 是 d 维布朗运动,

$$O(t) = (O_j^i(t))$$

是逐次可测过程, 取值于 $d \times d$ 正交矩阵集合。注意到对每个 t ,

$$\int_0^t \|O(s)\|^2 ds < \infty.$$

证明由

$$X_t^i = \sum_{j=1}^d \int_0^t O_j^i(s) dB^j(s)$$

定义的过程 X 是 d 维布朗运动。

练习 3.23. 设 (X, Y) 是标准二维布朗运动。对 $0 < \rho < 1$, 令

$$Z_t = \rho X_t + \sqrt{1 - \rho^2} Y_t.$$

1°) 证明 Z 是标准一维布朗运动, 并计算 $\langle X, Z \rangle$ 与 $\langle Y, Z \rangle$ 。

2°) 证明 X_1 与 $\sigma(Z_s : s \geq 0)$ 在给定 Z_1 的条件下相互独立。

练习 3.24.

1°) 设 M 是连续过程, A 是递增过程。证明: M 是以 A 为增过程的局部鞅, 当且仅当对每个 $f \in C_b^2$, 过程

$$f(M_t) - f(M_0) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(M_s) dA_s$$

都是局部鞅。

提示: 证明充分性时, 适当截断函数 x 与 x^2 。

2°) 设 M, N 是两个连续局部鞅, C 是有限变差过程。证明 $\langle M, N \rangle = C$, 当且仅当对每个 $f \in C_b^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, 过程

$$f(M_t, N_t) - f(M_0, N_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_s, N_s) d\langle M, M \rangle_s$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_s, N_s) d\langle N, N \rangle_s \\
& - \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_s, N_s) dC_s
\end{aligned}$$

是局部鞅。

练习 3.25。 设 M 是满足 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅。证明

$$\{\mathcal{E}(M)_\infty = 0\} = \{\langle M, M \rangle_\infty = \infty\} \quad \text{几乎必然.}$$

提示:

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}M\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{4}\langle M, M \rangle\right).$$

**** 练习 3.26 (练习 1.42 的继续)。**

1°) 设 $X = X_0 + M + A$ 是正半鞅, 其中 A 递增, 并且对每个 t , $X_t \leq c$ 几乎必然。证明

$$E[A_\infty] \leq c.$$

2°) 设 $M \in \mathcal{M}$, 并假设对每个 $t > 0$, $M_t \leq k$ 。证明

$$V_t = (k+1-M_t)^{-1} - \int_0^t (k+1-M_s)^{-3} d\langle M \rangle_s$$

属于 $\mathcal{M}$, 并且

$$\langle V \rangle(\cdot,]0, 1]) < \infty \quad \text{几乎必然.}$$

3°) 设 $M \in \mathcal{M}$, 并假设

$$\liminf_{t \downarrow 0} M_t < \infty \quad \text{几乎必然.}$$

证明 $\lim_{t \downarrow 0} M_t$ 几乎必然存在。

4°) 证明: 对 $M \in \mathcal{M}$, 几乎每个 ω 都恰有下列三种情形之一成立:

- i) $\lim_{t \downarrow 0} M_t(\omega)$ 在 $\mathbb{R}$ 中存在;
- ii) $\lim_{t \downarrow 0} |M_t(\omega)| = +\infty$;
- iii)

$$\liminf_{t \downarrow 0} M_t(\omega) = -\infty, \quad \limsup_{t \downarrow 0} M_t(\omega) = +\infty.$$

练习 3.27。 设 (Δ_n) 是 $[0, T]$ 的一系列逐次加细的有限分割, 即 $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$, 且 $|\Delta_n| \rightarrow 0$ 。记

$$\Delta_n = (0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{p_n} = T).$$

1°) 若 F 是 $[0, T]$ 上的连续函数, 证明测度序列

$$\sum_{p=0}^{p_n-1} \frac{F(t_{p+1}) - F(t_p)}{t_{p+1} - t_p} \mathbf{1}_{[t_p, t_{p+1}]}(u) du$$

在 Schwartz 广义函数意义下收敛到 F' 。

2°) 设 B 是标准一维布朗运动。证明对 $f \in L^2([0, T])$, 随机变量序列

$$\sum_{p=0}^{p_n-1} \frac{1}{t_{p+1} - t_p} \left(\int_{t_p}^{t_{p+1}} f(u) du \right) (B_{t_{p+1}} - B_{t_p})$$

几乎必然且在 L^2 中收敛, 并指出其极限。

3°) 尽管如此, 证明在第 1° 问中取 $F = B(\omega)$ 所定义的测度序列, 并不模糊收敛到 $[0, T]$ 上的某个测度。

4°) 若 f 是有界变差函数, 且 $\theta_p \in [t_p, t_{p+1}]$, 证明

$$\sum_{p=0}^{p_n-1} f(\theta_p) (B_{t_{p+1}} - B_{t_p})$$

几乎必然收敛。

* **练习 3.28 (练习 1.48 的继续)。**

1°) 若 M 是随机区间 $[0, T[$ 上从 0 出发的连续局部鞅, 其增过程为 $t \wedge T$, 而 B 是与 M 独立的布朗运动, 则

$$M_t + B_t - B_{t \wedge T}$$

是布朗运动。我们称 M 为 $[0, T[$ 上的布朗运动。

2°) 陈述并证明随机区间 $[0, T[$ 上连续局部鞅的 Itô 公式。

两问相互独立。

** **练习 3.29 (P. Lévy 刻画定理对符号测度的推广)。** 设 $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ 是滤过概率空间, Q 是 $\mathcal{F}_\infty$ 上满足 $Q \ll P$ 的有界符号测度。假设 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续且 P -完备, 并令 M 为 càdlàg 鞅, 使对每个 t ,

$$M_t = \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} \quad \text{几乎必然.}$$

若连续过程 X 满足

- i) X 是 P -半鞅;
- ii) XM 是 P -局部鞅,

则称 X 为 (Q, P) -局部鞅 (该条件的意义见第 VIII 章第 1 节)。

1°) 若 H 是局部有界的 $(\mathcal{F}_t)$ -可预测过程, 并且 $H \cdot X$ 表示在 P 下计算的随机积分, 证明: 若 X 是 (Q, P) -局部鞅, 则 $H \cdot X$ 也是。

2°) 以下假设 X_t 与 $X_t^2 - t$ 都是 (Q, P) -局部鞅, 并且 $X_0 = 0$, P -几乎必然。证明: 对任意 $u \in \mathbb{R}$, 过程

$$Y_t = \exp(iuX_t) - 1 + \frac{u^2}{2} \int_0^t \exp(iuX_s) ds$$

是 (Q, P) -局部鞅, 并推出

$$\int Y_t dQ = 0.$$

3°) 证明

$$\int \exp(iuX_t) dQ = Q(1) \exp(-tu^2/2),$$

并更一般地证明：对 $0 < t_1 < \cdots < t_n$ 及实数 $u_1, \dots, u_n$,

$$\begin{aligned} & \int \exp i(u_1 X_{t_1} + u_2(X_{t_2} - X_{t_1}) + \cdots + u_n(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})) dQ \\ &= Q(1) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (t_1 u_1^2 + (t_2 - t_1) u_2^2 + \cdots + (t_n - t_{n-1}) u_n^2) \right\}. \end{aligned}$$

由此推出：

- 若 $Q(1) = 0$, 则 Q 在 $\sigma\{X_s : s \geq 0\}$ 上为零；
- 若 $Q(1) \neq 0$, 则 $Q/Q(1)$ 在 $\sigma\{X_s : s \geq 0\}$ 上是一个概率测度, 并且在该测度下 X 是标准布朗运动。

练习 3.30 (Kailath–Segal 恒等式)。设 M 是满足 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅, 并递归定义 M 的迭代随机积分

$$I_0 = 1, \quad I_n(t) = \int_0^t I_{n-1}(s) dM_s.$$

证明对 $n \geq 2$,

$$nI_n = I_{n-1}M - I_{n-2}\langle M, M \rangle.$$

说明这个恒等式与 Hermite 多项式的某个递推公式之间的关系。

提示：见命题 3.8。

* **练习 3.31 (练习 2.17 的补充)**。设 B 是从 0 出发的一维布朗运动, H, K 是两个关于 $(\mathcal{F}_t^B)$ 逐次可测的有界过程。令

$$X_t = \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t K_s ds,$$

并进一步假设 H 在 0 处右连续。

1°) 若 ϕ 是 C^1 函数, 证明当 $h \rightarrow 0$ 时,

$$h^{-1/2} \int_0^h \phi(X_s) dX_s$$

依分布收敛到 $\phi(0)H_0B_1$ 。

2°) 再设 $\phi(0) = 0$ 且 ϕ 为 C^2 类。证明

$$h^{-1} \int_0^h \phi(X_s) dX_s$$

依分布收敛到

$$\frac{1}{2} \phi'(0) H_0^2 (B_1^2 - 1).$$

3°) 当 ϕ 为 C^{p+1} 类, 且

$$\phi(0) = \phi'(0) = \cdots = \phi^{(p-1)}(0) = 0$$

时, 陈述并证明上述结果的推广。

提示：使用命题 3.8。

* **练习 3.32。** 设 B, C 是两个相互独立、从 0 出发的布朗运动。证明

$$\int_0^1 (B_t + C_{1-t})^2 dt \stackrel{(d)}{=} \int_0^1 (B_t^2 + (B_1 - B_t)^2) dt.$$

提示：右端关于 $\lambda^2/2$ 的 Laplace 变换，是两个随机积分之和关于 λ 的特征函数；见练习 2.19。

练习 3.33。

1°) 设 B 是一维布朗运动， H 是 $(\mathcal{F}_t^B)$ -适应过程，并且对每个 t ,

$$\int_0^t H_s^2 ds < \infty, \quad \int_0^\infty H_s^2 ds = \infty.$$

令

$$T = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t H_s^2 ds = \sigma^2 \right\},$$

其中 $\sigma^2 > 0$ 为常数。证明

$$\int_0^T H_s dB_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

2°) (**随机积分的中心极限定理**) 设 (B^n) 是定义在同一概率空间上的一列一维布朗运动， (K^n) 是一列关于 $(\mathcal{F}_t^{B^n})$ 适应的过程，并且对某列常数 (T_n) ,

$$P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{T_n} (K_s^n)^2 ds = \sigma^2.$$

证明

$$\int_0^{T_n} K_s^n dB_s^n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

提示：对过程

$$H^n = K^n \mathbf{1}_{[0, T_n]} + \sigma \mathbf{1}_{[T_n, T_n+1]}$$

应用第 1° 问。

4 Burkholder–Davis–Gundy 不等式

在第 1 节中我们已经看到：若 M 是从零出发、在 L^2 中有界的连续鞅，则范数

$$\|M_\infty^*\|_2 \quad \text{与} \quad \left\| \langle M, M \rangle_\infty^{1/2} \right\|_2$$

等价。现在利用 Itô 公式把这一结论推广到其他 L^p 范数。回顾：若 M 是连续局部鞅，记

$$M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|.$$

本节将专门证明 Burkholder–Davis–Gundy 不等式，其内容如下。

定理 4.1 (Burkholder–Davis–Gundy 不等式)。 对每个 $p \in]0, \infty[$ ，都存在两个常数 $c_p, C_p > 0$ ，使对所有从零出发的连续局部鞅 M ，

$$c_p E \left[\langle M, M \rangle_\infty^{p/2} \right] \leq E[(M_\infty^*)^p] \leq C_p E \left[\langle M, M \rangle_\infty^{p/2} \right].$$

通常称 c_p, C_p 为“普适常数”，因为在任意概率空间上，它们都可以对所有局部鞅取成相同的常数。记 H^p 为满足 $M_\infty^* \in L^p$ 的连续局部鞅空间，则定理 4.1 在这个空间上给出了两个等价范数。当 $p \geq 1$ 时， H^p 中的过程都是真鞅；当 $p > 1$ 时， H^p 恰为在 L^p 中有界的连续鞅空间。对 $p = 1$ 情形，后一结论不再成立： H^1 严格小于在 L^1 中有界的连续鞅空间，甚至严格小于一致可积连续鞅空间；第 II 章练习 3.15 已经指出这一点。

通过停时化，定理立即给出下面这个显然却十分重要的推论。

推论 4.2. 对任意停时 T ,

$$c_p E \left[\langle M, M \rangle_T^{p/2} \right] \leq E[(M_T^*)^p] \leq C_p E \left[\langle M, M \rangle_T^{p/2} \right].$$

更一般地，对任意有界可预测过程 H ,

$$\begin{aligned} c_p E \left[\left(\int_0^T H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right)^{p/2} \right] &\leq E \left[\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t H_s dM_s \right|^p \right] \\ &\leq C_p E \left[\left(\int_0^T H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right)^{p/2} \right]. \end{aligned}$$

定理的证明分为若干步骤。

命题 4.3. 对 $p \geq 2$ ，存在常数 C_p ，使对任意满足 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅 M ,

$$E[(M_\infty^*)^p] \leq C_p E \left[\langle M, M \rangle_\infty^{p/2} \right].$$

证明. 通过停时化，只需对有界的 M 证明结论。函数 $x \mapsto |x|^p$ 二次可微，故由 Itô 公式

$$\begin{aligned} |M_\infty|^p &= \int_0^\infty p |M_s|^{p-1} \operatorname{sgn}(M_s) dM_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty p(p-1) |M_s|^{p-2} d\langle M, M \rangle_s. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} E[|M_\infty|^p] &= \frac{p(p-1)}{2} E \left[\int_0^\infty |M_s|^{p-2} d\langle M, M \rangle_s \right] \\ &\leq \frac{p(p-1)}{2} E[(M_\infty^*)^{p-2} \langle M, M \rangle_\infty] \\ &\leq \frac{p(p-1)}{2} \|(M_\infty^*)^{p-2}\|_{p/(p-2)} \|\langle M, M \rangle_\infty\|_{p/2}. \end{aligned}$$

另一方面，由 Doob 不等式

$$\|M_\infty^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|M_\infty\|_p.$$

经过直接整理即得结论； $p = 2$ 的情形按通常方式单独理解。

命题 4.4. 对 $p \geq 4$ ，存在常数 $c_p > 0$ ，使

$$c_p E \left[\langle M, M \rangle_\infty^{p/2} \right] \leq E[(M_\infty^*)^p].$$

证明。 通过停时化，只需考虑 $\langle M, M \rangle$ 有界的情形。下文以 a_p 表示普适常数，但它在不同行中可以取不同的值。例如，对实数 x, y ,

$$|x + y|^p \leq a_p(|x|^p + |y|^p).$$

由

$$M_t^2 = 2 \int_0^t M_s dM_s + \langle M, M \rangle_t$$

可得

$$E[\langle M, M \rangle_\infty^{p/2}] \leq a_p \left\{ E[(M_\infty^*)^p] + E\left[\left|\int_0^\infty M_s dM_s\right|^{p/2}\right] \right\}.$$

把命题 4.3 (指数取 $p/2$) 应用于局部鞅 $\int_0^\cdot M_s dM_s$, 得到

$$\begin{aligned} E[\langle M, M \rangle_\infty^{p/2}] &\leq a_p \left\{ E[(M_\infty^*)^p] + E\left[\left(\int_0^\infty M_s^2 d\langle M, M \rangle_s\right)^{p/4}\right] \right\} \\ &\leq a_p \left\{ E[(M_\infty^*)^p] + \left(E[(M_\infty^*)^p] E[\langle M, M \rangle_\infty^{p/2}]\right)^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

令

$$x = E[\langle M, M \rangle_\infty^{p/2}]^{1/2}, \quad y = E[(M_\infty^*)^p]^{1/2}.$$

上式化为

$$x^2 - a_p xy - a_p y^2 \leq 0.$$

因此 x 不超过方程 $x^2 - a_p xy - a_p y^2 = 0$ 的正根，而该正根形如 $a_p y$ 。命题得证。

定理 4.1 可由上述两个命题与下面的降阶方法推出。

定义 4.5 (控制关系)。 设 X 是正的、适应的右连续过程， A 是递增过程。若对任意有界停时 T ,

$$E[X_T | \mathcal{F}_0] \leq E[A_T | \mathcal{F}_0],$$

则称 X 受 A 控制。

引理 4.6。 若 X 受 A 控制且 A 连续，则对 $x, y > 0$,

$$P[X_\infty^* > x; A_\infty \leq y] \leq \frac{1}{x} E[A_\infty \wedge y],$$

其中 $X_\infty^* = \sup_s X_s$ 。

证明。 只需在 $P(A_0 \leq y) > 0$ 时证明；事实上，可以把 P 换成

$$P' = P(\cdot | A_0 \leq y),$$

从而假设 $P(A_0 \leq y) = 1$ ，而控制关系仍然成立。再由 Fatou 引理，只需证明

$$P[X_n^* > x; A_n \leq y] \leq \frac{1}{x} E[A_\infty \wedge y].$$

在 $[0, n]$ 上论证，等价于在 $[0, \infty]$ 上论证，并假设随机变量 X_∞ 存在，而且控制关系对一切停时（无论是否有界）成立。

定义

$$R = \inf\{t : A_t > y\}, \quad S = \inf\{t : X_t > x\},$$

其中空集的下确界均取 $+\infty$ 。由 A 的连续性, $\{A_\infty \leq y\} = \{R = \infty\}$, 故

$$\begin{aligned} P[X_\infty^* > x; A_\infty \leq y] &= P[X_\infty^* > x; R = \infty] \\ &\leq P[X_S \geq x; (S < \infty) \cap (R = \infty)] \\ &\leq P[X_{S \wedge R} \geq x] \\ &\leq \frac{1}{x} E[X_{S \wedge R}] \\ &\leq \frac{1}{x} E[A_{S \wedge R}] \leq \frac{1}{x} E[A_\infty \wedge y]. \end{aligned}$$

最后一个不等式来自 A 的连续性以及 $A_0 \leq y$ 几乎必然: $A_{S \wedge R} \leq A_\infty \wedge y$ 。

命题 4.7. 在引理 4.6 的假设下, 对任意 $k \in]0, 1[$,

$$E[(X_\infty^*)^k] \leq \frac{2-k}{1-k} E[A_\infty^k].$$

证明. 设 $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 连续递增且 $F(0) = 0$ 。由 Fubini 定理和上述引理,

$$\begin{aligned} E[F(X_\infty^*)] &= E\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_\infty^* > x\}} dF(x)\right] \\ &\leq \int_0^\infty (P[X_\infty^* > x; A_\infty \leq x] + P[A_\infty > x]) dF(x) \\ &\leq \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} E[A_\infty \wedge x] + P[A_\infty > x]\right) dF(x) \\ &\leq \int_0^\infty \left(2P[A_\infty > x] + \frac{1}{x} E[A_\infty \mathbf{1}_{\{A_\infty \leq x\}}]\right) dF(x) \\ &= 2E[F(A_\infty)] + E\left[A_\infty \int_{A_\infty}^\infty \frac{dF(x)}{x}\right] = E[\tilde{F}(A_\infty)], \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{F}(x) = 2F(x) + x \int_x^\infty \frac{dF(u)}{u}.$$

取 $F(x) = x^k$, 即得所需结论。

注. 当 $k \geq 1$ 且 $F(x) = x^k$ 时, $\tilde{F} \equiv +\infty$, 上述论证不再有用。练习 4.16 将说明: 在命题的假设下, 不可能找到普适常数 c , 使

$$E[X_\infty^*] \leq cE[A_\infty].$$

这也可由一个不属于 H^1 的正鞅看出: 此时可对每个 t 取 $A_t = X_0$ 。

现在即可完成定理 4.1 的证明。对右侧不等式, 在命题 4.7 中取

$$X = (M^*)^2, \quad A = C_2 \langle M, M \rangle;$$

对左侧不等式, 取

$$X = \langle M, M \rangle^2, \quad A = C_4(M^*)^4.$$

所需的控制关系由命题 4.3、4.4 通过与推论 4.2 相同的停时化得到。

练习中还会给出 BDG 不等式在若干特殊情形下的其他证明。此外, 下一章第 1 节将说明, 利用时间变换可以从布朗运动的特殊情形推出一般的 BDG 不等式。本节最后介绍证明布朗运动特殊情形的另一种方法。

定义 4.8. 设 ϕ 是定义在 $]0, a]$ 上的正实函数, 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 0$, 并设 $\beta > 1$ 。若一对正随机变量 (X, Y) 对每个 $\lambda > 0$ 及 $\delta \in]0, a]$ 都满足

$$P[X \geq \beta\lambda, Y < \delta\lambda] \leq \phi(\delta)P[X \geq \lambda],$$

则称 (X, Y) 满足 *good- λ* 不等式 $I(\phi, \beta)$, 并记

$$(X, Y) \in I(\phi, \beta).$$

下文中, F 表示一个适度函数, 即从零出发的连续递增函数, 并且对某个 $\alpha > 1$,

$$\sup_{x>0} \frac{F(\alpha x)}{F(x)} = \gamma < \infty.$$

事实上, 一旦这一性质对某个 $\alpha > 1$ 成立, 它就对每个 $\alpha > 1$ 成立, 只是 γ 会依赖于 α 。函数

$$F(x) = x^p, \quad 0 < p < \infty,$$

就是适度函数。

许多不等式的关键在于下面的引理。

引理 4.9. 存在只依赖于 ϕ, β, γ 的常数 c , 使得若 $(X, Y) \in I(\phi, \beta)$, 则

$$E[F(X)] \leq cE[F(Y)].$$

证明. 只需对有界的 F 证明结论, 因为同一个 γ 同时适用于 F 与 $F \wedge n$ 。有

$$\begin{aligned} E[F(X/\beta)] &= \int_0^\infty P[X \geq \beta\lambda] dF(\lambda) \\ &\leq \int_0^\infty \phi(\delta)P[X \geq \lambda] dF(\lambda) + \int_0^\infty P[Y \geq \delta\lambda] dF(\lambda) \\ &= \phi(\delta)E[F(X)] + E[F(Y/\delta)]. \end{aligned}$$

由假设可取 γ , 使对每个 x 都有

$$F(x) \leq \gamma F(x/\beta).$$

选择 $\delta \in]0, a \wedge 1[$, 使 $\gamma\phi(\delta) < 1$; 再取 γ' , 使对每个 x 都有 $F(x/\delta) \leq \gamma'F(x)$ 。于是

$$E[F(X)] \leq \frac{\gamma'}{1 - \gamma\phi(\delta)} E[F(Y)].$$

上述引理也可用于证明定理 4.1 (见练习 4.25)。现在先把它应用于布朗运动。考虑典范布朗运动及其概率测度 P_x ($x \in \mathbb{R}$) 和时间平移算子 θ_t ($t \geq 0$), 并以 $(\mathcal{F}_t)$ 表示第 III 章中的布朗滤过。

定理 4.10. 设 A_t 是适应于 $(\mathcal{F}_t)$ 的连续递增过程, 并满足:

i)

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{x, \lambda} P_x[A_{\lambda^2} > b\lambda] = 0;$$

ii) 存在常数 K , 使对每个 $s, t \geq 0$,

$$A_{t+s} - A_s \leq K A_t \circ \theta_s.$$

则存在常数 c_F , 使对任意停时 T ,

$$E_0[F(A_T)] \leq c_F E_0[F(T^{1/2})].$$

证明. 只需先对有限停时 T 证明结论; 进一步, 只需证明存在 ϕ, β , 使对每个有限停时 T ,

$$(A_T, T^{1/2}) \in I(\phi, \beta).$$

任取 $\beta > 1$, 并令

$$S = \inf\{t : A_t > \lambda\}.$$

在时刻 S 使用布朗运动的强 Markov 性, 得到

$$\begin{aligned} P_0[A_T \geq \beta\lambda, T^{1/2} < \delta\lambda] &= P_0[A_T - A_S \geq (\beta - 1)\lambda, T < \delta^2\lambda^2, S < T] \\ &\leq P_0[A_{S+\delta^2\lambda^2} - A_S \geq (\beta - 1)\lambda, S < T] \\ &\leq P_0[A_{\delta^2\lambda^2} \circ \theta_S \geq (\beta - 1)\lambda K^{-1}, S < T] \\ &\leq E_0[P_{B_S}[A_{\delta^2\lambda^2} \geq (\beta - 1)\lambda K^{-1}] \mathbf{1}_{\{S < T\}}] \\ &\leq \sup_x P_x[A_{\delta^2\lambda^2} \geq (\beta - 1)\lambda K^{-1}] P_0[S < T] \\ &\leq \sup_{x, \lambda} P_x \left[A_{\lambda^2} \geq \frac{\beta - 1}{K\delta} \lambda \right] P_0[A_T \geq \lambda]. \end{aligned}$$

由条件 i), 最后一个上界中的第一因子在 $\delta \rightarrow 0$ 时趋于零, 故得 good- λ 不等式。再用引理 4.9 即得结论。

类似地可得到反向不等式。

定理 4.11. 设 A_t 是适应于 $(\mathcal{F}_t)$ 的连续递增过程, 并满足:

i)

$$\lim_{b \rightarrow 0} \sup_{x, \lambda} P_x[A_{\lambda^2} < b\lambda] = 0;$$

ii) 存在常数 K , 使对每个 $s < t$,

$$A_{t-s} \circ \theta_s \leq K A_t.$$

则存在常数 C_F , 使对任意停时 T ,

$$E_0[F(T^{1/2})] \leq C_F E_0[F(A_T)].$$

证明。 证明仿照上一结果。取 $\beta > 1$ 、 $\delta < 1$ ，则

$$\begin{aligned} P_0[T^{1/2} \geq \beta\lambda, A_T < \delta\lambda] &\leq P_0[T \geq \beta^2\lambda^2, A_{T-\lambda^2} \circ \theta_{\lambda^2} < K\delta\lambda] \\ &\leq P_0[T \geq \lambda^2, A_{\beta^2\lambda^2-\lambda^2} \circ \theta_{\lambda^2} < K\delta\lambda] \\ &= E_0[P_{B_{\lambda^2}}[A_{(\beta^2-1)\lambda^2} < K\delta\lambda] \mathbf{1}_{\{T \geq \lambda^2\}}] \\ &\leq \sup_{x,\lambda} P_x[A_{(\beta^2-1)\lambda^2} < K\delta\lambda] P_0[T^{1/2} \geq \lambda]. \end{aligned}$$

由条件 i)，前一因子随 $\delta \rightarrow 0$ 而趋于零；再用引理 4.9 即得结论。

读者可验证上述两个定理适用于

$$A_t = \sup_{s \leq t} |B_s - B_0|.$$

于是得到布朗运动的 BDG 不等式；再借助时间变换（见第 V 章第 1 节），便得到一般的 BDG 不等式。这一方法事实上极为有力；据我们所知，连续过程的所有 BDG 型不等式都可以用它证明。

练习 4.12。 设 B 与 B' 是两个相互独立的标准一维布朗运动。证明：对每个 $p > 0$ ，存在常数 $c_p, C_p > 0$ ，使对任意局部有界的 $(\mathcal{F}_t^B)$ -渐进可测过程 H ，都有

$$c_p E[(H \cdot B')_\infty^*]^p \leq E[(H \cdot B)_\infty^*]^p \leq C_p E[(H \cdot B')_\infty^*]^p.$$

练习 4.13。 设 $X = M + V$ 是从 0 出发的连续半鞅。对 $p > 0$ ，置

$$\|X\|_{\mathcal{S}^p} = \left\| \langle M, M \rangle_\infty^{1/2} + \int_0^\infty |dV|_s \right\|_{L^p}.$$

1°) 证明所有满足 $\|X\|_{\mathcal{S}^p} < \infty$ 的连续半鞅构成一个向量空间，记作 $\mathcal{S}^p$ ，并且 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}^p}$ 是其上的半范数。

2°) 置 $X^* = \sup_{t \geq 0} |X_t|$ 。证明存在仅依赖于 p 的常数 c_p ，使

$$\|X^*\|_{L^p} \leq c_p \|X\|_{\mathcal{S}^p}.$$

反向不等式是否也对某个仅依赖于 p 的常数成立？

3°) 证明：当 $p > 1$ 时，把彼此不可区别的过程视为同一元素以后， $\mathcal{S}^p$ 是 Banach 空间，并且包含 $\mathcal{H}^p$ 。

练习 4.14。

1°) 由 BDG 不等式推出：对连续局部鞅 M ，事件

$$\{M_\infty^* < \infty\} \quad \text{与} \quad \{\langle M, M \rangle_\infty < \infty\}$$

几乎必然相同。第 V 章命题 1.8 将给出一个更强的结果。

2°) 设 $(M^n)_{n \geq 1}$ 是一列从 0 出发的连续局部鞅。证明

$$(M^n)_\infty^* \xrightarrow{P} 0 \iff \langle M^n, M^n \rangle_\infty \xrightarrow{P} 0.$$

提示：先证明两列随机变量一致有界时的结论，再使用引理 4.6。

* 练习 4.15 (占用密度的 Fourier 方法)。

1°) 设 M 是连续局部鞅, 并且 $E[\langle M, M \rangle_t^2] < \infty$. 定义 $\mathbb{R}$ 上的有限测度

$$\mu_t(f) = \int_0^t f(M_s) d\langle M, M \rangle_s.$$

记 $\hat{\mu}_t$ 为 μ_t 的 Fourier 变换。证明

$$E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\mu}_t(\xi)|^2 d\xi \right] < \infty,$$

并由此推出: 几乎必然地, μ_t 关于 Lebesgue 测度绝对连续。

2°) 证明: 对每个固定的 t , 存在一族随机变量 $(L_t^a)_{a \in \mathbb{R}}$, 使映射 $(a, \omega) \mapsto L_t^a(\omega)$ 关于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_t$ 可测, 并且对任意非负 Borel 函数 f ,

$$\int_0^t f(M_s) d\langle M, M \rangle_s = \int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a f(a) da.$$

第 VI 章将系统研究这一结果。

练习 4.16。

1°) 设 B 是布朗运动, 并令

$$S_t = \sup_{s \leq t} B_s.$$

证明 $|B|$ 被 $2S$ 控制。

提示: 若 $y \geq x^+$, 则 $|x| \leq (y - x) + y$ 。

2°) 令

$$T_1 = \inf\{t \geq 0 : B_t = 1\}, \quad X_t = |B_{t \wedge T_1}|.$$

用这个例子说明命题 4.7 后的评注。

练习 4.17。设 M 是满足 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅, 并置

$$S_t = \sup_{s \leq t} M_s, \quad s_t = \inf_{s \leq t} M_s.$$

设 A 是连续适应递增过程, 并且 $A_0 \geq a > 0$ 。

1°) 证明

$$\int_0^t (S_s - M_s) dS_s = 0.$$

2°) 若 M 有界, 证明

$$E[A_\infty^{-1}(S_\infty - M_\infty)^2] \leq E \left[\int_0^\infty A_s^{-1} d\langle M, M \rangle_s \right].$$

3°) 证明

$$(M_t^*)^2 \leq 2((S_t - M_t)^2 + (M_t - s_t)^2),$$

并由此得到

$$\begin{aligned} E[(M_\infty^*)^2 \langle M, M \rangle_\infty^{-1/2}] &\leq 4E \left[\int_0^\infty \langle M, M \rangle_s^{-1/2} d\langle M, M \rangle_s \right] \\ &= 8E[\langle M, M \rangle_\infty^{1/2}]. \end{aligned}$$

再把这个不等式推广到无界局部鞅。

提示：关于最后一个等号，可作时间变换；见第 V 章第 1 节。

4°) 证明

$$E[M_\infty^*] \leq 2\sqrt{2} E[\langle M, M \rangle_\infty^{1/2}].$$

5°) 利用第 2° 问证明

$$E[(S_\infty - s_\infty)^2] \leq 4E[M_\infty^2].$$

第 VI 章练习 4.11 将给出另一种证明。

* **练习 4.18。**

1°) 设 M 是满足 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅， A, B, C 是连续适应递增过程， $B_0 = C_0 = 0$ ， $A_0 \geq 0$ 。若

$$X = M + B - C \geq 0,$$

证明 $A^{-1}X$ 被过程

$$Y_t = \int_0^t A_s^{-1} dB_s$$

控制；约定 $0/0 = 0$ 。

提示：先把 A 替换为 $A + \varepsilon$ 。

2°) 设 $p > q > 0$ 。证明存在常数 $C_{p,q}$ ，使

$$E[(M_\infty^*)^p \langle M, M \rangle_\infty^{-q/2}] \leq C_{p,q} E[(M_\infty^*)^{p-q}].$$

练习 4.19。

1°) 设 A 是连续适应递增过程， $X \in L_+^1$ ，并且对任意停时 S ，都有

$$E[(A_\infty - A_S)\mathbf{1}_{\{S>0\}}] \leq E[X\mathbf{1}_{\{S<\infty\}}].$$

证明：对每个 $\lambda > 0$ ，

$$E[(A_\infty - \lambda)\mathbf{1}_{\{A_\infty \geq \lambda\}}] \leq E[X\mathbf{1}_{\{A_\infty \geq \lambda\}}].$$

提示：取 $S = \inf\{t \geq 0 : A_t > \lambda\}$ 。

2°) 设 F 是满足 $F(0) = 0$ 的递增凸函数， f 是其右导数。证明

$$E[F(A_\infty)] \leq E[Xf(A_\infty)].$$

提示：对 $df(\lambda)$ 积分。

3°) 设 M 是连续局部鞅。证明存在普适常数 c ，使

$$E[\langle M, M \rangle_\infty] \leq cE[\langle M, M \rangle_\infty^{1/2} M_\infty^*].$$

4°) 设 M 是在 L^2 中有界的连续鞅，并置

$$S(M)_t = M_t^* \vee \langle M, M \rangle_t^{1/2}, \quad I(M)_t = M_t^* \wedge \langle M, M \rangle_t^{1/2}.$$

证明存在普适常数 d ，使

$$E[S(M)_\infty^2] \leq dE[I(M)_\infty^2].$$

练习 4.20. 设 $0 < p < 1$, M 是从 0 出发的连续局部鞅。

1°) 置

$$N_t = \int_0^t \langle M, M \rangle_s^{(p-1)/2} dM_s.$$

利用时间变换说明这个积分有意义。若 $E[\langle M, M \rangle_t^p] < \infty$, 证明

$$E[\langle M, M \rangle_t^p] = pE[N_t^2].$$

2°) 对

$$N_t \langle M, M \rangle_t^{(1-p)/2}$$

作分部积分, 证明

$$|M_t| \leq 2N_t^* \langle M, M \rangle_t^{(1-p)/2},$$

并由此推出

$$E[(M_t^*)^{2p}] \leq \left(\frac{16}{p}\right)^p E[\langle M, M \rangle_t^p].$$

练习 4.21. 设 $M = (M^1, \dots, M^d)$ 是向量连续局部鞅, 并置

$$A = \sum_{i=1}^d \langle M^i, M^i \rangle.$$

证明: 对任意 $\varepsilon, \eta > 0$ 以及任意两个满足 $S \leq T$ 的有限停时,

$$P\left[\sup_{S \leq t \leq T} |M_t - M_S|^2 > \varepsilon\right] \leq \frac{\eta}{\varepsilon} + P[A_T - A_S \geq \eta].$$

* **练习 4.22.** 对连续局部鞅 M , 设 $(\mathcal{P})$ 是 $\langle M, M \rangle_\infty$ 的一个性质, 并满足:

i) 若 $\langle N, N \rangle_\infty \leq \langle M, M \rangle_\infty$, 且 M 满足 $(\mathcal{P})$, 则 N 也满足 $(\mathcal{P})$;

ii) 若 M 满足 $(\mathcal{P})$, 则 M 是一致可积鞅。

1°) 若 M 满足 $(\mathcal{P})$, 证明

$$\sup \left\{ E \left[\left| \int_0^\infty H_s dM_s \right| \right] : H \text{ 渐进可测且 } |H| \leq 1 \right\} < \infty.$$

提示: 使用 Banach–Steinhaus 定理。

2°) 对一个分割 $\Delta = (t_i)$, 考虑

$$H = \sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}]}$$

证明性质 $(\mathcal{P})$ 蕴含

$$E[\langle M, M \rangle_\infty^{1/2}] < \infty.$$

因此, 在满足上述 i)、ii) 的性质中,

$$E[\langle M, M \rangle_\infty^{1/2}] < \infty$$

是最弱的一个。

提示：证明

$$\sup_{\Delta} E \left[\left(\sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \right)^{1/2} \right] < \infty.$$

练习 4.23。 设 R_t 是从 $x \neq 0$ 出发的 d 维布朗运动的模，其中 $d \geq 3$ 。

1°) 对 $\log R_t$ 应用 Itô 公式，证明对每个 $p > 0$,

$$\sup_{t \geq 2} E \left[\left(\frac{\int_0^t R_s^{-2} ds}{\log t} \right)^p \right] < \infty.$$

提示：可以使用命题 4.4 证明末尾的论证。

2°) 证明当 $t \rightarrow \infty$ 时， $\log R_t / \log t$ 依概率收敛到某个常数 c ，并推出

$$\frac{\int_0^t R_s^{-2} ds}{\log t} \xrightarrow{P} \frac{1}{d-2}.$$

事实上，这个收敛几乎必然成立；见第 X 章练习 3.20。

3°) 现在令 $x = 0$ 。研究当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时

$$\int_{\varepsilon}^1 R_s^{-2} ds$$

的渐近行为。

提示：使用时间反演。

**** 练习 4.24 (再论 H^1 与 BMO 的对偶性)。**

1°) 证明

$$\| \| X \| \|_{H^1} = E[\langle X, X \rangle_{\infty}^{1/2}]$$

在第 II 章练习 1.17 的空间 H^1 上定义了一个范数，并且它与 $\|X\|_{H^1}$ 等价。

2°) (**Fefferman 不等式**) 设 $X \in H^1$ 、 $Y \in \text{BMO}$ 。利用练习 1.40 的结果，证明

$$E \left[\int_0^{\infty} |d\langle X, Y \rangle|_s \right] \leq 2 \| \| X \| \|_{H^1} \|Y\|_{\text{BMO}_2}.$$

提示：写成

$$\int_0^{\infty} |d\langle X, Y \rangle|_s = \int_0^{\infty} \langle X, X \rangle_s^{-1/4} \langle X, X \rangle_s^{1/4} |d\langle X, Y \rangle|_s,$$

再应用 Kunita–Watanabe 不等式。

3°) 证明 H^1 的对偶空间是 BMO，并且 $H^1 \times \text{BMO}$ 上的典范双线性型为

$$(X, Y) \mapsto E[\langle X, Y \rangle_{\infty}].$$

*** 练习 4.25。**

1°) 设 A, B 是两个满足 $A_0 = B_0 = 0$ 的连续适应递增过程。假设存在 $p, D > 0$ ，使对任意

满足 $S \leq T$ 的停时 S, T , 都有

$$E[(A_T - A_S)^p] \leq D \|B_T\|_\infty^p P[S \leq T].$$

证明: 对每个 $\beta > 1$,

$$(A_\infty, B_\infty) \in I(\phi, \beta), \quad \phi(x) = D(\beta - 1)^{-p} x^p.$$

提示: 取

$$T = \inf\{t : B_t = \delta\lambda\}, \quad S_n = \inf\{t : A_t > \lambda(1 - 1/n)\},$$

并证明 $I(\phi, \beta)$ 中不等式的左端不超过

$$P[A_T - A_{T \wedge S_n} \geq (\beta - 1 + 1/n)\lambda].$$

2°) 设 M 是从 0 出发的连续局部鞅。只使用第 1 节的结果, 证明在

$$A = \langle M, M \rangle^{1/2}, \quad B = M^*$$

或交换 A, B 时, 第 1° 问的条件都以 $p = 2$ 成立。推出: 对任意温和函数 F , 存在常数 $c, C > 0$, 使

$$cE\left[F(\langle M, M \rangle_\infty^{1/2})\right] \leq E[F(M_\infty^*)] \leq CE\left[F(\langle M, M \rangle_\infty^{1/2})\right].$$

3°) 由上述不等式给出练习 4.14 第 2° 问的另一种证明。

提示: 函数 $x/(1+x)$ 是递增的温和函数。

* **练习 4.26.** 对非负随机变量 Z , 定义

$$\sigma_Z = \sup_{\lambda > 0} \lambda P[Z \geq \lambda], \quad l_Z = \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P[Z \geq \lambda].$$

若 $(X, Y) \in I(\phi, \beta)$, 证明存在仅依赖于 ϕ, β 的常数 c , 使

$$\sigma_X \leq c\sigma_Y, \quad l_X \leq cl_Y.$$

练习 4.27. 对 $0 < \varepsilon < 1/2$, 把定理 4.10 与定理 4.11 应用于

$$A_t = \sup_{0 \leq r \leq s \leq t} \left(\frac{|B_s - B_r|}{|s - r|^{1/2-\varepsilon}} \right)^{\varepsilon/2}.$$

* **练习 4.28.** 设 A 满足定理 4.10 的假设, B 满足定理 4.11 的假设。证明: 对 $\alpha > 0$, 存在常数 c_F , 使对任意停时 T ,

$$E\left[F\left(\frac{A_T^{\alpha+1}}{B_T^\alpha}\right)\right] \leq c_F E[F(B_T)].$$

* **练习 4.29 (Garsia–Neveu 引理)**。沿用练习 4.19 的情形与记号, 并进一步假设

$$\sup_{x>0} \frac{xf(x)}{F(x)} = p < \infty.$$

1°) 设 U, V 是两个非负随机变量, 并且

$$E[Uf(U)] < \infty, \quad E[Uf(U)] \leq E[Vf(U)].$$

证明

$$E[F(U)] \leq E[F(V)].$$

提示: 若 g 是 f 的反函数 (见第 0 章第 4 节), 则对 $u, v \geq 0$,

$$uf(u) = F(u) + \int_0^{f(u)} g(s) ds, \quad vf(u) \leq F(v) + \int_0^{f(u)} g(s) ds.$$

2°) 证明

$$E[F(A_\infty)] \leq E[F(pX)] \leq p^p E[F(X)].$$

练习 4.30 (控制不等式中常数的改进)。设 C_k 是使

$$E[(X_\infty^*)^k] \leq C_k E[A_\infty^k]$$

对每一对满足定义 4.5 条件的 X, A 都成立的最小常数。

1°) 对 $0 < k < 1$, 证明

$$C_k \leq k^{-k}(1-k)^{-1} \leq \frac{2-k}{1-k}.$$

反向不等式见第 VI 章练习 4.22。

提示: 仿照命题 4.7 的证明, 但在引理 4.6 的不等式中, 用 λx 代替 x , 用 y/λ 代替 y 。

2°) 对 $k, k' \in (0, 1)$, 证明

$$C_{kk'} \leq C_{k'}(C_k)^{k'}.$$

练习 4.31。

1°) 沿用第 II 章练习 3.14 的记号。证明

$$E[H_n(B_{\sigma_a}, \sigma_a)] = 0,$$

其中 H_n 是第 n 个 Hermite 多项式。

2°) 给出 σ_a 各阶矩的一个递推公式, 并与第 II 章练习 3.14 所得的 Laplace 变换比较。

5 可预测过程

除可预测过程的定义及其初等性质外, 本节的概念与结果在后文中只会偶尔用到。因此, 读者也可以暂时跳过本节, 等到需要时再回来阅读。

以下设滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续且完备。我们在乘积空间 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上工作, 并把过程看成定义在这个空间上的函数。回忆: 称一个 σ -域由一族函数生成, 是指它是使这族函数全部可测的最小 σ -域。

命题 5.1. 在 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上, 下列三类过程所生成的 σ -域相同:

- i) 初等过程空间 $\mathcal{E}$;
- ii) 在 $]0, \infty[$ 上左连续的适应过程;
- iii) 连续适应过程。

证明。 把命题中的三个 σ -域分别记作 τ_1, τ_2, τ_3 。显然 $\tau_3 \subset \tau_2$ 。又因为任意左连续过程 X 都是下列初等过程的逐点极限:

$$X_t^n(\omega) = X_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} X_{k/n}(\omega)\mathbf{1}_{]k/n, (k+1)/n]}(t),$$

所以 $\tau_2 \subset \tau_1$ 。

另一方面, 函数 $\mathbf{1}_{]u, v]}$ 是一列连续函数 f^n 的逐点极限, 其中每个 f^n 都有紧支集, 且其支集包含于 $]u, v + 1/n[$ 。若 $H \in \mathcal{F}_u$, 则过程 Hf^n 连续且适应, 故 $\tau_1 \subset \tau_3$ 。因此三个 σ -域相同。

定义 5.2. 命题 5.1 中的唯一 σ -域称为可预测 σ -域, 记作 $\mathcal{P}$; 若要强调相应滤过, 则记作 $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ 。设过程 X 取值于可测空间 $(U, \mathcal{U})$ 。若映射

$$(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$$

从 $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P})$ 到 $(U, \mathcal{U})$ 可测, 则称 X 是可预测过程。

注意, 若 X 可预测, 而把 X_0 换成另一个 $\mathcal{F}_0$ -可测随机变量, 所得过程仍可预测。因此, 可预测过程也可以看成定义在 $]0, \infty[$ 上的过程。容易看出, 可预测过程都是适应过程; 事实上, 它们关于 $(\mathcal{F}_{t-})$ 适应。

可预测过程的重要性来自如下事实: 任意随机积分都与某个可预测过程的随机积分不可区别。具体地, 把 $\mathcal{L}^2(M)$ 中可预测过程的等价类所成的集合记作 $L^2_{\mathcal{P}}(M)$, 则可以证明 Hilbert 空间 $L^2(M)$ 与 $L^2_{\mathcal{P}}(M)$ 同构; 换言之, $\mathcal{L}^2(M)$ 中的每个过程都等价于某个可预测过程。还可以注意到, $\mathcal{E}$ 既是代数又是格, 故单调类定理表明 $\mathcal{E}$ 在 $L^2_{\mathcal{P}}(M)$ 中稠密。因此, 如果一开始就从初等随机积分出发、再按连续性构造随机积分, 那么自然得到的可积过程类正是 $L^2_{\mathcal{P}}(M)$ 。

下面再引入另一个重要的 σ -域。

定义 5.3. 在 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上, 由适应 càdlàg 过程生成的 σ -域称为可选 σ -域, 记作 $\mathcal{O}$; 若要强调相应滤过, 则记作 $\mathcal{O}(\mathcal{F}_t)$ 。关于 $\mathcal{O}$ 可测的过程称为可选过程。

第 I 章第 4 节已经指出: 若 T 是停时, 则过程 $\mathbf{1}_{]0, T]}$, 即

$$(\omega, t) \mapsto \mathbf{1}_{\{0 < t \leq T(\omega)\}},$$

是可预测的。现在还可以看出: T 是停时, 当且仅当 $\mathbf{1}_{]0, T]}$ 是可选过程。

由于连续过程都是 càdlàg 过程, 显然 $\mathcal{O} \supset \mathcal{P}$, 而且这个包含通常是严格的; 不过可参见下文推论 5.7。若用 Prog 表示渐进 σ -域, 则

$$\mathcal{F}_{\infty} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \supset \text{Prog} \supset \mathcal{O} \supset \mathcal{P}.$$

包含关系 $\text{Prog} \supset \mathcal{O}$ 也可能是严格的; 见练习 5.12。

下面给出可预测过程与可选过程的若干性质。

定义 5.4. 若存在一列递增停时 (T_n) , 使得几乎必然地

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$;
 - ii) 在事件 $\{T > 0\}$ 上, 对每个 n 都有 $T_n < T$,
- 则称停时 T 是可预测停时。

下面不加证明地陈述一个称为截面定理的结果。回忆: 停时 T 的图 $[T]$ 是集合

$$[T] = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : T(\omega) = t\}.$$

若 T 可预测, 则容易看出 $[T] \in \mathcal{P}$ 。再用 π 表示从 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 到 Ω 的典范投影。

定理 5.5 (截面定理)。设 A 是可选集 (相应地, 可预测集)。对任意 $\varepsilon > 0$, 存在停时 T (相应地, 可预测停时 T), 使

- i) $[T] \subset A$;
- ii) $P[T < \infty] \geq P(\pi(A)) - \varepsilon$ 。

截面定理可以用来证明下面的投影定理。第 I 章练习 4.18 定义了 σ -域 $\mathcal{F}_{T-}$; 约定 $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0$ 。

定理 5.6 (投影定理)。设 X 是非负或有界的可测过程。存在唯一的可选过程 Y (相应地, 可预测过程 Z ; 唯一性均指相差不可区别), 使对每个停时 T ,

$$E[X_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} | \mathcal{F}_T] = Y_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} \quad \text{a.s.},$$

相应地, 对每个可预测停时 T ,

$$E[X_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} | \mathcal{F}_{T-}] = Z_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} \quad \text{a.s.}$$

过程 Y (相应地, Z) 称为 X 的可选投影 (相应地, 可预测投影)。

证明。 唯一性立即来自截面定理。所有具有可选投影 (相应地, 可预测投影) 的有界过程 X 构成一个向量空间。再设 (X^n) 是一致有界的递增过程序列, $X^n \uparrow X$, 并设 X^n 的两个投影分别为 Y^n, Z^n 。再次使用截面定理可知, 序列 $(Y^n), (Z^n)$ 几乎必然递增; 容易验证

$$\lim_n Y^n, \quad \lim_n Z^n$$

分别是 X 的可选投影与可预测投影。

由单调类定理, 只需对一类在逐点乘法下封闭、且生成 $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 的过程证明结论。可取

$$X_t(\omega) = \mathbf{1}_{[0, u[}(t)H(\omega), \quad 0 \leq u \leq \infty, \quad H \in L^\infty(\mathcal{F}_\infty).$$

令 H_t 是 $E[H | \mathcal{F}_t]$ 的一个 càdlàg 版本, 并约定 $H_{0-} = H_0$ 。可选停止定理 (相应地, 第 II 章练习 3.18 的可预测停止定理) 表明

$$Y_t = \mathbf{1}_{[0, u[}(t)H_t, \quad (\text{相应地, } Z_t = \mathbf{1}_{[0, u[}(t)H_{t-})$$

满足定理中的条件。这就证明了有界情形。对一般的非负过程, 使用 $X \wedge n$, 再令 $n \rightarrow \infty$ 即可。

评注。 定理中的条件也可以等价地写为：对任意停时 T ,

$$E[X_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}] = E[Y_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}],$$

相应地，对任意可预测停时 T ,

$$E[X_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}] = E[Z_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}].$$

推论 5.7。 设 $\mathcal{J}$ 是由过程

$$M_t - M_{t-}$$

生成的 σ -域，其中 M 取遍所有有界 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅。则

$$\mathcal{O} = \mathcal{P} \vee \mathcal{J}.$$

特别地，若所有 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅都连续，则 $\mathcal{O} = \mathcal{P}$ 。

证明。 因为每个可选过程都是它自身的可选投影，所以只需证明每个可选投影都关于 $\mathcal{P} \vee \mathcal{J}$ 可测。对定理 5.6 证明中考虑的过程 $\mathbf{1}_{[0, u[} H$ ，这个结论显然成立；再应用单调类定理即可。

练习 5.8。 证明可预测 σ -域 $\mathcal{P}$ 由下列集合生成：

$$[S, T] = \{(\omega, t) : S(\omega) \leq t \leq T(\omega)\},$$

其中 S 是可预测停时， T 是满足 $T \geq S$ 的任意停时。

练习 5.9。 设 M 是一致可积的 càdlàg 鞅。证明 M 的可预测投影等于 M_- 。

练习 5.10。 证明：对任意可选过程 X ，存在可预测过程 Y ，使得集合

$$\{(\omega, t) : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$$

包含于可数多个停时之图的并集。

提示：只需对有界 càdlàg 过程 X 证明；此时可取 $Y = X_-$ 。对 $\varepsilon > 0$ ，定义

$$\begin{aligned} T_1(\varepsilon) &= \inf\{t > 0 : |X_t - X_{t-}| > \varepsilon\}, \\ T_n(\varepsilon) &= \inf\{t > T_{n-1}(\varepsilon) : |X_t - X_{t-}| > \varepsilon\}, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

再取 $\varepsilon_p \downarrow 0$ ，使用所有 $T_n(\varepsilon_p)$ 的图。

练习 5.11。 称 H_0^2 的闭子空间 S 是稳定的，如果：

- i) 对任意 $M \in S$ 和任意停时 T ，都有 $M^T \in S$ ；
 - ii) 对任意 $\Gamma \in \mathcal{F}_0$ 和任意 $M \in S$ ，都有 $\mathbf{1}_\Gamma M \in S$ 。
- 1°) 若 S 稳定， $\Gamma \in \mathcal{F}_T$ ，证明对任意 $M \in S$ ，

$$\mathbf{1}_\Gamma(M - M^T) \in S.$$

2°) 证明: S 稳定, 当且仅当对任意 $M \in S$ 和任意可预测过程 $H \in L^2(M)$, 鞅 $H \cdot M$ 都属于 S 。

3°) 设 $S(M)$ 是 H_0^2 中包含鞅 M 的最小稳定子空间。证明

$$S(M) = \{H \cdot M : H \in L^2(M)\}.$$

4°) 设 S 稳定, $S^\perp$ 是 H_0^2 中关于 Hilbert 范数的正交子空间。对任意 $M \in S, N \in S^\perp$, 证明

$$\langle M, N \rangle = 0.$$

再证明 $S^\perp$ 也是稳定的。

5°) 设 $M, N \in H_0^2$ 。证明 N 在 $S(M)$ 上的正交投影等于 $H \cdot M$, 其中 H 是 $d\langle M, N \rangle$ 关于 $d\langle M, M \rangle$ 的 Radon–Nikodym 导数的一个版本。

* **练习 5.12。** 沿用第 III 章命题 3.12 的情形, 并对 $t \geq 0$ 定义

$$d_t = t + T_0 \circ \theta_t.$$

1°) 证明映射 $t \mapsto d_t$ 几乎必然右连续。

2°) 令

$$H = \{(\omega, t) : B_t(\omega) \neq 0\}.$$

对每个 ω , 集合 $H(\omega, \cdot)$ 是至多可数个开区间的并。令 $F \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$, 使 $F(\omega, \cdot)$ 恰为这些开区间的左端点集合。证明 F 关于布朗滤过是渐进可测集。

提示: 证明

$$H \setminus F = \{(\omega, t) : d_t(\omega) = t\}.$$

3°) 证明: 对任意停时 T ,

$$P[(\omega, T(\omega)) \in F, T < \infty] = 0.$$

提示: 使用布朗运动的强 Markov 性。

4°) 证明 F 不是可选集, 从而得到一个“渐进可测但不可选”的集合。

提示: 计算 $\mathbf{1}_F$ 的可选投影。

练习 5.13。 设 $(\mathcal{H}_t) \subset (\mathcal{F}_t)$ 是两个滤过。若 M 是 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅, 证明 M 关于 $(\mathcal{H}_t)$ 的可选投影是 $(\mathcal{H}_t)$ -鞅。

练习 5.14。 设 X 是可测过程，并且对每个 t ,

$$E \left[\int_0^t |X_s| \, ds \right] < \infty.$$

置

$$Y_t = \int_0^t X_s \, ds.$$

相对于某个滤过 $(\mathcal{F}_t)$ ，用 $\hat{X}, \hat{Y}$ 分别表示 X, Y 的可选投影。^a 证明

$$\hat{Y}_t - \int_0^t \hat{X}_s \, ds$$

是 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅。

^a**校订注：**原书此处误写为“ $\hat{H}$ 是 H 的可选投影”，但题中没有定义 H ；紧接着的结论明确使用 $\hat{X}$ 与 $\hat{Y}$ ，故按题意更正。

练习 5.15 (滤波)。 设 $(\mathcal{F}_t)$ 是一个滤过， B 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动， h 是有界可选过程。令

$$Y_t = \int_0^t h_s \, ds + B_t.$$

若 $\hat{h}$ 是 h 关于 $(\mathcal{F}_t^Y)$ 的可选投影，证明

$$N_t = Y_t - \int_0^t \hat{h}_s \, ds$$

是 $(\mathcal{F}_t^Y)$ -布朗运动。在滤波理论中，过程 N 称为新息过程。

提示：先证明对每个 t ， $E[N_t^2] < \infty$ ；再对有界停时 T 计算 $E[N_T]$ 。

练习 5.16。 设 X, X' 是定义在两个带滤过概率空间上的连续半鞅， H, H' 分别是两个空间上的局部有界可预测过程，并且

$$(H, X) \stackrel{(d)}{=} (H', X').$$

证明

$$(H \cdot X, H, X) \stackrel{(d)}{=} (H' \cdot X', H', X').$$

提示：先处理 H, H' 为初等过程的情形。

***# 练习 5.17 (随机积分的 Fubini 定理)。**

1°) 设 $(A, \mathcal{A})$ 是可测空间， $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间， $\{X_n(a, \cdot)\}_{n \geq 1}$ 是一列 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{F}$ -可测随机变量，并且对每个 a ， $X_n(a, \cdot)$ 依概率收敛。证明存在 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{F}$ -可测随机变量 X ，使对每个 a ， $X(a, \cdot)$ 都是 $X_n(a, \cdot)$ 的依概率极限。

提示：递归定义整数值函数 $n_k(a)$ ：令 $n_0(a) = 1$ ，并令

$$n_k(a) = \inf \left\{ m > n_{k-1}(a) : \sup_{p, q \geq m} P \left[|X_p(a, \cdot) - X_q(a, \cdot)| > 2^{-k} \right] \leq 2^{-k} \right\}.$$

证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_{n_k(a)}(a, \cdot)$$

几乎必然存在, 并给出所需的 $X(a, \cdot)$ 。

2°) 在第 2 节的框架下, 设 $H(a, s, \omega)$ 是一致有界的 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{P}$ -可测过程, X 是连续半鞅。证明存在 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{P}$ -可测过程 $K(a, t, \omega)$, 使对每个 a , 过程 $K(a, \cdot, \cdot)$ 与

$$\int_0^\cdot H(a, s, \cdot) dX_s$$

不可区别。此外, 若 ν 是 $(A, \mathcal{A})$ 上的有限测度, 则几乎必然地, 对每个 t ,

$$\int_A K(a, t, \cdot) \nu(da) = \int_0^t \left(\int_A H(a, s, \cdot) \nu(da) \right) dX_s.$$

提示: 当

$$H(a, s, \omega) = h(a)g(s, \omega)$$

且 h, g 适当可测时, 这些性质容易验证; 再应用单调类定理。

练习 5.18。

1°) 设 $M \in H^2$, K 是可测但未必适应的过程, 并且

$$E \left[\int_0^\infty K_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] < \infty.$$

证明存在唯一的 $Z \in H^2$, 使对任意 $N \in H^2$,

$$E[Z_\infty N_\infty] = E \left[\int_0^\infty K_s d\langle M, N \rangle_s \right].$$

2°) 设 $\tilde{K}$ 是 K 在 Hilbert 空间意义下投影到 $L^2_{\mathcal{P}}(M)$ 所得的过程。证明

$$Z = \tilde{K} \cdot M.$$

练习 5.19。设 K 是连续适应过程, X 是连续半鞅。

1°) 证明

$$P\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 K_s (X_{s+\varepsilon} - X_s) ds = \int_0^1 K_s dX_s.$$

提示: 使用随机积分的 Fubini 定理。

2°) 在相同假设下, 证明

$$P\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 K_s (X_{s+\varepsilon} - X_s)^2 ds = \int_0^1 K_s d\langle X, X \rangle_s.$$

注释与评述

第 1 节。 局部鞅的概念见于 Itô–Watanabe [1], 半鞅的概念则见于 Doléans-Dade–Meyer [1]。关于详细研究, 可参阅 Dellacherie–Meyer [1] 第 2 卷以及 Métivier [1]; 本书的一些证明取自前者。

定理 1.3 的证明取自 Kunita [4]。二次变差过程的存在性通常借助 Meyer 分解定理来证明，而本书希望完全避开这一工具。命题 1.13 归功于 Gettoor–Sharpe [1]。还应提到 Stricker [1] 的一个重要结果：若 X 是 $(\mathcal{F}_t)$ -半鞅，则在它自身的滤过 $(\mathcal{F}_t^X)$ 下仍是半鞅；本书不证明这一结果。

练习 1.33 取自 Yor [2]，练习 1.41 取自 Emery [1]，练习 1.42 取自 Sharpe [1]。练习 1.48 归功于 Maisonneuve [3]，练习 1.49 取自 Dellacherie–Meyer [1] 第 II 卷。练习 1.38 提示的方法由 F. Delbaen 通过私人交流告知作者。

第 2 节。 随机积分有着很长的历史，这里不打算加以概述。对于关于布朗运动、被积函数为确定函数的积分，这一理论至少可以追溯到 Paley–Wiener–Zygmund [1]。本书定义随机积分的方法来自 Kunita–Watanabe [1]；在布朗运动的情形下，它最初源于 Itô [1]。关于以一般（未必连续的）半鞅为积分器的随机积分理论，仍可参阅 Dellacherie–Meyer [1] 第 2 卷和 Métivier [1]。

练习 2.17 归功于 Isaacson [1] 与 Yoeurp [2]，练习 2.18 取自 Yor [2]。练习 2.19 取自 Donati–Martin–Yor [2]；这类同分布恒等式近来还见于 Chan 等 [1] 以及 Dean–Jansons [1]。重要的练习 2.21 取自 Meyer 的一门课程。

第 3 节。 一般框架下的 Itô 公式见于 Kunita–Watanabe [1]，本书的证明取自 Dellacherie–Meyer [1] 第 II 卷。练习 3.12 只是 Itô 公式众多推广中的一个；可参阅 Kunita [5], [6]。练习 3.13 的证明归功于 Föllmer [2]。

半鞅的随机指数由 Doléans–Dade [2] 研究，并在许多场合都很重要，尤其与第 VIII 章的 Girsanov 定理有关。读者可参阅 Kazamaki 与 Sekiguchi 的论文（本书若干练习取自其中），以及 Kazamaki 的讲义 [4]。

这里给出的 P. Lévy 刻画定理的证明来自 Kunita–Watanabe [1]；练习 3.29 中的推广归功于 Ruiz de Chavez [1]。这个结果在第 V 章中居于核心地位；它的简洁性在一定程度上解释了为什么研究布朗运动的鞅方法如此成功。此外，它已经蕴含这样一种思想：一个过程的分布可以由一组鞅性质刻画；第 VII 章将作说明。这一思想后来导向 Stroock 与 Varadhan 强有力的鞅问题方法（见第 VII 章）。

练习 3.17 取自 Robbins–Siegmund [1]，练习 3.19 取自 Donati–Yor [1]，练习 3.26 取自 Calais–Génin [1]。练习 3.30 来自 Carlen–Krée [1]；他们还得到了多重随机积分的 BDG 型不等式。

第 4 节。 本书对 BDG 不等式的证明，把 Gettoor–Sharpe [1] 的方法与 Lenglart [2] 的约化步骤结合起来；另见 Lenglart 等 [1]。使用“good- λ 不等式”是 Burkholder [2] 的原始方法。定理 4.10 与定理 4.11 中采用的方法归功于 Bass [2]（另见 Davis [5]）；截至本书写作时，它是最有效的方法，并且适用于当时已知的所有 BDG 型不等式。

关于练习 4.24 中 Fefferman 不等式证明的更多细节，例如可参阅 Durrett [2] 第 7.2 节，或 Dellacherie–Meyer [1] 第 VII 章。Fefferman 不等式还可以推广到 Y 未必属于 BMO 的鞅；例如见 Yor [26] 与 Chou [1]。

练习 4.30 改进了命题 4.7 中得到的常数 $(2-k)/(1-k)$ ，但下面这个自然问题仍未解决。

问题 1。 对 $k \in (0, 1)$ ，求由控制关系推出的不等式

$$E[(X_\infty^*)^k] \leq C_k E[A_\infty^k]$$

中的最佳常数 C_k 。

第 5 节。 本节只给出了后文所需的可预测过程知识。完整论述可参阅 Dellacherie–Meyer [1]。

关于定义 5.2 后讨论的各类随机被积过程，读者还可在 Chung–Williams [1] 第 3.3 节中找到若干重要补充。

第 V 章 鞅的表示

本章重新研究布朗运动，并更一般地研究连续鞅。我们将把第 IV 章的随机积分理论与下面引入的时间变换技巧结合起来。

1 连续鞅作为时间变换后的布朗运动

改变一个过程沿其路径运行的速度，是一个很自然的想法；这正是第 0 章第 4 节讨论过的时间变换方法。现在把它移到随机过程的框架中。

设 $(\mathcal{F}_t)$ 是右连续滤过。在本节的第一部分，考虑一个递增、右连续、适应过程 A ，并令

$$C_s = \inf\{t \geq 0 : A_t > s\},$$

其中照例约定 $\inf \emptyset = +\infty$ 。因为 C_s 随 s 递增，左极限

$$C_{s-} = \lim_{u \uparrow s} C_u$$

存在，并且

$$C_{s-} = \inf\{t \geq 0 : A_t \geq s\}.$$

约定 $C_{0-} = 0$ 。

命题 1.1。 族 $(C_s)_{s \geq 0}$ 是递增、右连续的停时族。此外，对每个 t ，随机变量 A_t 是关于滤过 $(\mathcal{F}_{C_s})_{s \geq 0}$ 的停时。

证明。 由第 I 章命题 4.6 的论证，每个 C_s 都是停时。映射 $s \mapsto C_s$ 的右连续性已在第 0 章引理 4.7 中证明；并且由第 I 章练习 4.17，滤过 $(\mathcal{F}_{C_s})$ 右连续。最后，第 0 章引理 4.7 还给出

$$A_t = \inf\{s \geq 0 : C_s > t\},$$

这就证明 A_t 是关于 $(\mathcal{F}_{C_s})$ 的停时。

第 0 章已经证明 $A_{C_t} \geq t$ ，且等号成立当且仅当 t 是 C 的增长点，即对每个 $\varepsilon > 0$ ，都有 $C_{t+\varepsilon} - C_t > 0$ 。若 A 严格递增，则 C 连续；若 A 连续且严格递增，则 C 也连续且严格递增，并且

$$A_{C_t} = C_{A_t} = t.$$

思考这一情形时，读者可参看第 0 章第 4 节的图 1： A 的跳跃对应于 C 的平台区间，反之亦然。事实上， A 与 C 扮演完全对称的角色。

定义 1.2。 称停时族 $C = (C_s)_{s \geq 0}$ 为一个时间变换，如果映射 $s \mapsto C_s$ 几乎必然递增且右连续。

因此，命题 1.1 中定义的 C 是时间变换。反过来，给定时间变换 C ，令

$$A_t = \inf\{s \geq 0 : C_s > t\},$$

便得到一个递增、右连续过程。若

$$C_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} C_s < \infty,$$

则 A 可能从某个有限时刻起恒为 $+\infty$ ；除此之外，时间变换并不比右连续递增适应过程的广义逆更一般。

以下固定一个时间变换 C ，只在需要时才提到相应的 A 。记

$$\hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{C_t}.$$

若 X 是 $(\mathcal{F}_t)$ -渐进可测过程，则

$$\hat{X}_t = X_{C_t}$$

是 $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ -适应过程，称为 X 的时间变换过程。

再次强调：若 A 连续、严格递增且 $A_\infty = \infty$ ，则 C 连续、严格递增、处处有限，并且 $C_\infty = \infty$ 。此时 A, C 的角色完全对称，而且对任意 $(\mathcal{F}_t)$ -渐进可测过程 X ，都有

$$\hat{\hat{X}}_A = X.$$

若 $A_\infty < \infty$ ，同一结论仍成立，但 $\hat{X}$ 只定义在 $t < A_\infty$ 上。最后，取 $C_t = t \wedge T$ ，其中 T 是停时，便可把停止过程看成时间变换过程的一个特例。

半鞅类的一个重要性质，是它在时间变换下保持不变。本书只处理连续半鞅，所以只需给出若干部分结果。首先需要下面的定义。

定义 1.3。 设 C 是时间变换。若过程 X 在每个区间 $[C_{t-}, C_t]$ 上都是常值，则称 X 是 C -连续的。

若 X 递增且右连续，则 $\hat{X}$ 也如此。因此，若 X 右连续且具有有限变差， $\hat{X}$ 也具有这些性质。关于 X 与 $\hat{X}$ 的 Stieltjes 积分由下面的换元公式联系起来。

命题 1.4。 若 H 是 $(\mathcal{F}_t)$ -渐进可测过程，则 $\hat{H}$ 是 $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ -渐进可测过程。若 X 还是 C -连续的有限变差过程，则

$$\hat{H} \cdot \hat{X} = \widehat{H \cdot X};$$

换言之，

$$\int_{C_0}^{C_t} H_s dX_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\{C_u < \infty\}} H_{C_u} dX_{C_u} = \int_0^{t \wedge A_\infty} H_{C_u} dX_{C_u}.$$

证明。 第一个断言容易验证。第二个断言是第 0 章命题 4.10 的一个轻微变形。

在许多情形下， $C_0 = 0$ ，且对每个 t ， $C_t < \infty$ ；此时上式简化为

$$\int_0^{C_t} H_s dX_s = \int_0^t H_{C_u} dX_{C_u}.$$

现在转向局部鞅。第一个困难是：局部鞅在时间变换后仍是半鞅，却未必仍是局部鞅。例如，若 X 是布朗运动， $A_t = S_t = \sup_{s \leq t} X_s$ ，则 $\hat{X}_t = t$ 。第二个困难是 C 可能有跳跃，所以即使 X 连续， $\hat{X}$ 也可能不连续。因此，在下一个命题中仍需假设 X 是 C -连续的。

命题 1.5. 设时间变换 C 几乎必然处处有限, X 是连续 $(\mathcal{F}_t)$ -局部鞅。

i) 若 X 是 C -连续的, 则 $\hat{X}$ 是连续 $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ -局部鞅, 并且

$$\langle \hat{X}, \hat{X} \rangle = \widehat{\langle X, X \rangle}.$$

ii) 再设 H 是 $(\mathcal{F}_t)$ -渐进可测过程, 并且对每个 t ,

$$\int_0^t H_s^2 d\langle X, X \rangle_s < \infty \quad \text{a.s.}$$

则对每个 t ,

$$\int_0^t \hat{H}_s^2 d\langle \hat{X}, \hat{X} \rangle_s < \infty \quad \text{a.s.},$$

而且

$$\hat{H} \cdot \hat{X} = \widehat{H \cdot X}.$$

证明. i) 由于 X 是 C -连续的, $\hat{X}$ 连续。设 T 是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时, 并且 X^T 有界。令

$$\hat{T} = \inf\{t \geq 0 : C_t \geq T\}.$$

因为

$$\mathbf{1}_{[\hat{T}, \infty[} = \widehat{\mathbf{1}_{[T, \infty[}}$$

是 $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ -适应过程, 所以 $\hat{T}$ 是 $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ -停时。显然 $\hat{X}^{\hat{T}}$ 有界。又有

$$\hat{X}_t^{\hat{T}} = \hat{X}_{\hat{T} \wedge t} = X_{C_{\hat{T} \wedge t}}.$$

由于 X 是 C -连续的, X 在 $[T, C_{\hat{T}}]$ 上为常值, 从而

$$X_{C_{\hat{T} \wedge t}} = X_{C_t}^T.$$

由可选停止定理, $\hat{X}^{\hat{T}}$ 是 $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ -鞅。若 $T_n \uparrow \infty$, 则相应的 $\hat{T}_n \uparrow \infty$, 故 $\hat{X}$ 是连续局部鞅。由第 IV 章命题 1.13, 过程 $\langle X, X \rangle$ 也 C -连续。因此, 刚刚证明的结果表明

$$\hat{X}^2 - \widehat{\langle X, X \rangle}$$

是连续局部鞅, 故

$$\langle \hat{X}, \hat{X} \rangle = \widehat{\langle X, X \rangle}.$$

ii) 第一部分直接来自命题 1.4。为证明第二部分, 只需证明局部鞅

$$\widehat{H \cdot X} - \hat{H} \cdot \hat{X}$$

的递增过程恒为零; 这由第 i) 项与命题 1.4 立即得到。

因此, 适当地进行时间变换后, 布朗运动仍是局部鞅。下面的逆命题是本节的主要结果。

定理 1.6 (Dambis–Dubins–Schwarz 定理). 设 M 是满足 $M_0 = 0$ 的连续 $(\mathcal{F}_t, P)$ -局部鞅, 并且

$$\langle M, M \rangle_\infty = \infty.$$

令

$$T_t = \inf\{s \geq 0 : \langle M, M \rangle_s > t\}.$$

则

$$B_t = M_{T_t}$$

是关于滤过 $(\mathcal{F}_{T_t})$ 的布朗运动, 并且

$$M_t = B_{\langle M, M \rangle_t}.$$

过程 B 称为 M 的 *Dambis–Dubins–Schwarz* 布朗运动, 简称 M 的 *DDS* 布朗运动。

证明。 族 $T = (T_t)$ 是时间变换; 由 $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$, 它几乎必然处处有限。又由第 IV 章命题 1.13, 局部鞅 M 显然是 T -连续的。因此, 由命题 1.5, B 是连续 $(\mathcal{F}_{T_t})$ -局部鞅, 并且

$$\langle B, B \rangle_t = \langle M, M \rangle_{T_t} = t.$$

由 P. Lévy 刻画定理, B 是 $(\mathcal{F}_{T_t})$ -布朗运动。

为证明 $B_{\langle M, M \rangle_t} = M_t$, 注意

$$B_{\langle M, M \rangle_t} = M_{T_{\langle M, M \rangle_t}}.$$

尽管 $T_{\langle M, M \rangle_t}$ 可能大于 t , 但 M 在 $\langle M, M \rangle$ 的平台区间上为常值, 所以始终有

$$M_{T_{\langle M, M \rangle_t}} = M_t.$$

在上一定理中, 假设 $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ 特别保证底层概率空间足够丰富, 能够承载一个布朗运动。也可以通过扩充概率空间达到这一点。

称带滤过概率空间 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P})$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ 的一个扩充, 如果存在满射 $\pi: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$, 使对每个 t ,

$$\pi^{-1}(\mathcal{F}_t) \subset \tilde{\mathcal{F}}_t, \quad \tilde{P} \circ \pi^{-1} = P.$$

定义在 Ω 上的过程 X 可以自然看作定义在 $\tilde{\Omega}$ 上: 若 $\pi(\tilde{\omega}) = \omega$, 就令 $X(\tilde{\omega}) = X(\omega)$ 。

仍设 M 是从 0 出发的连续局部鞅。若 $\langle M, M \rangle_\infty < \infty$, 回忆第 IV 章命题 1.26:

$$M_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$$

存在。于是可定义

$$W_t = \begin{cases} M_{T_t}, & t < \langle M, M \rangle_\infty, \\ M_\infty, & t \geq \langle M, M \rangle_\infty. \end{cases}$$

由第 IV 章命题 1.26, 这个过程连续, 并有如下结果。

定理 1.7。 存在 $(\Omega, \mathcal{F}_{T_t}, P)$ 的一个扩充 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P})$, 以及该扩充空间上一个与 M 独立的布朗运动 $\tilde{\beta}$, 使得

$$B_t = \begin{cases} M_{T_t}, & t < \langle M, M \rangle_\infty, \\ M_\infty + \tilde{\beta}_{t - \langle M, M \rangle_\infty}, & t \geq \langle M, M \rangle_\infty \end{cases}$$

是标准一维布朗运动。过程 W 是在时刻 $\langle M, M \rangle_\infty$ 停止的 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -布朗运动。

证明。 取一个承载布朗运动 β 的概率空间 $(\Omega', \mathcal{F}', P')$, 并令

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times \Omega', \quad \tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{T_t} \otimes \mathcal{F}'_t, \quad \tilde{P} = P \otimes P',$$

以及

$$\tilde{\beta}_t(\omega, \omega') = \beta_t(\omega').$$

于是 $\tilde{\beta}$ 与 M 独立, 而 B 也可写成

$$B_t = M_{T_t} + \int_0^t \mathbf{1}_{\{s > \langle M, M \rangle_\infty\}} d\tilde{\beta}_s,$$

其中在 $T_t = \infty$ 时, 把 M_{T_t} 理解为 M_∞ 。

在命题 1.5 的一般情形中, 必须假设 C 有限, 否则 M_{C_t} 没有定义。这里 M_{T_t} 即使在 $T_t = \infty$ 时也已定义, 所以命题 1.5 的论证仍然适用, 并表明 W 是局部鞅; 另见练习 1.26。

作为两个 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -局部鞅之和, B 是局部鞅。它的递增过程等于

$$\begin{aligned} \langle M_T, M_T \rangle_t + \int_0^t \mathbf{1}_{\{s > \langle M, M \rangle_\infty\}} ds \\ + 2 \int_0^t \mathbf{1}_{\{s > \langle M, M \rangle_\infty\}} d\langle M_T, \tilde{\beta} \rangle_s. \end{aligned}$$

由于 M_T 与 $\tilde{\beta}$ 独立, 最后一项恒为零。由定理 1.6 证明中的计算,

$$\langle M_T, M_T \rangle_t = t \wedge \langle M, M \rangle_\infty.$$

因此 $\langle B, B \rangle_t = t$ 。P. Lévy 刻画定理说明 B 是标准布朗运动, 证明完毕。

评注。 第 VI 章引理 3.12 将给出一个有趣的例子。

现在可以补全第 IV 章命题 1.26。

命题 1.8。 设 M 是连续局部鞅。则事件

$$\{\langle M, M \rangle_\infty < \infty\} \quad \text{与} \quad \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ 存在有限值} \right\}$$

几乎必然相同。此外, 在事件 $\{\langle M, M \rangle_\infty = \infty\}$ 上, 几乎必然有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} M_t = +\infty, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} M_t = -\infty.$$

证明。 可把上一结果应用于 $M - M_0$ 。因为 B 是布朗运动,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = +\infty \quad \text{a.s.}$$

在事件 $\{\langle M, M \rangle_\infty = \infty\}$ 上, 因而有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} M_{T_t} = +\infty \quad \text{a.s.}$$

而在这个事件上, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $T_t \rightarrow \infty$, 所以

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} M_t \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} M_{T_t} = +\infty.$$

对下极限作同样论证即可。结合第 IV 章命题 1.26, 便得到第一个断言。

评注。

1°) 上面的证明先只写出

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} M_t \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} M_{T_t},$$

因为从先验上看, M_T 的路径可能只是 M 路径的一部分。二者事实上相等; 这留给读者证明。

2°) 第 VI 章练习 1.27 将给出另一个几乎必然与命题中事件相同的事件。

3°) 命题表明, 对连续局部鞅 M , 下列三个性质等价:

$$\text{i) } \sup_t M_t = \infty \text{ a.s.,} \quad \text{ii) } \inf_t M_t = -\infty \text{ a.s.,} \quad \text{iii) } \langle M, M \rangle_\infty = \infty \text{ a.s.}$$

现在给出 Dambis–Dubins–Schwarz 定理的多维对应结果: 若 $\langle M, N \rangle = 0$, 则与 M, N 相联系的布朗运动相互独立。

定理 1.9 (Knight 定理)。 设

$$M = (M^1, \dots, M^d)$$

是从 0 出发的连续向量局部鞅, 并且对每个 k ,

$$\langle M^k, M^k \rangle_\infty = \infty,$$

而对 $k \neq l$,

$$\langle M^k, M^l \rangle = 0.$$

令

$$T_t^k = \inf\{s \geq 0 : \langle M^k, M^k \rangle_s > t\}, \quad B_t^k = M_{T_t^k}^k.$$

则

$$B = (B^1, \dots, B^d)$$

是 d 维布朗运动。

与一维情形一样, 可以通过扩充概率空间去掉 $\langle M^k, M^k \rangle_\infty = \infty$ 的假设。下面直接证明这个一般版本。

定理 1.10。 若某些 k 满足 $\langle M^k, M^k \rangle_\infty < \infty$, 则可在概率空间的一个扩充上取一个与 M 独立的 d 维布朗运动 $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^d)$, 使由

$$B_t^k = \begin{cases} M_{T_t^k}^k, & t < \langle M^k, M^k \rangle_\infty, \\ M_\infty^k + \beta_{t - \langle M^k, M^k \rangle_\infty}^k, & t \geq \langle M^k, M^k \rangle_\infty \end{cases}$$

定义的 $B = (B^1, \dots, B^d)$ 是 d 维布朗运动。

证明。 由前面的结果, 每个 B^k 分别都是一维布朗运动, 所以只需证明它们相互独立。为此, 使用第 IV 章定理 3.6 的记号; 对每个具有紧支集的函数族

$$f = (f_1, \dots, f_d),$$

我们证明

$$E[\mathcal{E}_\infty^{if}] = 1.$$

事实上, 若取

$$f_k = \sum_{j=1}^p \lambda_k^j \mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j]},$$

便可得到所有随机向量

$$(B_{t_j}^k - B_{t_{j-1}}^k), \quad 1 \leq j \leq p, \quad 1 \leq k \leq d,$$

的正确特征函数, 从而得到正确的联合分布。

在证明中简记

$$A^k = \langle M^k, M^k \rangle.$$

由命题 1.5,

$$M_{T_t^k}^k - M_{T_s^k}^k = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[s, t]}(A_u^k) dM_u^k.$$

通常的单调类论证于是给出

$$\int_0^{A_\infty^k} f_k(s) dM_{T_s^k}^k = \int_0^\infty f_k(A_u^k) dM_u^k.$$

因此

$$\int_0^\infty f_k(s) dB_s^k = \int_0^\infty f_k(A_u^k) dM_u^k + \int_0^\infty f_k(s + A_\infty^k) d\beta_s^k.$$

右端最后一个随机积分有意义, 因为 A_∞^k 与 β^k 独立。比较二次变差可得

$$\int_0^\infty f_k^2(s) ds = \int_0^\infty f_k^2(A_u^k) dA_u^k + \int_0^\infty f_k^2(s + A_\infty^k) ds.$$

过程

$$X_t = \sum_k \int_0^t f_k(A_u^k) dM_u^k$$

是局部鞅; 由 $k \neq l$ 时 $\langle M^k, M^l \rangle = 0$,

$$\langle X, X \rangle_t = \sum_k \int_0^t f_k^2(A_u^k) dA_u^k.$$

由 Itô 公式,

$$I_t = \exp \left\{ iX_t + \frac{1}{2} \langle X, X \rangle_t \right\}$$

是局部鞅。它被

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_k \|f_k\|_2^2 \right\}$$

所界, 因而实际上是鞅。同理,

$$J_t = \exp \left\{ \sum_k \left(i \int_0^t f_k(s + A_\infty^k) d\beta_s^k + \frac{1}{2} \int_0^t f_k^2(s + A_\infty^k) ds \right) \right\}$$

也是有界鞅，并且

$$E[\mathcal{E}_\infty^{if}] = E[I_\infty J_\infty].$$

在给定 M 的条件下， J_∞ 的分布为

$$\exp \left\{ iZ + \frac{1}{2} \text{Var}(Z) \right\},$$

其中 Z 是中心高斯随机变量。因此

$$E[J_\infty | M] = 1,$$

从而

$$E[\mathcal{E}_\infty^{if}] = E[I_\infty] = E[I_0] = 1.$$

证明完毕。

评注。

- 1°) DDS 定理既比 Knight 定理简单，又略为精确。Knight 定理中各分量使用不同的时间变换，使论证更复杂；尤其不存在一个与 DDS 定理中的 $(\mathcal{F}_{T_t})$ 对应的共同滤过，使全部时间变换后的分量同时成为布朗运动。
- 2°) 练习 3.18 将给出 Knight 定理的另一种证明。它依赖第 3 节给出的布朗鞅表示。

DDS 定理与 Knight 定理的一个重要推论是：在一定程度上，连续局部鞅在时间变换下不变的性质，不过是布朗运动的性质。事实上，连续局部鞅的许多结果都可通过相应的布朗运动来证明。例如，第 IV 章第 4 节的 BDG 不等式就可以这样得到。若

$$M_t = B_{\langle M, M \rangle_t},$$

则

$$E[(M_t^*)^p] = E[(B_{\langle M, M \rangle_t}^*)^p].$$

又因为 $\langle M, M \rangle_t$ 是关于滤过 $(\mathcal{F}_{T_s})$ 的停时，而 B 关于这个滤过是布朗运动，所以只需证明：若 B 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动， T 是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时，则

$$c_p E[T^{p/2}] \leq E[(B_T^*)^p] \leq C_p E[T^{p/2}].$$

练习 1.23 将提示这一证明。

最后注意，在定理 1.6 中，布朗运动 B 关于 $\mathcal{F}_\infty^M$ 可测。回忆第 III 章第 2 节： $(\mathcal{F}_t^X)$ 是使 X 适应的最小右连续完备滤过。反过来， M 关于 $\mathcal{F}_\infty^B$ 可测并不总成立；见练习 4.16。下面给出它成立的一个重要情形；另见练习 1.19。

命题 1.11。 设 M 是满足 $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ 的连续局部鞅，并且

$$M_t = x + \int_0^t \sigma(M_s) d\beta_s,$$

其中 β 是布朗运动，函数 σ 处处不为零。若 B 是 M 的 DDS 布朗运动，则 M 关于 $\mathcal{F}_\infty^B$ 可测。

证明。 因为 σ 处处不为零, $\langle M, M \rangle$ 严格递增, 而且

$$\langle M, M \rangle_{T_t} = \int_0^{T_t} \sigma^2(M_s) ds = t.$$

对时间变换 T_t 使用命题 1.4, 得到

$$\int_0^t \sigma^2(B_s) dT_s = t,$$

所以

$$T_t = \int_0^t \sigma^{-2}(B_s) ds.$$

因此 T_t 关于 $\mathcal{F}_\infty^B$ 可测; 作为 (T_t) 的逆, $\langle M, M \rangle_t$ 也关于 $\mathcal{F}_\infty^B$ 可测。由

$$M = B_{\langle M, M \rangle},$$

M 也关于 $\mathcal{F}_\infty^B$ 可测。

评注。 需要强调: 命题并没有证明 M 关于 $(\mathcal{F}_t^B)$ 适应。事实上, M 关于

$$(\mathcal{F}_{\langle M, M \rangle_t}^B)$$

适应; 见练习 4.16。

练习 1.12。 设 C 是时间变换, D 是关于滤过

$$(\hat{\mathcal{F}}_t) = (\mathcal{F}_{C_t})$$

的时间变换。证明映射

$$s \mapsto C_{D_s}$$

是时间变换, 并且

$$\hat{\mathcal{F}}_{D_t} = \mathcal{F}_{C_{D_t}}.$$

练习 1.13。

1°) 设 A 是右连续适应递增过程, X, Y 是两个非负可测过程, 并且对任意 $(\mathcal{F}_t)$ -停时 T ,

$$E[X_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}] = E[Y_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}].$$

特别地, 这在 Y 是 X 的 $(\mathcal{F}_t)$ -可选投影时成立。证明对每个 $t \leq +\infty$,

$$E \left[\int_0^t X_s dA_s \right] = E \left[\int_0^t Y_s dA_s \right].$$

提示: 对与 A 相联系的时间变换, 使用与命题 1.4 相同的方法。

2°) 若 A 连续, 证明: 只要第 1° 问中的假设对所有可预测停时成立, 结论仍然有效。特别地, 当 Y 是 X 的可预测投影时, 结论成立。

提示: 用 C_{t-} 代替 C_t , 并证明 C_{t-} 是可预测停时。

事实上, 只要 A 可预测, 这个结论就成立。

3°) 设 M 是有界、右连续的非负鞅, A 是右连续适应递增过程, $A_0 = 0$, 并且对每个 t , $E[A_t] < \infty$. 证明对每个 $t > 0$,

$$E[M_t A_t] = E\left[\int_0^t M_s dA_s\right].$$

本问与第 2° 问相互独立。

练习 1.14 (高斯鞅; 第 IV 章练习 1.35 的逆命题)。

1°) 设 M 是从 0 出发的连续局部鞅。若 $\langle M, M \rangle$ 是确定性过程, 证明 M 是高斯鞅, 并且具有独立增量。

提示: 可以应用定理 1.6, 也可以在这一情形下重新写出 P. Lévy 刻画定理的证明。

2°) 设 B 是标准一维布朗运动,

$$\beta = H \cdot B,$$

其中 H 是 $(\mathcal{F}_t^B)$ -可预测过程, 并满足 $|H| = 1$. 证明二维过程 (B, β) 是高斯过程, 当且仅当 H 是确定性的。

练习 1.15. 设 M 是连续局部鞅。证明在事件 $\{\langle M, M \rangle_\infty = \infty\}$ 上, 几乎必然有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t}{(2\langle M, M \rangle_t \log_2 \langle M, M \rangle_t)^{1/2}} = 1.$$

练习 1.16 (局部鞅的大数定律)。 设 $A \in \mathcal{A}^+$, 并且 $A_0 > 0$ 几乎必然成立; 设 M 是从 0 出发的连续局部鞅。令

$$Z_t = \int_0^t A_s^{-1} dM_s.$$

1°) 证明

$$M_t = \int_0^t (Z_t - Z_s) dA_s + Z_t A_0.$$

2°) 假设 $\lim_{t \rightarrow \infty} Z_t$ 几乎必然存在。证明在 $\{A_\infty = \infty\}$ 上,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t}{A_t} = 0.$$

3°) 设 $f: [0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ 是递增函数, 并且

$$\int_0^\infty f(t)^{-2} dt < \infty.$$

证明在 $\{\langle M, M \rangle_\infty = \infty\}$ 上, 几乎必然有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t}{f(\langle M, M \rangle_t)} = 0.$$

特别地, 在同一事件上,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t}{\langle M, M \rangle_t} = 0 \quad \text{a.s.}$$

4°) 直接由定理 1.6 证明第 3° 问。

练习 1.17。

1°) 若 M 是连续局部鞅, 用 $\beta(M)$ 表示 M 的 DDS 布朗运动。设 C 是满足 $C_\infty = \infty$ 的有限时间变换, 并且 M 是 C -连续的。证明

$$\beta(\widehat{M}) = \beta(M).$$

2°) 若 $h > 0$, 证明

$$\beta\left(\frac{1}{h}M\right) = \beta(M)^{(h)},$$

其中

$$X_t^{(h)} = \frac{1}{h}X_{h^2t}.$$

由此推出

$$\beta(M^{(h)}) = \beta(M)^{(h)}.$$

* 练习 1.18。把定理 1.6 与定理 1.9 推广到定义在随机区间 $[0, T[$ 上的连续局部鞅; 参见第 IV 章练习 1.48 与练习 3.28。

练习 1.19。在定理 1.6 的情形下, 证明 $\mathcal{F}_\infty^M$ 等于

$$\sigma((B_s, T_s) : s \geq 0)$$

的完备化。直观地说, 只要知道 B 与 T , 就能恢复 M 。

* 练习 1.20 (半鞅的 Hölder 条件)。设 X 是连续半鞅, λ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的 Lebesgue 测度。证明对每个 $\alpha < 1/2$, 几乎必然有

$$\lambda\left(\left\{t \geq 0 : \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-\alpha} |X_{t+\varepsilon} - X_t| > 0\right\}\right) = 0.$$

提示: 使用 DDS 定理与 Lebesgue 微分定理。

练习 1.21。设 (X, Y) 是二维布朗运动, H 是局部有界的 $(\mathcal{F}_t^X)$ -可预测过程, 并且

$$\int_0^\infty H_s^2 ds = \infty \quad \text{a.s.}$$

令

$$M_t = \int_0^t H_s dY_s,$$

并用 T_t 表示 $\langle M, M \rangle_t$ 的逆。证明过程

$$(M_{T_t})_{t \geq 0} \quad \text{与} \quad (X_{T_t})_{t \geq 0}$$

相互独立。

练习 1.22. 沿用 DDS 定理的记号。若存在严格正函数 f , 使

$$\langle M, M \rangle_t = \int_0^t f(M_s) ds, \quad \langle M, M \rangle_\infty = \infty,$$

证明

$$T_t = \int_0^t f(B_u)^{-1} du.$$

练习 1.23. 设 B 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, T 是有界的 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。

1°) 利用第 IV 章练习 4.25 以及

$$E[B_T^2] = E[T],$$

证明当 $p > 2$ 时, 存在常数 C_p , 使

$$E[|B_T|^{2p}] \leq C_p E[T^p].$$

再用第 IV 章第 4 节中的同一方法, 把结论推广到所有 $p > 0$ 。

2°) 用同样的论证证明反向不等式。

3°) 借助 DDS 定理, 写出 BDG 不等式的完整证明。

练习 1.24. 本练习要对下面的问题给出否定答案: 若 M 是连续局部鞅, H 是可预测过程, 并且对每个 t ,

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s < \infty \quad \text{a.s.},$$

那么无论下式两端是否有限, 是否总有

$$E\left[\left(\int_0^t H_s dM_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s\right]? \quad (*)$$

读者可注意到, Fatou 引理总能给出其中一个方向的不等式。

1°) 设 B 是标准布朗运动, H 是 $(\mathcal{F}_t^B)$ -可预测过程, 并满足

$$\int_0^t H_s^2 ds < \infty \quad \text{对每个 } t < 1, \quad \int_0^1 H_s^2 ds = \infty.$$

读者可以自行给出这类 H 的简单例子。证明局部鞅

$$M_t = \int_0^t H_s dB_s$$

满足

$$\liminf_{t \uparrow 1} M_t = -\infty, \quad \limsup_{t \uparrow 1} M_t = +\infty \quad \text{a.s.}$$

2°) 对 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 给出一个从 0 出发的连续局部鞅 N , 使得:

i) 对每个 $t_0 < 1$, 过程 $(N_t)_{t \leq t_0}$ 是在 L^2 中有界的鞅;

ii) 对 $t \geq 1$, $N_t = a$ 。

再证明这些条件必然推出

$$E[\langle N, N \rangle_1^{1/2}] = \infty,$$

并回答练习开头的问题。这还给出了另一个局部鞅的例子: 它在每个截短区间上都在 L^2 中有界, 却不是鞅; 参见练习 2.13。

3°) 于是还可问: 若 (*) 对每个有界 H 都成立, 是否就能刻画在 L^2 中有界的鞅? 答案仍是否定的。对 $a > 0$, 定义

$$S_a = \inf \left\{ t \geq \frac{1}{2} : \left| \int_{1/2}^t (1-s)^{-1} dB_s \right| = a \right\}.$$

取一个适当的 $\mathcal{F}_{1/2}^B$ -可测随机变量 X , 在时刻 S_X 停止过程

$$\int_{1/2}^{\cdot} (1-s)^{-1} dB_s.$$

证明存在连续局部鞅 M , 使 (*) 对每个有界 H 都成立, 同时

$$E[M_1^2] = E[\langle M, M \rangle_1] = \infty.$$

还可以考虑初始 σ -域非平凡的滤过 $(\mathcal{F}_t)$, 以及满足 $\langle M, M \rangle_t$ 对每个 t 都 $\mathcal{F}_0$ -可测的局部鞅, 从而得到其他例子。

练习 1.25. 利用第 III 章命题 3.9 的停时 T_{a+} , 证明命题 1.5 中不能删去 C -连续性假设。

练习 1.26. 设连续局部鞅的递增过程为

$$t \wedge T,$$

其中 T 是停时。证明该局部鞅是在时刻 T 停止的布朗运动。

练习 1.27. 证明: 一致可积鞅经过时间变换以后仍是一致可积鞅, 即使该时间变换可能取 $+\infty$ 。

2 共形鞅与平面布朗运动

本节研究一类包含平面布朗运动在内的二维局部鞅。我们采用 $\mathbb{R}^2$ 的复数表示; 特别地, 把平面布朗运动写成

$$B = B^1 + iB^2,$$

其中 (B^1, B^2) 是一对相互独立的一维布朗运动, 并称 B 为复布朗运动。更一般地, 回忆第 IV 章第 3 节: 复局部鞅是形如 $Z = X + iY$ 的过程, 其中 X, Y 是实局部鞅。

命题 2.1. 设 $Z = X + iY$ 是连续复局部鞅。存在唯一的、从 0 出发的连续复有限变差过程, 记作 $\langle Z, Z \rangle$, 使

$$Z^2 - \langle Z, Z \rangle$$

为复局部鞅。此外, 下列三个性质等价:

- i) Z^2 是局部鞅;
- ii) $\langle Z, Z \rangle = 0$;
- iii)

$$\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle, \quad \langle X, Y \rangle = 0.$$

证明。 只需按 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ -双线性定义

$$\langle Z, Z \rangle = \langle X + iY, X + iY \rangle = \langle X, X \rangle - \langle Y, Y \rangle + 2i\langle X, Y \rangle.$$

如此定义的过程显然具有命题中的全部性质；唯一性则由第 IV 章命题 1.12 的通常论证分别应用于实部与虚部得到。

定义 2.2。 满足命题 2.1 中任一等价条件的局部鞅，称为共形局部鞅。

显然，平面布朗运动是共形局部鞅。若 H 是复值、局部有界的可预测过程， Z 是共形局部鞅，则

$$U_t = \int_0^t H_s dZ_s$$

也是共形局部鞅。

对共形局部鞅 Z ，有

$$\langle \operatorname{Re} Z, \operatorname{Re} Z \rangle = \frac{1}{2} \langle Z, \bar{Z} \rangle;$$

特别地，

$$\langle U, \bar{U} \rangle_t = \int_0^t |H_s|^2 d\langle Z, \bar{Z} \rangle_s.$$

而且 Itô 公式在这里具有较简单的形式。回忆

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

若 $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 作为两个实变量 x, y 的函数可微，则 F 全纯当且仅当 $\partial F / \partial \bar{z} = 0$ ；在这种情况下，记 $F' = \partial F / \partial z$ 。

命题 2.3。 设 Z 是共形局部鞅， F 是 $\mathbb{C}$ 上的复值函数，并且把 F 看成两个实变量的函数时二阶连续可微。则

$$\begin{aligned} F(Z_t) &= F(Z_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial z}(Z_s) dZ_s + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(Z_s) d\bar{Z}_s \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^t \Delta F(Z_s) d\langle Z, \bar{Z} \rangle_s. \end{aligned}$$

特别地，若 F 为调和函数，则 $F(Z)$ 是局部鞅；若 F 为全纯函数，则

$$F(Z_t) = F(Z_0) + \int_0^t F'(Z_s) dZ_s.$$

证明。 直接应用 Itô 公式并作代数整理即可。

评注。 若 Z 是共形局部鞅， F 为全纯函数，则 $F(Z)$ 仍是共形局部鞅。稍后将对平面布朗运动给出一个更精确的结论。

现在把定理 1.9 改写为共形局部鞅的形式。

定理 2.4. 设 $Z = X + iY$ 是从 0 出发的共形局部鞅。则存在一个复布朗运动 B (必要时可在概率空间的扩张上构造), 使

$$Z_t = B_{\langle X, X \rangle_t}.$$

证明. 因为

$$\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle, \quad \langle X, Y \rangle = 0,$$

把定理 1.9 应用于二维局部鞅 (X, Y) , 便得到一个复布朗运动 B , 使得当 $t < \langle X, X \rangle_\infty$ 时,

$$B_t = X_{T_t} + iY_{T_t}, \quad T_t = \inf\{u : \langle X, X \rangle_u > t\}.$$

再按定理 1.6 证明中的方法即可得到结论。

上述定理有一个极为重要的推论, 通常称为复布朗运动的共形不变性。

定理 2.5 (复布朗运动的共形不变性). 若 F 是非常值整函数, 则 $F(B_t)$ 是作了时间变换的布朗运动。更精确地, 在 B 所在的概率空间上存在复布朗运动 $\tilde{B}$, 使

$$F(B_t) = F(B_0) + \tilde{B}_{\langle X, X \rangle_t},$$

其中

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t |F'(B_s)|^2 ds$$

严格递增, 并且

$$\langle X, X \rangle_\infty = \infty.$$

证明. 若 F 是整函数, 则 F^2 也是整函数; 由命题 2.3, $F^2(B)$ 是局部鞅。因此 $F(B)$ 是共形局部鞅, 可以对它应用定理 2.4。由命题 2.3 前的说明以及该命题本身, 对 $X = \operatorname{Re} F(B)$ 有

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t |F'(B_s)|^2 ds.$$

因为 F' 是不恒为零的整函数, 其零点集 Γ 至多可数, 所以

$$P\left(\int_0^\infty \mathbf{1}_\Gamma(B_s) ds = 0\right) = 1,$$

从而 $\langle X, X \rangle$ 严格递增。

还需证明 $\langle X, X \rangle_\infty = \infty$ 。这一事实的证明需要若干本身也有价值的补充结果。目前已经证明: $F(B)$ 的路径与复布朗运动相同, 但运行速度可能不同。严格递增性意味着这些路径在 $\langle X, X \rangle_\infty$ 以前没有跳过任何一段。一旦证明 $\langle X, X \rangle_\infty = \infty$, 就知道 $F(B)$ 的路径恰好是布朗运动的完整路径。定理 2.5 的证明将在先由定理 2.8 证明平面布朗运动的常返性以后完成。

先证明一个本身就很重要的结果。回忆第 III 章第 2 节: 击中时 T_A 是停时, 因而事件 $\{T_A < \infty\}$ 可测。

定义 2.6. 设状态空间为 E 的 Markov 过程给定。若 Borel 集 A 满足

$$P_z[T_A < \infty] = 0 \quad \text{对每个 } z \in E,$$

则称 A 为极集。

命题 2.7. 当 $d \geq 2$ 时, $\mathbb{R}^d$ 中布朗运动的每个单点集都是极集。

证明. 显然只需证明 $d = 2$ 的情形; 再由布朗运动的几何不变性, 只需证明从 0 出发的平面布朗运动不会击中点集 $\{(-1, 0)\}$ 。

由已经证明的结论, 过程

$$M_t = \exp(B_t) - 1$$

可写成 $\tilde{B}_{A_t}$, 其中 $\tilde{B}$ 是平面布朗运动, 而

$$A_t = \int_0^t \exp(2X_s) ds, \quad X = \operatorname{Re} B.$$

过程 A 显然严格递增。并且 $A_\infty = \infty$ 几乎必然成立; 否则 M_t 在 $t \rightarrow \infty$ 时会在 $\mathbb{C}$ 中收敛, 但

$$|\exp(B_t)| = \exp(X_t),$$

而 X 作为一维布朗运动是常返的, 故不可能收敛。于是 M 的路径恰好是以不同速度运行的布朗运动路径。又因 $\exp(B_t)$ 从不为零, 结论得证。

评注.

1°) 对一维布朗运动, 任何非空集都不是极集。对 $d \geq 2$ 的布朗运动, 每个单点集、因而每个可数集都是极集。例如, 若以 $\mathbb{Q}^2$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中坐标均为有理数的点集, 则几乎必然有

$$\{B_t : t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2.$$

不过, 即使在 $d = 2$ 时, 也存在不可数的极集。

2°) 命题 2.7 的另一个更初等的证明已在第 I 章练习 1.20 中给出; 练习 2.14 还将给出又一个证明。

现在可以陈述平面布朗运动的常返性; 练习 2.14 还会给出另一个证明。

定理 2.8 (平面布朗运动的常返性). 几乎必然地, 对 $\mathbb{R}^2$ 中每个开集 U , 集合

$$\{t : B_t \in U\}$$

均无上界。

证明. 利用由开球组成的可数基, 只需在

$$U = B(z, r), \quad z = x + iy, \quad r > 0$$

时证明结论。

由于单点集为极集，可以考虑过程

$$M_t = \log |B_t - z|.$$

与上面相同的论证表明， $M_t = \beta_{A_t}$ ，其中 β 是从 $\log |z|$ 出发的一维布朗运动，而

$$A_t = \int_0^t |B_u - z|^{-2} du.$$

又因为

$$\sup_{s \leq t} M_s \geq \sup_{s \leq t} \log |X_s - x| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty,$$

由命题 1.8 后第 3° 条评注可知 $A_t \rightarrow \infty$ 。因此

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} M_t = -\infty \quad \text{a.s.,}^a$$

所以在任意大的时刻 M 都会取小于 $\log r$ 的值，证明完毕。

^a**校订注：**原书此处印成 $\liminf_{t \rightarrow \infty} M_t = +\infty$ ，但紧接着要推出 M 在任意大时刻取小于 $\log r$ 的值；且 $M_t = \beta_{A_t}$ 、 $A_t \rightarrow \infty$ ，故正确符号应为 $-\infty$ 。

评注。

- 1°) 事实上可以证明：对任意 Lebesgue 测度严格为正的 Borel 集 A ，集合 $\{t : B_t \in A\}$ 几乎必然无上界，并且其 Lebesgue 测度为无穷；见第 X 章第 3 节。
- 2°) 上述结果表明，几乎必然地，布朗运动路径虽然 Lebesgue 测度为零，却在平面中稠密。

定理 2.5 证明的结尾 (2.9)。 若 $\langle X, X \rangle_\infty < \infty$ ，则当 $t \rightarrow \infty$ 时 $F(B_t)$ 有极限。但 F 非常值，所以可找到两个不交开集 U_1, U_2 ，使

$$F(\overline{U}_1) \cap F(\overline{U}_2) = \emptyset.$$

由定理 2.8，集合

$$\{t : B_t \in U_1\}, \quad \{t : B_t \in U_2\}$$

均无上界，因此 $F(B_t)$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时不可能有极限。

最后再给出一个常返性方面的结果。刚才已经看到， $\mathbb{R}^d$ 中的布朗运动在 $d = 1, 2$ 时常返；当 $d \geq 3$ 时则不再如此，这时称布朗运动为 暂留的。更精确地，有下述结论。

定理 2.10。 若 $d \geq 3$ ，则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |B_t| = +\infty \quad \text{a.s.}$$

证明。 显然只需在 $d = 3$ 且布朗运动从 $x_0 \neq 0$ 出发时证明。因为 $\{0\}$ 是极集，由 Itô 公式， $1/|B_t|$ 是正局部鞅，因而是正上鞅，并几乎必然收敛于某个随机变量 H 。由 Fatou 引理，

$$E_{x_0}[H] \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} E_{x_0} \left[\frac{1}{|B_t|} \right].$$

而缩放性质给出

$$E_{x_0} \left[\frac{1}{|B_t|} \right] = O(t^{-1/2}).$$

因此 $H = 0$, P_{x_0} -几乎必然成立, 结论随即得到。

本节最后给出一个复布朗运动 B 的表示。以下在 $a \neq 0$ 时考察 P_a 下的 B 。因为在 P_a 下几乎必然有 $B_t \neq 0$ 对每个 t 成立, 所以可以选取 $B_t(\omega)$ 的辐角的一个连续版本 $\theta_t(\omega)$, 使 $\theta_0(\omega)$ 为常数且

$$\exp(i\theta_0) = \frac{a}{|a|}.$$

于是

$$B_t = \rho_t \exp(i\theta_t),$$

并且 θ 关于 B 的滤过适应。过程 ρ, θ 可作如下分析。

定理 2.11. 存在平面布朗运动 (β, γ) , 使

$$\rho_t = |a| \exp(\beta_{C_t}), \quad \theta_t = \theta_0 + \gamma_{C_t},$$

其中

$$C_t = \int_0^t \rho_s^{-2} ds.$$

此外,

$$\mathcal{F}_\infty^\beta = \mathcal{F}_\infty^\rho,$$

因而 γ 与 ρ 相互独立。

证明。 由于 B 几乎必然从不为零, 可以定义共形局部鞅

$$H_t = \int_0^t B_s^{-1} dB_s.$$

并且

$$\langle \operatorname{Re} H, \operatorname{Re} H \rangle_t = C_t.$$

对乘积 $B_t \exp(-H_t)$ 应用分部积分公式; 由于 $\langle B, B \rangle = 0$, 容易得到

$$B_t = a \exp(H_t).$$

由定理 2.4, 存在记为 $\beta + i\gamma$ 的平面布朗运动, 使

$$H_t = \beta_{C_t} + i\gamma_{C_t},$$

这就证明了结论的前一部分。

过程 β 是局部鞅

$$\operatorname{Re} H_t = \log(\rho_t/|a|)$$

的 DDS 布朗运动。另一方面, 令 $X = \operatorname{Re} B$, $Y = \operatorname{Im} B$, 则

$$\operatorname{Re} H_t = \int_0^t \frac{X_s dX_s + Y_s dY_s}{\rho_s^2} = \int_0^t \frac{d\tilde{\beta}_s}{\rho_s},$$

其中 $\tilde{\beta}$ 是一维布朗运动。因此可把上式改写为

$$\log \rho_t = \log |a| + \int_0^t \sigma(\log \rho_s) d\tilde{\beta}_s, \quad \sigma(x) = e^{-x}.$$

由命题 1.11,

$$\mathcal{F}_\infty^\beta = \mathcal{F}_\infty^\rho,$$

这就证明了结论的后一部分。

这个结果表明, 正如直觉所预期的: B_t 的模越小, 其辐角变化得越快。此外, θ_t 是时间变换后的一维布朗运动, 因此很容易看出

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \theta_t = -\infty, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \theta_t = +\infty \quad \text{a.s.}$$

所以平面布朗运动会绕原点转任意多圈, 然后再反向绕回去, 而且这一现象会发生无穷多次。关于 θ_t 的更强渐近结果, 以及更一般的平面布朗运动行为, 将在第 VII 章和第 XIII 章中给出。

若允许损失关于模的一部分信息, 前述表示也可写成

$$B_t = \rho_t e^{i\gamma C_t},$$

其中 γ 是与 ρ 独立的一维布朗运动,

$$C_t = \int_0^t \rho_s^{-2} ds.$$

这称为二维布朗运动的斜积表示。

值得强调的是, 上述讨论在 $a \neq 0$ 的 P_a 下进行。若 $a = 0$, 则由 $\{0\}$ 的极性, 对每个 $t > 0$, 仍可几乎必然无歧义地写成

$$B_t = \rho_t \mathcal{U}_t, \quad |\mathcal{U}_t| = 1.$$

但没有办法选取 $\mathcal{U}_t$ 的一个连续辐角, 使之关于 $(\mathcal{F}_t)$ 适应。这个例子提示我们有必要定义并研究开区间 $\mathbb{R}_+$ 上的半鞅。

练习 2.12。 令

$$A = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}.$$

对从 0 出发的复布朗运动 $B^1 + iB^2$, 求

$$B_{T_{A^c}}^1$$

的分布。

提示: 指数函数把 A 映到半平面 H 上。使用 H 的退出分布。

练习 2.13 (一个重要的反例)。

1°) 设 B 是 $\mathbb{R}^d$ 中的布朗运动, $d \geq 3$, 并从 $x \neq 0$ 出发。证明

$$|B_t|^{2-d}$$

是局部鞅。

提示: $|x|^{2-d}$ 在 $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 上调和。

2°) 在 $d = 3$ 时利用第 1° 问, 给出一个在 L^2 中有界却不是真鞅的局部鞅例子。这也给出

了一个一致可积但不是真鞅的局部鞅例子，以及一个一致可积上鞅 X 的例子，使得族

$$\{X_T : T \text{ 为停时}\}$$

并非一致可积。由第 XI 章练习 1.16 还可看出：对每个 $p \geq 1$ ，都能找到在 L^p 中有界却不是鞅的局部鞅。

3°) 若 B 是复布朗运动，令

$$M = \log |B|.$$

证明对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\alpha < 2$,

$$\sup_{\varepsilon \leq t \leq 1} E_x[\exp(\alpha |M_t|)] < \infty.$$

这给出了一个具有指数矩却不是鞅的局部鞅例子。此外，

$$E_x[\langle M, M \rangle_t] = \infty,$$

这印证了第 IV 章推论 1.25 后的一条评注。

练习 2.14.

1°) 保持练习 2.13 第 1° 问的情形，并取

$$0 < a < |x| < b.$$

令

$$R_a = T_{B(0,a)}, \quad S_b = T_{B(0,b)^c}.$$

证明

$$P_x[R_a < S_b] = \frac{|x|^{2-d} - b^{2-d}}{a^{2-d} - b^{2-d}}.$$

提示：在 $R_a \wedge S_b$ 处停止局部鞅 $|B_t|^{2-d}$ ，并按第 II 章中的方法处理。

再证明

$$P_x[R_a < \infty] = \left(\frac{a}{|x|}\right)^{d-2}.$$

2°) 用函数 $\log |x|$ 代替 $|x|^{2-d}$ ，在 $d = 2$ 时处理同样的问题。由此再给出一个单点集为极集的证明。

3°) 由第 2° 问推出：当 $d = 2$ 时，对任意开集 U 和任意 z ，都有

$$P_z[T_U < \infty] = 1.$$

4°) 设 D_1, D_2 是两个不交圆盘，递归定义两列停时

$$T_1 = T_{D_1}, \quad U_1 = \inf\{t > T_1 : B_t \in D_2\},$$

以及

$$T_n = \inf\{t > U_{n-1} : B_t \in D_1\}, \quad U_n = \inf\{t > T_n : B_t \in D_2\}.$$

证明对任意 z 和每个 n ,

$$P_z[T_n < \infty] = P_z[U_n < \infty] = 1,$$

并由此给出定理 2.8 的另一个证明。

练习 2.15。 在定理 2.11 的情形下, 证明 θ_t 生成的滤过与 B_t 生成的滤过相同。

提示: ρ 关于 $\mathcal{F}^\theta$ 适应。

练习 2.16。 设 B_t 是复布朗运动, 并假设 $B_0 = 1$ 几乎必然成立。对 $r > 0$, 令

$$T_r = \inf\{t : |B_t| = r\}.$$

设 θ_t 是 B_t 的连续辐角版本, 且在 $t = 0$ 时为零。证明: 分别把 r 限制在 $r \leq 1$ 或 $r \geq 1$ 时, $(\theta_{T_r})_r$ 是具有独立增量的过程, 而且 θ_{T_r} 的分布是参数为 $|\log r|$ 的 Cauchy 分布。

提示: 使用第 III 章命题 3.11 的结论。

练习 2.17。

1°) **Liouville 定理。** 由二维布朗运动的常返性与鞅收敛定理推出: 整个平面上的有界调和函数必为常数。

提示: 参见第 X 章命题 3.10 的论证。

2°) **D'Alembert 定理 (代数学基本定理)。** 设 P 是具有复系数的非常值多项式。利用二维布朗运动的性质证明: 对任意 $\varepsilon > 0$, 紧集

$$\{z : |P(z)| \leq \varepsilon\}$$

非空, 并由此推出方程 $P(z) = 0$ 存在解。

练习 2.18。

1°) 设 $Z = X + iY$ 是从 -1 出发的复布朗运动, 并令

$$T = \inf\{t : Y_t = 0, X_t \geq 0\}.$$

证明 $\log X_T$ 的分布具有密度

$$\frac{1}{2\pi \cosh(x/2)}.$$

提示: 参见第 III 章练习 3.25。

2°) 由此推出: X_T 与 C^2 同分布, 其中 C 是 Cauchy 随机变量。

提示: 参见第 0 章第 6 节。

***# 练习 2.19。** 沿用第 IV 章练习 2.18 的记号。

1°) 设 F 是 $\mathbb{C}$ 的开子集 U 上的全纯函数, $\bar{\omega}$ 是微分形式 $F(z) dz$ 。若 Z 是共形局部鞅, 并且

$$P[\exists t \geq 0 : Z_t \notin U] = 0,$$

则几乎必然有

$$\int_{Z(0,t]} \bar{\omega} = \int_0^t F(Z_s) dZ_s = \int_0^t F(Z_s) \circ dZ_s,$$

其中 $\circ$ 表示 Stratonovich 积分。

2°) 在定理 2.11 的情形下,

$$\theta_t - \theta_0 = \int_{Z(0,t]} \bar{\omega},$$

其中

$$\bar{\omega} = (x^2 + y^2)^{-1}(x dy - y dx) = \operatorname{Im}\left(\frac{dz}{z}\right).$$

3°) 在同一情形下, 令 S_t 为线段 $[0, Z_u]$ 在 $0 \leq u \leq t$ 时扫过的面积; 见第 IV 章练习 2.18. 证明存在一个与 ρ 独立的一维布朗运动 δ , 使

$$S_t = \delta_{A_t}, \quad A_t = \frac{1}{4} \int_0^t \rho_s^2 ds.$$

第 IX 章练习 3.10 将给出另一个证明, 并去掉条件 $a \neq 0$.

练习 2.20.

1°) 设 f 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, A 是其极点集. 对 $z_0 \notin A$, 证明 $f(B)$ 是从 $f(z_0)$ 出发的、作了时间变换的二维布朗运动。

2°) 设 $z \neq 0$ 为复数。若

$$T = \inf\{t : |B_t| = 1\},$$

证明 B_T 在 P_z 与 $P_{1/\bar{z}}$ 下具有相同分布。

* **练习 2.21 (圆锥的退出时)**。保持定理 2.11 的情形与记号, 取 $a = 1, \theta_0 = 0$ 。对 $n, m > 0$, 定义

$$T = \inf\{u : \theta_u \notin [-n, m]\}, \quad \tau = \inf\{v : \gamma_v \notin [-n, m]\}.$$

1°) 对 $\delta > 0$, 证明

$$E[\rho_T^{2\delta}] = E[\exp(2\delta^2 \tau)].$$

继而证明

$$E[T^\delta] < \infty \implies 2\delta(n+m) < \pi.$$

提示: 使用第 II 章练习 3.10 第 2° 问的结论。

2°) 由等式

$$T = \int_0^\tau \exp(2\beta_u) du$$

推出

$$E[T^\delta] \leq 2E\left[\tau^\delta \exp(2\delta^2 \tau)\right].$$

由此得出

$$E[T^\delta] < \infty \iff 2\delta(n+m) < \pi.$$

练习 2.22. 设 B 是二维布朗运动, 并令

$$C(\omega) = \{B_t(\omega) : t \geq 0\}.$$

1°) 证明 $C(\omega)$ 几乎必然是 $\mathbb{R}^2$ 的 Borel 子集。记其 Lebesgue 测度为 $\Lambda(\omega)$ 。

2°) 证明

$$\Lambda(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sup_{t \geq 0} \mathbf{1}_{\{z\}}(B_t) \right) dx dy,$$

并推出 $\Lambda(\omega) = 0$ 几乎必然成立。与第 I 章练习 1.17 中的证明比较。

练习 2.23. 设 Z 是复布朗运动。证明： $\mathbb{R}^2$ 上的复值 C^2 函数 f 全纯，当且仅当存在可预测过程 H ，使

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t H_s dZ_s.$$

* **练习 2.24.** 若对每个 $\varepsilon > 0$ ，过程

$$(Z_{t+\varepsilon})_{t \geq 0}$$

都是关于滤过 $(\mathcal{F}_{t+\varepsilon})_{t \geq 0}$ 的共形鞅，则称 $Z \in \mathcal{C}$ ；参见第 IV 章练习 1.42 与 3.26。

1°) 证明：若 $Z \in \mathcal{C}$ ，则几乎必然有

$$\left\{ \omega : \liminf_{t \downarrow 0} |Z_t(\omega)| < \infty \right\} = \left\{ \omega : \lim_{t \downarrow 0} Z_t(\omega) \text{ 在 } \mathbb{C} \text{ 中存在} \right\}.$$

2°) 由此推出：对几乎处处的 ω ，以下三种情形之一发生：

- i) $\lim_{t \downarrow 0} Z_t(\omega)$ 在 $\mathbb{C}$ 中存在；
- ii) $\lim_{t \downarrow 0} |Z_t(\omega)| = +\infty$ ；
- iii) 对每个 $\delta > 0$ ，集合

$$\{Z_t(\omega) : 0 < t < \delta\}$$

在 $\mathbb{C}$ 中稠密。

提示：对 $z \in \mathbb{C}$ ， $r > 0$ ，定义

$$T = \inf\{t : |Z_t - z| < r\},$$

并考察

$$V_t = (Z_t^T - z)^{-1} \mathbf{1}_{\{T > 0\}},$$

它属于 $\mathcal{C}$ 。

分别给出上述三种可能性确实发生的例子。

练习 2.25.

1°) 设 ρ_t 是 d 维布朗运动 X 的模， $d > 2$ ， ν 是满足 $\nu(\{0\}) = 0$ 的概率测度。证明在 P_ν 下，

$$\beta_t = \rho_t - \rho_0 - \frac{1}{2}(d-1) \int_0^t \rho_s^{-1} ds$$

是布朗运动。用第 IX 章的语言说， ρ_t 是随机微分方程

$$\rho_t = \rho_0 + \beta_t + \frac{1}{2}(d-1) \int_0^t \rho_s^{-1} ds$$

的解。过程 ρ_t 称为 d 维 Bessel 过程，将在第 XI 章中研究。

2°) 现在去掉对 ν 的条件。证明在 P_0 下，对每个 p ，随机变量

$$\int_0^t \rho_s^{-1} ds$$

都属于 L^p ，并把第 1° 问推广到 $\nu = \delta_0$ 。

提示：若 r 是到原点的距离，则

$$\rho_t - \rho_s - \frac{1}{2}(d-1) \int_s^t \rho_u^{-1} du = \int_s^t (\text{grad } r(X_u), dX_u).$$

证明当 $s \downarrow 0$ 时，右端在 L^2 中有界。

* **练习 2.26 (极函数)**。设 $f = (f^1, f^2)$ 是连续的、取值于 $\mathbb{R}^2$ 的确定性有界变差函数，并满足 $f(0) \neq 0$ ；设 $B = (X, Y)$ 是从 0 出发的平面布朗运动。令

$$Z_t = B_t + f(t), \quad T = \inf\{t : Z_t = 0\}.$$

1°) 证明

$$\beta_t = \int_0^t \frac{(X_s + f^1(s)) dX_s + (Y_s + f^2(s)) dY_s}{|Z_s|}$$

在随机区间 $[0, T[$ 上是一维布朗运动；参见第 IV 章练习 3.28。

2°) 先证明

$$E \left[\int_{1/n}^t |Z_s|^{-1} |df(s)| \right] < \infty,$$

再证明几乎必然地，对每个 t ，

$$\int_0^t |Z_s|^{-1} |df(s)| < \infty.$$

提示：使用 B 的缩放性质，以及下面的事实：若 G 是二维标准高斯随机变量，则

$$\sup_{m \in \mathbb{C}} E[|m + G|^{-1}] < \infty.$$

3°) 考察 $\log |Z_t|$ ，证明 $T = \infty$ 几乎必然成立。换言之，在第 I 章练习 1.20 的意义下， f 是极函数。

提示：使用练习 1.18。

若 f 绝对连续，第 VIII 章练习 2.15 将给出一个简单得多的证明。

练习 2.27 (布朗单)。设 $X_{(s,t)}$ 是复布朗单 (Brownian sheet)，即

$$X_{(s,t)} = W_{(s,t)}^1 + iW_{(s,t)}^2,$$

其中 W^1, W^2 是两个相互独立的布朗单。若

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

是 $(0, \infty)^2$ 中的连续路径，记

$$X_\gamma(s) = X_{(x(s), y(s))}.$$

1°) 若 x, y 同为递增函数或同为递减函数，证明 $\mathbb{C}$ 中的每个单点集都是 X_γ 的极集。

2°) 当 x 递增、 y 递减，或反过来时，处理同样的问题。

提示：使用第 III 章练习 1.13 与前一练习。

由此可见，若 γ 是一条闭路，并且分段属于上述四类路径之一，则对任意 $a \in \mathbb{C}$ ， a 关于 X_γ 路径的绕数（指标）几乎必然有定义。

3 布朗鞅

本节考虑滤过 $(\mathcal{F}_t^B)$, 但简记为 $(\mathcal{F}_t)$ 。它也就是第 III 章第 2 节中的滤过 $(\mathcal{F}_t^{\varepsilon_0})$, 那里称其为布朗滤过。

记 $\mathcal{J}$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上所有具有紧支集的阶梯函数组成的集合, 即其中的函数 f 可以写成

$$f = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{1}_{(t_{j-1}, t_j]}.$$

与第 IV 章第 3 节一样, 用 $\mathcal{E}^f$ 表示

$$\int_0^\cdot f(s) dB_s$$

的随机指数。

引理 3.1。 集合

$$\{\mathcal{E}_\infty^f : f \in \mathcal{J}\}$$

在 $L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$ 中是完备的; 也就是说, 它的线性张成在该空间中稠密。

证明。 设 $Y \in L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$, 并且 Y 与每个 $\mathcal{E}_\infty^f$ 正交。我们证明测度 $Y \cdot P$ 为零测度。为此, 只需证明: 对任意有限序列 $(t_1, \dots, t_n)$, 该测度在 $\sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ 上为零。

函数

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) = E \left[\exp \left(\sum_{j=1}^n z_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right) Y \right]$$

显然在 $\mathbb{C}^n$ 上解析。由 Y 的选取, 对任意 $\lambda_j \in \mathbb{R}$, 有

$$\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = E \left[\exp \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right) Y \right] = 0.$$

所以 φ 恒为零; 特别地,

$$E \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right) Y \right] = 0.$$

把测度 $Y \cdot P$ 由映射

$$\omega \mapsto (B_{t_1}(\omega), B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega), \dots, B_{t_n}(\omega) - B_{t_{n-1}}(\omega))$$

推出所得的像测度, 其 Fourier 变换为零, 因而它是零测度。因此 $Y \cdot P$ 在

$$\sigma(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) = \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$$

上为零, 证明完毕。

命题 3.2。 对任意 $F \in L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$, 存在唯一的 $H \in L^2(B)$, 使 H 可预测且

$$F = E[F] + \int_0^\infty H_s dB_s.$$

证明。 记 $\mathcal{H}$ 为 $L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$ 中所有可按命题所述形式表示的元素组成的子空间。若 $F \in \mathcal{H}$, 则

$$E[F^2] = E[F]^2 + E\left[\int_0^\infty H_s^2 ds\right]. \quad (*)$$

这特别给出命题中的唯一性。

若 (F^n) 是 $\mathcal{H}$ 中的 Cauchy 列, 相应的 (H^n) 由 $(*)$ 可知是 $L^2(B)$ 中的 Cauchy 列, 因而收敛到某个可预测 $H \in L^2(B)$ 。显然, F^n 在 $L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$ 中收敛到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[F^n] + \int_0^\infty H_s dB_s.$$

所以 $\mathcal{H}$ 是闭子空间。

另一方面, $\mathcal{H}$ 包含引理 3.1 中所有 $\mathcal{E}_t^f$, 因为由 Itô 公式, 对每个 $t < \infty$,

$$\mathcal{E}_t^f = 1 + \int_0^t \mathcal{E}_s^f f(s) dB_s.$$

结合引理 3.1, 便得到 H 的存在性; 其在 $L^2(B)$ 中的唯一性由 $(*)$ 得到。

评注。 若删去 $H \in L^2(B)$ 的条件, 则满足命题 3.2 中等式的可预测过程 H 有无穷多个; 第 VI 章练习 2.31 将证明这一点。这里已经可以看出: 取

$$H = \mathbf{1}_{[0, d_T]}, \quad d_T = \inf\{u > T : B_u = 0\},$$

便得到 $F = 0$ 。

现在转向本节的主要结果, 即把命题 3.2 推广到局部鞅。尤其值得注意的是, 滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 具有如下性质: 不存在不连续的 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅。结合第 IV 章推论 5.7, 便得到:

推论 3.3。 对布朗滤过, 每个可选过程都是可预测过程。

熟悉停时分类的读者还会注意到: 布朗滤过的所有停时都是可预测停时。

定理 3.4 (布朗滤过中的鞅表示)。 每个 $(\mathcal{F}_t)$ -局部鞅 M 都有一个版本可写成

$$M_t = C + \int_0^t H_s dB_s,$$

其中 C 是常数, H 是局部属于 $L^2(B)$ 的可预测过程。特别地, 每个 $(\mathcal{F}_t)$ -局部鞅都有连续版本。

证明。 若 M 是在 L^2 中有界的 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅, 由命题 3.2, 存在 $H \in L^2(B)$, 使

$$\begin{aligned} M_t &= E[M_\infty | \mathcal{F}_t] \\ &= E[M_\infty] + E\left[\int_0^\infty H_s dB_s \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= E[M_\infty] + \int_0^t H_s dB_s. \end{aligned}$$

因此结论在这一情形下成立。

再设 M 一致可积。因为 $L^2(\mathcal{F}_\infty)$ 在 $L^1(\mathcal{F}_\infty)$ 中稠密, 存在一列在 L^2 中有界的鞅 M^n , 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|M_\infty - M_\infty^n|] = 0.$$

由极大不等式, 对每个 $\lambda > 0$,

$$P\left[\sup_t |M_t - M_t^n| > \lambda\right] \leq \lambda^{-1} E[|M_\infty - M_\infty^n|].$$

借助 Borel–Cantelli 引理, 可以抽出子列 (M^{n_k}) , 使其几乎必然一致收敛到 M 。因此 M 有连续版本。

最后, 若 M 是 $(\mathcal{F}_t)$ -局部鞅, 把上一步应用于局部化后的各个鞅并将所得连续版本拼接, 便得到 M 的连续版本。于是可取停时列 (T_n) , 使每个 M^{T_n} 有界。再由证明的第一部分逐段拼接相应的被积过程, 即得定理。

上述论证容易推广到多维情形。

定理 3.5 (多维布朗滤过中的鞅表示)。 设 $B = (B^1, \dots, B^d)$ 是 d 维布朗运动。每个 $(\mathcal{F}_t^B)$ -局部鞅 M 都有连续版本, 并且存在局部属于 $L^2(B^i)$ 的可预测过程 H^i , 使

$$M_t = C + \sum_{i=1}^d \int_0^t H_s^i dB_s^i.$$

评注。

1°) 过程 H^i 等于 $\langle M, B^i \rangle$ 关于 Lebesgue 测度的 Radon–Nikodym 导数:

$$H_t^i = \frac{d}{dt} \langle M, B^i \rangle_t.$$

不过, 在大多数具体例子中可以直接把它们算出。第 VIII 章第 2 节将给出一个相当一般的结果; 本节练习 3.13 与 3.16 已给出若干特例。当 f 调和时, 鞅 $f(B_t)$ 的表示直接由 Itô 公式给出。

2°) 研究由上述结果得到的一般局部鞅的滤过, 是一个有趣且很大程度上尚未解决的问题。练习 3.12 将给出一些很不完整的答案。

以上结果尤其给出了 $L^2(\mathcal{F}_\infty^B)$ 的表示定理。现在转向这个空间的另一种表示; 为简单起见, 只处理一维情形。令

$$\Delta_n = \{(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}_+^n : s_1 > s_2 > \dots > s_n\},$$

并用 $L^2(\Delta_n)$ 表示 Δ_n 上 Lebesgue 测度的 L^2 空间。 $L^2(\Delta_n)$ 中所有可写成

$$f(s_1, \dots, s_n) = \prod_{i=1}^n f_i(s_i), \quad f_i \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

的函数组成的集合记为 E_n ; 其线性张成在 $L^2(\Delta_n)$ 中稠密。对 $f \in E_n$, 定义

$$\begin{aligned} J_n(f) &= \int_0^\infty f_1(s_1) dB_{s_1} \int_0^{s_1} f_2(s_2) dB_{s_2} \cdots \\ &\quad \cdots \int_0^{s_{n-1}} f_n(s_n) dB_{s_n}. \end{aligned}$$

这种迭代随机积分已在第 IV 章命题 3.8 中出现, 而且容易看出

$$\|J_n(f)\|_{L^2(\mathcal{F}_\infty)} = \|f\|_{L^2(\Delta_n)}.$$

定义 3.6 (Wiener 混沌). 对 $n \geq 1$, $L^2(\mathcal{F}_\infty^B)$ 中包含 $J_n(E_n)$ 的最小闭线性子空间, 称为第 n 阶 Wiener 混沌, 记作 K_n 。

映射 J_n 通过线性延拓与取极限延拓到 $L^2(\Delta_n)$ 。若 f 属于 E_n 的线性张成, 它作为 E_n 中元素线性组合的表示可能不唯一, 但容易验证 $J_n(f)$ 仍有唯一确定的值。此外, J_n 是 $L^2(\Delta_n)$ 到 K_n 的等距映射。事实上, 利用随机积分的 Fubini 定理 (第 IV 章练习 5.17), 也可以直接用多重随机积分定义 $J_n(f)$ 。

显然, K_n 与 $L^2(\Delta_n)$ 一一对应。此外, 当 $n \neq m$ 时, 空间 K_n, K_m 相互正交; 其证明留给读者作为练习。现在可以陈述:

定理 3.7 (Wiener 混沌分解)。

$$L^2(\mathcal{F}_\infty^B) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n,$$

其中 K_0 是常数空间。换言之, 对每个 $Y \in L^2(\mathcal{F}_\infty^B)$, 存在一系列函数

$$f^n \in L^2(\Delta_n),$$

使

$$Y = E[Y] + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(f^n)$$

在 L^2 意义下成立。

证明。 由第 IV 章命题 3.8, 引理 3.1 中的随机变量 $\mathcal{E}_\infty^f$ 可以逐点写成

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(f^n),$$

其中

$$f^n(s_1, \dots, s_n) = f(s_1)f(s_2) \cdots f(s_n).$$

由于 f 有界且具有紧支集, 容易验证该级数还在 $L^2(\mathcal{F}_\infty)$ 中收敛。因此结论对 $\mathcal{E}_\infty^f$ 成立, 也就对这些随机变量的任意线性组合成立。最后, 由引理 3.1, 每个 $Y \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ 都是这类线性组合的极限, 证明完成。

评注。 第一阶混沌只包含高斯随机变量; 事实上, 它正是由 $(B_t)_{t \geq 0}$ 生成的闭高斯空间; 见练习 3.11。

现在讨论另一个问题。定理 3.4 引出如下问题: 哪些鞅可以对某个适当的布朗运动 B 写成 $(H \cdot B)_t$? 下面给出一个部分答案, 它将在第 IX 章中使用。

命题 3.8。 设 M 是连续局部鞅, 并且随机测度

$$d\langle M, M \rangle_t$$

几乎必然与 Lebesgue 测度等价。则存在一个严格为正 $dt \otimes dP$ -几乎处处成立的 $(\mathcal{F}_t^M)$ -可预测过程 f_t ，以及一个 $(\mathcal{F}_t^M)$ -布朗运动 B ，使

$$d\langle M, M \rangle_t = f_t dt, \quad M_t = M_0 + \int_0^t f_s^{1/2} dB_s.$$

证明。 由 Lebesgue 微分定理，过程

$$f_t = \lim_{n \rightarrow \infty} n (\langle M, M \rangle_t - \langle M, M \rangle_{(t-1/n)^+})^a$$

满足命题要求。此外， $f^{-1/2}$ 显然局部属于 $L^2(M)$ ，而过程

$$B_t = \int_0^t f_s^{-1/2} dM_s$$

是递增过程为 t 的连续局部鞅，因而是布朗运动。结论随即得到。

^a**校订注：**原书下标直接写成 $t-1/n$ 。当 $t < 1/n$ 时该时刻为负，而过程只定义在 $\mathbb{R}_+$ 上；改为 $(t-1/n)^+$ 后公式处处有定义，且对每个 $t > 0$ 的极限不变。

若 $d\langle M, M \rangle_t$ 只关于 dt 绝对连续，上述论证不再成立；而且滤过 $(\mathcal{F}_t^M)$ 未必足够丰富，未必能支持一个 $(\mathcal{F}_t^M)$ -布朗运动。不过，若 B' 是与 $\mathcal{F}_\infty^M$ 独立的布朗运动，并令

$$B_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{f_s > 0\}} f_s^{-1/2} dM_s + \int_0^t \mathbf{1}_{\{f_s = 0\}} dB'_s,$$

则由 Lévy 特征定理， B 仍是布朗运动，并且

$$M_t = M_0 + \int_0^t f_s^{1/2} dB_s.$$

换言之，只要扩大概率空间，使其中有一个独立布朗运动，前述结果仍成立。利用少量线性代数，并把 $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ 扩张为 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P})$ ，同样可以处理多维情形。下面只给出证明梗概；代数变换之后各过程的可预测性与可积性细节留给读者核校。

定理 3.9。 设 $M = (M^1, \dots, M^d)$ 是连续向量局部鞅，并且对每个 i ，

$$d\langle M^i, M^i \rangle_t \ll dt.$$

则存在一个 d 维布朗运动 B （必要时在概率空间的扩张上构造），以及一个局部属于 $L^2(B)$ 的 $d \times d$ 矩阵值可预测过程 $\tilde{\alpha}$ ，使

$$M_t = M_0 + \int_0^t \tilde{\alpha}_s dB_s.$$

证明。 不妨设 $M_0 = 0$ 。由第 IV 章命题 1.15 的不等式，对每对 (i, j) ，均有

$$d\langle M^i, M^j \rangle_t \ll dt.$$

沿用前一证明的论证，可得一个对称 $d \times d$ 矩阵值可预测过程 γ ，使

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \int_0^t \gamma_s^{ij} ds,$$

而且 γ 在 $dP \otimes dt$ -几乎处处意义下半正定。

因此可以找到正交矩阵值可预测过程 β , 使

$$\rho = \beta^\top \gamma \beta$$

为对角矩阵。令

$$\alpha^{ij} = \beta^{ij}(\rho^{jj})^{1/2},$$

则 α 可预测, 并且

$$\gamma = \alpha \alpha^\top.^a$$

某些 ρ^{jj} 可能为零, 所以 α 的秩 (也就是 γ 的秩) 可能小于 d 。记 ζ_s 为 γ_s 的秩; 这是一个可预测过程。

定义矩阵 P_ζ :

$$P_\zeta^{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \leq \zeta, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

存在正交矩阵值可预测过程 ϕ , 使

$$\alpha \phi = \alpha \phi P_\zeta,$$

并存在矩阵值过程 λ , 使

$$\lambda \alpha \phi = P_\zeta.$$

令 $N = \lambda \cdot M$ 。则 N 是连续向量局部鞅, 且

$$\langle N^i, N^j \rangle_t = \delta_j^i \int_0^t \mathbf{1}_{\{i \leq \zeta_s\}} ds,$$

因为

$$\lambda \gamma \lambda^\top = \lambda \alpha \alpha^\top \lambda^\top = \lambda \alpha \phi \phi^\top \alpha^\top \lambda^\top = P_\zeta.$$

若令

$$X = (\alpha \phi) \cdot N,$$

则容易看出

$$\langle X - M, X - M \rangle = 0,$$

所以 $X = M$ 。

现在把所有对象转移到扩张 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P})$ 上; 其中有一个与 N 独立的 d 维布朗运动

$$W = (W^1, \dots, W^d).$$

定义

$$\overline{W}_t^i = N_t^i + \int_0^t \mathbf{1}_{\{i > \zeta_s\}} dW_s^i.$$

由 Lévy 定理, $\overline{W}$ 是 d 维布朗运动。因为 β_t 是正交矩阵,

$$B = \beta \cdot \overline{W}$$

仍是 d 维布朗运动; 见第 IV 章练习 3.22。最后,

$$M = (\alpha \phi \beta^\top) \cdot B.$$

取

$$\tilde{\alpha} = \alpha \phi \beta^\top$$

即得结论。

^a校订注: 原书这里同时印有 $\gamma = \alpha^\top \alpha = \alpha \alpha^\top$ 。按 $\alpha = \beta \rho^{1/2}$ 的定义, 一般只有 $\gamma = \alpha \alpha^\top$; 后续证明也只使用这一等式。

评注。 若矩阵 γ 在 $dP \otimes dt$ -几乎处处意义下满秩, 则与命题 3.8 一样, 无需扩大概率空间, 布朗运动 B 可以在原概率空间上构造。事实上, 可以找到可逆矩阵值可预测过程 ψ , 使

$$d\langle M, M \rangle_s = (\psi_s \psi_s^\top) ds, \quad B = \psi^{-1} \cdot M.$$

练习 3.10。 证明: 若把 B 换成连续高斯鞅, 命题 3.2 与定理 3.4 仍然成立。

提示: 参见练习 1.14。

练习 3.11。

1°) 证明第一阶 Wiener 混沌 K_1 等于由 B 生成的高斯空间, 即包含所有 $B_t, t \geq 0$ 的最小高斯空间。

2°) 证明: 一个 $\mathcal{F}_\infty^B$ -可测随机变量 Z 属于 K_1 , 当且仅当随机变量族

$$(Z, B_t : t \geq 0)$$

是高斯族。由此可见, 存在许多 $\mathcal{F}_\infty^B$ -可测的高斯随机变量并不属于 K_1 。

* **练习 3.12。** 设 B 是从 0 出发的一维布朗运动, H 是 $(\mathcal{F}_t^B)$ -渐进可测过程, 并满足:

i) 对每个 t ,

$$\int_0^t H_s^2 ds < \infty \quad \text{a.s.};$$

ii) 若 λ 表示 $\mathbb{R}_+$ 上的 Lebesgue 测度, 则

$$P[\lambda\{s : H_s = 0\} = 0] = 1.$$

约定

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x \leq 0. \end{cases}$$

证明对每个 t ,

$$\mathcal{F}_t^{(\text{sgn } H) \cdot B} \subset \mathcal{F}_t^{H \cdot B} \subset \mathcal{F}_t^B.$$

注意, $(\text{sgn } H) \cdot B$ 本身也是布朗运动。

提示: $\text{sgn } H_s = H_s/|H_s|$; 把 $|H|$ 换成一个适当的、关于 $\mathcal{F}_t^{H \cdot B}$ 适应的过程。

练习 3.13。

1°) 固定 $t > 0$, 设 B 是标准一维布朗运动。若

$$f \in L^2(\mathbb{R}, g_t(x) dx),$$

证明

$$f(B_t) = P_t f(0) + \int_0^t (P_{t-s} f)'(B_s) dB_s.$$

提示: 回忆

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0,$$

并参看第 III 章练习 1.11 与第 VII 章练习 1.20。

2°) 设 B' 是 B 的一个独立副本。对 $|\rho| \leq 1$, 过程

$$C_t = \rho B_t + \sqrt{1 - \rho^2} B'_t$$

是标准一维布朗运动。证明: 若

$$f \in L^2(\mathbb{R}, g_1(x) dx),$$

则过程

$$E[(P_{1-s}f)'(B_s) | \mathcal{F}_s^C]$$

有一个可测版本 Z ; 并且当

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) g_1(x) dx = 0$$

时,

$$E[f(B_1) | C_1] = \rho \int_0^1 Z_s^{(p)} dC_s,$$

其中 $Z^{(p)}$ 是 Z 关于 $\mathcal{F}^C$ 的可预测投影; 见练习 1.13。也可以不用 $Z^{(p)}$, 而在 $L^2(ds dP)$ 中取一个适当的投影。

3°) **Gebelein 不等式**。设 (X, Y) 是中心二维高斯随机向量, 并满足

$$E[X^2] = E[Y^2] = 1, \quad E[XY] = \rho.$$

对第 2° 问中的任意 f , 证明

$$E[(E[f(X) | Y])^2] \leq \rho^2 E[f^2(X)].$$

相关结果见练习 3.19。

**** 练习 3.14。** 设 B, B' 是两个相互独立的标准一维布朗运动, 并对 $s, t \geq 0$ 令

$$\mathcal{F}_{s,t} = \sigma(B_u : u \leq s; B'_v : v \leq t).$$

1°) 当 f, g 遍历 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 时, 随机变量

$$\mathcal{E}\left(\int_0^\cdot f(s) dB_s\right)_\infty \mathcal{E}\left(\int_0^\cdot g(s) dB'_s\right)_\infty$$

的线性张成在 $L^2(\mathcal{F}_{\infty,\infty})$ 中稠密。

2°) 对适当可测的双指标过程 H , 定义随机积分

$$\int_0^\cdot \int_0^\cdot H(s, t) dB_s dB'_t,$$

使任意 $X \in L^2(\mathcal{F}_{\infty,\infty})$ 都能唯一写成

$$\begin{aligned} X &= E[X] + \int_0^\infty h(s) dB_s + \int_0^\infty h'(t) dB'_t \\ &\quad + \int_0^\infty \int_0^\infty H(s, t) dB_s dB'_t, \end{aligned}$$

其中 h 关于 B 的滤过可预测, h' 关于 B' 的滤过可预测。

3°) 设 $X_{s,t}$ 是关于 $\mathcal{F}_{s,t}$ 适应的双指标过程, 并满足

$$\sup_{s,t} E[X_{s,t}^2] < \infty$$

以及: 当 $s \leq s', t \leq t'$ 时,

$$E[X_{s',t'} | \mathcal{F}_{s,t}] = X_{s,t} \quad \text{a.s.}$$

证明存在 $X \in L^2(\mathcal{F}_{\infty, \infty})$, 使对每对 (s, t) ,

$$X_{s,t} = E[X | \mathcal{F}_{s,t}] \quad \text{a.s.},$$

并把定理 3.4 的表示推广到这一情形。

练习 3.15。

1°) 证明下列随机变量族的线性张成在 $L^2(\mathcal{F}_{\infty})$ 中稠密:

$$Z = \prod_{i=1}^n \int_0^{\infty} e^{-\lambda_i s} f_i(B_s) ds,$$

其中 $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$, 且 f_i 是 $\mathbb{R}$ 上的有界连续函数。

提示: 点质量 ε_t 是一列概率测度在窄拓扑下的极限, 而这些概率测度关于 Lebesgue 测度的密度均为指数函数的线性组合。

2°) 证明 Z 具有命题 3.2 中的表示, 并由此给出命题 3.2 的另一个证明。

练习 3.16。 固定 t , 设 ϕ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界可测函数。对随机变量

$$F = \exp \left(\int_0^t \phi(B_s) ds \right),$$

求出命题 3.2 中的显式表示。

提示: 考察鞅

$$E[F | \mathcal{F}_u], \quad u \leq t.$$

练习 3.17 (高斯混沌)。 设 G 是 $L^2(E, \mathcal{E}, P)$ 的中心高斯子空间, $\mathcal{G}$ 是由 G 生成的子 σ -代数。记 K_n 为下列集合线性张成在 L^2 中的闭包:

$$\{h_n(X) : X \in G, \|X\|_2 = 1\},$$

其中 h_n 是第 IV 章第 3 节定义的第 n 个 Hermite 多项式。

1°) 证明映射

$$X \mapsto \exp(X)$$

是 G 到 $L^2(E, \mathcal{G}, P)$ 的连续映射, 并且其像的线性张成在 $L^2(E, \mathcal{G}, P)$ 中稠密。

2°) 若 $X, Y \in G$, 且 $\|X\|_2 = \|Y\|_2 = 1$, 证明

$$E[h_m(X)h_n(Y)] = \begin{cases} n! E[XY]^n, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

3°) 证明

$$L^2(E, \mathcal{G}, P) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n.$$

4°) 若 G 是布朗运动的高斯空间 (见练习 3.11), 证明第 3° 问的分解与定理 3.7 的分解完全相同。

练习 3.18 (Knight 定理的另一个证明)。

1°) 设 M 是连续 $(\mathcal{F}_t)$ -局部鞅,

$$\langle M, M \rangle_{\infty} = \infty,$$

并设 B 是其 DDS 布朗运动。证明: 对任意 $H \in L^2(\mathcal{F}_{\infty}^B)$, 存在 $(\mathcal{F}_t)$ -可预测过程 K , 使

$$E \left[\int_0^{\infty} K_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] < \infty$$

且

$$H = E[H] + \int_0^{\infty} K_s dM_s.$$

由于 $\mathcal{F}_{\infty}^M$ 可能严格大于 $\mathcal{F}_{\infty}^B$, 这并不意味着 M 具有下一节定义的可预测表示性质。

提示: 对 B 应用命题 3.2, 并使用时间变换。

2°) 在定理 1.9 的情形下, 证明: 对 $H \in L^2(\mathcal{F}_{\infty}^B)$, 存在 $(\mathcal{F}_t)$ -可预测过程 K^i , 使

$$H = E[H] + \sum_i \int_0^{\infty} K_s^i dM_s^i.$$

可以仿照第 1° 问并使用定理 3.4 来证明, 也可以从第 1° 问出发作归纳。

3°) 由上述表示性质推出定理 1.9, 即推出各个 B^i 之间的独立性。

*# 练习 3.19 (超可缩性)。设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的标准高斯测度, 其密度为

$$(2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2).$$

取满足 $|\rho| \leq 1$ 的实数 ρ , 并定义

$$Uf(y) = \int_{\mathbb{R}} f(\rho y + \sqrt{1-\rho^2}x) \mu(dx).$$

当 $\rho = e^{-t/2}$ 时, U 就是由 Ornstein-Uhlenbeck 过程的转移概率给出的算子。

1°) 证明: 对任意 $p \in [1, \infty)$, 正算子 U 把 $L^p(\mu)$ 映入自身, 并且算子范数等于 1。换言之, U 是 $L^p(\mu)$ 上的正压缩算子。

本练习的目标是证明更强的结论: 若

$$1 < p \leq q \leq q_0 = (p-1)\rho^{-2} + 1,$$

则 U 是从 $L^p(\mu)$ 到 $L^q(\mu)$ 的正压缩算子。记 q' 为 q 的共轭指数, 即

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

2°) 设 (Y, Y') 是标准平面布朗运动, 并令

$$X_t = \rho Y_t + \sqrt{1-\rho^2} Y'_t.$$

证明 X 是标准一维布朗运动, 并且对 $f \geq 0$,

$$Uf(Y_1) = E[f(X_1) | Y_1].$$

注意, (X_1, Y_1) 是相关系数为 ρ 的一对标准高斯随机变量; 事实上, 只用这一性质也可以定义 U 。

3°) 设 f, g 是两个有界 Borel 函数, 并且对某个 $\varepsilon > 0$, 有 $f \geq \varepsilon, g \geq \varepsilon$ 。令

$$M = f^p(X_1), \quad N = g^{q'}(Y_1), \quad a = \frac{1}{p}, \quad b = \frac{1}{q'}.$$

把命题 3.2 的表示用在 $[0, 1]$ 而不是 $[0, \infty)$ 上, 证明

$$E[M^a N^b] \leq \|f\|_p \|g\|_{q'}.$$

又因为

$$E[M^a N^b] = \int_{\mathbb{R}} g Uf d\mu,$$

由此推出第 1° 问后陈述的较强压缩结论。

4°) 考虑函数 $f(x) = \exp(zx)$, 其中 $z \in \mathbb{R}$ 。证明当 $q > q_0$ 时, U 作为 $L^p(\mu)$ 到 $L^q(\mu)$ 的算子无界。

5°) **Wiener 混沌的可积性**。沿用练习 3.17 的记号, 证明

$$U h_n = \rho^n h_n,$$

并由 U 的超可缩性推出: 若 $Z \in K_n$, 则对每个 $q > 2$,

$$\|Z\|_q \leq (q-1)^{n/2} \|Z\|_2.$$

再推出存在常数 $\alpha^* > 0$, 使

$$E \left[\exp(\alpha |Z|^{2/n}) \right] \begin{cases} < \infty, & \alpha < \alpha^*, \\ = \infty, & \alpha > \alpha^*. \end{cases}$$

^a校订注: 原书两处均印作 $Z^{2/n}$ 。当 n 为偶数且 $Z < 0$ 时, 这一实数幂没有通常意义; Wiener 混沌的标准指数可积性结论使用 $|Z|^{2/n}$ 。

练习 3.20。 设 $(\Omega, \mathcal{G}_t, P)$ 是滤过概率空间, B 是从 0 出发的 $(\mathcal{G}_t)$ -布朗运动, 并令

$$(\mathcal{F}_t) = (\mathcal{F}_t^B).$$

1°) 若 M 是在 L^2 中有界的 $(\mathcal{G}_t)$ -鞅, 证明

$$X_t = E[M_t | \mathcal{F}_t]$$

是在 L^2 中有界的 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅, 并且具有连续版本。下文均取这一连续版本。

2°) 证明

$$\langle M, B \rangle_t = \int_0^t a_s ds,$$

其中 a 关于 $(\mathcal{G}_t)$ 适应。证明过程

$$t \mapsto E[a_t | \mathcal{F}_t]$$

有一个 $(\mathcal{F}_t)$ -渐进可测版本 H , 并且

$$X_t = E[M_0] + \int_0^t H_s dB_s.$$

提示: 为证明最后一个结论, 让 Y 遍历平方可积的 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅, 并用两种方法计算 $E[M_t Y_t]$.
3°) 若 U 是有界的 $(\mathcal{G}_t)$ -渐进可测过程, 则

$$E \left[\int_0^t U_s dB_s \middle| \mathcal{F}_t \right] = \int_0^t E[U_s | \mathcal{F}_s] dB_s.$$

若 B' 是另一个与 B 独立的 $(\mathcal{G}_t)$ -布朗运动, 则

$$E \left[\int_0^t U_s dB'_s \middle| \mathcal{F}_t \right] = 0.$$

练习 3.21.

- 1°) 设 B 是从 0 出发的一维布朗运动, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$. 证明: 若 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}_\infty$ 的非平凡子 σ -代数, 则不存在一个既是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动、又是 $(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G})$ -布朗运动的过程。
2°) 与此相反, 证明存在 $\mathcal{F}_\infty^B$ 的非平凡子 σ -代数 $\mathcal{G}$, 以及一个既是 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅、又是 $(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G})$ -鞅的过程。

提示: 令

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}_\infty^\beta,$$

其中 β 是 $\mathbf{1}_{\{B \leq 0\}} \cdot B$ 的 DDS 布朗运动, 并取

$$M = \mathbf{1}_{\{B \geq 0\}} \cdot B.$$

* **练习 3.22 (Goswami–Rao 布朗滤过)**. 设 B 是标准布朗运动. 定义 $\mathcal{H}_t$ 为下列随机变量所生成的 σ -代数:

$$\Phi(B_s : s \leq t),$$

其中 Φ 是 $C([0, t], \mathbb{R})$ 上满足

$$\Phi(B_s : s \leq t) = \Phi(-B_s : s \leq t)$$

的可测函数。

- 1°) 证明下列包含关系均为严格包含:

$$\mathcal{F}_t^{|B|} \subsetneq \mathcal{H}_t \subsetneq \mathcal{F}_t^B.$$

提示: 当 $s < t$ 时, 随机变量 $\text{sgn}(B_s B_t)$ 关于 $\mathcal{H}_t$ 可测, 但不关于 $\mathcal{F}_t^{|B|}$ 可测。

- 2°) 设 $Y \in L^2(\mathcal{F}_t^B)$, 其中 $t \leq \infty$. 证明在定理 3.7 的记号下,

$$E[Y | \mathcal{H}_t] = E[Y] + \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(f^{2p})(t),$$

其中 $J_n(f^n)(t)$ 表示 $J_n(f^n)$ 中的第一个积分只积分到时刻 t . 由此推出, 每个 $(\mathcal{H}_t)$ -鞅都是 $(\mathcal{F}_t^B)$ -鞅。

3°) 继而证明: 每个 $(\mathcal{H}_t)$ -鞅 M 都可写成

$$M_t = c + \int_0^t m(s) d\beta_s,$$

其中

$$\beta_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s$$

是 $(\mathcal{H}_t)$ -布朗运动, 而 m 关于 $(\mathcal{H}_t)$ 可预测。

事实上, 滤过 $\mathcal{F}_t^{|\beta|}$ 由 β 生成; 见第 VI 章推论 2.2。下一问说明 $(\mathcal{H}_t)$ 本身也是某个布朗运动的自然滤过。

4°) 设 $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ 是递增的正实数列, 并满足

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} t_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty.$$

证明 $(\mathcal{H}_t)$ 是布朗运动

$$\gamma_t = \int_0^t \mu_s dB_s$$

的自然滤过, 其中当 $s \in (t_n, t_{n+1}]$ 时,

$$\mu_s = \operatorname{sgn}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}).$$

4 积分表示

定义 4.1 (可预测表示性质)。称连续局部鞅 X 具有可预测表示性质 (predictable representation property, 简称为 PRP), 如果对任意 $(\mathcal{F}_t^X)$ -局部鞅 M , 都存在一个 $(\mathcal{F}_t^X)$ -可预测过程 H , 使

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dX_s.$$

上一节已经证明布朗运动具有 PRP。本节要研究具有 PRP 的连续局部鞅类。我们先给出一个与第 IV 章练习 5.11 密切相关的引理。

引理 4.2。设 X 是任意连续局部鞅。每个从 0 出发的 $(\mathcal{F}_t^X)$ -连续局部鞅 M , 都可唯一写成

$$M = H \cdot X + L,$$

其中 H 可预测, 并且

$$\langle X, L \rangle = 0.$$

证明。唯一性由通常的正交性论证立即得到。

为证明分解的存在性, 先取一列递增到无穷的停时, 使它们同时局部化 M 与 X , 并从中固定一个停时 T 。在 Hilbert 空间 H_0^2 中, 子空间

$$G = \{H \cdot X^T : H \in L^2(X^T)\}$$

容易看出是闭的。因此存在唯一分解

$$M^T = \bar{H} \cdot X^T + \bar{L}, \quad \bar{L} \in G^\perp.$$

对任意有界停时 S , 有

$$\begin{aligned} E[X_S^T \bar{L}_S] &= E[X_S^T E[\bar{L}_\infty | \mathcal{F}_S]] \\ &= E[X_S^T \bar{L}_\infty] = 0, \end{aligned}$$

因为 $X^{T \wedge S} \in G$. 由第 II 章命题 3.5, $X^T \bar{L}$ 是鞅, 因而

$$\langle X^T, \bar{L} \rangle = \langle X, \bar{L} \rangle^T = 0.$$

利用唯一性, 在不同局部化区间上得到的 $\bar{H}, \bar{L}$ 可以拼接成满足结论的过程 H, L .

从现在起, 我们在典范空间

$$W = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

上工作. 坐标过程记为 X , 并令

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s : s \leq t).$$

记 $\mathcal{H}$ 为 W 上所有使 X 成为局部鞅 (显然连续) 的概率测度的集合. 若 $P \in \mathcal{H}$, 则 $(\mathcal{F}_t^P)$ 表示满足下列条件的最小滤过: 它右连续、关于 P 完备, 并且 $\mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_t^P$. 于是 PRP 也可以看成测度 P 的性质: 任意 $(\mathcal{F}_t^P)$ -局部鞅 M 都可写成 $M = M_0 + H \cdot X$, 其中 H 关于 $(\mathcal{F}_t^P)$ 可预测, 随机积分按 P 定义.

再记 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{H}$ 中所有使 X 成为真鞅的概率测度组成的子集. 集合 $\mathcal{K}$ 与 $\mathcal{H}$ 都是凸集; 见第 IV 章练习 1.37. 回顾如下定义.

定义 4.3 (极端测度). 设 $P \in \mathcal{K}$ (相应地, $P \in \mathcal{H}$). 若每当

$$P = \alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2, \quad 0 < \alpha < 1,$$

且 $P_1, P_2 \in \mathcal{K}$ (相应地, $P_1, P_2 \in \mathcal{H}$) 时, 必有

$$P = P_1 = P_2,$$

则称 P 是 $\mathcal{K}$ (相应地, $\mathcal{H}$) 中的极端测度.

下面研究极端概率测度, 并把极端性与 PRP 联系起来. 我们需要以下测度论结果.

定理 4.4 (Douglas). 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间, $\mathcal{L}$ 是一族实值 $\mathcal{F}$ -可测函数, $\mathcal{L}^*$ 是由常函数 1 与 $\mathcal{L}$ 生成的向量空间. 令 $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ 为所有满足下列条件的 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上概率测度 μ 的集合:

$$\mathcal{L} \subset L^1(\mu), \quad \int f d\mu = 0 \quad \text{对每个 } f \in \mathcal{L}.$$

则 $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ 是凸集; 而且, μ 是 $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ 的极端点, 当且仅当 $\mathcal{L}^*$ 在 $L^1(\mu)$ 中稠密.

证明. $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ 的凸性显然.

先设 $\mathcal{L}^*$ 在 $L^1(\mu)$ 中稠密, 并且

$$\mu = \alpha \nu_1 + (1 - \alpha) \nu_2, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}.$$

因为 $\nu_i = h_i \mu$, 其中 h_i 有界, 所以 $\mathcal{L}^*$ 在 $L^1(\nu_i)$ 中也稠密, $i = 1, 2$. 又因为 ν_1, ν_2 在 $\mathcal{L}^*$ 上的积分相同, 故 $\nu_1 = \nu_2$.

反之, 设 $\mathcal{L}^*$ 在 $L^1(\mu)$ 中不稠密. 由 Hahn-Banach 定理, 存在非零有界函数 h , 使

$$\int h f d\mu = 0 \quad \text{对每个 } f \in \mathcal{L}^*;$$

还可以令 $\|h\|_\infty \leq 1/2$. 于是

$$\nu^+ = (1 + h)\mu, \quad \nu^- = (1 - h)\mu$$

显然都属于 $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$, 而 $\mu = (\nu^+ + \nu^-)/2$, 所以 μ 不是极端点。

现在考虑 $(W, \mathcal{F}_\infty^0)$, 并取

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{1}_A(X_t - X_s) : 0 \leq s < t, A \in \mathcal{F}_s^0\}.$$

定理 4.4 中的 $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ 恰好就是使 X 成为鞅的概率测度集合 $\mathcal{K}$. 由定理 4.4 得到:

命题 4.5. 若 P 是 $\mathcal{K}$ 中的极端测度, 则每个 $(\mathcal{F}_t^P)$ -局部鞅都有连续版本。

证明. 只需证明: 对任意 $Y \in L^1(P)$, 右连续有左极限鞅

$$E_P[Y | \mathcal{F}_t^P]$$

实际上有连续版本. 当 $Y \in \mathcal{L}^*$ 时, 这一点容易验证. 对一般的 $Y \in L^1(P)$, 由定理 4.4, 存在 $(Y_n) \subset \mathcal{L}^*$, 使 $Y_n \rightarrow Y$ 于 $L^1(P)$. 由第 II 章定理 1.7, 对每个 $\varepsilon > 0$ 、每个 t 以及每个 n ,

$$P \left[\sup_{s \leq t} |E_P[Y_n | \mathcal{F}_s^P] - E_P[Y | \mathcal{F}_s^P]| \geq \varepsilon \right] \leq \varepsilon^{-1} E[|Y_n - Y|].$$

再按第 IV 章命题 1.22 的论证, 即得结论。

定理 4.6. 概率测度 P 是 $\mathcal{K}$ 中的极端测度, 当且仅当 P 具有 PRP, 并且 $\mathcal{F}_0^P$ 在 P -几乎处处意义下平凡。

证明. 先设 P 极端, 则 $\mathcal{F}_0^P$ 显然平凡. 若 PRP 不成立, 由引理 4.2 与命题 4.5, 存在非零连续局部鞅 L , 使

$$\langle X, L \rangle = 0.$$

经过停时局部化, 并利用 $\langle X, L^T \rangle = \langle X, L \rangle^T$, 可以设 $|L| \leq k$, 其中 k 是常数. 于是概率测度

$$P_1 = \left(1 + \frac{L_\infty}{2k}\right) P, \quad P_2 = \left(1 - \frac{L_\infty}{2k}\right) P$$

都属于 $\mathcal{K}$, 而

$$P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2),$$

这与 P 的极端性矛盾。

反之, 设 P 具有 PRP, $\mathcal{F}_0^P$ 在 P -几乎处处意义下平凡, 并且

$$P = \alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2, \quad 0 < \alpha < 1, \quad P_i \in \mathcal{K}.$$

P -鞅

$$L_t = E_P \left[\frac{dP_1}{dP} \middle| \mathcal{F}_t^P \right]$$

由 PRP 有连续版本。由于 XL 也是连续 P -鞅，故 $\langle X, L \rangle = 0$ 。另一方面，PRP 给出

$$L_t = L_0 + \int_0^t H_s dX_s,$$

从而

$$\langle X, L \rangle_t = \int_0^t H_s d\langle X, X \rangle_s.$$

因此 $H = 0$ 在 $d\langle X, X \rangle_s \otimes dP$ -几乎处处意义下成立，进而

$$\int_0^t H_s dX_s = 0 \quad \text{a.s.}$$

故 L 是常数并等于 L_0 。又因 $\mathcal{F}_0^P$ 平凡且 $E[L_0] = 1$ ，可知 $L = 1$ ，所以 $P = P_1$ 。这证明 P 极端。

评注。由第 3 节的结果，Wiener 测度 W 显然是极端的；也可以直接证明这一事实。设 $Q \in \mathcal{K}$ 且 $Q \ll W$ 。由 $\langle X, X \rangle$ 的定义，以及 W -概率收敛蕴含 Q -概率收敛这一事实，在 Q 下仍有

$$\langle X, X \rangle_t = t.$$

由 P. Lévy 特征定理， X 在 Q 下是布朗运动，因而 $Q = W$ 。这证明 W 极端。结合本节的结果，这一论证还给出了定理 3.3 的另一个证明。

下面把定理 4.6 从 $\mathcal{K}$ 推广到 $\mathcal{H}$ 。证明只涉及技术细节，以下仅给出梗概，并把测度论细节留给读者补足。

定理 4.7。 概率测度 P 是 $\mathcal{H}$ 中的极端测度，当且仅当 P 具有 PRP，并且 $\mathcal{F}_0^P$ 在 P -几乎处处意义下平凡。

证明。 定理 4.6 证明的后一部分对 $\mathcal{H}$ 与对 $\mathcal{K}$ 同样适用。因此，只需证明：若 P 在 $\mathcal{H}$ 中极端，则 $\mathcal{F}_0^P$ 几乎必然平凡（这是显然的），并且 P 具有 PRP。

令

$$T_n = \inf\{t : |X_t| > n\}.$$

证明思路是：若 P 在 $\mathcal{H}$ 中极端，则对每个 n ， X^{T_n} 在 P 下的分布都是 $\mathcal{K}$ 中的极端测度。于是 PRP 在 T_n 之前成立，进而对每个时刻都成立。

固定 n 。停时 T_n 是 $(\mathcal{F}_t^0)$ -停时，而且 $\mathcal{F}_{T_n}^0$ 可数生成。因此存在 P 关于 $\mathcal{F}_{T_n}^0$ 的正则条件分布 $Q(\omega, \cdot)$ 。可以选取一个版本，使对每个 ω ，过程

$$X_t - X_{T_n \wedge t}$$

在 $Q(\omega, \cdot)$ 下都是局部鞅。

假设 X^{T_n} 在 P 下的分布（记为 P^{T_n} ）不是极端测度。则存在两个不同的概率测度 π_1, π_2 以及某个 $\alpha \in (0, 1)$ ，使

$$P^{T_n} = \alpha\pi_1 + (1 - \alpha)\pi_2.$$

可把 π_1, π_2 看作 $\mathcal{F}_{T_n}^0$ 上的概率测度。因为

$$\mathcal{F}_{T_n}^0 \vee \theta_{T_n}^{-1}(\mathcal{F}_\infty^0) = \mathcal{F}_\infty^0,$$

可以证明：在 $\mathcal{F}_\infty^0$ 上存在唯一的两个概率测度 P_i ，满足对分别为 $\mathcal{F}_{T_n}^0$ -可测和 $\theta_{T_n}^{-1}(\mathcal{F}_\infty^0)$ -可测的随机变量 H, K ，

$$\int HK \, dP_i = \int \pi_i(d\omega) H(\omega) \int Q(\omega, d\omega') K(\omega').$$

在 P_i 下，坐标过程 X 是连续局部鞅，并且

$$P = \alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2,$$

这与 P 的极端性矛盾。证明完成。

定理 4.7 的等价性质在许多场合都很重要。不过，与离散时间情形相反（参见本章注释与评述），判断一个给定局部鞅是否极端通常并不容易；除定理 4.7 的刻画外，目前没有已知的极端局部鞅类的其他刻画。本节余下部分给出一些有助于处理这一问题的说明。由练习 3.18 已可猜到， X 的 PRP 与它的 DDS 布朗运动的性质有关。

定义 4.8 (相对于给定滤过的 PRP)。设连续局部鞅 X 关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 适应。若任意从零出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -局部鞅都等于 $H \cdot X$ ，其中 H 是适当的 $(\mathcal{F}_t)$ -可预测过程，则称 X 具有 $(\mathcal{F}_t)$ -PRP。

虽然 $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ ，但 $(\mathcal{F}_t)$ -PRP 并不蕴含 PRP；见练习 4.22。此外，若把 $(\mathcal{F}_t)$ -极端性定义为下列集合中的极端性：所有使 X 成为 $(\mathcal{F}_t, Q)$ -局部鞅的概率测度 Q ，那么把定理 4.7 推广到这一情形并不困难。

以下设 X 是 P -连续局部鞅，并假设

$$\langle X, X \rangle_\infty = \infty.$$

用 B 表示 X 的 DDS 布朗运动。

定理 4.9。下列两个性质等价：

- i) X 具有 PRP；
- ii) B 具有 $(\mathcal{F}_{T_t}^X)$ -PRP，其中 T 是 $\langle X, X \rangle$ 的右连续逆。

证明。作为时间变换的练习留给读者。

下面给出另一种把 X 的 PRP 与其 DDS 布朗运动联系起来的有用方法。

定义 4.10 (纯局部鞅)。设连续局部鞅 X 满足 $\langle X, X \rangle_\infty = \infty$ ，其 DDS 布朗运动为 B 。若

$$\mathcal{F}_\infty^X = \mathcal{F}_\infty^B,$$

则称 X 是纯局部鞅，简称纯鞅。

由练习 1.19， X 为纯鞅，当且仅当下列任一等价条件成立：

- i) 对每个 t ，停时 T_t 关于 $\mathcal{F}_\infty^B$ 可测；
- ii) 对每个 t ， $\langle X, X \rangle_t$ 关于 $\mathcal{F}_\infty^B$ 可测。

练习 4.16 还会给出与纯性等价的更精确条件。命题 1.11 给出了 X 为纯鞅的一个充分条件；定理 2.11 已经证明：若 ρ_t 是从 $a \neq 0$ 出发的二维布朗运动的模，则 $\log \rho_t$ 是纯局部鞅。

读者还将作为练习证明：纯鞅恰好是这样的鞅——把鞅路径映到相应 DDS 布朗运动路径的映射是一一映射。引入这一概念的理由在于下面的结果；它也可由练习 3.18 推出。若局部鞅的分布在 $\mathcal{H}$ 中是极端测度，就称该局部鞅是极端局部鞅。

命题 4.11。 纯局部鞅必为极端局部鞅。

证明。 设 P 是使典范过程 X 成为纯局部鞅的概率测度。若 $Q \in \mathcal{H}$ 且 $Q \ll P$ ，则在 P 下计算的 $\langle X, X \rangle_t$ 也是在 Q 下计算的 $\langle X, X \rangle_t$ 的一个版本。因此， X 在 P 下的 DDS 布朗运动 B ，也是它在 Q 下的 DDS 布朗运动的一个版本。于是 P, Q 在

$$\sigma(B_s : s \geq 0)$$

上一致，因而也在该 σ -代数关于 P 的完备化上一致。由于 P 下的 X 是纯鞅，这一完备化包含 $\sigma(X_s : s \geq 0)$ ，所以 $P = Q$ 。

逆命题不成立；见练习 4.16。不过，纯性有时比极端性容易验证，所以命题 4.11 可以用来构造极端鞅的例子；见第 IX 章练习 3.11。

练习 4.12。 沿用本节记号。若 $P \in \mathcal{H}$ ，并且不存在另一个与 P 等价的概率测度 $Q \in \mathcal{H}$ ，则称 P 是标准的。证明： P 标准，当且仅当 P 具有 PRP，并且 $\mathcal{F}_0^P$ 在 P -几乎处处意义下平凡。

练习 4.13。 设 (B^1, B^2) 是二维布朗运动。证明

$$X_t = \int_0^t B_s^1 dB_s^2$$

不具有 PRP。

提示：过程

$$(B_t^1)^2 - t$$

是一个 $(\mathcal{F}_t^X)$ -鞅，但不能写成关于 X 的随机积分。

* **练习 4.14。** 设 X 是关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 的连续局部鞅。记 Δ 为 $\mathbb{R}_+$ 上所有实值、有界且具有紧支集的函数组成的空间。

1° 证明：若对每个 t ，随机变量族

$$\mathcal{E}_t^f = \mathcal{E} \left(\int_0^t f(s) dX_s \right)_t, \quad f \in \Delta,$$

在 $L^2(\mathcal{F}_t, P)$ 中完备，则 $\mathcal{F}_0^P$ 在 P -几乎处处意义下平凡，并且 X 具有 $(\mathcal{F}_t)$ -PRP。

2° 把上述随机变量族改为

$$H_n \left(\int_0^t f(s) dX_s, \int_0^t f^2(s) d\langle X, X \rangle_s \right), \quad f \in \Delta, \quad n \in \mathbb{N},$$

证明同样的结论。其中 H_n 是第 IV 章第 3 节定义的 Hermite 多项式。

练习 4.15.

- 1° 设 B 是标准一维布朗运动, $(\mathcal{F}_t)$ 是布朗滤过, H 是 $(\mathcal{F}_t)$ -可预测过程; 除去一个可能依赖于 ω 的 Lebesgue 零测集外, H 几乎必然严格为正。证明鞅

$$M_t = \int_0^t H_s dB_s$$

具有 PRP。

提示: 利用命题 3.8 的思路证明

$$\mathcal{F}_\infty^M = \mathcal{F}_\infty^B.$$

- 2° 特别地, 对 $n \in \mathbb{N}$, 鞅

$$M_t^n = \int_0^t B_s^n dB_s$$

是极端鞅。当 n 为奇数时, 这些鞅实际上是纯鞅; 这一点将在第 IX 章练习 3.11 中证明。

- 3° 设 T 是一个非常值、平方可积的 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。证明

$$Y_t = B_t - B_{t \wedge T}$$

不是极端鞅。

提示: T 是 $(\mathcal{F}_t^Y)$ -停时, 却不能表示为一个常数加上关于 Y 的随机积分。

*# 练习 4.16 (非纯极端局部鞅的例子)。

- 1° 设 $(\mathcal{F}_t)$ 与 $(\mathcal{G}_t)$ 是两个滤过, 并且对每个 t ,

$$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t.$$

证明下列两个条件等价:

- i) 每个 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅都是 $(\mathcal{G}_t)$ -鞅;
 - ii) 对每个 t , σ -代数 $\mathcal{F}_\infty$ 与 $\mathcal{G}_t$ 在给定 $\mathcal{F}_t$ 的条件下条件独立。
- 若这些条件成立, 证明

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \cap \mathcal{F}_\infty.$$

- 2° 设 M 是具有 $(\mathcal{F}_t)$ -PRP 的连续 $(\mathcal{F}_t)$ -局部鞅。若滤过 $(\mathcal{G}_t)$ 满足

$$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_\infty \quad \text{对每个 } t,$$

并且 M 是 $(\mathcal{G}_t)$ -局部鞅, 证明

$$(\mathcal{F}_t) = (\mathcal{G}_t).$$

- 3° 设 M 是满足 $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ 的连续局部鞅, B 是它的 DDS 布朗运动。证明: M 是纯鞅, 当且仅当对每个 t , $\langle M, M \rangle_t$ 是一个 $(\mathcal{F}_u^B)$ -停时 (这里把 t 固定, 而 u 是滤过的时间参数)。

提示: 先证明: 若 M 为纯鞅, 则

$$\mathcal{F}_t^B = \mathcal{F}_t^M.$$

进一步证明: 若 M 为纯鞅, 则对任意 $(\mathcal{F}_t^M)$ -停时 T , 随机变量 $\langle M, M \rangle_T$ 是 $(\mathcal{F}_t^B)$ -停时。这个结论与后文无关。

4° 证明 M 为纯鞅, 当且仅当对每个 t ,

$$\mathcal{F}_t^M = \mathcal{F}_{\langle M, M \rangle_t}^B.$$

5° 以下设 β 是标准布朗运动, 并令

$$\tilde{\beta}_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s) d\beta_s.$$

第 VI 章第 2 节将证明 $\tilde{\beta}$ 是布朗运动, 而且对每个 t ,

$$\mathcal{F}_t^{\tilde{\beta}} = \mathcal{F}_t^{|\beta|}.$$

证明 $\tilde{\beta}$ 具有 $(\mathcal{F}_t^{\tilde{\beta}})$ -PRP。

6° 令

$$T_t = \int_0^t \left(2 + \frac{\beta_s}{1 + |\beta_s|} \right) ds,$$

并注意对每个 t ,

$$\mathcal{F}_t^T = \mathcal{F}_t^\beta.$$

设 A 是 T 的逆, 并定义

$$M_t = \tilde{\beta}_{A_t}.$$

证明 M 具有 PRP, 但不是纯鞅。

提示: 证明

$$\mathcal{F}_{T_t}^M = \mathcal{F}_t^\beta,$$

并使用定理 4.9。

练习 4.17. 证明: 满足 $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ 的高斯鞅 M 是纯鞅。特别地, 对任意非零实数 α , αB 是纯鞅。^a

^a校订注: 原书写作“对任意实数 α ”。但当 $\alpha = 0$ 时, $\langle \alpha B, \alpha B \rangle_\infty = 0$, 不满足定义 4.10 中纯鞅必须具有无穷二次变差的前提; 一般的高斯鞅也须明确保留这一前提。

练习 4.18. 设 M 是纯连续局部鞅, C 是一个 $(\mathcal{F}_t^M)$ -时间变换, 并且 M 关于 C 连续。证明

$$\widehat{M} = M_C$$

仍是纯鞅。

练习 4.19. 设 M 是具有 $(\mathcal{F}_t)$ -PRP 的连续局部鞅。

1° 证明

$$S = \inf\{t : M_{t+u} = M_t \text{ 对每个 } u > 0\}$$

是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。

2° 对每个 ω , 令 $H(\omega)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 中满足下列性质的最大开集: $M(\omega)$ 在它的每个连通分支上

为常数。证明存在两列 $(\mathcal{F}_t)$ -停时 $(S_n), (T_n)$, 使

$$H = \bigcup_n (S_n, T_n),$$

而各区间 (S_n, T_n) 恰好就是 H 的全部连通分支。

提示: 对 $\varepsilon > 0$, 把 $(S_n^\varepsilon, T_n^\varepsilon)$ 记为 H 中第 n 个长度大于 ε 的区间。注意 $S_n^\varepsilon + \varepsilon$ 是停时, 并证明 S_n^ε 本身也是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。

练习 4.20。

1° 若 M 是极端连续局部鞅, 并且 $(\mathcal{F}_t^M)$ 是某个布朗运动的滤过, 证明随机测度

$$d\langle M, M \rangle_s$$

几乎必然与 Lebesgue 测度等价。

** 设 F 是中间四分之一 Cantor 集, 并令

$$M_t = \int_0^t \mathbf{1}_{F^c}(B_s) dB_s,$$

其中 B 是从 0 出发的一维布朗运动。证明

$$(\mathcal{F}_t^M) = (\mathcal{F}_t^B),$$

并由此推出 M 不具有 PRP。

练习 4.21。 设 β 是标准一维布朗运动, 并令

$$M_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s > 0\}} d\beta_s.$$

再令

$$\sigma = \mathbf{1}_{\{\beta_1 < 0\}} + \infty \mathbf{1}_{\{\beta_1 \geq 0\}},$$

以及

$$\tau = \sigma + \inf \left\{ \varepsilon : \int_1^{1+\varepsilon} \mathbf{1}_{\{\beta_s > 0\}} ds > 0 \right\}.$$

考察随机变量 $\exp(-\tau)$, 证明 M 不具有 PRP。

* 练习 4.22。

1° 设 $(\mathcal{F}_t)$ 与 $(\mathcal{G}_t)$ 是两个滤过, 并且 $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ 对每个 t 成立。设 M 是连续 $(\mathcal{F}_t)$ -局部鞅, 关于 $(\mathcal{G}_t)$ 适应, 并且具有 $(\mathcal{F}_t)$ -PRP。证明下列三个条件等价:

- i) M 具有 $(\mathcal{G}_t)$ -PRP;
- ii) 每个 $(\mathcal{G}_t)$ -鞅都是 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅;
- iii) 每个 $(\mathcal{G}_t)$ -鞅都是连续的 $(\mathcal{F}_t)$ -半鞅。

2° 设 B 是标准一维布朗运动, $(\mathcal{F}_t)$ 是布朗滤过。固定 $t_0 > 0$, 并令

$$N_t = \int_0^t [\mathbf{1}_{\{s < t_0\}} + (2 + \operatorname{sgn}(B_{t_0})) \mathbf{1}_{\{t_0 \leq s\}}] \operatorname{sgn}(B_s) dB_s.$$

证明 N 具有 $(\mathcal{F}_t)$ -PRP, 却不具有 PRP。

提示: 过程

$$H_t = \operatorname{sgn}(B_{t_0}) \mathbf{1}_{\{t_0 \leq t\}}$$

是一个不连续的 $(\mathcal{F}_t^N)$ -鞅。

* **练习 4.23.** 设 β 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。假设存在连续严格递增过程 A_t , 其逆为 τ_t , 并满足

$$A_t \geq t, \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}^A.$$

令

$$X_t = \beta_{\tau_t}.$$

1° 证明 X 为纯鞅, 当且仅当

$$\mathcal{F}_\infty^\beta = \mathcal{F}_\infty.$$

2° 证明 X 为极端鞅, 当且仅当 β 具有 $(\mathcal{F}_t)$ -PRP。

** **练习 4.24.**

1° 沿用第 IV 章练习 3.29 的记号, 证明下列两个条件等价:

i) X 具有 $(\mathcal{F}_t)$ -PRP;

ii) 对任意使 X 成为 (Q, P) -局部鞅的 Q , 都存在常数 c , 使 $Q = cP$ 。

2° 利用第 IV 章练习 3.29, 给出 Wiener 测度极端性的另一个证明, 从而也给出定理 3.3 的另一个证明。

练习 4.25 (PRP 与独立性).

1° 证明: 若两个连续 $(\mathcal{F}_t)$ -局部鞅 M, N 相互独立, 则它们正交, 即乘积 MN 是 $(\mathcal{F}_t)$ -局部鞅; 参见第 IV 章练习 2.22。再在适当滤过中给出彼此正交但不独立的局部鞅对的例子。

2° 证明: 若 M, N 都具有 PRP, 则它们正交, 当且仅当它们相互独立。

3° 设 B 是标准布朗运动, 并令

$$M_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} dB_s, \quad N_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s < 0\}} dB_s.$$

证明这两个鞅不独立, 并由此推出二者都不具有 PRP。事实上, 存在不连续的 $(\mathcal{F}_t^M)$ -鞅。

注释与评述

第 1 节. 时间变换技巧源于 Lebesgue; 它在随机过程中的应用有很长的历史, 至少可以追溯到 Hunt [1]、Volkonski [1] 与 Itô-McKean [1]。命题 1.5 由 Kazamaki [1] 证明, 该文引入了 C -连续性概念, 不过使用的术语与本书不同。

对没有常值区间的鞅, 定理 1.6 见 Dubins-Schwarz [1], 也见 Dambis [1]。本书的表述与证明取自 Neveu [2]。这个结果虽优美而有力, 却不能直接说明给定连续鞅 M 的分布; 分布取决于与 M 对应的 DDS 布朗运动和 M 的递增过程之间的随机依赖关系。还应提到, Monroe [1] 证明: 允许加入额外的随机化以后, 每个半鞅都能通过时间变换嵌入布朗运动。命题 1.8 来自 Lenglart [1]; 另见 Doss-Lenglart [1]。

正文中 Knight 定理 (Knight [3]) 的证明来自 Coccozza–Yor [1], 练习 3.18 中的证明来自 Meyer [3]。Knight 定理有许多应用, 例如本章第 2 节以及第 VI 章用它证明反正弦律。也许更重要的是它的渐近版本; 第 XIII 章第 2 节将讨论并使用这一版本。关于一个有趣的部分逆命题, 参见 Kurtz [1]。

练习 1.16 取自 Lépingle [1], 练习 1.21 取自 Barlow [1], 练习 1.12 取自 Bismut [2]。

第 2 节。 Gettoor 与 Sharpe [1] 巧妙地引入了共形鞅, 用以证明在鞅论背景下 H^1 的对偶是 BMO。他们对连续鞅的证明尤其使用了如下事实: 若 Z 共形且 $\alpha > 0$, 则 $|Z|^\alpha$ 是局部下鞅。不久以后, P. A. Meyer 把这一对偶性结果推广到了不连续鞅。本节最初的几个结果取自 Gettoor 与 Sharpe 的论文。

布朗运动的共形不变性是 P. Lévy 的一个基本结果, 在研究二维布朗路径时有许多应用。本书给出的应用取自 B. Davis [1]、McKean [2] 与 Lyons–McKean [1]。关于平面布朗运动与复函数论之间的联系, 可参阅 B. Davis [1, 3] 对 Picard 定理的精彩概率证明, 以及 Carne [2] 和 Atsuji [1, 2] 关于 Nevanlinna 理论的论文。

关于斜积分分解表示的起源, 参见 Galmarino [1] 与 McKean [2]; 推广见 Graversen [2] 和 Pauwels–Rogers [1]。涉及 Bessel 过程的一些例子见 Warren–Yor [1]。

练习 2.13 的例子最早由 Johnson 与 Helms [1] 给出; 练习 2.17 中 d'Alembert 定理的证明由 Kono [1] 给出。练习 2.19 取自 Yor [2], 更一般的结果见 Ikeda–Manabe [1]。练习 2.14 的结果与方法见 Itô–McKean [1]。练习 2.16 取自 Williams [4], 并通向他的 “pinching” 方法; 见 Messulam–Yor [1]。

练习 2.24 取自 Calais–Génin [1], 它建立在 Walsh [1] 的早期工作上。练习 2.25 源于 McKean [1]。Itô–McKean [1] 把练习 2.21 归于 H. Sato; 同一练习也见 Burkholder [3], 而其第 2° 问中的充要条件已经出现在 Spitzer [1] 中。

练习 2.26 部分讨论了平面布朗运动的极函数。这个主题始于 Graversen [1], 第 I 章练习 1.20 也取自该文。Graversen 得到的一些部分结果后来由 Le Gall [6] 改进。尽管如此, 下面的问题仍然开放。

问题 1。 二维布朗运动的极函数有哪些?

练习 2.26 的结果可以看作下面问题的一个部分答案。

问题 2。 哪些二维连续半鞅具有如下性质: 每个单点集都是极集?

部分答案见 Bismut [2] 与 Idrissi–Khamlichi [1]。即使半鞅的鞅部分是二维布朗运动, 答案仍未知。练习 2.26 是一个特殊情形, 另一个特殊情形见 Sznitman–Varadhan [1]。

练习 2.27 取自 Yor [3] 与 Idrissi–Khamlichi [1]。Yor 的论文提出了若干开放问题, 其中之一如下。沿用练习 2.27 的记号, 若 a 是 X_γ 的极点, 则 X_γ 关于 a 的绕数有定义; Yor [3] 证明, 该绕数的分布以整个整数集为支集。

问题 3。 X_γ 关于 a 的绕数服从什么分布?

可将这一问题与第 VIII 章练习 2.15 比较。

第 3 节。 本节最初的结果见 Doob [1], 它们是随机积分理论最早取得的重大成功之一。这些结果也可看作 Wiener [2] 在布朗运动情形下发现的混沌分解的推论; Itô 后来把该分解推广到独立增量过程。更一般、更抽象的版本见 Neveu [1]; 另见练习 3.17。

定理 3.5 与混沌分解在 Malliavin 微积分和滤波理论中都起重要作用, 而这两个主题恰是本书

的重要缺项。前者可参阅 Ikeda–Watanabe [2]、Nualart [2] 与 Stroock [3]，后者可参阅 Kallianpur [1]；Rogers–Williams [1] 也有一段简短而出色的讨论。本书散见若干滤波理论练习，例如第 IV 章练习 5.15，以及本节取自 Liptser–Shiryaev [1] 的练习 3.20。

本书对定理 3.9 的叙述遵循 Jacod [2]。练习 3.12 取自 Lane [1]，练习 3.13 受 Chen [1] 启发，练习 3.14 由 Rosen 与 Yor [1] 给出，练习 3.19 取自 Neveu [3]，其中最后一问取自 Ledoux–Talagrand [1]。练习 3.22 的来源是 Goswami–Rao [1]，其第 4° 问取自 Attal 等 [1]。

第 4 节。 本节的思想最早由 Dellacherie [1] 在布朗运动与 Poisson 过程的情形下提出，后来在许多论文中得到扩展，例如 Jacod [1]、Jacod–Yor [1] 与 Yor [6]。本书证明定理 4.6 的方法来自 Stroock–Yor [1]。Ruiz de Chavez [1] 引入符号测度给出了另一个证明；见练习 4.24。纯鞅概念由 Dubins 与 Schwarz [2] 引入。

除练习 4.20 取自 Knight [7]、练习 4.19 取自 Stricker [2] 外，本节大多数练习来自 Stroock–Yor [1, 2] 与 Yor [9]。练习 4.12 取自 Yan–Yoeurp [1]。Azéma–Rainer [1] 补充了练习 4.25 的结果，并描述了所有 $(\mathcal{F}_t^M)$ -鞅。

本节结果不够令人满意之处在于：由于没有极端鞅的显式描述，它们往往只有“理论”意义；关于离散时间情形可以得到的结果，参见 Dubins–Schwarz [2]。通常甚至很难判断一个特定鞅究竟是极端的、纯的，还是两者都不是。本节练习给出了一些例子；更多例子见第 VI 章练习 4.19、第 IX 章各练习以及前述论文。例如，Knight [7] 刻画了 $\mathbb{R}^d$ 、 $d > 1$ 上所有使 $f(B_t)$ 成为纯鞅的调和函数 f 。不过，这一主题仍有许多开放问题；其中一些已经出现在本书前两版中。

下面叙述作者当时（即 1998 年）对这一问题的认识；相关进展主要由 Tsirel’son [1, 2] 及其合作者开创。先引入以下重要概念。

定义（弱布朗滤过与强布朗滤过）。 设概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 满足 $\mathcal{F}_0$ 在 P -几乎处处意义下平凡。若存在一个 $(\mathcal{F}_t)$ -一维布朗运动 β ，使 β 具有 $(\mathcal{F}_t)$ -PRP，则称 $(\mathcal{F}_t)$ 是弱布朗滤过；若还可以使

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^\beta \quad \text{对每个 } t,$$

则称它是强布朗滤过。以下分别简写为 W.B. 与 S.B.

对布朗滤过施加“温和”扰动，可以得到许多弱布朗滤过。下面是两个例子。

(P1) 局部绝对连续。 若 $(\mathcal{F}_t)$ 是 W.B.，并且按第 VIII 章的记号有

$$Q \triangleleft P,$$

则在 Q 下， $(\mathcal{F}_t)$ 仍是 W.B.

(P2) 时间变换。 若 $(\mathcal{F}_t)$ 是 W.B.，而 (σ_t) 是与

$$A_t = \int_0^t H_s \, ds$$

对应的时间变换，其中 $H_s > 0$ 在 $dP \otimes ds$ -几乎处处意义下成立，并且 $A_\infty = \infty$ 几乎必然成立，则在 P 下， $(\mathcal{F}_{\sigma_t})$ 仍是 W.B.

一个通常很困难、却很重要的问题是：

问题 Q. 给定一个 W.B. 滤过 $(\mathcal{F}_t)$, 它是否为 S.B.? 若是, 能否显式描述至少一个生成该滤过的一维布朗运动?

Tsirel'son [1] 给出了一个优美而显式的 W.B. 滤过例子, 其中某个布朗运动并不生成整个滤过; 证明见第 IX 章命题 3.6. Feldman–Smorodinsky [1] 给出了同类但更简单的例子。Émery–Schachermayer [2] 证明 Tsirel'son 例子中的滤过其实是 S.B.。同样, Attal 等 [1] 证明 Goswami–Rao 滤过是 S.B.; 见练习 3.22。

Dubins 等 [1] 经过深入而困难的研究证明: 在典范空间 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 上, 对许多与 Wiener 测度等价的概率测度 Q , 典范滤过并非 S.B.; 但众所周知, 在这些测度下它仍是 W.B., 见上面的 (P1)。Dubins 等 [1] 的论证后来由 Schachermayer [1] 与 Émery [4] 大幅简化。

Tsirel'son [2] 证明: 至少有三条射线的 Walsh 布朗运动的滤过虽是 W.B., 却不是 S.B.。Barlow、Émery 等 [1] 简化了 Tsirel'son [2] 的论证。该文还在 Tsirel'son 技巧的基础上证明: 若

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$$

是 d 维布朗运动 B 的滤过 ($d \geq 1$), 而 L 是一个 $(\mathcal{F}_t)$ -可预测集 Γ 的终点, 则 $\mathcal{F}_L^+$ 与 $\mathcal{F}_L^-$ 至多相差一个集合 A 的加入, 即

$$\mathcal{F}_L^+ = \sigma(\mathcal{F}_L^-, A).$$

这是 M. Barlow 曾猜测的布朗滤过性质。Watanabe [6] 构造了一个不具有这一性质的二维扩散。

Warren [2] 证明, 由黏滞布朗运动及其驱动布朗运动共同生成的滤过不是 S.B.; 这一对过程的定义见 Warren [1]。De Meyer [1] 给出了对 Tsirel'son 工作的另一种简化。Émery–Schachermayer [1] 证明存在纯鞅 (M_t) , 其括号过程为 $\langle M, M \rangle_t$, 并且随机测度

$$d\langle M, M \rangle_t$$

与 dt 等价, 但 (M_t) 的滤过仍不是 S.B.; 尽管由上面的 (P2), 它是 W.B.

还应回顾 Lane [1] 研究的问题。

问题 4. 设 B 是一维布朗运动, H 是 $(\mathcal{F}_t^B)$ -可预测过程。 H 应满足什么条件, 才能使

$$M_t = \int_0^t H_s dB_s$$

的滤过成为某个布朗运动的滤过? 又在什么条件下, 所有 $(\mathcal{F}_t^M)$ -鞅都是连续的?

当 $H_s = f(B_s)$ 时, Lane [1] 得到了一些部分结果, 但证明很困难。当 f 是集合的示性函数时, Knight [7] 也给出了部分答案; 见练习 4.20。

问题 5. 问题 4 中的哪些鞅是极端鞅或纯鞅?

当 $H_s = B_s^n$ 时, Stroock–Yor [2] 对奇数 n 给出肯定答案; 见第 IX 章练习 3.11。Beghdadi–Sakrani [2] 对偶数 n 也给出肯定答案。若 $H > 0$ 几乎必然成立, 则

$$\int_0^t H_s dB_s$$

是极端鞅; 见练习 4.15。不过, 下面这个问题仍是前一问题的一个特殊情形。

问题 6. 是否存在严格为正的预测过程 H , 使上述随机积分不是纯鞅?

Tsirel'son [4] 进一步研究了布朗滤过, 并开始对“噪声”进行分类。粗略地说, 噪声是由 σ -代数构成的族

$$(\mathcal{F}_{s,t})_{s \leq t},$$

满足当 $s < v < t$ 时,

$$\mathcal{F}_{s,v} \vee \mathcal{F}_{v,t} = \mathcal{F}_{s,t},$$

并且 $\mathcal{F}_{s,v}$ 与 $\mathcal{F}_{v,t}$ 相互独立。结果表明, 噪声远不止由 Lévy 过程的增量生成的那些例子。

第 VI 章 局部时

1 定义与基本性质

通过 Itô 公式，我们已经知道 C^2 函数如何作用于连续半鞅。现在把这一结果推广到凸函数，并由此引入局部时这一重要概念。

以下设 f 为凸函数，并采用附录第 3 节的记号与结论。下面的结果将导出 Itô 公式的一种推广。

定理 1.1。 若 X 是连续半鞅，则存在连续递增过程 A^f ，使得

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s) dX_s + \frac{1}{2} A_t^f,$$

其中 f'_- 是 f 的左导数。

证明。 若 $f \in C^2$ ，这就是 Itô 公式，并且

$$A_t^f = \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

现取一个支集紧含于 $] -\infty, 0]$ 的正 C^∞ 函数 j ，使

$$\int_{-\infty}^0 j(y) dy = 1,$$

并令

$$f_n(x) = n \int_{-\infty}^0 f(x+y) j(ny) dy.$$

由于 f 凸，因而局部有界，所以每个 f_n 都有定义。当 $n \rightarrow \infty$ 时， f_n 逐点收敛于 f ，而 f'_n 递增收敛于 f'_- 。对每个 n ，

$$f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int_0^t f'_n(X_s) dX_s + \frac{1}{2} A_t^{f_n},$$

并且 $f_n(X_t)$ 与 $f_n(X_0)$ 分别收敛于 $f(X_t)$ 与 $f(X_0)$ 。

通过停止，可以假设 X 有界；此时 $f'_-(X_s)$ 也有界。由随机积分的控制收敛定理（第 IV 章定理 2.12），

$$\int_0^t f'_n(X_s) dX_s \longrightarrow \int_0^t f'_-(X_s) dX_s$$

在每个有界时间区间上一致依概率收敛。因此 A^{f_n} 也收敛到某个过程 A^f ；作为递增过程的极限， A^f 本身仍是递增过程，而且

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s) dX_s + \frac{1}{2} A_t^f.$$

显然可以选取 A^f 的几乎必然连续版本，证明完毕。

现在的问题是：怎样把 A^f 明确而实用地表示出来，从而清楚显示它对 f 的依赖。先考察

$$|x|, \quad x^+ = x \vee 0, \quad x^- = -(x \wedge 0)$$

这几个特殊情形。定义

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x \leq 0. \end{cases}$$

若 $f(x) = |x|$ ，则 $f'_-(x) = \operatorname{sgn}(x)$ 。

定理 1.2 (Tanaka 公式)。 对任意实数 a ，存在一个连续递增过程 L^a ，称为 X 在 a 处的局部时，使得

$$\begin{aligned} |X_t - a| &= |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a, \\ (X_t - a)^+ &= (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a, \\ (X_t - a)^- &= (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \leq a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a. \end{aligned}$$

特别地， $|X - a|$ 、 $(X - a)^+$ 与 $(X - a)^-$ 都是半鞅。

证明。 函数 $f(x) = (x - a)^+$ 的左导数为 $\mathbf{1}_{]a, \infty[}$ 。由定理 1.1，存在过程 A^+ ，使

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} A_t^+.$$

同理，

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \leq a\}} dX_s + \frac{1}{2} A_t^-.$$

用前一个恒等式减去后一个恒等式，得到

$$X_t = X_0 + \int_0^t dX_s + \frac{1}{2} (A_t^+ - A_t^-).$$

故 $A^+ = A^-$ 几乎必然成立，令 $L^a = A^+$ 。再把上述两个恒等式相加，即得定理中的第一个公式。

若可能发生混淆，也把半鞅 X 在 a 处的局部时写成 $L_t^a(X)$ 。

注。 定理中后两个恒等式不对称，是因为我们选择了左导数；函数 sgn 的定义也是出于同一原因。不过，另见练习 1.25。

与递增过程 L^a 相联系的，是 $\mathbb{R}_+$ 上的随机测度 dL_t^a 。在某种意义上，它衡量半鞅 X 在 a 处停留的“时间”，如下一个结果所示。

命题 1.3。 测度 dL_t^a 几乎必然由集合 $\{t : X_t = a\}$ 承载。

证明。 对半鞅 $|X - a|$ 应用 Itô 公式, 得到

$$(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2 \int_0^t |X_s - a| d(|X - a|)_s + \langle |X - a|, |X - a| \rangle_t.$$

利用定理 1.2 的第一个公式, 右端等于

$$(X_0 - a)^2 + 2 \int_0^t |X_s - a| \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + 2 \int_0^t |X_s - a| dL_s^a + \langle X, X \rangle_t.$$

另一方面, 直接由 Itô 公式,

$$(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2 \int_0^t (X_s - a) dX_s + \langle X, X \rangle_t.$$

比较两式可得

$$\int_0^t |X_s - a| dL_s^a = 0 \quad \text{a.s.},$$

这正是所需结论。

注。

1°) 这一命题自然引出一个问题: $\{t : X_t = a\}$ 是否恰好就是 dL_t^a 的支集? 对于布朗运动, 答案是肯定的, 下一节将会证明。一般情形更为复杂; 对鞅而言, 练习 1.26 给出了描述。

2°) 若

$$\sigma_a = \sup\{t : X_t = a\},$$

则 $L_\infty^a = L_{\sigma_a}^a$ 。这个事实在一些证明中很有用。

下面研究过程 L_t^a 关于空间变量 a 的正则性。先需如下引理。

引理 1.4。 存在一个 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}$ -可测过程 $\tilde{L}$, 使得对每个 a , $\tilde{L}(a, \cdot, \cdot)$ 与 L^a 不可区别; 这里 $\mathcal{P}$ 表示可预测 σ -域。

证明。 对过程

$$H(a, s, \cdot) = \mathbf{1}_{\{X_s > a\}}$$

应用随机积分的 Fubini 定理 (第 IV 章练习 5.17) 即可。

因此, 以下总假设 L^a 关于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}$ 可测。我们将利用它关于 a 的可测性, 证明另一个更好的版本存在。先证明两个重要结果。回忆: 若 f 为凸函数, 则其分布意义下的二阶导数 f'' 是正测度。

定理 1.5 (Itô–Tanaka 公式)。 若 f 是两个凸函数之差, X 是连续半鞅, 则

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(da).$$

特别地, $f(X)$ 是半鞅。

证明。 只需对凸函数 f 证明此公式。在 $\mathbb{R}$ 的任一紧子集上, f 都与某个凸函数 g 相同, 并且 g'' 具有紧支集。因此, 在 X 首次离开某个紧集时将其停止, 只需证明 f'' 具有紧支集的情形。此时存在常数 α, β , 使

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |x - a| f''(da).$$

由前面的结果,

$$\begin{aligned} f(X_t) &= \alpha X_t + \beta + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |X_t - a| f''(da) \\ &= \alpha(X_t - X_0) + f(X_0) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a \right) f''(da). \end{aligned}$$

由附录第 3 节与引理 1.4,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s f''(da) = \int_0^t f'_-(X_s) dX_s - \alpha(X_t - X_0),$$

从而得到结论。

推论 1.6 (占有时间公式)。 存在一个 P -零测集, 使得在其补集上, 对每个 t 以及每个正 Borel 函数 Φ , 都有

$$\int_0^t \Phi(X_s) d\langle X, X \rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(a) L_t^a da.$$

证明。 若 $\Phi = f''$, 其中 $f \in C^2$, 则比较 Itô-Tanaka 公式与 Itô 公式可知: 在某个依赖于 Φ 的 P -零测集 Γ_Φ 之外, 上式对每个 t 成立。在 $C_0(\mathbb{R})$ 中取一列关于一致收敛拓扑稠密的这类函数 (Φ_n) , 容易看出, 在

$$\Gamma = \bigcup_n \Gamma_{\Phi_n}$$

之外, 公式对每个 t 与每个 $\Phi \in C_0(\mathbb{R})$ 同时成立。再应用单调类定理即可。

注。

- 1°) 时间 t 可以替换为任意随机时间 S 。
- 2°) 这里的“占有时间”是相对于 $d\langle X, X \rangle_s$ 定义的, 后者可视为 X 的“自然”时间尺度。不过, 对布朗运动而言, 这一名称尤其贴切: 若 $\Phi = \mathbf{1}_A$, 其中 A 是 Borel 集, 则左端恰好就是布朗运动在 A 中停留的时间。
- 3°) 这些公式还有一个推论: 若函数二次可微但未必属于 C^2 , 只要 f'' 局部可积, Itô 公式仍以完全相同的形式成立。这也可以直接用单调类论证证明。

下面构造局部时的一个正则版本; 全书后文都使用这个版本。

定理 1.7。 对任意连续半鞅 X , 过程族

$$\{L_t^a : a \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+\}$$

存在一个修正, 使映射 $(a, t) \mapsto L_t^a$ 几乎必然关于 t 连续、关于 a 右连续且有左极限。此外,

若 $X = M + V$, 则

$$L_t^a - L_t^{a-} = 2 \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=a\}} dV_s = 2 \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=a\}} dX_s.$$

特别地, 若 X 是局部鞅, 则其局部时族 L^a 存在双连续修正。

证明。 由 Tanaka 公式,

$$L_t^a = 2 \left[(X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+ - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dM_s - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dV_s \right].$$

先用 Banach 空间 $C([0, t], \mathbb{R})$ 上的 Kolmogorov 判别准则 (第 I 章定理 2.1), 证明随机积分

$$\widehat{M}_t^a = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dM_s$$

具有双连续修正。由第 IV 章的 BDG 不等式及推论 1.6, 对任意 $k \geq 1$ 及 $a < b$,

$$\begin{aligned} E \left[\sup_t |\widehat{M}_t^a - \widehat{M}_t^b|^{2k} \right] &\leq C_k E \left[\left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{a < X_s \leq b\}} d\langle M, M \rangle_s \right)^k \right] \\ &= C_k E \left[\left(\int_a^b L_\infty^x dx \right)^k \right] \\ &= C_k (b-a)^k E \left[\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b L_\infty^x dx \right)^k \right] \\ &\leq C_k (b-a)^k E \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b (L_\infty^x)^k dx \right]. \end{aligned}$$

由 Fubini 定理, 最后一项不超过

$$C_k (b-a)^k \sup_x E[(L_\infty^x)^k].$$

另一方面,

$$L_t^x = 2 \left[(X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+ - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > x\}} dX_s \right],$$

而

$$|(X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+| \leq |X_t - X_0|.$$

因此存在与 x 无关的常数 d_k , 使

$$E[(L_\infty^x)^k] \leq d_k E \left[\sup_t |X_t - X_0|^k + \left(\int_0^\infty |dV_s| \right)^k + \langle M, M \rangle_\infty^{k/2} \right].$$

右端不再依赖于 x 。若它对某个 $k > 1$ 有限, 则所需的双连续性已经证明。一般情形可在停时

$$T_n = \inf \left\{ t : \sup_{s \leq t} |X_s - X_0|^k + \left(\int_0^t |dV_s| \right)^k + \langle M, M \rangle_t^{k/2} \geq n \right\}$$

处停止。鞅族 $(\widehat{M}^a)^{T_n}$ 具有双连续版本, 故 $\widehat{M}^a$ 也有双连续版本。

为完成证明, 还需证明

$$\widehat{V}_t^a = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dV_s$$

关于 a 联合右连续且有左极限、关于 t 连续。由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\widehat{V}_t^{a-} = \lim_{b \uparrow a} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > b\}} dV_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \geq a\}} dV_s.$$

因此

$$L_t^a - L_t^{a-} = 2(\widehat{V}_t^{a-} - \widehat{V}_t^a) = 2 \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = a\}} dV_s.$$

同理,

$$\widehat{V}_t^{a+} = \lim_{b \downarrow a} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > b\}} dV_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dV_s,$$

所以 $L_t^a = L_t^{a+}$ 。

最后, 占有时间公式给出

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = a\}} d\langle M, M \rangle_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = a\}} d\langle X, X \rangle_s = 0.$$

故

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = a\}} dM_s = 0,$$

从而也得到含 dX_s 的等式。证明完毕。

注。 若 X 具有有限变差, 则 $L^a(X) \equiv 0$ 。事实上, 由占有时间公式, 对 Lebesgue 几乎处处的 a , $L_t^a = 0$; 再由关于 a 的右连续性, 对每个 a 都有 $L^a(X) = 0$ 。不过, 一般半鞅的局部时族可能不连续; 换言之, 定理 1.7 不能加强为关于两个变量都连续。练习 1.34 将给出例子。

前一证明使用 Kolmogorov 判别准则还带来一个副产品: 对局部鞅, 局部时族 L^a 关于 a 具有 Hölder 正则性。特别地, 对布朗运动以及任意固定时间 t 、任意 k , 有

$$E \left[\sup_{s \leq t} |\widehat{B}_s^a - \widehat{B}_s^b|^{2k} \right] \leq C_k |a - b|^k t^{k/2}.$$

因此可陈述如下结论。

推论 1.8 (鞅局部时的连续性)。 若 X 是连续局部鞅, 则可选取其局部时族 L^a , 使得几乎必然地, 对每个 $\alpha < 1/2$, 映射 $a \mapsto L_t^a$ 都是 α 阶 Hölder 连续的, 并且关于 t 在每个紧区间上一致成立。

证明。 对布朗运动, 只需证明关于 t 的一致性, 而这由第 I 章练习 2.10 得到。局部鞅的结论再由 DDS 定理推出 (见练习 1.27)。细节留给读者。

从现在起, 只考虑定理 1.7 给出的局部时版本 $L_t^a(X)$ 。对这一版本, 下面的推论再次说明“局部时”这一名称的由来。

推论 1.9. 若 X 是连续半鞅, 则几乎必然地, 对每个 a, t ,

$$L_t^a(X) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{[a, a+\varepsilon]}(X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

若 M 是连续局部鞅, 则

$$L_t^a(M) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{]a-\varepsilon, a+\varepsilon]}(M_s) d\langle M, M \rangle_s.$$

把 t 换成任意随机时间 S , 结论仍成立。

证明. 这是占有时间公式与 $L_t^a(X)$ 关于 a 右连续的直接推论; 在局部鞅情形, 局部时关于 a 连续。

特别地, 对布朗运动,

$$L_t^0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{|B_s| < \varepsilon\}} ds.$$

这说明 L_t^0 关于 $\sigma(|B_s| : s \leq t)$ 的完备化是适应的。下一节将继续讨论这一点。

上述推论是局部时的一个“逼近”结果。对布朗运动还有许多同类结果, 第 XII 章将予以陈述。这里先证明一个对第 IV 章练习 4.13 中所有 $\mathcal{S}^p$ 类半鞅都成立的结果。

设 X 为连续半鞅。对 $\varepsilon > 0$, 定义双重停时序列

$$\begin{aligned} \sigma_0^\varepsilon &= 0, & \tau_0^\varepsilon &= \inf\{t : X_t = \varepsilon\}, \\ \sigma_n^\varepsilon &= \inf\{t > \tau_{n-1}^\varepsilon : X_t = 0\}, & \tau_n^\varepsilon &= \inf\{t > \sigma_n^\varepsilon : X_t = \varepsilon\}. \end{aligned}$$

令

$$d_\varepsilon(t) = \max\{n : \sigma_n^\varepsilon < t\}.$$

它就是时刻 t 以前 X 从水平 ε 到水平 0 的下穿次数 (参见第 II 章第 2 节)。图 4 所示情形中 $d_\varepsilon(t) = 2$ 。

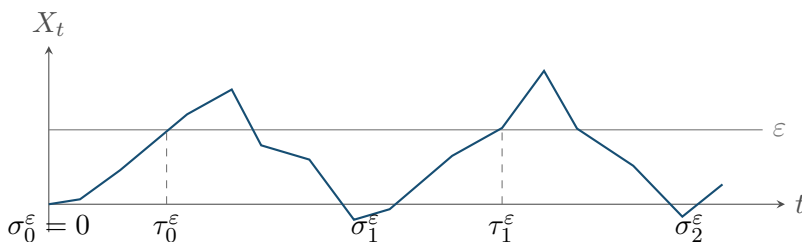


图 4: 从 ε 到 0 的下穿

为简化记号, 以下把 $\sigma_n^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon$ 简写为 σ_n, τ_n , 并把 L_t^0 简写为 L_t 。

定理 1.10. 若 $X = M + V \in \mathcal{S}^p$, 其中 $p \geq 1$, 即

$$E \left[\langle M, M \rangle_\infty^{p/2} + \left(\int_0^\infty |dV|_t \right)^p \right] < \infty,$$

则

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E \left[\sup_t \left| \varepsilon d_\varepsilon(t) - \frac{1}{2} L_t \right|^p \right] = 0.$$

证明。 由 Tanaka 公式,

$$X_{\tau_n \wedge t}^+ - X_{\sigma_n \wedge t}^+ = \int_{] \sigma_n \wedge t, \tau_n \wedge t]} \mathbf{1}_{\{X_s > 0\}} dX_s + \frac{1}{2} (L_{\tau_n \wedge t} - L_{\sigma_n \wedge t}).$$

由于 X 在 $[\tau_n, \sigma_{n+1}[$ 上不为零,

$$L_{\tau_n \wedge t} - L_{\sigma_n \wedge t} = L_{\sigma_{n+1} \wedge t} - L_{\sigma_n \wedge t}.$$

因此

$$\sum_n (X_{\tau_n \wedge t}^+ - X_{\sigma_n \wedge t}^+) = \int_0^t \theta_s^\varepsilon dX_s + \frac{1}{2} L_t,$$

其中

$$\theta_s^\varepsilon = \sum_n \mathbf{1}_{] \sigma_n, \tau_n]}(s) \mathbf{1}_{] 0, \varepsilon]}(X_s)$$

是可预测过程。在 $\{\tau_n \leq t\}$ 上,

$$X_{\tau_n \wedge t}^+ - X_{\sigma_n \wedge t}^+ = \varepsilon.$$

若

$$n(t) = \inf\{n : \tau_n > t\},$$

则上式左端等于

$$\varepsilon d_\varepsilon(t) + u(\varepsilon), \quad 0 \leq u(\varepsilon) = X_t^+ - X_{\sigma_{n(t)} \wedge t}^+ \leq \varepsilon.$$

所以只需证明

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E \left[\sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t \theta_s^\varepsilon dX_s \right|^p \right] = 0.$$

由 BDG 不等式, 上式中的期望不超过

$$C_p E \left[\left(\int_0^\infty \theta_s^\varepsilon d\langle X, X \rangle_s \right)^{p/2} + \left(\int_0^\infty \theta_s^\varepsilon |dV|_s \right)^p \right].$$

由于 θ^ε 有界收敛于 0, 再应用 Lebesgue 控制收敛定理即得结论。

在相同假设与记号下, 还有下面的命题; 它是第 XIII 章练习 2.13 的关键。

命题 1.11。

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E \left[\sup_{t \geq 0} \left| \varepsilon^{-1} \int_0^t \theta_s^\varepsilon d\langle X, X \rangle_s - \frac{1}{2} L_t \right|^p \right] = 0.$$

证明。 结合 Itô 公式、Tanaka 公式以及 dL_s 不对集合 $\{s : X_s \neq 0\}$ 赋质量这一事实, 可得

$$\begin{aligned} (X_{\tau_n \wedge t}^+)^2 - (X_{\sigma_n \wedge t}^+)^2 &= 2 \int_{] \sigma_n \wedge t, \tau_n \wedge t]} X_s \mathbf{1}_{\{X_s > 0\}} dX_s \\ &\quad + \int_{] \sigma_n \wedge t, \tau_n \wedge t]} \mathbf{1}_{\{X_s > 0\}} d\langle X, X \rangle_s. \end{aligned}$$

于是

$$\varepsilon^2 d_\varepsilon(t) + u^2(\varepsilon) = 2 \int_0^t \theta_s^\varepsilon X_s dX_s + \int_0^t \theta_s^\varepsilon d\langle X, X \rangle_s.$$

因此

$$\left| \varepsilon^{-1} \int_0^t \theta_s^\varepsilon d\langle X, X \rangle_s - \varepsilon d_\varepsilon(t) - 2\varepsilon^{-1} \int_0^t \theta_s^\varepsilon X_s dX_s \right| \leq \varepsilon.$$

只需证明

$$\varepsilon^{-1} \int_0^t \theta_s^\varepsilon X_s dX_s$$

在 L^p 中关于 t 一致收敛于 0。再次应用 BDG 不等式，只需证明

$$\varepsilon^{-p} E \left[\left(\int_0^\infty \theta_s^\varepsilon X_s^2 d\langle X, X \rangle_s \right)^{p/2} + \left(\int_0^\infty \theta_s^\varepsilon |X_s| |dV|_s \right)^p \right] \rightarrow 0.$$

在 $\{\theta_s^\varepsilon > 0\}$ 上有 $|X_s| \leq \varepsilon$ ，故结论仍由 Lebesgue 控制收敛定理得到。

注。 通过停止，任意半鞅都可以变成 $\mathcal{S}^p$ 中的元素。因此，若把 L^p 收敛改为在紧时间区间上一致依概率收敛，定理 1.10 与命题 1.11 对一般半鞅也有相应的直接推论。

本节最后更深入地研究 L^a 对空间变量 a 的依赖，并证明 $a \mapsto L^a$ 具有有限二次变差。

对每个 t ，随机函数 $a \mapsto L_t^a$ 是 càdlàg 函数，因而至多只有可数个不连续点。记

$$\Delta L_t^a = L_t^a - L_t^{a-}.$$

若 $X = M + V$ ，则

$$\Delta L_t^a = 2 \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=a\}} dV_s.$$

所以对 $a < b$ ，

$$\sum_{a < x \leq b} |\Delta L_t^x| \leq 2 \int_0^t |dV|_s < \infty,$$

从而更有

$$\sum_{a < x \leq b} |\Delta L_t^x|^2 < \infty.$$

为后文所用，现在计算最后这个和。首先，

$$(\Delta L_t^x)^2 = 4 \left(\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=x\}} dV_s \right)^2.$$

由于 V 连续，测度 $dV \otimes dV$ 不对 $[0, t]^2$ 的对角线赋质量，故

$$\begin{aligned} (\Delta L_t^x)^2 &= 8 \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=x\}} dV_s \int_0^s \mathbf{1}_{\{X_u=X_s\}} dV_u \\ &= 4 \int_0^t \Delta L_s^{X_s} \mathbf{1}_{\{X_s=x\}} dV_s. \end{aligned}$$

至多只有可数个 $x \in]a, b[$ 能使某个 $s \in [0, t]$ 满足 $\Delta L_s^x > 0$ ，于是

$$\sum_{a < x \leq b} (\Delta L_t^x)^2 = 4 \int_0^t \Delta L_s^{X_s} \mathbf{1}_{\{a < X_s \leq b\}} dV_s.$$

定理 1.12。 设 (Δ_n) 是区间 $[a, b]$ 的一列分割, 且网格 $|\Delta_n| \rightarrow 0$ 。对任意有限的非负随机变量 S ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\Delta_n} (L_S^{a_{i+1}} - L_S^{a_i})^2 = 4 \int_a^b L_S^x dx + \sum_{a < x \leq b} (\Delta L_S^x)^2$$

依概率成立。

证明。 只要证明

$$\sum_{\Delta_n} (L_t^{a_{i+1}} - L_t^{a_i})^2$$

在 $\mathbb{R}_+$ 的每个紧子区间上关于 t 一致依概率收敛于

$$4 \int_a^b L_t^x dx + \sum_{a < x \leq b} (\Delta L_t^x)^2,$$

一般随机时间 S 的结论便随之得到。为此, 用 Tanaka 公式展开 $\frac{1}{4}(L_t^{a_{i+1}} - L_t^{a_i})^2$ 。写成

$$\frac{1}{2} L_t^a = (X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+ - \widehat{M}_t^a - \widehat{V}_t^a,$$

其中对 $Z = M, V, X$ 定义

$$\widehat{Z}_t^a = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dZ_s.$$

函数

$$\phi_t(a) = (X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+$$

关于 a 是 Lipschitz 的, 常数为 1, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\Delta_n} (\phi_t(a_{i+1}) - \phi_t(a_i))^2 = 0.$$

同样, 利用 $\widehat{M}^a$ 的连续性, 像第 IV 章第 1 节那样可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\Delta_n} (\phi_t(a_{i+1}) - \phi_t(a_i)) (\widehat{M}_t^{a_{i+1}} - \widehat{M}_t^{a_i}) = 0.$$

最后,

$$\left| \sum_{\Delta_n} (\phi_t(a_{i+1}) - \phi_t(a_i)) (\widehat{V}_t^{a_{i+1}} - \widehat{V}_t^{a_i}) \right| \leq |\Delta_n| \int_0^t |dV|_s,$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时右端趋于 0。

因此, 所求极限若存在, 就等于

$$L_n = \sum_{\Delta_n} (\widehat{X}_t^{a_{i+1}} - \widehat{X}_t^{a_i})^2$$

的依概率极限。由 Itô 公式,

$$\begin{aligned} L_n &= 2 \sum_{\Delta_n} \int_0^t (\widehat{X}_s^{a_i} - \widehat{X}_s^{a_{i+1}}) \mathbf{1}_{\{a_i < X_s \leq a_{i+1}\}} dX_s \\ &\quad + \sum_{\Delta_n} \int_0^t \mathbf{1}_{\{a_i < X_s \leq a_{i+1}\}} d\langle X, X \rangle_s. \end{aligned}$$

占有时间公式说明右端第二项等于

$$\int_a^b L_t^x dx.$$

下面证明第一项收敛于所需的量。

通过局部化, 可以假设 X 有界。此时可用随机积分的控制收敛定理, 得到第一项在每个紧时间区间上一致依概率收敛于

$$\begin{aligned} J &= 2 \int_0^t (\widehat{X}_s^{X_s} - \widehat{X}_s^{X_s-}) \mathbf{1}_{\{a < X_s \leq b\}} dX_s \\ &= \int_0^t \Delta L_s^{X_s} \mathbf{1}_{\{a < X_s \leq b\}} dX_s. \end{aligned}$$

结合定理陈述前的计算, 只需证明

$$\int_0^t \Delta L_s^{X_s} \mathbf{1}_{\{a < X_s \leq b\}} dM_s = 0.$$

但前面已经指出: 至多只有可数个 $x \in]a, b[$ 能使某个 $s \in [0, t]$ 满足 $\Delta L_s^x > 0$; 而且对每个 x , 几乎必然

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=x\}} d\langle M, M \rangle_s = 0.$$

结论随即成立。

下面的推论将在第 XI 章使用。

推论 1.13. 若过程 $x \mapsto L_S^x$ ($x \geq 0$) 在某个适当的滤过下是连续半鞅, 则它的括号过程为

$$4 \int_0^x L_S^y dy.$$

练习 1.14. 设 M 是从 0 出发的连续局部鞅, L 是它在 0 处的局部时。

1°) 证明

$$\inf\{t : L_t > 0\} = \inf\{t : \langle M, M \rangle_t > 0\} \quad \text{a.s.}$$

特别地, $M \equiv 0$ 当且仅当 $L \equiv 0$ 。

2°) 证明: 若 $0 < \alpha < 1$ 且 $M \not\equiv 0$, 则 $|M|^\alpha$ 不是半鞅。

练习 1.15 (占有时间公式的推广). 若 X 是连续半鞅, 则几乎必然地, 对 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上每个正 Borel 函数 h ,

$$\int_0^t h(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s = \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t h(s, a) dL_s^a(X).$$

把这个公式推广到 $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}$ 上的可测函数 h 。

练习 1.16.

1°) 设 X, Y 是两个连续半鞅。证明

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=Y_s\}} d\langle X, Y \rangle_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=Y_s\}} d\langle X, X \rangle_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=Y_s\}} d\langle Y, Y \rangle_s.$$

提示：写成

$$\langle X, Y \rangle = \langle X, X \rangle + \langle X, Y - X \rangle.$$

2°) 若 $X = M + V$, A 是连续有限变差过程, 则

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = A_s\}} dX_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = A_s\}} dV_s.$$

3°) 若 $X = M + V \geq 0$ 且 $M_0 = 0$, 则 X 在 0 处的局部时为

$$2 \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = 0\}} dV_s = 2 \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = 0\}} dX_s.$$

因此, 若测度 dV_s 由集合 $\{s : X_s = 0\}$ 承载, 则 V 递增。此外, 若

$$V_t = \sup_{s \leq t} (-M_s),$$

则 X 在 0 处的局部时等于 $2V$ 。

练习 1.17。

1°) 若 X 是连续半鞅, 证明

$$L_t^a(|X|) = L_t^a(X) + L_t^{(-a)-}(X) \quad (a > 0), \quad L_t^a(|X|) = 0 \quad (a < 0),$$

以及

$$L_t^0(X^+) = L_t^0(X).$$

2°) 若 X 是连续半鞅, 证明

$$L_t^a(-X) = L_t^{(-a)-}(X).$$

3°) 证明与定理 1.10 类似的结论, 但把下穿换成上穿。

练习 1.18。

1°) 若 X, Y 是两个连续半鞅, 证明 $X \vee Y$ 与 $X \wedge Y$ 也是连续半鞅, 并且

$$L^0(X \vee Y) + L^0(X \wedge Y) = L^0(X) + L^0(Y).$$

提示：由上一题, 只需对非负的 X, Y 证明。使用练习 1.16 第 3 问。

2°) 进一步证明

$$\begin{aligned} L^0(XY) &= X^+ \cdot L^0(Y) + Y^+ \cdot L^0(X) \\ &\quad + X^- \cdot L^{0-}(Y) + Y^- \cdot L^{0-}(X). \end{aligned}$$

** 练习 1.19。

1°) 设 X 是布朗运动。沿用定理 1.10 的记号, 证明

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon d_\varepsilon(\cdot) = \frac{1}{2} L \quad \text{a.s.}$$

提示：先对序列 $\varepsilon_n = n^{-2}$ 证明几乎必然收敛, 再利用 ε 减小时 $d_\varepsilon(t)$ 递增这一事实。第

XII 章第 1 节还会给出另一个证明。

2°) 更一般地, 对 $a < 0 < b$, 记 $d_{a,b}$ 为从 b 到 a 的下穿次数。若

$$\sum_n (b_n - a_n) < \infty,$$

则证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) d_{a,b,n}(t) = \frac{1}{2} L_t \quad \text{a.s.}$$

* **练习 1.20 (P. Lévy 特征定理的推广)**。设 $f(x, t)$ 是热方程的一个固定解, 即

$$\partial_t f + \frac{1}{2} \partial_{xx} f = 0.$$

回忆: 当 $t > 0$ 时, 这样的函数关于 x 是解析的。

1°) 若 B 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, A 是 $(\mathcal{F}_t)$ -适应的连续递增过程, 证明: 除去 Lebesgue 零测集后,

$$\{t : \partial_x f(B_t, A_t) = 0\} \subset \{t : \partial_{xx} f(B_t, A_t) = 0\} \quad \text{a.s.}$$

提示: 对半鞅

$$Y_t = \partial_x f(B_t, A_t)$$

应用测度 $d\langle Y, Y \rangle_t$ 不对集合 $\{t : Y_t = a\}$ 赋质量这一事实。用归纳法证明: 若 $\partial_x f$ 不恒为零, 则

$$m\{t : \partial_x f(B_t, A_t) = 0\} = 0.$$

若结论不成立, 则存在一点 x , 使 $\partial_x f$ 的所有空间导数都在该点消失。

2°) 设 X 是连续局部鞅, $f(X_t, t)$ 是局部鞅, 并且

$$m\{t : \partial_t f(X_t, t) = 0\} = 0.$$

证明 X 是布朗运动。

提示: 注意

$$\int_0^t \partial_s f(X_s, s) d\langle X, X \rangle_s = \int_0^t \partial_s f(X_s, s) ds.$$

练习 1.21。

1°) 设 X^1, X^2 是两个从 0 出发的连续半鞅。证明

$$L_t^0(X^1 \vee X^2) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^2 \leq 0\}} dL_s^0(X^1) + L_t^0(X^{2+} - X^{1+}).$$

提示: 使用练习 1.16 第 3 问以及恒等式

$$(X^1 \vee X^2)^+ = (X^{2+} - X^{1+})^+ + X^{1+}.$$

2°) 以下假设 $L^0(X^2 - X^1) = 0$ 。取 $\alpha \in]0, 1/2[$, 并令

$$Z^i = X^i - 2\alpha X^{i+}.$$

注意到当 $X^2 \geq X^1$ 时,

$$(1 - 2\alpha)(X^2 - X^1) \leq Z^2 - Z^1 \leq X^2 - X^1,$$

证明

$$L^0(Z^2 - Z^1) = 0.$$

提示：使用定理 1.10。

3°) 由恒等式

$$2\alpha(X^{2+} - X^{1+})^+ = (X^2 - X^1)^+ - (Z^2 - Z^1)^+$$

推出

$$L_t^0(X^1 \vee X^2) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^2 \leq 0\}} dL_s^0(X^1) + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^1 < 0\}} dL_s^0(X^2).$$

练习 1.22。 证明对标准布朗运动，

$$\sup_{s \leq t} L_s^{B_s} = \sup_a L_t^a.$$

提示：可以使用 Laplace 方法。过程 L^B 将在第 XI 章练习 2.12 中进一步研究。

练习 1.23。 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上严格递增的函数，并且是两个凸函数之差。若 X 是连续半鞅，证明：对每个 t ，几乎必然对所有 a 都有

$$L_t^{f(a)}(f(X)) = f'_+(a)L_t^a(X).$$

**** 练习 1.24。** 设 $X = M + V$ 是连续半鞅， A 是连续有界变差过程，并且对每个 t ，

$$\text{i) } \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = A_s\}} dX_s = 0, \quad \text{ii) } \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = A_s\}} dA_s = 0$$

(参见练习 1.16)。设 (L_t^x) 是 X 的局部时族， Λ_t 是 $X - A$ 在 0 处的局部时。证明：对任意满足 $|\Delta_n| \rightarrow 0$ 的 $[0, t]$ 分割序列 (Δ_n) ，以及任意连续适应过程 H ，都有

$$\int_0^t H_s d\Lambda_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\Delta_n} H_{t_i} (L_{t_{i+1}}^{A_{t_i}} - L_{t_i}^{A_{t_i}})$$

依概率成立。特别地，可取 $A = V$ ；此时可见， X 的鞅部分的局部时，就是 X 的各局部时沿其有界变差部分的“积分”。

练习 1.25 (对称局部时)。 设 X 是连续半鞅。

1°) 把 $\widetilde{\text{sgn}}(x)$ 定义为：当 $x > 0$ 时取 1，当 $x < 0$ 时取 -1，当 $x = 0$ 时取 0。证明存在唯一递增过程 $\tilde{L}^a$ ，使

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \widetilde{\text{sgn}}(X_s - a) dX_s + \tilde{L}_t^a.$$

给出一个 $\tilde{L}^a \neq L^a$ 的例子。证明

$$\tilde{L}^a = \frac{1}{2}(L^a + L^{a-}),$$

并且

$$\tilde{L}_t^a = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{]a-\varepsilon, a+\varepsilon[}(X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

2°) 证明 $\tilde{L}^a$ 关于 a 可测, 并证明: 若 f 为凸函数, 则

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \frac{1}{2} (f'_+ + f'_-)(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{L}_t^a f''(da).$$

写出以 $\tilde{L}^a$ 代替 L^a 的占有时间公式。

**** 练习 1.26 (局部时的支集)。** 设 M 是从 $M_0 = 0$ 出发的连续 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅, 并令

$$Z(\omega) = \{t : M_t(\omega) = 0\}.$$

集合 $Z(\omega)$ 是闭集, 而 $Z(\omega)^c$ 是至多可数个开区间之并。把这些开区间的右端点集记为 $R(\omega)$, 左端点集记为 $G(\omega)$ 。

1°) 若 T 是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时, 且

$$D_T(\omega) = \inf\{t > T(\omega) : M_t(\omega) = 0\},$$

证明: 若 M 一致可积, 则过程

$$Y_t = |M_{T+t}| \mathbf{1}_{\{0 \leq t < D_T - T\}}$$

是 $(\mathcal{F}_{T+t})$ -鞅。

2°) 证明存在一系列停时 T_k , 使

$$R(\omega) \subset \bigcup_k \{T_k(\omega)\}.$$

再证明: 对任意停时 T ,

$$P\{\omega : T(\omega) \in G(\omega)\} = 0,$$

并最终证明 $Z(\omega)$ 几乎必然是完全集, 即闭且无孤立点。

回忆: $\mathbb{R}$ 的任意闭子集 Z 都是一个完全集与一个可数集之并。其中的完全集可刻画为 Z 所含的最大完全集, 称为 Z 的完美核。

3°) 证明测度 dL_t 的支集, 是

$$Z \setminus \mathring{Z}$$

的完美核, 其中 $\mathring{Z}$ 是 Z 的内部。因此, 对布朗运动, 支集恰好是 Z , 下一节将证明这一点。

提示: 使用练习 1.16。

4°) 从布朗运动的特殊情形以及第 V 章第 1 节的 DDS 定理直接推出第 3 问的结论。

练习 1.27。 设 τ 是时间变换, X 是 τ -连续半鞅。证明

$$L_t^a(X_\tau) = L_{\tau_t}^a(X).$$

因此, 若 X 是连续局部鞅, B 是其 DDS 布朗运动, 则证明

$$L_t^a(X) = L_{\langle X, X \rangle_t}^a(B).$$

进一步证明：若 X 是局部鞅，则对任意实数 a ，事件

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} X_t \text{ 存在} \right\} \quad \text{与} \quad \{L_\infty^a < \infty\}$$

几乎必然相同。

说明：第 XI 章第 2 节将部分解答本题。

* **练习 1.28。** 设 X 是连续半鞅， L^a 是其局部时族。

1°) 设 S 是正随机变量。证明：在 $\mathbb{R}$ 的 Borel 集上存在唯一的向量测度，其值属于赋予依概率收敛拓扑的随机变量空间，并且在阶梯函数

$$\sum_i f_i \mathbf{1}_{[a_i, a_{i+1}]}$$

上取值

$$\sum_i f_i (L_S^{a_{i+1}} - L_S^{a_i}).$$

把关于这个向量测度的积分记为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(a) \, d_a L_S^a.$$

2°) 若 f 是有界 Borel 函数，且

$$F(x) = \int_0^x f(u) \, du,$$

证明

$$F(X_S) = F(X_0) + \int_0^S f(X_u) \, dX_u - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(a) \, d_a L_S^a.$$

把这个公式推广到局部有界 Borel 函数 f 。

3°) 证明：若 $a \mapsto L_S^a$ 是半鞅（参见第 XI 章第 2 节），则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(a) \, d_a L_S^a$$

等于 f 关于该半鞅的随机积分。

* **练习 1.29 (布朗局部时的主值)。**

1°) 对一维布朗运动，证明当 $\alpha > -1$ 时，过程

$$X_t^{(\alpha)} = \int_0^t |B_s|^\alpha \, ds$$

取有限值，因而

$$\tilde{X}_t^{(\alpha)} = \int_0^t |B_s|^\alpha \operatorname{sgn}(B_s) \, ds$$

也有良好定义。证明这些过程都有连续版本。

2°) 证明

$$H_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t B_s^{-1} \mathbf{1}_{\{|B_s| \geq \varepsilon\}} \, ds$$

存在；更一般地，当 $\alpha > -3/2$ 时，

$$H_t^{(\alpha)} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t |B_s|^\alpha \operatorname{sgn}(B_s) \mathbf{1}_{\{|B_s| \geq \varepsilon\}} ds$$

几乎必然存在。证明这些过程具有连续版本。

提示：使用占有时间公式与推论 1.8。

3°) 令

$$\widehat{B}_t = B_t - H_t.$$

证明 $\widehat{B}_t B_t$ 是局部鞅。更一般地，若 $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 是热方程

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

的解，则 $h(\widehat{B}_t, t) B_t$ 是局部鞅。

4°) 若

$$f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1}]},$$

并令

$$\widehat{\mathcal{E}}_t^f = \exp \left\{ i \int_0^t f(s) d\widehat{B}_s + \frac{1}{2} \int_0^t f^2(s) ds \right\},$$

则过程 $B_t \widehat{\mathcal{E}}_t^f$ 是局部鞅。由此推出

$$E[B_t | \sigma(\widehat{B}_s : s \leq t)] = 0.$$

以上讨论与第 IV 章练习 3.29 密切相关。

* **练习 1.30。**

1°) 沿用上一题的记号，证明对任意 C^1 函数 ϕ ，

$$B_t \phi(H_t) = \int_0^t \phi(H_s) dB_s + \int_0^t \phi'(H_s) ds.$$

2°) 对每个 $a \in \mathbb{R}$ ，由下式定义过程 λ^a ：

$$B_t \mathbf{1}_{\{H_t > a\}} = \int_0^t \mathbf{1}_{\{H_s > a\}} dB_s + \lambda_t^a.$$

证明它存在一个联合可测版本，仍记为 λ 。再证明：对任意正 Borel 函数 f ，

$$\int_0^t f(H_s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(a) \lambda_t^a da.$$

3°) 证明存在 λ^a 的一个版本，它关于 t 递增，并且

$$\lambda_t^a - B_t \mathbf{1}_{\{H_t > a\}}$$

联合连续。

练习 1.31. 若 X 是连续半鞅, 且其鞅部分为布朗运动, 则对 $\mathbb{R}_+$ 上任意局部可积函数 f , 证明

$$\int_0^t f \left(\int_0^s \mathbf{1}_{\{X_u \leq X_s\}} du \right) ds = \int_0^t f(v) dv \quad \text{a.s.}$$

更一般地, 对 $\mathbb{R}_+$ 上任意局部可积函数 h , 证明

$$\int_0^t f \left(\int_0^s \mathbf{1}_{\{X_u \leq X_s\}} du \right) h(X_s) ds = \int_0^t h(\alpha_t(z)) f(z) dz,$$

其中

$$\alpha_t(z) = \inf \left\{ y : \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_u \leq y\}} du > z \right\}.$$

***# 练习 1.32 (半鞅局部时的 Hölder 性质).** 设 $X = M + V$ 是连续半鞅, 并假设存在可预测过程 v , 使

$$\text{i) } V_t = \int_0^t v_s d\langle M, M \rangle_s;$$

以及存在 $p > 1$, 使对每个 $t > 0$,

$$\text{ii) } \int_0^t |v_s|^p d\langle M, M \rangle_s < \infty \quad \text{a.s.}$$

把 X 的局部时族记为 L_t^a , 其中 $a \in \mathbb{R}, t \geq 0$.

1°) 证明: 适当局部化 X 后, 对每个 $N > 0, k \in \mathbb{N}$ 与 $T > 0$, 存在常数 $C = C(N, k, T)$, 使得对所有满足 $|x| \leq N, |y| \leq N$ 的 x, y ,

$$E \left[\sup_{t \leq T} |L_t^x - L_t^y|^k \right] \leq C \left(|x - y|^{k/2} + |x - y|^{k(p-1)/p} \right).$$

由此推出局部时族 $\{L_t^a : a \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ 有双连续修正。

2°) 证明存在随机变量 D_T , 使

$$\sup_{t \leq T} |L_t^x - L_t^y| \leq D_T |x - y|^\alpha,$$

其中当 $p \geq 2$ 时可取任意 $\alpha < 1/2$, 当 $p < 2$ 时可取任意 $\alpha < (p-1)/p$ 。

把这些结果应用于

$$X_t = B_t + ct^m, \quad c \in \mathbb{R}, \quad 0 < m < 1.$$

^a

^a校订注: 原书这里只印出 $m < 1$ 。为使 $t \mapsto t^m$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续且题设中的 X 确为连续半鞅, 还必须有 $m > 0$ 。

下一题说明, 上述条件足以保证半鞅局部时的 Hölder 性质, 但并非必要条件。

练习 1.33. 设 B 是从 0 出发的布朗运动, ℓ 是它在 0 处的局部时。再令

$$X = B + c\ell, \quad c \in \mathbb{R},$$

并把 X 的局部时族记为 L^a 。证明：对每个 $T > 0, k > 0$ ，存在常数 $C_{T,k}$ ，使

$$E \left[\sup_{t \leq T} |L_t^a - L_t^b|^k \right] \leq C_{T,k} |a - b|^{k/2}.$$

因此，上一题的 Hölder 性质对每个 $\alpha < 1/2$ 都成立。再对

$$X = |B| + c\ell$$

证明同一结论。

练习 1.34。 设 B 是标准布朗运动， a, b 是两个不同的严格正数。证明半鞅

$$X = aB^+ - bB^-$$

的局部时在 0 处不连续，并计算其跳跃。

* **练习 1.35。** 对标准布朗运动 B ，证明定理 1.12 的如下推广：

$$\text{P-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{\Delta_n} \left(\int_0^S H_u dL_u^{a_{i+1}} - \int_0^S H_u dL_u^{a_i} \right)^2 = 4 \int_0^S H_u^2 \mathbf{1}_{\{a < B_u < b\}} du,$$

其中以下任一条件成立即可：

- i) H 是连续 $(\mathcal{F}_t^B)$ -半鞅；
- ii) $H = f(B)$ ，其中 f 在每个紧区间上有界变差；而且随机时间 S 满足 $x \mapsto L_S^x$ 是半鞅（参见第 XI 章第 2 节）。

第 XI 章练习 2.13 将给出一些使上述结论不成立的过程 H 。

2 布朗运动的局部时

本节进一步研究标准一维布朗运动的局部时性质。由上一节，它具有双连续的局部时族 L_t^a 。本节着重讨论 0 处的局部时，故把 L_t^0 简写为 L_t 。

先引入一些对一般半鞅 X 也适用的记号；第 4 节与第 XII 章还会使用这些记号。记

$$Z(\omega) = \{s : X_s(\omega) = 0\}.$$

集合 Z^c 是开集，因而是至多可数个开区间之并。对 $t \geq 0$ ，定义

$$d_t = \inf\{s > t : X_s = 0\},$$

约定 $\inf \emptyset = +\infty$ 。这些停时容易看出是可预测的。对 $t \geq 0$ ，有

$$L_t = L_{d_t},$$

因为上一节已证明 dL_t 由 Z 承载。对布朗运动，我们很快会证明一个更精确的结论（另见练习 1.26）。

首先要确定过程 L 的分布。我们将使用 Itô–Tanaka 公式

$$|B_t| = \int_0^t \text{sgn}(B_s) dB_s + L_t.$$

第 III 章练习 1.14 已经说明 $|B_t|$ 是 Markov 过程 (另见本节练习 2.18)。它显然也是半鞅, 而且在 0 处的局部时等于 $2L$ (见练习 1.17 与 2.14)。与 $|B|$ 同分布的过程称为反射布朗运动; 若可能混淆, 则称为“在零点反射的布朗运动”。

为分析 L , 需要下面的引理。它在其他问题中也很有用 (见第 IX 章练习 2.14)。

引理 2.1 (Skorokhod)。设 y 是 $[0, \infty[$ 上的实值连续函数, 并且 $y(0) \geq 0$ 。存在唯一一对定义在 $[0, \infty[$ 上的函数 (z, a) , 使

i) $z = y + a$;

ii) $z \geq 0$;

iii) a 递增、连续、在 0 处为零, 并且测度 da_s 由集合 $\{s : z(s) = 0\}$ 承载。

此外,

$$a(t) = \sup_{s \leq t} (-y(s) \vee 0).$$

证明。 首先, 定义

$$a(t) = \sup_{s \leq t} (-y(s) \vee 0), \quad z = y + a;$$

容易验证这对函数满足 i)–iii)。

为证明唯一性, 设 $(\tilde{a}, \tilde{z})$ 是另一对满足 i)–iii) 的函数。于是

$$z - \tilde{z} = a - \tilde{a}$$

是有界变差函数。由分部积分公式,

$$0 \leq (z - \tilde{z})^2(t) = 2 \int_0^t (z(s) - \tilde{z}(s)) d(a(s) - \tilde{a}(s)).$$

利用 iii), 右端进一步等于

$$-2 \int_0^t \tilde{z}(s) da(s) - 2 \int_0^t z(s) d\tilde{a}(s),$$

而由 ii)、iii), 此量不大于 0。故 $z = \tilde{z}$ 且 $a = \tilde{a}$ 。

推论 2.2。 过程

$$\beta_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s$$

是标准布朗运动, 并且

$$\mathcal{F}_t^\beta = \mathcal{F}_t^{|B|}.$$

此外,

$$L_t = \sup_{s \leq t} (-\beta_s).$$

证明。 β 是布朗运动, 直接由 P. Lévy 特征定理得到。由前一引理与 Tanaka 公式

$$|B|_t = \beta_t + L_t$$

立刻得到最后一个断言。

现在显然有 $\mathcal{F}_t^{|B|} \subset \mathcal{F}_t^\beta$ 。另一方面, 推论 1.9 说明 $\mathcal{F}_t^L \subset \mathcal{F}_t^{|B|}$, 所以 $\mathcal{F}_t^\beta \subset \mathcal{F}_t^{|B|}$ 。证明完毕。

注。 第 IX 章练习 3.16 将给出 $\mathcal{F}_t^{|B|} = \mathcal{F}_t^\beta$ 的另一个证明。

该推论说明过程 L_t 与

$$S_t = \sup_{s \leq t} B_s$$

同分布。特别地，由第 III 章命题 3.8， L_t 是指数 1/2 的稳定次级过程之逆。第 X 章练习 1.11 会给出另一证明。事实上， L_t 与 S_t 的同分布还可加强如下。

定理 2.3 (Lévy)。 二维过程

$$(S_t - B_t, S_t) \quad \text{与} \quad (|B_t|, L_t)$$

同分布。

证明。 一方面，由 Tanaka 公式，

$$|B|_t = \beta_t + L_t;$$

另一方面，平凡地有

$$S_t - B_t = -B_t + S_t.$$

引理 2.1 表明：分别从 $-B$ 与 β 出发，通过同一个确定性步骤可得到 $S, S - B$ 与 $L, |B|$ 。由于 $-B$ 与 β 同分布，结论成立。

注。 过程 $S - B$ 的滤过实际上就是 B 的滤过（见练习 2.12）。因此， $(S - B, S)$ 的滤过也是 $(\mathcal{F}_t^B)$ ；而 $(|B|, L)$ 的滤过为 $(\mathcal{F}_t^{|B|})$ ，严格更粗。

下面的推论将在后文中发挥重要作用。

推论 2.4。 对每个 $a \in \mathbb{R}$ ，

$$P[L_\infty^a = \infty] = 1.$$

证明。 由布朗运动的常返性，

$$P[S_\infty = \infty] = 1.$$

故定理 2.3 给出 $P[L_\infty^0 = \infty] = 1$ 。当 $a \neq 0$ 时，令 $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$ ；过程 $B_{T_a+t} - a$ 是标准布朗运动，从而同样得到 $P[L_\infty^a = \infty] = 1$ 。

现在证明前面预告的关于测度 dL_s 支集的结论。记 (τ_t) 为与 L 相联系的时间变换，即

$$\tau_t = \inf\{s > 0 : L_s > t\}.$$

由上一推论，各停时 τ_t 几乎必然有限。令

$$\mathcal{C}(\omega) = \bigcup_{s \geq 0}]\tau_{s-}(\omega), \tau_s(\omega)[.$$

除非局部时 L 在水平 s 上存在常值区间，否则 $]\tau_{s-}, \tau_s[$ 为空；若不为空，这个常值区间恰为 $[\tau_{s-}, \tau_s]$ 。所以各区间 $]\tau_{s-}, \tau_s[$ 两两不交， $\mathcal{C}(\omega)$ 实际上是可数并。下面将证明它是 $Z(\omega)$ 的补集。回忆第 III 章第 3 节： Z 几乎必然内部为空且无孤立点；这些 $]\tau_{s-}, \tau_s[$ 正是第 III 章定义의游程区间。

命题 2.5. 对几乎每个 ω , 下列三个集合相等:

$$\text{i) } Z(\omega), \quad \text{ii) } \mathcal{C}(\omega)^c, \quad \text{iii) } dL_t(\omega) \text{ 的支集 } \Sigma(\omega).$$

证明. 一个开集的 dL_t -测度为零, 当且仅当 L 在它的每个连通分支上都为常值。因此, $\mathcal{C}(\omega)$ 是测度为零的最大开集, 从而

$$\Sigma(\omega) = \mathcal{C}(\omega)^c.$$

命题 1.3 已经给出 $\Sigma(\omega) \subset Z(\omega)$ 几乎必然成立。为证反向包含, 先注意对任意 $t > 0$, 都有 $L_t > 0$ 几乎必然成立; 换言之, $\tau_0 = 0$ 几乎必然成立。此外, d_t 是停时且 $B_{d_t} = 0$ 。例如由 Tanaka 公式可知, 对 $s \geq 0$,

$$L_{d_t+s} - L_{d_t}$$

是布朗运动 B_{d_t+s} 在零点的局部时。因此, 对每个 $s > 0$,

$$L_{d_t+s} - L_{d_t} > 0 \quad \text{a.s.}$$

所以对每个固定 t , 点 $d_t(\omega)$ 对几乎每个 ω 都属于 $\Sigma(\omega)$; 进而, 对几乎每个 ω , 每个 $r \in \mathbb{Q}_+$ 都有 $d_r(\omega) \in \Sigma(\omega)$ 。

现取 $s \in Z(\omega)$ 及包含 s 的区间 I 。由于 $Z(\omega)$ 几乎必然是内部为空的闭集, 可以选取

$$r < s, \quad r \in \mathbb{Q}_+ \cap I, \quad r \notin Z(\omega).$$

显然 $d_r \leq s$ 。让这样的 r 逼近 s , 可见 s 是闭集 $\Sigma(\omega)$ 中点的极限, 故 $s \in \Sigma(\omega)$ 。证明完毕。

注.

1°) $\tau_0 = 0$ 几乎必然成立这一事实值得记住, 第 X 章还会推广它。

2°) $Z(\omega) = \Sigma(\omega)$ 也可由练习 1.26 与第 III 章命题 3.12 推出。

推论 2.6.

$$P(\forall s \geq 0, B_{\tau_s} = B_{\tau_{s-}} = 0) = 1.$$

反过来, 对任意 $u \in Z$, 存在某个 s , 使

$$u = \tau_s \quad \text{或} \quad u = \tau_{s-}.$$

证明. 第一个断言显然。为证第二个断言, 取 $u > 0$ 且 $u \in Z = \Sigma$ 。若对每个 $\varepsilon > 0$, 都有

$$L_{u+\varepsilon} - L_u > 0,$$

则

$$u = \inf\{t : L_t > L_u\} = \tau_s, \quad s = L_u.$$

否则, L 在某个区间 $[u, u + \varepsilon]$ 上为常值。由于 $u \in \Sigma$, 对每个 $\eta > 0$, 都有

$$L_u - L_{u-\eta} > 0,$$

故 $u = \tau_{s-}$, 其中 $s = L_u$ 。

注。 我们刚刚证明：\$Z\$ 中那些不是 \$C\$ 的区间左端点的点，都是 \$L\$ 的右增长点。

本节最后证明 P. Lévy 的反正弦律。为此需要把上述思想放进一个稍复杂的框架；第 XIII 章第 3 节还会再次实质性地使用这一框架。

令

$$A_t^+ = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} ds, \quad A_t^- = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s < 0\}} ds,$$

并把相应的时间变换记为 \$\alpha_t^+\$ 与 \$\alpha_t^-\$。我们的目标是确定随机变量 \$A_1^+\$ 的分布。由于

$$\{A_1^+ > t\} = \{\alpha_t^+ < 1\},$$

这等价于确定 \$\alpha_t^+\$ 的分布。而

$$u = A_u^+ + A_u^-$$

蕴含

$$\alpha_t^+ = t + A^-(\alpha_t^+),$$

所以只需确定 \$A^-(\alpha_t^+)\$ 的分布。

过程 \$A^\pm\$ 分别是下列鞅的递增过程：

$$M_t^+ = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} dB_s, \quad M_t^- = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s < 0\}} dB_s.$$

显然

$$\langle M^+, M^- \rangle = 0.$$

又因 \$A_\infty^+ = A_\infty^- = \infty\$，由 Knight 定理（第 V 章定理 1.9），存在两个独立布朗运动 \$\delta^+, \delta^-\$，使

$$M^\pm(\alpha^\pm) = \delta^\pm.$$

根据 \$B\$ 的局部时 \$L\$ 的定义，

$$B^+(\alpha_t^+) = \delta_t^+ + \frac{1}{2}L(\alpha_t^+), \quad B^-(\alpha_t^-) = -\delta_t^- + \frac{1}{2}L(\alpha_t^-).$$

这里 \$B^+, B^-\$ 只是同一过程 \$B\$ 的正部与负部，并不是另两条按 \$\pm\$ 命名的过程。

再次使用引理 2.1，可知

$$\left(B^\pm(\alpha^\pm), \frac{1}{2}L(\alpha^\pm) \right)$$

与 \$(|B|, L)\$ 同分布，而且

$$\frac{1}{2}L(\alpha_t^+) = \sup_{s \leq t} (-\delta_s^+), \quad \frac{1}{2}L(\alpha_t^-) = \sup_{s \leq t} \delta_s^-.$$

定理 2.7。 随机变量 \$A_1^+\$ 在 \$[0, 1]\$ 上服从反正弦分布。

证明。 对 \$a > 0\$，令

$$T^{\delta^-}(a) = T_a^{\delta^-} = \inf\{t : \delta_t^- > a\}.$$

先证明对每个 \$t\$，

$$A_{\tau_t}^- = T^{\delta^-}(t/2).$$

事实上, 由 α_t^- 的定义,

$$B_r^- = -\delta^-(A_r^-) + \frac{1}{2}L_r,$$

故

$$B^-(\tau_t) = 0 = -\delta^-(A_{\tau_t}^-) + \frac{t}{2}.$$

又由推论 2.6, τ_t 几乎必然是 L 的右增长点, 所以存在 $s_n \downarrow \tau_t$, 使

$$B_{s_n}^- = 0, \quad L_{s_n} > L_{\tau_t} = t.$$

于是

$$\delta^-(A_{s_n}^-) > t/2,$$

从而

$$A_{\tau_t}^- \geq T^{\delta^-}(t/2).$$

反过来, 若 $u < A_{\tau_t}^-$, 则存在 $v < \tau_t$, 使 $u = A_v^-$. 若 $v < \tau_{t-}$, 则

$$\delta^-(A_v^-) = \frac{1}{2}L_v - B_v^- < \frac{t}{2}.$$

若 $\tau_{t-} \leq v < \tau_t$, 则 A^- 在 τ_{t-} 与 τ_t 之间增长, 说明 B 在该区间为负, 故 $B^- > 0$, 仍有

$$\delta^-(A_v^-) < t/2.$$

这证明反向不等式

$$A_{\tau_t}^- \leq T^{\delta^-}(t/2).$$

此外,

$$A^-(\alpha_t^+) = A^-(\tau_{L(\alpha_t^+)}) .$$

确实, 若 v 是 L 的增长点, 则 $\tau_{L_v} = v$; 若 v 位于 L 的某个水平常值区间, 且 $v = \alpha_t^+$, 则 B 在该常值区间为正, 所以

$$A^-(\tau_{L_v}) = A_v^-.$$

结合上面两点, 对每个固定 t ,

$$A^-(\alpha_t^+) = T^{\delta^-}\left(\frac{1}{2}L(\alpha_t^+)\right).$$

现在,

$$\frac{1}{2}L(\alpha_t^+) = \sup_{s \leq t} (-\delta_s^+)$$

与 δ^- 独立。因此

$$A^-(\alpha_t^+) = T^{\delta^-}(S_t),$$

其中 S_t 是某个与 δ^- 独立的布朗运动 β 的上确界过程。利用 T^{δ^-} 的尺度不变性以及第 III 章第 3 节的反射原理,

$$\begin{aligned} A^-(\alpha_t^+) &\stackrel{d}{=} S_t^2 T_1^{\delta^-} \\ &\stackrel{d}{=} t \beta_1^2 (\delta_1^-)^{-2} \\ &\stackrel{d}{=} t C^2, \end{aligned}$$

其中 C 是参数为 1 的 Cauchy 随机变量。

由定理前的讨论,

$$\alpha_t^+ \stackrel{d}{=} t(1 + C^2),$$

因而

$$P[A_1^+ > t] = P[(1 + C^2)^{-1} > t].$$

所以 A_1^+ 与 $(1 + C^2)^{-1}$ 同分布; 由初等计算可知, 这正是反正弦分布 (见第 0 章第 6 节)。

读者不妨思考反正弦律的直观含义: 布朗运动虽然常返并无穷多次回到零点, 但在一个给定时刻, 它很可能已经在零点某一侧停留了远比另一侧更长的时间。

练习 2.8。

1°) 对一维布朗运动以及 $a \leq x \leq y \leq b$, 证明

$$E_x[L_{T_a \wedge T_b}^y] = 2u(x, y),$$

其中

$$u(x, y) = \frac{(x - a)(b - y)}{b - a}.$$

2°) 当 $a \leq y \leq x \leq b$ 时, 定义 $u(x, y) = u(y, x)$ 。证明: 对任意非负 Borel 函数 f ,

$$E_x\left[\int_0^{T_a \wedge T_b} f(B_s) ds\right] = 2 \int_a^b u(x, y) f(y) dy.$$

这给出了布朗运动在首次到达 a 或 b 时被杀死之后的势核。

练习 2.9。 设 (P_t) 是布朗运动的半群, 并令 $f(x) = |x|$ 。证明

$$L_t = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^t (P_h f(B_s) - f(B_s)) ds \quad \text{a.s.}$$

提示: 对函数 $P_h f - f$ 写出占有时间公式。

练习 2.10。

1°) 证明: 对 $\alpha > 0$, 过程

$$(S_t - B_t + \alpha^{-1}) \exp(-\alpha S_t) \quad \text{和} \quad (|B_t| + \alpha^{-1}) \exp(-\alpha L_t)$$

都是局部鞅。

2°) 令

$$U_x = \inf\{t : S_t - B_t > x\}, \quad \tilde{T}_x = \inf\{t : |B_t| > x\}.$$

证明 S_{U_x} 与 $L_{\tilde{T}_x}$ 都服从参数为 x^{-1} 的指数分布。本结论也可用第 4 节的方法证明。

练习 2.11 (尺度不变性)。

1°) 证明双参数过程

$$(B_t, L_t^a) \quad \text{与} \quad \frac{1}{\sqrt{c}} (B_{ct}, L_{ct}^{a\sqrt{c}}), \quad a \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

同分布。

2°) 证明过程 (τ_t) 与

$$(c^{-1}\tau_{\sqrt{c}t})$$

同分布。

3°) 一如既往地令

$$T_a = \inf\{t : B_t = a\}.$$

证明双参数过程

$$(L_{T_a}^x) \quad \text{与} \quad (c^{-1}L_{T_{ca}}^{cx}), \quad x \in \mathbb{R}, a \geq 0,$$

同分布。

练习 2.12。 证明

$$\mathcal{F}_t^B = \mathcal{F}_t^{S-B}.$$

换言之，只要知道 $S - B$ 在时刻 t 以前的轨道，就能恢复 B 在时刻 t 以前的轨道。

练习 2.13。 设 $B = (B^1, B^2)$ 是标准平面布朗运动， τ_t 是 B^1 在零点的局部时之逆。证明

$$X_t = B_{\tau_t}^2$$

是对称 Cauchy 过程。比较第 III 章练习 3.25。

练习 2.14。

1°) 证明二维过程

$$\left(|B_t|, \frac{1}{2}L_t^0(|B|)\right)$$

与定理 2.3 中的两个二维过程同分布。

2°) 由此推出： $|B_t|$ 在零点的局部时等于 $2L_t$ ，而 $S_t - B_t$ 在零点的局部时等于 $2S_t$ 。另见练习 1.17。

练习 2.15。

1°) 固定 $t > 0$ 。证明：对标准一维布朗运动，几乎必然恰有一个 $s \leq t$ 满足 $B_s = S_t$ 。换言之，

$$P[\exists(r, s) : r < s \leq t, B_r = B_s = S_t] = 0.$$

提示： $2S$ 是反射布朗运动 $S - B$ 在零点的局部时。按照第 III 章练习 3.26 的提示，也可用更初等的方法证明这一结论。

2°) 证明

$$G_1 = \sup\{s < 1 : B_s = S_1\}$$

也服从反正弦分布；因此 G_1 与 A_1 同分布。

提示：使用第 III 章练习 3.20。

练习 2.16。 设 X 是在 0 与 1 处反射的标准布朗运动（见第 III 章练习 1.14）。

1°) 证明

$$X_t = \beta_t + \tilde{L}_t^0 - \tilde{L}_t^1,$$

其中 β 是标准一维布朗运动, $\tilde{L}^a$ 是 X 在 a 处的对称局部时 (练习 1.25)。

2°) 把引理 2.1 推广到这一情形, 并证明

$$\tilde{L}_t^0 = \sup_{s \leq t} (-\beta_s + \tilde{L}_s^1)^+, \quad \tilde{L}_t^1 = \sup_{s \leq t} (\beta_s + \tilde{L}_s^0 - 1)^+.$$

练习 2.17. 证明: 第 V 章练习 4.13 中引入的鞅

$$X_t = \int_0^t B_s^1 dB_s^2$$

所生成的滤过 $(\mathcal{F}_t^X)$, 是某个布朗运动的滤过。

提示: 计算 $\langle X, X \rangle$ 。

练习 2.18.

1°) 证明 $(|B_t|, L_t)$ 的联合分布在 $a, b \geq 0$ 上具有密度

$$\left(\frac{2}{\pi t^3}\right)^{1/2} (a+b) \exp\left(-\frac{(a+b)^2}{2t}\right).$$

并给出 (B_t, L_t) 的分布。

2°) 证明二维过程 $(|B_t|, L_t)$ 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 是 Markov 过程, 并求出其转移函数。

第 X 章练习 1.13 给出更一般的结果; 还可比较第 III 章练习 3.17。

练习 2.19.

1°) 证明: 几乎必然地, $\mathbb{R}$ 上由

$$\nu(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(B_t - B_s) ds dt$$

定义的随机测度 ν , 关于 Lebesgue 测度具有连续密度; 并证明该密度对每个 $\beta < 1$ 都是 β 阶 Hölder 连续的。

提示: 后一结论可用推论 1.8 的证明方法得到; 它也可由如下事实推出: 两个 β 阶 Hölder 连续函数的卷积是 2β 阶 Hölder 连续的。

2°) 更一般地, 对 $[0, 1]^2$ 的任意 Borel 子集 Γ , 测度

$$\nu(f) = \iint_{\Gamma} f(B_t - B_s) ds dt$$

关于 Lebesgue 测度具有连续密度 $\alpha(x, \Gamma)$ 。此时 α 是 $\mathbb{R} \times [0, 1]^2$ 上的一个核。

提示: 使用练习 1.15。

3°) 证明: 若 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 则几乎必然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \int_0^1 f(n(B_t - B_s)) dt ds = \left(\int_{\mathbb{R}} f(a) da \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (L_1^b)^2 db \right).$$

练习 2.20. 沿用反正弦律证明中的记号, 证明 B 是 δ^+ 与 δ^- 的确定性函数。也就是说, 存在定义在 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})^2$ 上的函数 f , 使

$$B = f(\delta^+, \delta^-).$$

本题将在第 XIII 章命题 3.5 中解答。

练习 2.21. 利用命题 2.5 与第 V 章第 1 节的 DDS 定理, 证明练习 1.26 中关于 dL_t 的支集结论。

练习 2.22. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的局部有界奇函数, 在零点两侧分别保持恒定符号, 并且集合

$$\{x : f(x) = 0\}$$

的 Lebesgue 测度为零。证明鞅

$$M_t = \int_0^t f(B_s) dB_s$$

所生成的滤过是某个布朗运动的滤过。

提示: 使用第 V 章练习 3.12。

练习 2.23. 设 B 是标准一维布朗运动。证明: $f(B_t)$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ -局部下鞅, 当且仅当 f 是凸函数。

提示: 函数 f 为凸函数, 当且仅当对任意仿射函数 ℓ , $f + \ell$ 都没有严格局部极大值。

* **练习 2.24.** 设 X 是满足下式的连续半鞅 (如果这样的过程存在):

$$X_t = x + B_t + \int_0^t \alpha(s) dL_s, \quad (*)$$

其中 B 是布朗运动, α 是 $\mathbb{R}_+$ 上的确定性 Borel 函数, 而 $L = L^0(X)$ 。

1°) 证明: 若对所有 $s \geq 0$ 都有 $\alpha(s) < 1$, 则过程 L 的分布由 α 唯一确定。

提示: 写出 $|X|$ 的表达式, 并使用引理 2.1。

2°) 令

$$g_t(\lambda) = E[e^{i\lambda X_t}].$$

证明

$$g_t(\lambda) = e^{i\lambda x} - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t g_s(\lambda) ds + i\lambda E \left[\int_0^t \alpha(s) dL_s \right].$$

因而随机变量 X_t 的分布也由 α 决定。对条件分布使用同一方法, 证明所有满足 (*) 的连续半鞅都同分布。用第 IX 章的术语说, 方程 (*) 的解在分布意义下唯一。第 X 章练习 2.24 的斜布朗运动, 正是 α 为常数时得到的特殊情形。

3°) 证明

$$L_t^{0-} = \int_0^t (1 - 2\alpha(s)) dL_s,$$

并由此证明: 若 α 是大于 1/2 的常数, 则方程 (*) 没有解。

练习 2.25。 设 X 是连续过程, $(L^a)_{a \in \mathbb{R}}$ 是布朗运动的局部时族。证明: 对每个 t , 过程

$$Y_a = \int_0^t X_u \, dL_u^a, \quad a \in \mathbb{R},$$

是连续的。

* **练习 2.26 (布朗运动零点集的 Hausdorff 维数)。**

1°) 对每个 $n \geq 1$, 递归定义两列停时:

$$U_1^n = 0, \quad V_k^n = \inf\{t \geq U_k^n : |B_t| = 2^{-n}\}, \quad U_{k+1}^n = \inf\{t \geq V_k^n : |B_t| = 0\}.$$

设 K 为正整数。证明: 若 $\alpha > \frac{1}{2}$, 则几乎必然地, 当 n 充分大时,

$$\sup\{(V_k^n - U_k^n)^\alpha : 1 \leq k \leq K2^n\} \leq 2^{-n}.$$

提示: 随机变量 $V_k^n - U_k^n$ 独立同分布, 其共同分布为 $2^{-2n}\tilde{T}_1$ 的分布。

2°) 利用练习 1.19 的逼近结论证明: 在事件 $\{L_1 < K\}$ 上, 几乎必然地, 当 n 充分大时,

$$\sum_{k=1}^{N_n} (V_k^n - U_k^n)^\alpha \leq K,$$

其中

$$N_n = \sup\{k \geq 1 : U_k^n \leq 1\}.$$

由此推出零点集

$$Z = \{t \leq 1 : B_t = 0\}$$

的 Hausdorff 维数几乎必然不大于 $1/2$ 。

反向不等式是下一题的内容。

* **练习 2.27。**

1°) 设 ν 是 $\mathbb{R}$ 上的测度, $C, \alpha > 0$, 并且按照附录 4 的记号, 对每个区间 I 都有

$$\nu(I) \leq C|I|^\alpha.$$

若 Borel 集 A 的 ν -测度严格为正, 证明 A 的 Hausdorff 维数不小于 α 。

2°) 把第 1 问应用于测度 dL_t , 证明 Z 的 Hausdorff 维数几乎必然不小于 $1/2$ 。结合上一题可知, Z 的 Hausdorff 维数几乎必然等于 $1/2$ 。

** **练习 2.28 (布朗局部时的随机积分表示)。**

1°) 对 $f \in C_K(\mathbb{R})$, 证明标准一维布朗运动满足

$$\begin{aligned} \int_0^t f(B_s) \, ds &= \int_0^t E[f(B_s)] \, ds \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^t ds \int_0^{s-\varepsilon} (P_{s-v}f)'(B_v) \, dB_v. \end{aligned}$$

提示: 使用第 V 章练习 3.13 的表示。

2°) 令

$$q(x) = 2 \int_{|x|}^{\infty} e^{-u^2/2} du.$$

证明

$$\begin{aligned} \int_0^t f(B_s) ds &= \int_0^t E[f(B_s)] ds \\ &+ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left\{ \int_0^{t-\varepsilon} \operatorname{sgn}(B_v - y) \right. \\ &\quad \times \left[q\left(\frac{B_v - y}{\sqrt{t-v}}\right) - q\left(\frac{B_v - y}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \right] dB_v \Big\} dy. \end{aligned}$$

提示：使用推广到适当可积过程的随机积分 Fubini 定理。

3°) 推出

$$\int_0^t f(B_s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) L_t^y dy,$$

其中

$$L_t^y = \int_0^t g_s(y) ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \operatorname{sgn}(B_v - y) q\left(\frac{B_v - y}{\sqrt{t-v}}\right) dB_v.$$

** 练习 2.29 (伪布朗桥)。

1°) 设 h 是 $\mathbb{R}_+$ 上的有界 Borel 函数，并令

$$M_t = \mathcal{E} \left(\int_0^t h(s) dB_s \right)_t.$$

若 ϕ 是具有紧支集的连续函数，证明过程

$$Y_a = \int_0^\infty \phi(t) M_t dL_t^a, \quad a \in \mathbb{R},$$

是连续的 (见练习 2.25)。

2°) 令 Q_x^u 表示区间 $[0, u]$ 上从 0 到 x 的布朗桥之分布，并简记 $Q^u = Q_0^u$ (关于族 (Q_x^u) 的性质，见第 I 章练习 3.16)。若 Z 是非负可预测过程，证明

$$\int_0^\infty E[Z_{\tau_s}] ds = \int_0^\infty Q^u[Z_u] \frac{du}{\sqrt{2\pi u}},$$

其中

$$Q^u[Z_u] = \int Z_u dQ^u.$$

提示：设 (f_n) 是 Dirac 质量 δ_0 的一个逼近，用两种方法计算

$$E \left[\int_0^\infty f_n(B_t) \phi(t) M_t dt \right],$$

然后令 $n \rightarrow +\infty$ 。

3°) 若 F 是 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上的非负 Borel 函数，而 g 是 $\mathbb{R}_+$ 上的非负 Borel 函数，证明

$$\begin{aligned} \int_0^\infty E \left[F \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_s}} B_{v\tau_s}, v \leq 1 \right) g(\tau_s) \right] ds \\ = \int_0^\infty \frac{g(u)}{\sqrt{2\pi u}} E \left[F \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \beta_{vu}^u, v \leq 1 \right) \right] du, \end{aligned}$$

其中 β^u 是时间区间 $[0, u]$ 上从 0 到 0 的布朗桥。

4°) 在 $[0, 1]$ 上定义过程

$$X_u = \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} B_{u\tau_1}, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

可称之为伪布朗桥。证明

$$E[F(X_u, u \leq 1)] = E\left[F(\beta_u^1, u \leq 1) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda}\right],$$

其中 λ 是 β^1 在零点、时刻 1 的局部时。

提示：利用尺度不变性把第 3 问的等式变形。再注意 $1/\sqrt{\tau_1}$ 是 X 在零点、时刻 1 的局部时，并且

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_1}} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 \mathbf{1}_{]-\varepsilon, \varepsilon[}(X_s) ds.$$

5°) 证明过程

$$(B_t; t \leq \tau_1) \quad \text{与} \quad (B_{\tau_1-t}; t \leq \tau_1)$$

同分布。

6°) 证明 λ 与 $\sqrt{2}e$ 同分布，其中 e 服从参数为 1 的指数分布。第 XII 章练习 3.8 还会讨论这一结论；本问可以不依赖第 5 问单独求解。

练习 2.30。 沿用第 III 章练习 3.23 的记号，证明过程

$$\{g_1^{-1/2} B_{ug_1} : 0 \leq u \leq 1\}$$

是一个布朗桥，并且与

$$\sigma(g_1, B_{g_1+u}, u \geq 0)$$

独立。

提示：使用时间反演以及第 I 章练习 3.10。

练习 2.31。 在第 V 章命题 3.2 的情形下，证明存在无穷多个可预测过程 H ，使

$$\int_0^\infty H_s^2 ds < \infty,$$

并且

$$F = E[F] + \int_0^\infty H_s dB_s.$$

提示：沿用本节的记号，考虑 $\mathbf{1}_{[0, \tau_1]}$ 。

练习 2.32。 设 X 是从 0 出发的连续局部鞅，并令

$$S_t = \sup_{s \leq t} X_s, \quad \hat{X}_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) dX_s.$$

1°) 证明下列两个性质等价：

- i) $S - X$ 与 $|X|$ 同分布；
- ii) X 与 $-\hat{X}$ 同分布。

2°) 设 X, Y 是两个从 0 出发的连续局部鞅, 并分别把它们的 DDS 布朗运动记为 β, γ . 证明 X 与 Y 同分布, 当且仅当二维过程

$$(\beta, \langle X, X \rangle) \quad \text{与} \quad (\gamma, \langle Y, Y \rangle)$$

同分布. 特别地, 若 $Y = \hat{X}$, 则 X 与 Y 同分布, 当且仅当在给定 $\mathcal{F}_\infty^{\langle X, X \rangle}$ 的条件下, 过程 β 与 γ 同分布.

3°) 若

$$\mathcal{F}_\infty^{\langle X, X \rangle} = \mathcal{F}_\infty^{|\beta|},$$

则 X 与 $\hat{X}$ 的分布不相同. 下面给出一个例子: 设 ϕ 是从 $\mathbb{R}_+$ 到 $[a, b]$ 的连续双射, 其中 $0 < a < b < \infty$; 设 β 是一维布朗运动, A 是与

$$\int_0^t \phi(|\beta_s|) ds$$

相联系的时间变换, 并令 $X_t = \beta_{A_t}$. 证明 X 与 $\hat{X}$ 的分布不相同. 还要注意, 存在一个记为 B 的布朗运动, 使

$$X_t = \int_0^t \phi(|X_s|)^{-1/2} dB_s.$$

4°) 类似地, 证明: 若

$$\mathcal{F}_\infty^{\langle X, X \rangle} = \mathcal{F}_\infty^\beta,$$

则 X 与 $\hat{X}$ 的分布不相同. 适当修改第 3 问后半部分的构造, 给出这种情形的一个例子.

**** 练习 2.33 (反正弦律的补充).** 沿用定理 2.7 的记号.

1°) 对 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上的任意非负 Borel 函数 F , 证明

$$E[F(B_u, u \leq 1) \mathbf{1}_{\{B_1 > 0\}}] = E\left[\frac{1}{\alpha_1^+} F\left(\frac{B_{u\alpha_1^+}}{\sqrt{\alpha_1^+}}, u \leq 1\right)\right].$$

提示: 考虑

$$E\left[\int_0^\infty F(t^{-1/2} B_{st}, s \leq 1) \phi(t) dA_t^+\right],$$

其中 ϕ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的非负 Borel 函数.

2°) 对 $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$ 上的任意非负 Borel 函数 f , 证明

$$E[f(A_1^+, L_1^2) \mathbf{1}_{\{B_1 > 0\}}] = E\left[\frac{A_{\tau_1}^+}{\tau_1} f\left(\frac{A_{\tau_1}^+}{\tau_1}, \frac{1}{\tau_1}\right)\right].$$

3°) 证明: 对下列三类随机时刻, 三元组

$$T^{-1}(A_T^+, A_T^-, L_T^2)$$

的分布相同:

$$\text{i) } T = t \text{ (确定时刻)}, \quad \text{ii) } T = \alpha_s^+, \quad \text{iii) } T = \tau_u.$$

练习 2.34。

1°) 设 B 是标准一维布朗运动, L 是它在零点的局部时。对 $h > 0$, 证明存在局部鞅 M , 使

$$\log(1 + h|B_t|) = M_t - \frac{1}{2}\langle M, M \rangle_t + hL_t.$$

2°) 设 γ 是 $-M$ 的 DDS 布朗运动, 并令

$$\beta_t = \gamma_t + \frac{1}{2}t, \quad \sigma_t = \sup_{s \leq t} \beta_s.$$

利用 Skorokhod 引理 2.1 证明: 对每个 $t \geq 0$, 几乎必然有

$$\log(1 + h|B_t|) = \sigma_{V_t} - \beta_{V_t},$$

其中

$$V_t = \int_0^t (h^{-1} + |B_s|)^{-2} ds.$$

3°) 一如既往地定义

$$\tilde{T}_a = \inf\{t : |B_t| = a\}, \quad \tau_s = \inf\{u : L_u > s\}.$$

证明

$$V_{\tilde{T}_a} = \inf\{u : \sigma_u - \beta_u = \log(1 + ha)\},$$

以及

$$V_{\tau_s} = \inf\{u : \beta_u = hs\}.$$

第 VIII 章练习 3.18 的末尾将给出 $V_{\tilde{T}_a}$ 与 V_{τ_s} 的分布。

练习 2.35 (布朗桥的局部时)。

1°) 设 $x > 0$ 。沿用本节记号, 考虑布朗运动 $B_{t+T_x} - x$, 并利用定理 2.3 证明

$$P[L_1^x \geq y, B_1 > b] = \frac{1}{2}P[S_1 > x + y, S_1 - B_1 > |b - x|].$$

进而证明: 在给定 $B_1 = b$ 的条件下, 当 $0 \leq x \leq b$ 时, L_1^x 的分布与 x 无关。

2°) 利用练习 2.18 的结论, 并对事件 $\{B_1 = 0\}$ 作条件化, 证明: 若 (l^x) 是标准布朗桥的局部时族, 则对每个 $x \geq 0$,

$$l_1^x \stackrel{d}{=} (R - 2x)^+,$$

其中 R 的密度为

$$\mathbf{1}_{\{r>0\}} r \exp(-r^2/2).$$

3 三维 Bessel 过程

第 XI 章将借助一些尚未引入的概念, 系统研究通常称为 Bessel 过程的单参数过程族。本节只用目前已经建立的工具, 对三维 Bessel 过程作初步研究。这个过程在一维布朗运动的描述中经常出现。

我们先继续研究 δ 维布朗运动的 Euclid 范数; $\delta = 2$ 的情形已在第 V 章开始讨论, $\delta = 1$ 的

情形则见上一节。暂设 $\delta \geq 1$ 为整数，并令

$$\rho_t = |B_t|$$

为 δ 维布朗运动的模。仍以 P_x 表示从 $x \in \mathbb{R}^\delta$ 出发的 δ 维布朗运动之分布， $(\mathcal{F}_t)$ 表示第 III 章第 2 节引入的完备布朗滤过。关于 Bessel 函数，参见附录 7。

命题 3.1. 对每个 $\delta \geq 1$ ，过程 $(\rho_t)_{t \geq 0}$ 在每个 P_x 下都是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的齐次 Markov 过程。若 $\delta \geq 2$ ，其半群 P_t^δ 在 $[0, \infty[$ 上具有如下密度：当 $a, b > 0$ 时，

$$p_t^\delta(a, b) = \frac{a}{t} \left(\frac{b}{a}\right)^{\delta/2} I_{\delta/2-1}\left(\frac{ab}{t}\right) \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2t}\right),$$

其中 I_ν 是指标为 ν 的第一类修正 Bessel 函数；而

$$p_t^\delta(0, b) = \frac{2^{1-\delta/2}}{\Gamma(\delta/2)} t^{-\delta/2} b^{\delta-1} \exp\left(-\frac{b^2}{2t}\right).$$

5

证明。 设 f 是 $[0, \infty[$ 上的非负 Borel 函数。对 $s < t$,

$$E_x[f(\rho_t) | \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[f(|B_{t-s}|)] = P_{t-s}\tilde{f}(B_s) \quad P_x\text{-a.s.},$$

其中

$$\tilde{f}(x) = f(|x|),$$

而 P_t 是 δ 维布朗运动的半群。

当 $\delta \geq 2$ 时，

$$P_t\tilde{f}(x) = (2\pi t)^{-\delta/2} \int_{\mathbb{R}^\delta} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right) f(|y|) dy.$$

改用极坐标，得到

$$\begin{aligned} P_t\tilde{f}(x) &= (2\pi t)^{-\delta/2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{|x|^2 + r^2}{2t}\right) f(r) r^{\delta-1} dr \\ &\quad \times \int_{S^{\delta-1}} \exp\left(\frac{|x|r \cos \theta}{t}\right) \sigma(d\eta), \end{aligned}$$

其中 η 是单位球面上的一般点， θ 是 x 与 η 的夹角。右端只依赖于 $|x|$ ，这就证明了第一个断言（ $\delta = 1$ 的情形已在第 III 章练习 1.14 中研究）。

令

$$P_t^\delta f(a) = P_t\tilde{f}(x) \quad (|x| = a).$$

上面的极坐标公式与修正 Bessel 函数的积分表示给出 $a, b > 0$ 时所述密度。令 $a \downarrow 0$ ，或直接从中心高斯向量的径向密度计算，即得 $p_t^\delta(0, b)$ 。

定义 3.2. 半群为 P_t^δ 的 Markov 过程称为 δ 维 Bessel 过程。

Bessel 过程显然都是 Feller 过程。以后把 δ 维 Bessel 过程简记为 BES^δ ，从 $x \geq 0$ 出发者记为 $\text{BES}^\delta(x)$ 。上一命题说明， δ 维布朗运动的模给出了 BES^δ 的一个实现。因此，由 δ 维布朗运动

⁵校订注：英文底本在 $p_t^\delta(0, b)$ 的归一化常数处把 $\Gamma(\delta/2)2^{\delta/2-1}$ 误印在分子。这里改为其倒数；修正后的密度积分为 1，并与 δ 维中心高斯向量模长的 χ_δ 密度一致。

的结论可知：当 $\delta \geq 2$ 时， BES^δ 在时刻 0 以后绝不会到达 0；当 $\delta \geq 3$ 时，它还是暂留过程，即几乎必然趋于无穷。

从现在起，我们集中研究三维过程 BES^3 ，并仍把它记为 ρ 。由 $I_{1/2}$ 的表达式可知，其半群 P_t^3 具有特别简单的形式。令 Q_t 表示一维布朗运动在 $]0, \infty[$ 上运行并在到达零点时被杀死所得过程的半群。第 III 章练习 1.15 已经说明， Q_t 的密度为

$$q_t(x, y) = g_t(x - y) - g_t(x + y), \quad x > 0, y > 0.$$

在 $]0, \infty[$ 上令 $h(x) = x$ ，容易验证 $Q_t h = h$ 。半群 P_t^3 正是第 VIII 章将称为 Q_t 的 h -变换：

$$P_t^3 f(x) = h(x)^{-1} Q_t(fh)(x), \quad x > 0.$$

换言之， P_t^3 的密度为

$$x^{-1} q_t(x, y).$$

当 $x = 0$ 时，

$$P_t^3 f(0) = \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi t^3} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) y^2 f(y) dy.$$

下面的命题也将在后文中使用。

命题 3.3. 若 (ρ_t) 是从 $x \geq 0$ 出发的 BES^3 ，则存在布朗运动 β ，使

$$\rho_t = x + \beta_t + \int_0^t \rho_s^{-1} ds.$$

此外， ρ^{-1} 是局部鞅；当 $x = 0$ 时，时间参数限制在 $]0, \infty[$ 上。

证明。 可把 ρ 实现为三维布朗运动 $B = (B^1, B^2, B^3)$ 的模。由 P. Lévy 特征定理，

$$\beta_t = \sum_{i=1}^3 \int_0^t \rho_s^{-1} B_s^i dB_s^i$$

是一维布朗运动。再对 $|B_t|$ 与 $|B_t|^{-1}$ 应用 Itô 公式，并利用 ρ 在时刻 0 以后不再到达零点，即得两个结论。

注。 第一个结论说明 ρ 是随机微分方程

$$d\rho_s = d\beta_s + \rho_s^{-1} ds$$

的解（见第 IX 章）。第 V 章练习 2.13 还提示了 ρ^{-1} 为局部鞅的另一种证明，并用它构造了一个重要反例。

推论 3.4. 设 P_x^3 是从 $x > 0$ 出发的 BES^3 之分布， T_a 是到达 $a > 0$ 的时刻。若 $0 < a < x < b$ ，则

$$P_x^3[T_a < T_b] = \frac{b^{-1} - x^{-1}}{b^{-1} - a^{-1}},$$

并且

$$P_x^3[T_a < \infty] = \frac{a}{x}.$$

此外,

$$J_0 = \inf_{s \geq 0} \rho_s$$

在 $[0, x]$ 上服从均匀分布。

证明。 把局部鞅 ρ^{-1} 停在 T_a 后所得过程有界, 因而是鞅, 可以应用可选停止定理。随后完全仿照第 II 章命题 3.8 的证明, 得到第一个公式。令 $b \rightarrow \infty$, 便得 $P_x^3[T_a < \infty] = a/x$ 。最后,

$$P_x^3[J_0 \leq a] = P_x^3[T_a < \infty] = \frac{a}{x},$$

证明完毕。

现在讨论本节第一个重要结果。它补充了定理 2.3; 以下沿用其中的记号: B 是从 0 出发的一维布朗运动, 并且

$$S_t = \sup_{s \leq t} B_s.$$

定理 3.5 (Pitman)。 过程

$$\rho_t = 2S_t - B_t$$

是从 0 出发的三维 Bessel 过程。更精确地, 若 ρ 是 $\text{BES}^3(0)$, 并令

$$J_t = \inf_{s \geq t} \rho_s,$$

则二维过程

$$(2S_t - B_t, S_t) \quad \text{与} \quad (\rho_t, J_t)$$

同分布。

证明。 设 ρ 是 $\text{BES}^3(0)$, 并令

$$X_t = 2J_t - \rho_t.$$

先证明: 对每个 t ,

$$J_t = \sup_{s \leq t} X_s.$$

若 $J_t = \rho_t$, 则 $X_t = J_t$; 又因 $s \leq t$ 时 $J_s \leq \rho_s$, 所以

$$X_s = 2J_s - \rho_s \leq J_s \leq J_t = X_t.$$

这就在该情形下证明了断言。

若 $\rho_t \neq J_t$, 则 $\rho_t > J_t$, 从而

$$X_t < J_t = J_{g_t}, \quad g_t = \sup\{s < t : J_s = \rho_s\}.$$

而在 g_t 处属于前一种情形, 故

$$J_{g_t} = \sup_{s \leq g_t} X_s.$$

再结合 $X_s \leq J_s \leq J_t$, 即得一般情形下的断言。

因此

$$(\rho_t, J_t) = (2J_t - X_t, J_t), \quad J_t = \sup_{s \leq t} X_s.$$

现在只需证明 X 是布朗运动。由 P. Lévy 特征定理 (第 IV 章第 3 节), 只须证明 X 是鞅, 因为显然

$$\langle X, X \rangle_t = \langle \rho, \rho \rangle_t = t.$$

先注意, 对 $s < t$,

$$J_s = J_t \wedge \inf_{s \leq u < t} \rho_u.$$

因此, 知道 J_t 以及 ρ 在时刻 t 以前的轨道, 就能知道所有 J_s , $s \leq t$ 。于是

$$\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^\rho \vee \sigma(J_t).$$

反过来, 由

$$J_t = \sup_{s \leq t} X_s, \quad \rho_t = 2J_t - X_t,$$

可知

$$\sigma(J_t) \subset \mathcal{F}_t^X, \quad \mathcal{F}_t^\rho \subset \mathcal{F}_t^X.$$

故

$$\mathcal{F}_t^X = \mathcal{F}_t^\rho \vee \sigma(J_t).$$

又因为 $X_t \leq \rho_t$ 且 $-X_t \leq \rho_t$, 每个 X_t 都可积。所以, 为证明 X 是鞅, 只须对任意 $a > 0$ 与 $s \leq t$ 验证

$$E_0^3[X_t \mathbf{1}_{\{J_s > a\}} \mid \mathcal{F}_s^\rho] = E_0^3[X_s \mathbf{1}_{\{J_s > a\}} \mid \mathcal{F}_s^\rho]. \quad (*)$$

把右端记为 K 。推论 3.4 给出

$$P_z^3[J_0 > a] = P_z^3[T_a = \infty] = \begin{cases} 1 - az^{-1}, & a < z, \\ 0, & a \geq z, \end{cases}$$

以及

$$E_z^3[J_0 \mathbf{1}_{\{J_0 > a\}}] = \begin{cases} \frac{z - a^2 z^{-1}}{2}, & a < z, \\ 0, & a \geq z. \end{cases}$$

利用这些公式以及 ρ 的 Markov 性质, 不难得到

$$K = (a - a^2 \rho_s^{-1}) \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}}.$$

再把 (*) 左端记为 k 。由

$$\{J_s > a\} = \{J_t > a\} \cap \left\{ \inf_{s \leq u \leq t} \rho_u > a \right\},$$

有

$$\begin{aligned} k &= E_0^3 \left[X_t \mathbf{1}_{\{J_t > a\}} \mathbf{1}_{\{\inf_{s \leq u \leq t} \rho_u > a\}} \mid \mathcal{F}_s^\rho \right] \\ &= E_0^3 \left[E_0^3 [X_t \mathbf{1}_{\{J_t > a\}} \mid \mathcal{F}_t^\rho] \mathbf{1}_{\{\inf_{s \leq u \leq t} \rho_u > a\}} \mid \mathcal{F}_s^\rho \right]. \end{aligned}$$

把上面对 K 的计算用于时刻 t , 得到

$$\begin{aligned}
 k &= E_0^3 \left[(a - a^2 \rho_t^{-1}) \mathbf{1}_{\{\inf_{s \leq u \leq t} \rho_u > a\}} \mid \mathcal{F}_s^\rho \right] \\
 &= E_0^3 \left[(a - a^2 \rho_t^{-1}) \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}} \mathbf{1}_{\{s+T_a \circ \theta_s > t\}} \mid \mathcal{F}_s^\rho \right] \\
 &= E_0^3 \left[\left(a - a^2 \rho_{(t-s) \wedge T_a}^{-1} \circ \theta_s \right) \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}} \mid \mathcal{F}_s^\rho \right] \\
 &= E_{\rho_s}^3 \left[a - a^2 \rho_{(t-s) \wedge T_a}^{-1} \right] \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}} \\
 &= (a - a^2 \rho_s^{-1}) \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}},
 \end{aligned}$$

因为 $(\rho_{t \wedge T_a}^{-1})$ 是有界鞅。因此 $k = K$, 证明完毕。

值得注意的是, $2S - B$ 虽然是 Markov 过程并且关于 $(\mathcal{F}_t^B)$ 适应, 却不是关于 $(\mathcal{F}_t^B)$ 的 Markov 过程。事实上, 由上面证明的前半部分, $\mathcal{F}_t^B$ 包含 $2S - B$ 在时刻 t 以后的某些信息。这与上一节研究的 $S - B$ 不同; 对后者,

$$\mathcal{F}_t^{S-B} = \mathcal{F}_t^B$$

(见练习 2.12)。这里 $\mathcal{F}_t^{2S-B}$ 严格包含于 $\mathcal{F}_t^B$, 下面的推论清楚说明了这一点。

推论 3.6. 给定 $\mathcal{F}_t^{2S-B}$ 后, S_t 的条件分布是在

$$[0, 2S_t - B_t]$$

上的均匀分布; 因而 $S_t - B_t$ 的条件分布也相同。

证明。 由定理 3.5, 这也就是给定 $\sigma(\rho_s : s \leq t)$ 后 J_t 的条件分布。再由 ρ 的 Markov 性质, 它等于从 ρ_t 出发的 BES^3 的绝对下确界

$$\tilde{J}_0 = \inf_{s \geq 0} \tilde{\rho}_s$$

之分布。结论由推论 3.4 得到。

定理 3.5 的证明还给出了下面的结论。

推论 3.7. 若 ρ 是 $\text{BES}^3(x)$, 则

$$B_t = 2J_t - \rho_t$$

是从 $2J_0 - x$ 出发的布朗运动, 并且

$$\mathcal{F}_t^B = \mathcal{F}_t^\rho \vee \sigma(J_t).$$

最后, 把定理 2.3 与定理 3.5 合在一起可得:

推论 3.8. 若 B 是从 0 出发的布朗运动, L 是它在零点的局部时, 则

$$|B| + L$$

是从 0 出发的三维 Bessel 过程。

下面进一步研究 ρ 的绝对下确界 J_0 。

命题 3.9. 设 ρ 是三维 Bessel 过程。若 T 是二维过程 (ρ, J) 的停时, 并且

$$\rho_T = J_T,$$

则过程

$$(\rho_{T+t} - \rho_T)_{t \geq 0}$$

是从 0 出发的三维 Bessel 过程, 并且与 $\{\rho_t : t \leq T\}$ 独立。

证明. 先设 ρ 从 0 出发。沿用推论 3.7 的记号与结论, T 也是布朗运动 B 的停时。因此, 由强 Markov 性质 (或第 IV 章练习 3.21),

$$\tilde{B}_t = B_{T+t} - B_T$$

是从 0 出发、与 $\mathcal{F}_T^B$ 独立的布朗运动。由题设,

$$B_T = 2J_T - \rho_T = \rho_T.$$

又由定理 3.5 证明开头建立的等式 $J_t = \sup_{s \leq t} B_s$, 有

$$J_{T+t} - J_T = \sup_{s \leq T+t} B_s - B_T = \tilde{S}_t,$$

其中 $\tilde{S}_t = \sup_{s \leq t} \tilde{B}_s$ 。因此

$$\begin{aligned} \rho_{T+t} - \rho_T &= 2J_{T+t} - B_{T+t} - \rho_T \\ &= 2(J_{T+t} - J_T) - (B_{T+t} - B_T) \\ &= 2\tilde{S}_t - \tilde{B}_t. \end{aligned}$$

由 Pitman 定理, 右端是 $\text{BES}^3(0)$ 。它与 $\mathcal{F}_T^B$ 独立, 因而也与 $\{\rho_t : t \leq T\}$ 独立。

若 ρ 从 $x > 0$ 出发, 由强 Markov 性质, 它与某个 $\text{BES}^3(0)$ 首次到达 x 后的过程同分布。对后一个过程应用已经证明的情形即可; 细节留给读者。

三维 Bessel 过程第一次达到其绝对下确界的时刻

$$\vartheta = \inf\{t : \rho_t = J_0\}$$

显然满足上一命题的条件。由于三维 Bessel 过程在时刻 0 以后不再到达 0, 命题 3.9 还说明: ϑ 是 ρ 等于 J_0 的唯一时刻。又有 $\rho_\vartheta = J_0$ 在 $[0, x]$ 上均匀分布。

命题 3.10. 设 ρ 是从 $x > 0$ 出发的三维 Bessel 过程。则停在 ϑ 以前的过程

$$(\rho_t : t < \vartheta)$$

等价于

$$(B_t : t < T_Y),$$

其中 B 是从 x 出发的布朗运动, Y 是与 B 独立且在 $[0, x]$ 上均匀分布的随机点, T_Y 是 B 首次到达 Y 的时刻。

证明。 由推论 3.7,

$$B_t = 2J_t - \rho_t$$

是从 $2J_0 - x$ 出发的布朗运动。对 $t < \vartheta$, 有 $J_t = J_0$, 所以

$$\rho_t = 2J_0 - B_t.$$

定义

$$\tilde{B}_t = x - (B_t - B_0).$$

则 $\tilde{B}$ 是从 x 出发的布朗运动, 并且与 B_0 独立, 从而与

$$J_0 = \rho_\vartheta$$

独立; 而

$$\vartheta = \inf\{t : \tilde{B}_t = J_0\}.$$

最后, J_0 在 $[0, x]$ 上均匀分布, 结论成立。

上述结果给出 $\text{BES}^3(0)$ 轨道的一个重要分解。

定理 3.11 (Williams). 固定 $c > 0$, 并取以下四个相互独立的对象:

- i) 在 $[0, c]$ 上均匀分布的随机变量 A ;
- ii) 从 c 出发的布朗运动 B ;
- iii) 两个从 0 出发的三维 Bessel 过程 $\rho, \tilde{\rho}$ 。

令

$$R_c = \inf\{t : \rho_t = c\}, \quad T_A = \inf\{t : B_t = A\}.$$

定义过程

$$X_t = \begin{cases} \rho_t, & 0 \leq t \leq R_c, \\ B_{t-R_c}, & R_c < t \leq R_c + T_A, \\ A + \tilde{\rho}_{t-R_c-T_A}, & t > R_c + T_A. \end{cases}$$

则 X 是从 0 出发的三维 Bessel 过程。

证明。 考察一个从 0 出发的三维 Bessel 过程 $\bar{\rho}$ 。由强 Markov 性质 (第 III 章命题 3.5), 过程

$$(\bar{\rho}_t : t \leq R_c) \quad \text{与} \quad (\bar{\rho}_{R_c+t} : t \geq 0)$$

相互独立, 后者是从 c 出发的三维 Bessel 过程。再把命题 3.10 用于它在绝对下确界以前的部分, 把命题 3.9 用于绝对下确界以后的部分, 即得定理。

和所有轨道分解定理一样, 这一定理用文字陈述略显繁复, 但图 5 可以直观展示其含义; 其中 A 在 $[0, c]$ 上均匀分布。

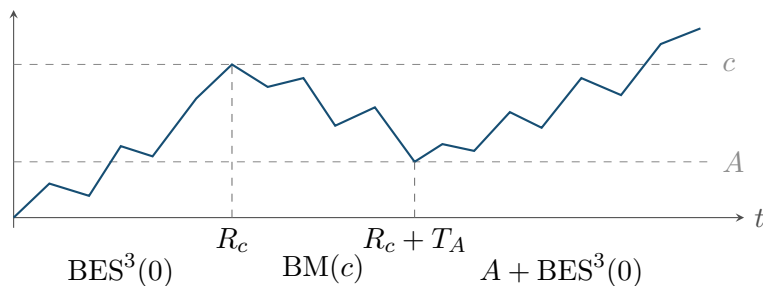


图 5: Williams 轨道分解

根据命题 3.9, 还可以在时刻 L_c 把最后一段进一步分解为两个独立部分; 事实上, 在任意 $d > c$ 的时刻 L_d 处分解也可以。由于三维 Bessel 过程几乎必然趋于无穷, 对每个 $c > 0$, 末次到达时刻

$$L_c = \sup\{t > 0 : \rho_t = c\}$$

几乎必然有限; 这里约定 $\sup \emptyset = 0$ 。又因为

$$L_c = \inf\{t : \rho_t = J_t = c\},$$

它也属于命题 3.9 所考虑的停时。

第 VII 章第 4 节将把上述分解转化为布朗轨道的分解。本节最后再给出一个对布朗运动的应用。先证明一个补充命题 3.3 的引理。

引理 3.12. 若 ρ 是从 $x > 0$ 出发的三维 Bessel 过程, 则 ρ^{-1} 是从 x^{-1} 出发的布朗运动经时间变换所得的过程, 并且只运行到该布朗运动首次到达 0 为止。

证明. 由命题 3.3 以及第 V 章第 1 节的 DDS 定理,

$$\rho_t^{-1} = B_{A_t}, \quad A_t = \int_0^t \rho_s^{-4} ds,$$

其中 B 是从 x^{-1} 出发的布朗运动。由于 $\rho > 0$, 且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_t^{-1} = 0,$$

故

$$A_\infty = \inf\{t : B_t = 0\}.$$

结论成立。

命题 3.13. 设 B 是从 $a > 0$ 出发的布朗运动, 并令

$$T_0 = \inf\{t : B_t = 0\}, \quad M = \max\{B_t : t \leq T_0\}.$$

则有:

i) 随机变量 M 在 $[a, \infty[$ 上的密度为

$$ax^{-2};$$

ii) 几乎必然存在唯一的 $v < T_0$, 使 $B_v = M$ 。

进一步, 在给定 $M = m$ 的条件下:

iii) 过程

$$X^1 = (B_t : t \leq v), \quad X^2 = (B_{v+t} : 0 \leq t \leq T_0 - v)$$

相互独立；

iv) X^1 是从 a 出发、运行到首次到达 m 为止的三维 Bessel 过程；

v) $m - X^2$ 是从 0 出发、运行到首次到达 m 为止的三维 Bessel 过程。

证明。 沿用上一引理证明中的记号，并把 A 的逆记为 C 。则

$$(B_t : t \leq T_0) \stackrel{d}{=} (\rho_{C_t}^{-1} : t \leq A_\infty).$$

因此，性质 i) 与 ii) 直接由命题 3.9 和命题 3.10 得到。性质 iii) 同样来自命题 3.9：把该命题用在从 a^{-1} 出发的三维 Bessel 过程 ρ 达到其绝对下确界的时刻 ϑ 。

为证明 iv)，注意

$$X^1 = \left(\rho_{C_t}^{-1} : t \leq A_\vartheta \mid \rho_\vartheta = \frac{1}{m} \right).$$

由命题 3.10，存在一个从 a^{-1} 出发的布朗运动 γ ，使

$$\left(\rho_t^{-1} : t \leq \vartheta \mid \rho_\vartheta = \frac{1}{m} \right) \stackrel{d}{=} \left(\gamma_t^{-1} : t \leq T_{1/m}^\gamma \right).$$

所以

$$X^1 \stackrel{d}{=} \left(\gamma_{\tilde{C}_t}^{-1} : t \leq \tilde{A}_{T_{1/m}^\gamma} \right),$$

其中

$$\tilde{A}_t = \int_0^t \gamma_s^{-4} ds,$$

而 $\tilde{C}$ 是 $\tilde{A}$ 的逆。由 Itô 公式，

$$\gamma_t^{-1} = a + \left(- \int_0^t \gamma_s^{-2} d\gamma_s \right) + \int_0^t \gamma_s^{-3} ds.$$

因此存在另一个布朗运动 β ，使

$$\gamma_{\tilde{C}_t}^{-1} = a + \beta_t + \int_0^t \left(\gamma_{\tilde{C}_s}^{-1} \right)^{-1} ds.$$

也就是说，过程 $\gamma_{\tilde{C}}^{-1}$ 满足与三维 Bessel 过程相同的随机微分方程。由第 IX 章第 3 节将证明的随机微分方程解的唯一性，它是从 a 出发的三维 Bessel 过程，性质 iv) 随即成立。性质 v) 的证明完全类似，留给读者。

注。 随机变量 M 的分布已在第 II 章练习 3.12 中求得。

练习 3.14。 把推论 3.6 推广到滤过

$$(\mathcal{F}_t^{2S-B})$$

的停时。

练习 3.15。 设 X 是从 0 出发的三维 Bessel 过程，并令

$$L = \sup\{t : X_t = 1\}.$$

证明 L 与

$$T_1 = \inf\{t : B_t = 1\}$$

同分布, 其中 B 是从 0 出发的布朗运动。

提示: 使用 $2S_t - B_t$ 是 $\text{BES}^3(0)$ 这一事实。

本结论也可由第 VII 章第 4 节的时间反演结果直接推出。

**** 练习 3.16 (定理 3.11 的 Markov 性证明)。** 固定 $b > 0$, 并取以下三个相互独立的对象:

- i) 在 $[0, b]$ 上均匀分布的随机变量 γ ;
- ii) 从 0 出发的三维 Bessel 过程 ρ ;
- iii) 从 b 出发的布朗运动 B 。

定义

$$T_\gamma = \inf\{t : B_t = \gamma\},$$

以及

$$X_t = \begin{cases} B_t, & t < T_\gamma, \\ \rho(t - T_\gamma) + \gamma, & t \geq T_\gamma. \end{cases}$$

1°) 证明: 对 $t > 0$, 给定 γ 后, 次概率分布

$$P[X_t \in \cdot; T_\gamma < t | \gamma]$$

关于 Lebesgue 测度 dy 的密度为

$$\mathbf{1}_{\{\gamma > \gamma\}}(y - \gamma) \left(-\frac{\partial}{\partial \gamma} q_t(b - \gamma, y - \gamma) \right).$$

2°) 因而, 若

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n,$$

则给定 γ 后, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ 限制在事件 $\{t_{i-1} < T_\gamma < t_i\}$ 上所得的次概率分布, 关于 $dx_1 \cdots dx_n$ 的密度为

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{\{\gamma < \inf_j x_j\}} \left(-\frac{\partial}{\partial \gamma} q_{t_i - t_{i-1}}(x_{i-1} - \gamma, x_i - \gamma) \right) \\ & \times \left(\prod_{k \neq i} q_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1} - \gamma, x_k - \gamma) \right) (x_n - \gamma), \end{aligned}$$

其中 $x_0 = b$ 。

3°) 对 $0 \leq c < b$, 证明: 给定事件 $\{\gamma > c\}$ 后, X 等价于 $\tilde{\rho} + c$, 其中 $\tilde{\rho}$ 是从 $b - c$ 出发的三维 Bessel 过程。特别地, X 是从 b 出发的三维 Bessel 过程。

4°) 利用第 3 问给出定理 3.11 的另一证明。

*** 练习 3.17。**

1°) 设 B 是标准一维布朗运动, 并令

$$X_t = B_t + t.$$

证明过程 $\exp(-2X_t)$ 是从 1 出发的布朗运动经时间变换所得的过程，并在该布朗运动首次到达 0 时被杀死。

2°) 令

$$\eta = \inf_t X_t.$$

证明 $-\eta$ 服从参数为 2 的指数分布 (因而几乎必然有限), 并证明存在唯一的时刻 ϱ , 使

$$X_{\varrho} = \eta.$$

$-\eta$ 的分布已在第 II 章练习 3.12 中求出; 本题的目的, 是从本节的结果重新推出它。

**** 练习 3.18。**

1°) 沿用通常的记号, 令

$$X = |B| + L.$$

分别在滤过 $(\mathcal{F}_t^X)$ 与 $(\mathcal{F}_t^{|B|})$ 中写出半鞅 X 的典范分解, 并由此推出

$$\mathcal{F}_t^X \subsetneq \mathcal{F}_t^{|B|}.$$

顺便指出, 这给出了一个半鞅 $X = M + A$ 的例子, 使

$$\mathcal{F}_t^X \subsetneq \mathcal{F}_t^M.$$

2°) 也从等式

$$L_t = \inf_{s \geq t} (|B_s| + L_s)$$

推出第 1 问的结论。

3°) 现设 $c \neq 1$, 并令

$$X = |B| + cL.$$

下面各步旨在证明: 此时反过来有

$$\mathcal{F}_t^X = \mathcal{F}_t^{|B|}.$$

令 D 为所有满足下式的 (ω, t) 之集:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k \leq n} \mathbf{1}_{\{X(t-2^{-k}, \omega) - X(t-2^{-k-1}, \omega) \geq 0\}} = \frac{1}{2}.$$

证明:

a) D 关于 $(\mathcal{F}_t^X)$ 可预测;

b) 对每个固定的 $t > 0$,

$$P\{\omega : (\omega, t) \in D\} = 1;$$

c) 对每个固定的 $u > 0$,

$$P\{\omega : (\omega, \tau_u(\omega)) \in D\} = 0,$$

其中 τ_u 一如既往地表示 L 的逆。

在滤过 $(\mathcal{F}_t^{|B|})$ 中证明

$$\int_0^t \mathbf{1}_D(s) dX_s = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s,$$

并推出所需结论。

阅读提示。在练习 3.18 第 3 问中, 若 $c \neq -1$, 可由题设等式恢复布朗运动 $\beta = \int \operatorname{sgn}(B) dB$, 再由 $X = \beta + (1+c)L$ 恢复 L 与 $|B|$; 若 $c = -1$, 则 $X = \beta$, 而推论 2.2 已说明 $\mathcal{F}_t^\beta = \mathcal{F}_t^{|B|}$ 。

练习 3.19。若 ρ 是从 0 出发的三维 Bessel 过程, 证明: 对每个固定 t ,

$$P \left[\limsup_{h \downarrow 0} \frac{|\rho_{t+h} - \rho_t|}{\sqrt{2h \log_2(1/h)}} = 1 \right] = 1.$$

提示: 使用第 II 章练习 1.21 的结论以及 Markov 性质。

4 一阶微积分

设 M 是鞅, K 是可预测过程, 并且对每个 t ,

$$\int_0^t K_s^2 d\langle M, M \rangle_s < \infty \quad \text{a.s.}$$

随机积分给出新的局部鞅 $K \cdot M$, 其递增过程为 $K^2 \cdot \langle M, M \rangle$ 。现在研究零点局部时的类似问题。更精确地, 若 L 是 M 在零点的局部时, 且 K 可预测、 $|K| \cdot L$ 有限, 能否找到一个局部鞅, 使其在零点的局部时为 $|K| \cdot L$? 这个问题的答案将导出一种一阶微积分 (见命题 4.5), 与 Itô 公式的二阶微积分相对。

本节始终固定一个连续半鞅 X , 并把它在零点的局部时记为 L 。稍微改变第 2 节的记号, 令

$$Z = \{t : X_t = 0\},$$

并对每个 t 定义

$$g_t = \sup\{s < t : X_s = 0\}, \quad d_t = \inf\{s > t : X_s = 0\}.$$

引理 4.1。若 K 是局部有界可预测过程, 则过程 K_{g_t} 也是局部有界可预测过程。

证明。设 T 是停时。因为 $g_T < T$, 若 K 在 $[0, T]$ 上有界, 则 K_{g_t} 在同一区间也有界; 所以 K_{g_t} 局部有界。

为证可预测性, 只须先考虑有界 K 。再由第 I 章练习 4.20 与单调类定理, 只需处理

$$K = \mathbf{1}_{[0, T]}$$

的情形。此时

$$K_{g_t} = \mathbf{1}_{\{g_t \leq T\}} = \mathbf{1}_{\{t \leq d_T\}}.$$

容易验证 d_T 是停时, 故右端可预测, 证明完毕。

下面的定理回答了开头提出的问题。

定理 4.2。

i) 若 Y 是另一个连续半鞅, 并且对每个 $t > 0$ 都有

$$Y_{g_t} = 0,$$

则 $K_{g_t} Y_t$ 是连续半鞅；更精确地，

$$K_{g_t} Y_t = K_0 Y_0 + \int_0^t K_{g_s} dY_s.$$

特别地， $K_{g_t} X_t$ 是连续半鞅。

ii) 若 Y 是局部鞅， A 是它在零点的局部时，则 $K_{g_t} Y_t$ 也是局部鞅，其零点局部时等于

$$\int_0^t |K_{g_s}| dA_s.$$

特别地，若 X 是局部鞅，则 $K_{g_t} X_t$ 的零点局部时为

$$\int_0^t |K_{g_s}| dL_s = \int_0^t |K_s| dL_s.$$

证明。 由随机积分的控制收敛定理，使结论成立的可预测过程 K 的类关于逐点有界收敛封闭。因此，利用单调类定理，为证 i)，仍只需考虑

$$K = \mathbf{1}_{[0, T]}.$$

因为 $Y_{d_T} = 0$ ，且

$$K_{g_t} = \mathbf{1}_{\{g_t \leq T\}} = \mathbf{1}_{\{t \leq d_T\}},$$

所以

$$\begin{aligned} K_{g_t} Y_t &= Y_{t \wedge d_T} \\ &= K_0 Y_0 + \int_0^t \mathbf{1}_{[0, d_T]}(s) dY_s \\ &= K_0 Y_0 + \int_0^t K_{g_s} dY_s. \end{aligned}$$

这证明了 i)。

为证 ii)，把 i) 用于半鞅 $|Y|$ ，它显然满足所需条件。由 Tanaka 公式，

$$\begin{aligned} |K_{g_t} Y_t| &= |K_{g_t}| |Y_t| \\ &= |K_0 Y_0| + \int_0^t |K_{g_s}| \operatorname{sgn}(Y_s) dY_s + \int_0^t |K_{g_s}| dA_s \\ &= |K_0 Y_0| + \int_0^t \operatorname{sgn}(K_{g_s} Y_s) d(K_{g_s} Y_s) + \int_0^t |K_{g_s}| dA_s. \end{aligned}$$

这正说明最后一项是 $K_g Y$ 在零点的局部时。

显然可以把该结论用于 X ，因为 $X_{g_t} = 0$ 。于是 $K_g X$ 的局部时为

$$\int_0^t |K_{g_s}| dL_s.$$

测度 dL_s 由 Z 承载；若 s 是 Z 中点的左极限，则 $g_s = s$ 。所以 Z 中满足 $g_s \neq s$ 的点，只可能是 Z^c 各区间的右端点，这些点至多可数。由于 L 连续， dL 没有原子，因而

$$|K_{g_s}| = |K_s| \quad dL\text{-a.e.}$$

证明完毕。

若 f 是两个凸函数之差, 则 $f(X)$ 是半鞅; 若再有 $f(0) = 0$, 则 $f(X)_{g_t} = 0$ 。所以

$$f(X_t)K_{g_t} = f(X_0)K_0 + \int_0^t K_{g_s} df(X)_s.$$

在这个框架下, 还有:

命题 4.3。 若 $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 局部有界, 则

$$f(X_t)\phi(L_t) = f(X_0)\phi(0) + \int_0^t \phi(L_s) df(X)_s.$$

证明。 在上式中取 $K_t = \phi(L_t)$, 并利用已经注意到的

$$L_{g_t} = L_t.$$

下面把上述结果用于一类特殊半鞅。

定义 4.4。 记 Σ 为所有半鞅 $X = N + V$ 构成的类, 其中测度 dV_t 几乎必然由

$$Z = \{t: X_t = 0\}$$

承载。

例如, 若 M 是局部鞅, 则 $|M|$ 与 M^+ 都属于 Σ , 其有界变差部分分别为 L 与 $\frac{1}{2}L$ 。

命题 4.5。 若 $X = N + V \in \Sigma$, 则

$$X_t K_{g_t} - \int_0^t K_s dV_s = X_0 K_0 + \int_0^t K_{g_s} dN_s$$

是局部鞅。若 M 是局部鞅, 则

$$|M_t| K_{g_t} - \int_0^t K_s dL_s$$

以及

$$M_t^+ K_{g_t} - \frac{1}{2} \int_0^t K_s dL_s$$

都是局部鞅。

最后, 若 ϕ 是局部有界 Borel 函数, 并令

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(u) du,$$

则

$$\Phi(L_t) - |M_t|\phi(L_t), \quad \frac{1}{2}\Phi(L_t) - M_t^+\phi(L_t)$$

都是局部鞅。

证明。 前两个断言直接来自定理 4.2 及其证明。第三个断言在第二个断言中取

$$K_t = \phi(L_t),$$

再利用时间变换公式的直接推论

$$\int_0^t \phi(L_s) dL_s = \Phi(L_t)$$

即可得到。

定理 2.3 说明 $(S - B, S)$ 与 $(|B|, L)$ 同分布。若对局部鞅 M 定义

$$S_t = \sup_{s \leq t} M_s,$$

则在上面的公式中用 S 代替 L 、用 $S - M$ 代替 $|M|$ 并不令人意外，尽管在这一一般性下，定理 2.3 的同分布结论未必成立（见练习 2.32）。事实上，半鞅 $X = S - M$ 属于 Σ ，其有界变差部分为 S ，因为 S 只在

$$\{S = M\} = \{X = 0\}$$

上增长。因此，若

$$\gamma_t = \sup\{s < t : S_s = M_s\},$$

则

$$(S_t - M_t)K_{\gamma_t} - \int_0^t K_s dS_s$$

以及

$$\Phi(S_t) - (S_t - M_t)\phi(S_t)$$

都是局部鞅。

若 ϕ 足够光滑，上述结论也可由分部积分直接看出。例如，当 $\phi \in C^1$ 时， $\phi(S_t)$ 是连续半鞅，而且

$$\begin{aligned} \Phi(S_t) - (S_t - M_t)\phi(S_t) &= \Phi(S_t) - \int_0^t \phi(S_s) dS_s \\ &\quad + \int_0^t \phi(S_s) dM_s - \int_0^t (S_s - M_s)\phi'(S_s) dS_s. \end{aligned}$$

最后一个积分为零，因为 dS 由 $\{S - M = 0\}$ 承载；又有

$$\int_0^t \phi(S_s) dS_s = \Phi(S_t),$$

所以

$$\Phi(S_t) - (S_t - M_t)\phi(S_t) = \int_0^t \phi(S_s) dM_s,$$

确为局部鞅。由此也可看出本节方法所带来的推广；这些方法还能给出 Itô 公式的另一证明（见本章注释与评述）。练习 4.16 将给出上述结果的一个初等证明。

结合 Itô 公式与 Tanaka 公式，还可把这些结论推广到

$$F(M_t, S_t, \langle M, M \rangle_t) \quad \text{或} \quad F(M_t, L_t, \langle M, M \rangle_t)$$

一类函数，见练习 4.9。由此能够显式计算许多与布朗运动有关的随机变量之分布。下面先给出一个样例。

命题 4.6. 设 B 是标准布朗运动,

$$T_b = \inf\{t : B_t = b\}.$$

若 $0 < a < b$ 且 $\lambda > 0$, 则

$$E\left[e^{-\lambda L_{T_b}^a}\right] = \frac{1}{1 + 2\lambda(b-a)}.$$

换言之, $L_{T_b}^a$ 服从参数为

$$\frac{1}{2(b-a)}$$

的指数分布。

证明. 由命题 4.5, 对每个 $\lambda > 0$, 过程

$$\left(\frac{1}{2} + \lambda(B_t - a)^+\right) \exp(-\lambda L_t^a)$$

是局部鞅。把它停在 T_b 后得到有界鞅, 因此

$$E\left[\left(\frac{1}{2} + \lambda(b-a)\right) e^{-\lambda L_{T_b}^a}\right] = \frac{1}{2}.$$

结论随即成立。

下面给出命题 4.5 的一个部分逆命题。

命题 4.7. 设 $F : (l, x) \mapsto F(l, x)$ 是 $\mathbb{R}_+^2$ 上的实值 $C^{1,2}$ 函数。若 M 是连续局部鞅, 满足

$$\langle M, M \rangle_\infty = \infty \quad \text{a.s.},$$

并且 $F(L_t, |M_t|)$ 是局部鞅, 则存在 C^2 函数 f , 使

$$F(l, x) = f(l) - x f'(l).$$

证明. 若 $F(L_t, |M_t|)$ 是局部鞅, Itô 公式与 Tanaka 公式给出

$$\begin{aligned} & \int_0^t (F_1(L_s, |M_s|) + F_2(L_s, |M_s|)) dL_s \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t F_{22}(L_s, |M_s|) d\langle M, M \rangle_s = 0 \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

占有时间公式说明测度 dL_s 与 $d\langle M, M \rangle_s$ 几乎必然互相奇异。因此

$$F_1(L_s, |M_s|) + F_2(L_s, |M_s|) = 0 \quad dL_s\text{-a.e.},$$

以及

$$F_{22}(L_s, |M_s|) = 0 \quad d\langle M, M \rangle_s\text{-a.e.}$$

由于 $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$, L 是一个经时间变换的布朗运动之局部时, 故

$$L_\infty = \infty \quad \text{a.s.}$$

对第一个等式使用 Stieltjes 积分的变量代换, 得到

$$F_1(l, 0) + F_2(l, 0) = 0$$

对 Lebesgue 几乎每个 l 成立; 由导数的连续性, 它对每个 l 都成立。

再对第二个等式作与 $\langle M, M \rangle$ 相联系的时间变换, 得到

$$P[F_{22}(\ell_t, |B_t|) = 0 \quad dt\text{-a.e.}] = 1,$$

其中 B 是布朗运动, ℓ 是它在零点的局部时。由连续性,

$$P[F_{22}(\ell_t, |B_t|) = 0 \quad \text{对每个 } t] = 1.$$

对每个 $b > 0$, 从而有

$$F_{22}(\ell_{T_b}, b) = 0 \quad \text{a.s.}$$

命题 4.6 说明 ℓ_{T_b} 的分布关于 Lebesgue 测度绝对连续; 再次利用 F_{22} 的连续性, 得到

$$F_{22}(l, b) = 0 \quad \text{对所有 } l, b.$$

因此

$$F(l, x) = g(l)x + f(l).$$

由 F 关于 l 连续可微可知 $f, g \in C^1$; 边界等式

$$F_1(l, 0) + F_2(l, 0) = 0$$

给出

$$g(l) = -f'(l).$$

于是 $f \in C^2$, 并得到所需形式。

练习 4.8. 设 M 是一致可积连续鞅, L 是它在零点的局部时, 并令

$$G = \sup\{s : M_s = 0\}.$$

1°) 证明: 对任意有界可预测过程 K ,

$$E\left[\int_0^\infty K_s dL_s\right] = E[\mathbf{1}_{\{G>0\}} K_G | M_\infty|].$$

2°) 先假设

$$P(M_\infty = 0) = P(G = 0) = 0.$$

由第 1 问推出

$$E[K_{\tau_u} \mathbf{1}_{\{\tau_u < \infty\}}] du = E[K_G | M_\infty| | L_\infty = u] P(L_\infty \in du),$$

其中

$$\tau_u = \inf\{t : L_t > u\}.$$

特别地,

$$P(L_\infty \in du) = \frac{P(L_\infty > u)}{E[|M_\infty| | L_\infty = u]} du.$$

当 M 是停住的布朗运动 B^T 时, 对若干特殊停时 (例如 $T = t$ 、 $T = T_b$ 等) 检验这个公式。

最后证明: 在一般情形下, 对 Lebesgue 几乎每个 u ,

$$E[K_{\tau_u} \mathbf{1}_{\{\tau_u < \infty\}}] = \frac{E[K_G | M_\infty | \mid L_\infty = u]}{E[|M_\infty| \mid L_\infty = u]}.$$

练习 4.9. 设 M 是局部鞅, L 是它在零点的局部时, S 是它的上确界过程。

1°) 证明测度 $d\langle M, M \rangle$ 与 dS 互相奇异。

2°) 设

$$F : (x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$$

定义在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2$ 上并且足够光滑。若

$$\frac{1}{2}F_{xx} + F_z = 0, \quad F_y(y, y, z) = 0$$

对所有 x, y, z 成立, 证明

$$F(M_t, S_t, \langle M, M \rangle_t)$$

是局部鞅。找出使

$$F(M_t, L_t, \langle M, M \rangle_t)$$

成为局部鞅的一组相应充分条件。

3°) 证明

$$(S_t - M_t)^2 - \langle M, M \rangle_t$$

是局部鞅, 并证明: 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 过程

$$\begin{aligned} Z_t^{\alpha, \beta} &= [\beta \cosh(\beta(S_t - M_t)) - \alpha \sinh(\beta(S_t - M_t))] \\ &\times \exp\left\{\alpha S_t - \frac{\beta^2}{2}\langle M, M \rangle_t\right\} \end{aligned}$$

是局部鞅。当以 $|M|$ 代替 $S - M$ 、以 L 代替 S 时, 证明相同结论。

4°) 若 B 是布朗运动, 并令

$$\tilde{T}_a = \inf\{t : |B_t| = a\},$$

则对 $\alpha > 0, \beta \neq 0$, 证明

$$E\left[\exp\left\{-\alpha L_{\tilde{T}_a} - \frac{\beta^2}{2}\tilde{T}_a\right\}\right] = \frac{\beta}{\beta \cosh(a\beta) + \alpha \sinh(a\beta)}.$$

5°) 对 S 与

$$R_a = \inf\{t : S_t - B_t = a\}$$

证明类似公式。

6°) 仍对布朗运动并沿用第 2 节的记号, 证明

$$E\left[\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\tau_t\right)\right] = e^{-\alpha t}.$$

* 练习 4.10。

1°) 设 M 是鞅, L 是它在零点的局部时。对任意 $p > 1$, 证明

$$\|L_t\|_p \leq p \|M_t\|_p.$$

当 $p = 1$ 且 $M_0 = 0$ 时, 证明

$$\|M_t\|_1 = \|L_t\|_1.$$

提示: 先局部化, 使 M, L 有界, 再应用命题 4.5。

对 $p > 1$, 还要证明

$$\|S_t\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|M_t\|_p.$$

2°) 证明不存在反向不等式: 对 $p > 1$, 不存在普适常数 C_p , 使每个局部 L^p -有界的 M 都满足

$$\|M_t\|_p \leq C_p \|L_t\|_p.$$

练习 4.11。设 M 是从 0 出发的平方可积鞅, 并令

$$s_t = \inf_{u \leq t} M_u.$$

证明下列 Doob 不等式的加强形式:

$$E[(S_t - s_t)^2] \leq 4E[M_t^2].$$

提示: 使用练习 4.9 第 3 问。

再证明: 除非 M 在 $[0, t]$ 上恒为零, 否则上式不能取等号。

练习 4.12。对布朗运动及 $b > 0$, 令

$$\tilde{T}_b = \inf\{t : |B_t| = b\}.$$

证明 $L_{\tilde{T}_b}$ 服从参数为 $1/b$ 的指数分布。换一种形式, 这一结论已见练习 2.10。

练习 4.13。对布朗运动, 令 μ 为随机变量 s_{T_1} 的分布, 其中

$$s_t = \inf_{u \leq t} B_u.$$

这里

$$T_1 = \inf\{t \geq 0 : B_t = 1\}.$$

1°) 使用局部鞅

$$\Phi(S_t) - (S_t - B_t)\Phi'(S_t)$$

关于下确界 s 的对应形式, 证明

$$\mu = (-(1-x)\mu)'$$

其中导数在分布意义下理解。由此证明 μ 在 $] -\infty, 0[$ 上的密度为

$$(1-x)^{-2}.$$

2°) 利用第 1 问证明: 当 $p \neq 2$ 时, 不能把练习 4.11 的结论推广为

$$E[(S_t - s_t)^p] \leq C_p E[|M_t|^p], \quad C_p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p.$$

提示: 取

$$M_t = B_{t \wedge \tilde{T}_1}, \quad \tilde{T}_1 = \inf\{t : |B_t| = 1\}.$$

练习 4.14。

1°) 设 M 是从 0 出发的连续局部鞅, (L^a) 是其局部时族, F 是 C^2 函数。对 $a > 0$, 证明

$$\frac{1}{2}F(L_t^a) + [(M_t^+ - a) \wedge 0]F'(L_t^a) - \frac{1}{2} \int_0^t F'(L_s^a) dL_s^0$$

是局部鞅。

2°) 对布朗运动, 求 $L_{\tau_t}^a$ 分布的 Laplace 变换, 其中

$$\tau_t = \inf\{s : L_s^0 > t\}.$$

练习 4.15。 设 M 是正的连续鞅, 并且 $M_\infty = 0$ 。适当选择 ϕ , 利用局部鞅

$$\Phi(S_t) - (S_t - M_t)\phi(S_t),$$

重新推导随机变量 S_∞ 在给定 $\mathcal{F}_0$ 后的条件分布; 该分布已在第 II 章练习 3.12 中求出。

练习 4.16。 按照下面的提示, 对命题 4.5 记号下的过程

$$\Phi(S_t) - (S_t - M_t)\phi(S_t)$$

为局部鞅这一事实给出初等证明。

提示: 先设 M 是有界鞅。令

$$T_a = \inf\{t : M_t = a\}.$$

由等式

$$E[M_T \mathbf{1}_{\{T > T_a\}}] = E[M_{T_a} \mathbf{1}_{\{T > T_a\}}]$$

推出

$$E[(S_T - a)^+ - (S_T - M_T) \mathbf{1}_{\{S_T > a\}}]$$

与停时 T 无关。这就是 $\phi(x) = \mathbf{1}_{\{x > a\}}$ 的情形; 再用单调类方法推广到所有 ϕ 。

* 练习 4.17。

1°) 设 X 是连续局部鞅, (L^a) 是其局部时族。对 $\mathbb{R}_+^n$ 上任意 C^∞ 函数 f 以及

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n,$$

证明下列过程是局部鞅：

$$\begin{aligned} & f(L_t^{a_1}, L_t^{a_2}, \dots, L_t^{a_n}) \\ & - \sum_{i=1}^n 2(X_t - a_i)^+ \frac{\partial f}{\partial x_i}(L_t^{a_1}, \dots, L_t^{a_n}) \\ & + \sum_{d=2}^n (-2)^d \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} (a_{i_1} - a_{i_2}) \cdots (a_{i_{d-1}} - a_{i_d}) (X_t - a_{i_d})^+ \\ & \quad \times \frac{\partial^d f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_d}}(L_t^{a_1}, \dots, L_t^{a_n}). \end{aligned}$$

2°) 对 $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ 以及 $a_n \leq 1$, 证明布朗运动满足

$$E \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^n y_i L_{T_1}^{a_i} \right) \right] = \frac{\varphi(0, y)}{\varphi(1, y)},$$

其中 $T_1 = \inf\{t : B_t = 1\}$, 并且

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= 1 + \sum_{i=1}^n 2(x - a_i)^+ y_i \\ &+ \sum_{d=2}^n 2^d \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} (a_{i_1} - a_{i_2}) \cdots (a_{i_{d-1}} - a_{i_d}) (x - a_{i_d})^+ y_{i_1} \cdots y_{i_d}. \end{aligned}$$

这推广了命题 4.6, 并给出过程

$$a \longmapsto L_{T_1}^a$$

的分布。第 XI 章第 2 节的 Ray-Knight 定理将进一步识别这个过程 (另见该章练习 2.11)。

* **练习 4.18.** 设 ϕ 是 $\mathbb{R}_+$ 上递增的 C^1 函数, 满足

$$\phi(0) = 0, \quad 0 \leq \phi(x) \leq x.$$

设 f 是满足

$$f(x)\phi'(x) = f'(x)(x - \phi(x))$$

的 C^1 函数, 并令

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy = f(x)(x - \phi(x)).$$

1°) 沿用本章记号, 证明

$$\int_0^{T_a} \mathbf{1}_{\{B_s > \phi(S_s)\}} ds \stackrel{d}{=} \int_0^{T_{F(a)}} \frac{\mathbf{1}_{\{B_s > 0\}}}{(f^2 \circ F^{-1})(S_s)} ds.$$

提示: 先利用定理 2.3 证明左端与

$$\int_0^{\tau_a} \mathbf{1}_{\{f(L_s)|B_s| < F(L_s)\}} ds$$

同分布, 再把命题 4.5 用于 $f(L_s)B_s$ 。把两个不等号同时反向后, 同样的等式仍成立。

2°) 若 ℓ 是半鞅 $B - \phi(S)$ 在零点的局部时, 证明

$$\ell_{T_a} \stackrel{d}{=} \int_0^{T_{F(a)}} (f \circ F^{-1}(S_s))^{-1} dL_s.$$

提示: 把 ℓ 写成

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\cdot \mathbf{1}_{\{0 < B_s - \phi(S_s) < \varepsilon\}} ds,$$

再仿照第 1 问。

3°) 对 $\phi(x) = \alpha x$, $\alpha < 1$ 完成上述计算。

* **练习 4.19.** 设 B 是标准一维布朗运动, L 是它在零点的局部时。

1°) 若 K 是严格为正、局部有界且关于 $(\mathcal{F}_t^B)$ 可预测的过程, 证明

$$M_t = K_{g_t} B_t, \quad t \geq 0,$$

与 B 生成相同的滤过。

2°) 证明

$$N_t = \int_0^t K_{g_s} dL_s - K_{g_t} |B_t|$$

与 $|B|$ 生成相同的滤过。

3°) 对 $p > 0$, 证明局部鞅

$$M = L^{p-1} B$$

是纯鞅。

提示: 若 τ_t 是与 $\langle M, M \rangle$ 相联系的时间变换, 把 τ_t 表示为

$$\frac{L_{\tau_t}^p}{p}$$

的函数; 后者是 M 的 DDS 布朗运动的局部时。

4°) 证明: 对 $p > 0$, 局部鞅

$$L^p - p|B|L^{p-1}, \quad t > 0,$$

也是纯鞅。

提示: 使用引理 2.1。

* **练习 4.20 (练习 II.1.16 中 $L \log L$ 类的补充).** 设 X 是从 0 出发的连续局部鞅, 并记

$$X_t^* = \sup_{s \leq t} |X_s|, \quad L_t = L_t^0(X).$$

1°) 证明

$$|X_t| \log^+ X_t^* - (X_t^* - 1)^+ - \int_0^t \log^+ X_s^* dL_s$$

是局部鞅。

2°) 证明

$$E[X_\infty^*] \leq \frac{e}{e-1} \left(1 + \sup_T E[|X_T| \log^+ |X_T|] \right),$$

其中 T 遍历所有有限停时；并证明

$$\sup_T E[|X_T| \log^+ X_T^*] \leq \frac{e+1}{e} E[X_\infty^*] + E[L_\infty \log^+ L_\infty].$$

3°) 类似地证明

$$L_t \log^+ L_t - (L_t - 1)^+ - |X_t| \log^+ L_t$$

是局部鞅，并推出

$$E[L_\infty \log^+ L_\infty] \leq \sup_T \left\{ \frac{e+1}{e} E[|X_T|] + E[|X_T| \log^+ |X_T|] \right\}.$$

4°) 推出以下两个条件等价：

- i) $\sup_T E[|X_T| \log^+ |X_T|] < \infty$;
- ii) $E[X_\infty^*] < \infty$ 且 $E[L_\infty \log^+ L_\infty] < \infty$.

练习 4.21 (Bachelier 方程)。

1°) 设 M 是从 0 出发的连续局部鞅。证明存在唯一的严格正连续局部鞅 $\widetilde{M}$ ，使 $\widetilde{M}_0 = 1$ ，并且沿用本节记号，

$$S_t - M_t = \frac{\widetilde{M}_t}{\widetilde{s}_t} - 1,$$

其中

$$\widetilde{s}_t = \inf_{u \leq t} \widetilde{M}_u.$$

提示：尝试取

$$\widetilde{s}_t = \exp(-S_t).$$

2°) 设 h 是 $\mathbb{R}_+$ 上严格递减的 C^1 函数，导数处处不为零，并满足

$$h(0) = 1, \quad h(\infty) = 0.$$

给定满足第 1 问条件的局部鞅 $\widetilde{M}$ ，证明存在唯一的连续局部鞅 M ，使

$$-h'(h^{-1}(\widetilde{s}_t))(S_t - M_t) = \widetilde{M}_t - \widetilde{s}_t.$$

3°) 证明第 2 问中的局部鞅 M 满足 Bachelier 方程

$$dM_t = \frac{d\widetilde{M}_t}{h'(S_t)}.$$

给出使该方程具有唯一解的一个关于 h 的充分条件，并把解表示为 $\widetilde{M}$ 的函数。

练习 4.22 (支配不等式中常数的改进)。

1°) 对布朗运动 B ，沿用通常记号，证明：当 $0 < k < 1$ 时，

$$E[(-s_{T_1})^k] \leq E \left[\sup_{s \leq T_1} (S_s - B_s)^k \right] \leq C_k,$$

其中 C_k 是第 IV 章练习 4.30 中定义的常数。推出

$$\frac{\pi k}{\sin(\pi k)} \leq \Gamma(1-k) \leq C_k.$$

提示：使用练习 4.12 与练习 4.13 的结论。

2°) 结合第 1 问与第 IV 章练习 4.30, 证明

$$\lim_{k \uparrow 1} (1-k)C_k = 1.$$

练习 4.23。

1°) 沿用通常记号, 令

$$T = \inf\{t : |L_t B_t| = 1\}.$$

证明 L_T 与 $\sqrt{e}$ 同分布, 其中 e 是参数为 1 的指数随机变量。

提示：把局部鞅 LB 在零点的局部时表示成 L 的函数, 再仿照命题 4.6 的证明。

2°) 由此证明, 停住的过程 $L^T B^T$ 是有界鞅, 但第 V 章命题 3.2 中的过程 H 无界。

练习 4.24 (Pitman 定理的推广)。沿用命题 4.5 及其后讨论中的记号, 并设 $\phi > 0$ 、 $M_0 = 0$ 。

1°) 证明

$$\Phi(S_t) = \sup_{s \leq t} \int_0^s \phi(S_u) dM_u.$$

提示：应用引理 2.1。

2°) 证明

$$(S_t - M_t)\phi(S_t)$$

是反射布朗运动经时间变换所得的过程, 并识别它在零点的局部时。

3°) 证明

$$\Phi(S_t) + (S_t - M_t)\phi(S_t)$$

是从 0 出发的三维 Bessel 过程经时间变换所得的过程。

5 Skorokhod 停止问题

设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的概率测度。我们希望找到标准一维布朗运动 B 的一个停时 T , 使 B_T 的分布为 μ 。在这样的一般性下, 问题有一个平凡解, 见练习 5.7; 遗憾的是, 这个解在应用中并无多大意义, 因为 T 过大, 具体说 $E[T] = \infty$ 。因此我们增加条件 $E[T] < \infty$ 。这会对 μ 施加限制: 若 $E[T] < \infty$, 则鞅 B^T 属于 $\mathcal{M}_0^2$, 从而 $E[B_T] = 0$; 此外,

$$(B_t^T)^2 - T \wedge t$$

一致可积, 故 $E[B_T^2] = E[T]$ 。所以条件

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx) < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) = 0$$

是必要的。它们也是充分的。事实上, 加入上述条件后的问题有若干种已知解法, 下面介绍其中一种。我们实际处理连续局部鞅的情形; 由 Dambis–Dubins–Schwarz 定理, 这与布朗运动情形等价。

以下所考虑的一切概率测度 μ 都是中心化的, 即

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \mu(dx) < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) = 0.$$

对这样的 μ , 定义尾函数

$$\bar{\mu}(x) = \mu([x, \infty))$$

以及

$$\psi_{\mu}(x) = \frac{1}{\bar{\mu}(x)} \int_{[x, \infty)} t \mu(dt), \quad x < b := \inf\{x : \bar{\mu}(x) = 0\},$$

并在 $x \geq b$ 时令 $\psi_{\mu}(x) = x$ 。函数 $\bar{\mu}$ 与 ψ_{μ} 都左连续; ψ_{μ} 单调递增, 并在 $x \uparrow b$ 时收敛到 b 。而且

$$\psi_{\mu}(x) > x \quad (x < b), \quad b = \inf\{x : \psi_{\mu}(x) = x\}.$$

引理 5.1. 对每个 $x < b$ 和每个 $a \leq 0$, 有

$$\frac{\bar{\mu}(x)}{\bar{\mu}(a)} = \frac{\psi_{\mu}(a) - a}{\psi_{\mu}(x) - x} \exp\left(-\int_a^x \frac{ds}{\psi_{\mu}(s) - s}\right).$$

证明。 由定义,

$$\bar{\mu}(x)\psi_{\mu}(x) = \int_{[x, \infty)} s \mu(ds).$$

取右正则化后得到

$$\bar{\mu}(x+)\psi_{\mu}(x+) = \int_{(x, \infty)} s \mu(ds). \quad (*)$$

令 ν 为第 0 章第 4 节中与右连续有限变差函数 $x \mapsto \psi_{\mu}(x+)$ 相联系的测度。使用该节的部分积分公式, 等式 (*) 可写成

$$\bar{\mu}(x) \nu(dx) - (\psi_{\mu}(x+) - x) \mu(dx) = 0. \quad (+)$$

这个等式在 $(-\infty, b)$ 上成立; 在那里 $\psi_{\mu}(x) > x$ 。

依照第 0 章命题 4.7 的论证, 给定某一点的函数值后, 方程 (+) 的局部有界解 $\bar{\mu}$ 是唯一的。另一方面, 对 $a < 0$, 函数

$$\phi(x) = \frac{1}{\psi_{\mu}(x) - x} \exp\left(-\int_a^x \frac{ds}{\psi_{\mu}(s) - s}\right)$$

也是 (+) 的解。为看出这一点, 先写

$$\phi(x+)(\psi_{\mu}(x+) - x) = \exp\left(-\int_a^x \frac{ds}{\psi_{\mu}(s) - s}\right),$$

再应用一次分部积分公式, 便得到

$$(\psi_{\mu}(x+) - x) d\phi(x) + \phi(x) \nu(dx) = 0.$$

由唯一性立刻得到所述公式。

前一引理表明映射 $\mu \mapsto \psi_{\mu}$ 是单射。下一引理朝着满射性的方向迈进一步: 具备引理 5.1 之前所列性质的函数, 都是某个 μ 的 ψ_{μ} 。

引理 5.2。 设 ψ 是左连续递增函数, 且存在 $a < 0 < b$, 使得

$$\psi(x) = 0 \quad (x \leq a), \quad \psi(x) > x \quad (a < x < b), \quad \psi(x) = x \quad (x \geq b).$$

则存在唯一的、支集包含于 $[a, b]$ 的中心化概率测度 μ , 使 $\psi_\mu = \psi$ 。

证明。 先在 $x \leq a$ 时令 $\bar{\mu}(x) = 1$, 并在 $a < x \leq b$ 时令

$$\bar{\mu}(x) = \frac{-a}{\psi(x) - x} \exp\left(-\int_a^x \frac{ds}{\psi(s) - s}\right).$$

这个函数在 $(-\infty, b]$ 上左连续, 而且递减。若 ψ 属于 C^1 , 后一点容易直接看出; 一般情形下, 取支集包含于 $(0, 1)$ 、满足 $j > 0$ 且 $\int j(y) dy = 1$ 的 C^∞ 函数 j , 并像定理 1.1 的证明那样令

$$\psi_n(x) = n \int_{\mathbb{R}} \psi(x+y) j(ny) dy.$$

此时 $\psi_n \geq \psi$, 且 $\psi_n(x) \rightarrow \psi(x+)$, 从而得到 $\bar{\mu}$ 的递减性。

补充定义

$$\bar{\mu}(b) = \lim_{\substack{x \uparrow b \\ x < b}} \bar{\mu}(x), \quad \bar{\mu}(x) = 0 \quad (x > b).$$

于是存在唯一的概率测度 μ , 使 $\bar{\mu}(x) = \mu([x, \infty))$ 。对等式

$$\bar{\mu}(x+)(\psi(x+) - x) = -a \exp\left(-\int_a^x \frac{ds}{\psi(s) - s}\right)$$

微分, 得到

$$(\psi(x+) - x) d\bar{\mu}(x) = -\bar{\mu}(x) d\psi(x).$$

这又可写为

$$d(\psi\bar{\mu}) = x d\bar{\mu}.$$

因此

$$\psi(x)\bar{\mu}(x) = \int_{[x, \infty)} t \mu(dt).$$

取 $x < a$ 即知 μ 中心化, 证明完成。

还需要下面的恒等式。

引理 5.3。 若

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx) < \infty,$$

则

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \psi_\mu(x) \bar{\mu}(x) dx.$$

证明。 由等式 (*),

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx) = - \int_{\mathbb{R}} x d(\bar{\mu}(x+) \psi_\mu(x+)).$$

分部积分给出

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} \bar{\mu}(x) \psi_{\mu}(x) \mathrm{d}x - [x \bar{\mu}(x+) \psi_{\mu}(x+)]_{-\infty}^{+\infty}.$$

而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \bar{\mu}(x+) \psi_{\mu}(x+) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_{(x, \infty)} t \mu(\mathrm{d}t) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{(x, \infty)} t^2 \mu(\mathrm{d}t) = 0.$$

又因 μ 中心化,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \bar{\mu}(x+) \psi_{\mu}(x+) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \int_{(-\infty, x]} t \mu(\mathrm{d}t) \\ &\leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{(-\infty, x]} t^2 \mu(\mathrm{d}t) = 0. \end{aligned}$$

边界项因而消失。

从现在起, 设 M 是满足

$$M_0 = 0, \quad \langle M, M \rangle_{\infty} = \infty$$

的连续局部鞅, 并令

$$T_x = \inf\{t : M_t = x\}, \quad S_t = \sup_{s \leq t} M_s.$$

本节的主要结果如下。

定理 5.4 (Azéma–Yor 的 Skorokhod 嵌入)。 若 μ 是中心化概率测度, 则停时

$$T_{\mu} = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq \psi_{\mu}(M_t)\}$$

几乎处处有限, $M_{T_{\mu}}$ 的分布为 μ , 并且:

- i) $M^{T_{\mu}}$ 是一致可积鞅;
- ii)

$$E[\langle M, M \rangle_{T_{\mu}}] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(\mathrm{d}x).$$

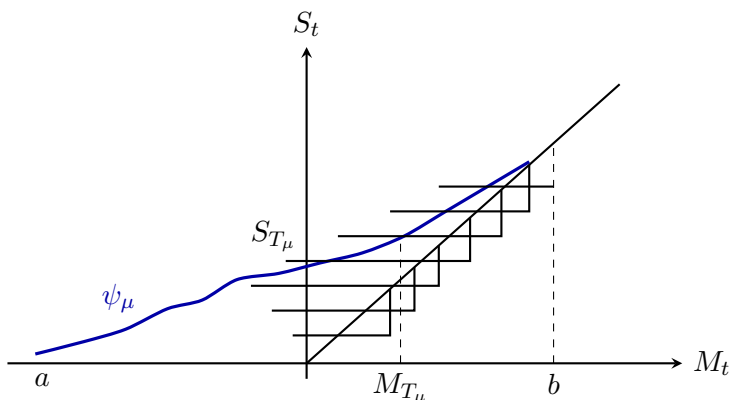


图 2: 停止边界 $S = \psi_{\mu}(M)$ 的几何示意 (原书图 6)。

证明 (第一步)。 停时 T_{μ} 几乎处处有限。事实上, 对任意 $x > 0$,

$$T_{\mu} \leq \inf\{t > T_x : M_t = \psi_{\mu}(x)\},$$

而后一个停时由 $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ 及第 V 章命题 1.8 可知几乎处处有限。为完成证明, 下面分若干步作逼近。

命题 5.5. 设 (μ_n) 是中心化概率测度序列, 并且 ψ_{μ_n} 逐点递增到 ψ_μ 。则:

i) μ_n 弱收敛到 μ ;

ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |x| \mu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} |x| \mu(dx);$$

iii) $M_{T_{\mu_n}}$ 几乎处处收敛到 M_{T_μ} 。

证明. 序列 (μ_n) 在弱拓扑下相对紧。事实上, 对每个 $K > 0$,

$$\begin{aligned} \mu_n([K, \infty)) &\leq \frac{1}{K} \int_{[K, \infty)} t \mu_n(dt) \leq \frac{1}{K} \int_{[0, \infty)} t \mu_n(dt) \\ &= \frac{1}{K} \psi_{\mu_n}(0) \bar{\mu}_n(0) \leq \frac{1}{K} \psi_\mu(0), \end{aligned}$$

而由 μ_n 中心化,

$$\begin{aligned} \mu_n((-\infty, -K]) &\leq \frac{1}{K} \int_{(-\infty, -K]} (-t) \mu_n(dt) \leq \frac{1}{K} \int_{(-\infty, 0]} (-t) \mu_n(dt) \\ &= \frac{1}{K} \psi_{\mu_n}(0) \bar{\mu}_n(0) \leq \frac{1}{K} \psi_\mu(0). \end{aligned}$$

此外, 因 $\psi_{\mu_n} \uparrow \psi_\mu$, 容易看出

$$b_n := \inf\{t : \psi_{\mu_n}(t) = t\} \uparrow b.$$

由引理 5.1,

$$\frac{\bar{\mu}_n(x)}{\bar{\mu}_n(0)} \longrightarrow \frac{\bar{\mu}(x)}{\bar{\mu}(0)} \quad (x < b),$$

且在 (b, ∞) 上 $\bar{\mu}_n = \bar{\mu} = 0$ 。

取一个弱收敛到概率测度 ν 的子列 (μ_{n_k}) 。若 x 是 ν 的连续点, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mu}_{n_k}(x) = \bar{\nu}(x).$$

取 $x < b$, 可知 $\bar{\mu}_{n_k}(0)$ 必有极限 l , 否则比值 $\bar{\mu}_{n_k}(x)/\bar{\mu}_{n_k}(0)$ 不可能有极限; 并且

$$\frac{\bar{\nu}(x)}{l} = \frac{\bar{\mu}(x)}{\bar{\mu}(0)}.$$

再取一列 ν 的连续点 $x_m \uparrow 0$, 得到 $l = \bar{\mu}(0)$ 且 $\bar{\nu} = \bar{\mu}$ 。这证明了 i)。

利用映射

$$\rho \longmapsto \int_{[0, \infty)} t \rho(dt)$$

的下半连续性, 有

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty)} t \mu(dt) &\leq \liminf_n \int_{[0, \infty)} t \mu_n(dt) \\ &\leq \limsup_n \int_{[0, \infty)} t \mu_n(dt) \\ &= \lim_n \bar{\mu}_n(0) \psi_{\mu_n}(0) = \bar{\mu}(0) \psi_\mu(0) = \int_{[0, \infty)} t \mu(dt). \end{aligned}$$

又因 μ_n 与 μ 均中心化,

$$\lim_n \int_{(-\infty, 0]} t \mu_n(dt) = \int_{(-\infty, 0]} t \mu(dt).$$

这就证明了 ii)。

最后, $T_n := T_{\mu_n}$ 递增到某个停时 $R \leq T_\mu$ 。若 $p \leq n$, 则

$$\psi_{\mu_p}(M_{T_n}) \leq \psi_{\mu_n}(M_{T_n}) \leq S_{T_n} \leq S_R.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$\psi_{\mu_p}(M_R) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \psi_{\mu_n}(M_{T_n}) \leq S_R.$$

再令 $p \rightarrow \infty$, 得到 $\psi_\mu(M_R) \leq S_R$, 故 $R = T_\mu$ 。由 M 的连续性, iii) 得证。

引理 5.6. 存在一系列中心化概率测度 (μ_n) , 使得:

- i) μ_n 的支集紧, 并包含于某个区间 $[a_n, b_n]$;
- ii) ψ_{μ_n} 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 并在 $[a_n, \infty)$ 上严格递增;
- iii) ψ_{μ_n} 在 $\mathbb{R}$ 上处处递增收敛到 ψ_μ 。

证明。 令

$$a = \sup\{x : \psi_\mu(x) = 0\},$$

并取严格负数列 (a_n) 递减到 a , 以及正数列 (b_n) 递增到 b 。数

$$\delta_n = \inf\{\psi_\mu(x) - x : -\infty < x \leq b_n\}$$

有限且严格为正。仍用定理 1.1 证明中的光滑函数 j 。对每个 n , 取整数 k_n , 使

$$\int_{\mathbb{R}} y j(y) dy > -\delta_n k_n.$$

对 $-\infty < x \leq b_n$, 令

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \left(\frac{x - a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} \mathbf{1}_{\{a_{n+1} \leq x < a_n\}} + \mathbf{1}_{\{a_n \leq x\}} \right) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \psi_\mu(x+y) k_n j(k_n y) dy. \end{aligned}$$

函数 ψ_n 具有下列性质:

- i) $\psi_n \leq \psi_\mu$, 且 ψ_n 在 $(-\infty, b_n]$ 上连续;
- ii) $\psi_n > 0$ 于 $(a_{n+1}, b_n]$;
- iii) $\psi_n(x) > x$ 于 $(-\infty, b_n]$ 。

对于 iii), 只需注意当 $x \in [0, b_n]$ 时,

$$\begin{aligned} \psi_n(x) - x &= k_n \int_{\mathbb{R}} (\psi_\mu(x+y) - (x+y)) j(k_n y) dy \\ &\quad + k_n \int_{\mathbb{R}} y j(k_n y) dy > 0, \end{aligned}$$

其中最后的不等式来自 k_n 的选取。

现在把 ψ_n 延拓到 (b_n, ∞) 。由于

$$b_n < \psi_n(b_n) \leq \psi_\mu(b_n),$$

可令 ψ_n 在 $[b_n, \psi_\mu(b_n)]$ 上为仿射函数, 并在 $x \geq \psi_\mu(b_n)$ 时令 $\psi_n(x) = x$, 使整个函数连续。最后置

$$\tilde{\psi}_n = \psi_1 \vee \psi_2 \vee \cdots \vee \psi_n.$$

由引理 5.2, 每个 $\tilde{\psi}_n$ 都对应一个概率测度 μ_n , 而序列 $(\tilde{\psi}_n)$ 具有命题中所列的全部性质。

定理 5.4 的证明 (续完)。由命题 5.5 和引理 5.6, 只需在以下情形证明定理的第一句话: μ 的支集包含于紧区间 $[a, b]$, 并且 ψ_μ 连续, 且在 $[a, \infty)$ 上严格递增。由于 $x < a$ 时 $\psi_\mu(x) = 0$, 故 $T_\mu < T_a$; 又因 $x > b$ 时 $\psi_\mu(x) = x$, 故 $T_\mu \leq T_b$ 。因此 M^{T_μ} 有界。令 γ 为 ψ_μ 在 $[a, \infty)$ 上限制的反函数。对 $\phi \in C_K$, 置

$$g = \phi \circ \gamma, \quad G(x) = \int_0^x g(u) \, du.$$

由命题 4.5 后的讨论,

$$X_t = G(S_t) - (S_t - M_t)g(S_t)$$

是局部鞅。因 ϕ 与 G 有界, X^{T_μ} 是有界鞅, 从而

$$E[G(S_{T_\mu}) - (S_{T_\mu} - M_{T_\mu})g(S_{T_\mu})] = 0.$$

按 g 与 T_μ 的定义, 这可写成

$$E \left[\int_0^{\psi_\mu(M_{T_\mu})} \phi \circ \gamma(u) \, du - (\psi_\mu(M_{T_\mu}) - M_{T_\mu})\phi(M_{T_\mu}) \right] = 0.$$

若 ν 是 M_{T_μ} 的分布, 则

$$\int_{\mathbb{R}} \nu(dx) \int_{-\infty}^x \phi(v) \, d\psi_\mu(v) + \int_{\mathbb{R}} (x - \psi_\mu(x))\phi(x) \nu(dx) = 0.$$

分部积分后,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) [-\bar{\nu}(x) \, d\psi_\mu(x) + (x - \psi_\mu(x)) \, d\bar{\nu}(x)] = 0.$$

由于 $\phi \in C_K$ 任意, 引理 5.1 及其证明蕴含 $\nu = \mu$ 。

为证明 i), 按引理 5.6 选取 (ψ_{μ_n}) 。对每个 n , $M^{T_{\mu_n}}$ 是有界鞅。此外,

$$|M_{T_{\mu_n}}| \longrightarrow |M_{T_\mu}| \quad \text{a.s.},$$

并由命题 5.5 ii),

$$E[|M_{T_{\mu_n}}|] \longrightarrow E[|M_{T_\mu}|].$$

故 $|M_{T_{\mu_n}}| \rightarrow |M_{T_\mu}|$ 于 L^1 中, i) 随即成立。

还须证明 ii)。当 μ 有紧支集时, M^{T_μ} 有界, 故由第 IV 章命题 1.23,

$$E[\langle M, M \rangle_{T_\mu}] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx).$$

对一般情形, 再作一次逼近。令 $\lambda(x) = x$, 并置

$$\psi_n = \psi_\mu \mathbf{1}_{(-n, n]} + \psi_\mu(n) \mathbf{1}_{(n, \psi_\mu(n)]} + \lambda \mathbf{1}_{(\psi_\mu(n), \infty)}.$$

由引理 5.2, ψ_n 对应一个测度 μ_n 。若 $\int x^2 \mu_n(dx) < \infty$, 则由引理 5.3,

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \mu_n(dx) = \int_{-n}^{\psi_\mu(n)} \psi_{\mu_n}(x) \bar{\mu}_n(x) dx.$$

由引理 5.1, 当 $-n < x < n$ 时,

$$\bar{\mu}_n(x) = C_n \bar{\mu}(x), \quad C_n \rightarrow 1.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu_n(dx) &= C_n \int_{-n}^n \psi_\mu(x) \bar{\mu}(x) dx \\ &\quad + \int_n^{\psi_\mu(n)} \psi_{\mu_n}(x) \bar{\mu}_n(x) dx. \end{aligned}$$

记右端最后一个积分为 I_n 。因 $\bar{\mu}_n$ 在 $[n, \psi_\mu(n)]$ 上恒等于 $C_n \bar{\mu}(n)$, 有

$$I_n = C_n \psi_\mu(n) \bar{\mu}(n) (\psi_\mu(n) - n).$$

若随机变量 X 的分布为 μ , 则

$$\begin{aligned} \frac{I_n}{C_n} &= \frac{E[X \mathbf{1}_{\{X \geq n\}}] E[(X - n) \mathbf{1}_{\{X \geq n\}}]}{P(X \geq n)} \\ &\leq E[X^2]^{1/2} E\left[\left((X - n)^+\right)^2\right]^{1/2}, \end{aligned}$$

这证明 $I_n \rightarrow 0$ 。因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx).$$

由命题 5.5 的证明, $T_{\mu_n} \uparrow T_\mu$, 所以

$$\begin{aligned} E[\langle M, M \rangle_{T_\mu}] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[\langle M, M \rangle_{T_{\mu_n}}] \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx). \end{aligned}$$

证明完成。

练习 5.7. 设 B 是标准一维布朗运动。

1°) 对 $\mathbb{R}$ 上任意概率测度 μ , 证明存在一个 $\mathcal{F}_{1/2}^B$ -可测随机变量 Z , 使

$$Z(P) = \mu.$$

2°) 定义 $(\mathcal{F}_t^B)$ -停时

$$T = \inf\{t \geq 1 : B_t = Z\}.$$

证明 B_T 的分布为 μ , 并且 $E[T] = \infty$ 。

练习 5.8 (唯一性结论)。

1°) 设 g 是连续严格递增函数, 满足

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0, \quad g(x) \geq x,$$

并且当

$$x \geq \inf\{u : g(u) = u\}$$

时 $g(x) = x$ 。若对

$$T = \inf\{t : S_t \geq g(M_t)\},$$

过程 M^T 是一致可积鞅, 且 M_T 的分布为 μ , 证明

$$g(x) = -\frac{1}{\bar{\mu}(x)} \int_{(-\infty, x)} t \mu(dt).$$

特别地, 若 μ 中心化, 则 $g = \psi_\mu$ 。

提示: 使用定理 5.4 证明的第一部分。

2°) 把这个结论推广到 g 仅左连续且递增的情形。

练习 5.9。 在定理 5.4 的情形下, 证明 S_{T_μ} 的分布由

$$P(S_{T_\mu} \geq x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{ds}{s - \gamma(s)}\right)$$

给出, 其中

$$\gamma(s) = \inf\{t : \psi_\mu(t) \geq s\}.$$

练习 5.10。 设 B 是标准一维布朗运动, μ 是中心化概率测度。证明存在递增的有限停时序列 (T_n) , 其中 $T_0 = 0$, 使随机变量

$$B_{T_{n+1}} - B_{T_n}, \quad n \geq 0,$$

相互独立、同分布, 公共分布为 μ , 且

$$E[T_{n+1} - T_n] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx).$$

练习 5.11。 证明定理 5.4 中的停时 T_μ 具有下列极小性: 若 R 是停时, 满足

$$R \leq T_\mu, \quad M_R \stackrel{d}{=} M_{T_\mu},$$

则 $R = T_\mu$ 。

练习 5.12。

1°) 对 $p, q \in \mathbb{R}_+$ 且 $p + q > 0$, 记

$$\nu(p, q) = \frac{q\varepsilon_p + p\varepsilon_{-q}}{p + q}.$$

若概率测度 μ 满足定理 5.4 的条件, 证明存在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的概率测度 α , 使

$$\mu = \int_{\mathbb{R}_+^2} \nu(p, q) \alpha(dp, dq).$$

提示: 先从有限支集的 μ 开始, 再使用弱收敛。

2°) 设随机向量 (P, Q) 与 B 独立, 且分布为 α 。随机变量

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin (-Q, P)\}$$

满足 B_T 的分布为 μ 。注意: T 是一个停时, 但相对于一个严格大于布朗滤过的滤过而言。

注释与评述

第 1 节。 布朗运动局部时这一概念及其构造归功于 P. Lévy [2]。此后, 理论至少沿三个方向发展。最早出现的是 Markov 过程的局部时理论, Blumenthal–Gettoor [1] 对此作了论述 (另见 Sharpe [1]); 我们会在第 X 章的注释与评述中再讨论它。第二条路线是占据密度理论 (Geman 和 Horowitz [1]), 其要点是证明测度

$$A \mapsto \int_0^t \mathbf{1}_A(X_s) ds$$

相对于某个给定的确定性测度绝对连续; 后者通常是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度。这个结论常用 Fourier 变换方法证明, 并推广为相交局部时理论。该理论近年来取得了许多进展, 可参阅 Geman 等 [1]、Rosen [1]、Le Gall [4] 与 Yor [18]; 关于这个问题的 Markov 观点, Dynkin [2] 作了系统发展。这两条局部时路线只在若干练习中一带而过, 例如练习 2.19。

第三条、或许也是最有用的路线, 源自推广 Itô 公式适用范围的愿望; 这就是半鞅观点。继 Tanaka [1] 关于布朗运动的较早结果以及 Millar [2] 关于独立增量过程的结果之后, 这一观点首先出现在 Meyer [5]。本节研究的正是连续半鞅情形。读者还可参阅 Azéma–Yor [1] 中以一般过程理论为基础的另一种讲法, 以及 Dellacherie–Meyer [1] 第 4 卷中把局部时推广到再生集的论述。

定理 1.7 推广或平行于 Trotter [1]、Boylan [1] 与 Ray [1] 的早期结果, 取自 Yor [4]; 定理 1.12 取自 Bouleau–Yor [1], 练习 1.29 亦然。推论 1.9、定理 1.10、练习 1.20 的逼近结论, 以及第 XII 章还会遇到的若干类似结论, 在布朗运动情形最初归功于 Lévy (见 Itô–McKean [1]); 半鞅情形见 El Karoui [1]。Ouknine–Rutkowski [1] 给出了许多计算局部时的有趣“代数”公式, 其中一些已被改编为本书练习。

练习 1.21 取自 Weinryb [1], 练习 1.20 取自 McGill 等 [1], 练习 1.26 取自 Pratelli [1]。练习 1.17 归功于 Yoeurp [1]; 练习 1.14 与 1.22 分别取自 Yor [5] 与 Yor [12]。练习 1.29 取自 Biane–Yor [1], 它推广了 Itô–McKean [1] 中的一个结果 (第 72 页问题 1)。Yamada [2, 3, 4, 6] 深入研究了布朗局部时的主值; Bertoin [2] 也研究了这一问题, 练习 1.30 即归功于他。Ezawa 等 [1, 2, 3] 则出于物理学目的研究过这些主值。

Tanaka 公式给出了鞅的绝对值的 Doob–Meyer 分解。反过来, Gilat [1] 证明, 正次鞅的分布是某个鞅的绝对值的分布。这一鞅的逐路构造 (可能需要附加随机化) 由 Protter–Sharpe [1]、Barlow [7]、Barlow–Yor [3] 与 Maisonneuve [8] 等人给出。

第 2 节。 本节前半部分的结论归功于 Lévy, 但这里的证明完全不同。Lévy 对布朗局部时的研究以等价性定理 2.3 为基础; 这里则借助引理 2.1 反向论证。该引理归功于 Skorokhod [2] (另见 El Karoui 与 Chaleyat–Maurel [1])。定理 2.3 还说明, 布朗局部时并非多么奇异的对象: 它恰好就是

另一个布朗运动的上确界过程。

推论 2.8 对布朗运动离开零点的游程作了精确标记；这在第 XII 章中至关重要。

反正弦律最早的证明见 Lévy [4, 5]。这里采用的证明见 Pitman–Yor [5] 与 Karatzas–Shreve [1]，但原始思想归功于 Williams [1] 与 McKean [3]。反正弦律还有其他证明，尤其是经典的 Feynman–Kac 方法，见 Itô–McKean [1]。另一个依赖游程理论的证明见 Barlow–Pitman–Yor [1]（参见第 XII 章练习 2.17）。

练习 2.13 归功于 Spitzer [1]，练习 2.15 见 Itô–McKean [1]。练习 2.15 第 2 问中的同分布关系，是 Lévy 过程上一个一般结论的特例（见 Bertoin [7]）；该一般结论是 Sparre Andersen 的组合结论向连续时间的推广（见 Feller [4]）。

练习 2.22 取自 Lane [1]，练习 2.24 取自 Weinryb [1]。练习 2.27 取自 Le Gall [3]；另一种方法以及练习 2.26 可见 Itô–McKean [1]。这些结果最初归功于 Besicovitch、Taylor [1] 与 Taylor [1]。练习 2.28 取自 Yor [18]，练习 2.29 取自 Biane 等 [1]。

把练习 2.32 的思想再推进一步，就得到下面的公开问题。

问题 1. 映射

$$\beta \mapsto \hat{\beta}$$

是否遍历？

Dubins 与 Smorodinsky [1] 对 $\mathbb{Z}$ 上标准随机游走中问题 1 的离散类似给出了肯定答案。此外，Dubins 等 [1] (1993) 沿练习 2.32 的思路提出了另一个与问题 1 等价的有趣问题。还要指出，问题 1 可以推广到符号函数以外的模为 1 的函数；利用第 IV 章练习 3.22 的结论，也可推广到 d 维情形。最后，Malric [2] 得到了 $\hat{\beta}$ 的迭代过程之零点集的稠密性结论，这或许有助于解决问题 1。

练习 2.33 给出了由尺度不变性导出的大量绝对连续关系之一（例如见 Yor [25]）。另一个例子见练习 2.29，其中联系了布朗桥与伪布朗桥。练习 2.33 所用的方法还可推广，从而得到 Petit 对 Lévy 反正弦律的推广（见 Petit [1] 与 Carmona 等 [1]）。

第 3 节。本节大部分结论取自 Pitman [1]，但定理 3.5 的证明借自 Ikeda–Watanabe [2]。Pitman 的原始证明用极限过程把离散时间情形过渡到连续时间情形。这一方法在许多场合都很有效，例如 Le Gall [5]，以及 Breiman [1] 用它证明第 VII 章第 3 节中的若干结论。定理 3.5 的其他证明见 Pitman–Rogers [1]、Rogers [2] 与 Jeulin [1]，另见第 VII 章练习 4.15。Imhof [3] 给出了一个简单证明。

定理 3.11 归功于 Williams [3]，若干练习亦然。练习 3.18 取自 Emery–Perkins [1]。

第 4 节。本节的主要部分取自 Azéma–Yor [1] 与 Yor [8]。更早的工作见 Azéma [2]；向随机闭集的推广见 Azéma [3]。正如命题 4.5 后指出的，可以从本节结论出发给出 Itô 公式的另一种证明（见 Azéma–Yor [1]），从而也可采用另一条路线讲述第 IV 章与第 VI 章的许多结论。

练习 4.9 部分归功于 Kennedy [1]。练习 4.11 借自 Dubins–Schwarz [3] 与 Pitman [2]，并在练习 4.13 中继续。关于 Doob 型不等式最佳常数的更多计算见 Jacka [1]。

练习 4.17 见 Itô–McKean [1]（另见 Azéma–Yor [2]），练习 4.20 见 Brossard 与 Chevalier [1]。练习 4.21 归功于 L. Carraro（私人通信）。练习 4.24 取自 Pitman [7]。⁶

还要提出下面的问题。

问题 2. 命题 4.7 中对 F 的假设能否放宽？

⁶校订注：原书此处写作“练习 4.25”，但本节并无练习 4.25；结合本节练习编号及内容，应为练习 4.24。

第 5 节。本节处理的问题可追溯到 Skorokhod [2], 此后出现了很多解法, 例如 Dubins [3]、Root [1]、Chacon–Walsh [1] 等。离散时间情形由 Rost 研究过 (见 Revuz [3]), 并与遍历理论有密切联系。

本节给出的解法取自 Azéma–Yor [2], 证明经 Pierre [1] 简化 (另见 Meilijson [1, 2] 与 Zaremba [1])。多年来给出的众多解法各有优缺点; Oblój [1] 作了完整讨论。

Oblój–Yor [1] 还用随机微积分或游程理论解决了更多 Skorokhod 型问题。

第 VII 章 生成元与时间反演

本章重新开始研究 Markov 过程。我们假定读者已经读过第 III 章第 1、2 节。

1 无穷小生成元

Markov 过程理论的重要性来自若干方面。一方面, Markov 过程为许多自然现象提供模型。“现在包含了根据过去预测未来所需的全部信息”虽然稍嫌简化, 却很自然, 而且往往至少可作为第一步近似。另一方面, Markov 过程也在数学理论与物理理论中自然出现。

不过, 这一理论有多大用处, 取决于能够构造和研究多少过程。我们已经见过怎样从转移函数构造 Markov 过程; 困难在于, 能够显式写出的转移函数并不多。更何况, 在大多数可由 Markov 过程建模的现象中, 直觉把握到的通常不是转移函数, 而是过程如何从一个位置运动到另一个位置。正因如此, 下面的概念非常重要。

定义 1.1。 设 X 是 Feller 过程。若 $f \in C_0$, 且极限

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t f - f}{t}$$

在 C_0 中存在, 则称 f 属于 X 的无穷小生成元的定义域 $\mathcal{D}_A$ 。由此定义的算子

$$A : \mathcal{D}_A \longrightarrow C_0$$

称为过程 X (或半群 (P_t)) 的无穷小生成元。

由具有半群 (P_t) 的 Markov 过程的定义, 对任意有界 Borel 函数 f ,

$$E[f(X_{t+h}) - f(X_t) \mid \mathcal{F}_t] = P_h f(X_t) - f(X_t).$$

因此, 若 $f \in \mathcal{D}_A$, 可写成

$$E[f(X_{t+h}) - f(X_t) \mid \mathcal{F}_t] = hAf(X_t) + o(h).$$

所以 A 描述了过程在无穷小时间区间内如何从一点移动到另一点。

下面列出 A 的若干性质。

命题 1.2。 若 $f \in \mathcal{D}_A$, 则:

- i) 对每个 $t \geq 0$, $P_t f \in \mathcal{D}_A$;
- ii) 映射 $t \mapsto P_t f$ 在 C_0 中强可微, 且

$$\frac{d}{dt} P_t f = AP_t f = P_t Af;$$

iii)

$$P_t f - f = \int_0^t P_s Af \, ds = \int_0^t AP_s f \, ds.$$

证明。 固定 t 。由半群性质,

$$\begin{aligned} \lim_{s \downarrow 0} \frac{P_s(P_t f) - P_t f}{s} &= \lim_{s \downarrow 0} P_t \left[\frac{P_s f - f}{s} \right] \\ &= P_t A f. \end{aligned}$$

这证明 i) 以及 $AP_t f = P_t A f$ 。同时, $t \mapsto P_t f$ 的右导数等于 $P_t A f$ 。
再考虑函数

$$t \mapsto \int_0^t P_s A f \, ds.$$

它可微, 导数等于 $P_t A f$ 。具有相同右导数的两个连续函数之差为常数, 所以对某个 g ,

$$P_t f = \int_0^t P_s A f \, ds + g.$$

这证明 ii); 令 $t = 0$ 得 $g = f$, 从而得到 iii)。

注 1. 方程

$$\frac{d}{dt} P_t f = P_t A f$$

可形式地写成

$$\frac{d}{dt} P_t(x, \cdot) = A^* P_t(x, \cdot),$$

其中 A^* 是函数与测度对偶下 A 的形式伴随算子。这个方程称为前向方程或 *Fokker-Planck* 方程。称它为“前向”方程, 是因为它来自对终点位置的扰动: $P_t A f$ 是

$$P_t \left(\frac{P_\varepsilon f - f}{\varepsilon} \right)$$

在 $\varepsilon \downarrow 0$ 时的极限。

同样, 由扰动初始位置得到的方程

$$\frac{d}{dt} P_t f = A P_t f, \quad A P_t f = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{(P_\varepsilon - I) P_t f}{\varepsilon},$$

称为后向方程。在非齐次情形中, 这两个名称尤其贴切: 对 $P_{s,t}$ 分别关于 t 与 s 求导, 便得到前向方程与后向方程。

命题 1.3. 空间 $\mathcal{D}_A$ 在 C_0 中稠密, 并且 A 是闭算子。

证明。 令

$$A_h f = \frac{P_h f - f}{h}, \quad B_s f = \frac{1}{s} \int_0^s P_t f \, dt.$$

算子 A_h, B_s 在 C_0 上有界, 而且

$$A_h B_s = B_s A_h = A_s B_h = B_h A_s.$$

对每个 $s > 0$ 与 $f \in C_0$,

$$\lim_{h \downarrow 0} A_h B_s f = \lim_{h \downarrow 0} A_s (B_h f) = A_s f.$$

故 $B_s f \in \mathcal{D}_A$ 。又因 $\lim_{s \downarrow 0} B_s f = f$ ，所以 $\mathcal{D}_A$ 在 C_0 中稠密。
现在设 $(f_n) \subset \mathcal{D}_A$ 、 $f_n \rightarrow f$ ，并假定 $A f_n \rightarrow g$ 。则

$$\begin{aligned} B_s g &= \lim_n B_s A f_n = \lim_n B_s \left(\lim_{h \downarrow 0} A_h f_n \right) \\ &= \lim_n \lim_{h \downarrow 0} A_s (B_h f_n) = \lim_n A_s f_n = A_s f. \end{aligned}$$

于是 $f \in \mathcal{D}_A$ ，并且

$$A f = \lim_{s \downarrow 0} A_s f = g.$$

这证明 A 是闭算子。

第 III 章第 2 节定义的预解式 U_p ，正是算子 A 的预解式。

命题 1.4。 对每个 $p > 0$ ，映射

$$f \mapsto p f - A f$$

是从 $\mathcal{D}_A$ 到 C_0 的双射，其逆映射为 U_p 。

证明。 若 $f \in \mathcal{D}_A$ ，则

$$\begin{aligned} U_p(p f - A f) &= \int_0^\infty e^{-pt} P_t(p f - A f) dt \\ &= p \int_0^\infty e^{-pt} P_t f dt - \int_0^\infty e^{-pt} \frac{d}{dt} P_t f dt. \end{aligned}$$

对最后一个积分作分部积分，得到

$$U_p(p f - A f) = f.$$

反过来，若 $f \in C_0$ ，沿用命题 1.3 的记号，则

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} A_h U_p f &= \lim_{h \downarrow 0} U_p A_h f \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \int_0^\infty e^{-pt} P_t \left(\frac{P_h f - f}{h} \right) dt \\ &= p U_p f - f. \end{aligned}$$

因此 $(pI - A)U_p f = f$ ，证明完成。

以上三个命题对 Banach 空间上的任意强连续压缩半群都成立。下一个结论则更有 Feller 半群的特色。

命题 1.5 (正极大值原理)。 Feller 半群的生成元 A 满足下列正极大值原理：若 $f \in \mathcal{D}_A$ ，并且某个 x_0 满足

$$0 \leq f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in E\},$$

则

$$A f(x_0) \leq 0.$$

证明。 有

$$Af(x_0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t f(x_0) - f(x_0)}{t},$$

且

$$P_t f(x_0) - f(x_0) \leq f(x_0)(P_t(x_0, E) - 1) \leq 0.$$

定义 1.1 后说明的生成元的概率意义, 也体现在下一个命题中。这里 X 是转移函数为 (P_t) 的 Feller 过程。

命题 1.6。 若 $f \in \mathcal{D}_A$, 则对每个 v , 过程

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Af(X_s) \, ds$$

都是 $(\mathcal{F}_t^0, P_v)$ -鞅。特别地, 若 $Af = 0$, 则 $f(X_t)$ 是鞅。

证明。 因 f 与 Af 有界, M_t^f 对每个 t 可积。此外,

$$\begin{aligned} E_v[M_t^f \mid \mathcal{F}_s^0] &= M_s^f \\ &+ E_v \left[f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t Af(X_u) \, du \mid \mathcal{F}_s^0 \right]. \end{aligned}$$

由 Markov 性, 右端的条件期望等于

$$E_{X_s} \left[f(X_{t-s}) - f(X_0) - \int_0^{t-s} Af(X_u) \, du \right].$$

而对每个 $y \in E$,

$$\begin{aligned} E_y \left[f(X_{t-s}) - f(X_0) - \int_0^{t-s} Af(X_u) \, du \right] \\ = P_{t-s} f(y) - f(y) - \int_0^{t-s} P_u Af(y) \, du = 0, \end{aligned}$$

最后一步来自命题 1.2。证明完成。还可用任意使 X 为 Markov 过程的滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 代替 $(\mathcal{F}_t^0)$ 。

注 2。 这个命题可看作第 X 章练习 1.8 的特例。还要注意, 若 $f \in \mathcal{D}_A$, 则 $f(X_t)$ 是半鞅; 在布朗运动情形, 第 X 章练习 2.23 将给出一个逆命题。

反过来有下面的结论。

命题 1.7。 设 $f \in C_0$ 。若存在 $g \in C_0$, 使得对每个 x ,

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t g(X_s) \, ds$$

都是 $(\mathcal{F}_t, P_x)$ -鞅, 则

$$f \in \mathcal{D}_A, \quad Af = g.$$

证明。 对每个 x ，取期望后有

$$P_t f(x) - f(x) - \int_0^t P_s g(x) \, ds = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} \left\| \frac{P_t f - f}{t} - g \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t (P_s g - g) \, ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \|P_s g - g\| \, ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

当 $t \downarrow 0$ 。

以上两个结论引出如下定义。

定义 1.8. 设 X 是 Markov 过程。若 Borel 函数 f 满足：存在 Borel 函数 g ，使得对每个 t ，几乎处处有

$$\int_0^t |g(X_s)| \, ds < \infty,$$

并且对每个 x ，过程

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t g(X_s) \, ds$$

是右连续的 $(\mathcal{F}_t, P_x)$ -鞅，则称 f 属于扩展无穷小生成元的定义域 $\mathbb{D}_A$ 。

显然 $\mathbb{D}_A \supset \mathcal{D}_A$ 。仍记 $g = Af$ ，并把如此定义的“算子” A 称为扩展无穷小生成元。这个定义对非 Feller 的 Markov 过程也完全有意义。事实上，上述理论的大部分都可推广到这一更一般的情形（见练习 1.16），概率解释也相同。但要注意，在一个势为零的集合上修改 g （第 III 章练习 2.25），并不改变鞅性质；所以映射 $f \mapsto g$ 实际上是多值的，而且只能说“几乎”线性。

本节余下部分讨论若干基本例子。其中一些内容在后文的技术推导中并非必需，却有助于理解我们将研究的主题。

能够完全确定 $\mathcal{D}_A$ 与 A 的情形其实并不多，通常只能描述 $\mathcal{D}_A$ 的某些子空间。先讨论独立增量过程，沿用第 III 章第 4 节的记号。令 $\mathcal{S}$ 为实直线上由下列 C^∞ 函数组成的 Schwartz 空间：对任意多项式 P 和任意整数 k ，

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) P(x) = 0.$$

Fourier 变换是 $\mathcal{S}$ 到自身的双射。

命题 1.9. 设 X 是实值平稳独立增量过程，则 $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_A$ ，并且对 $f \in \mathcal{S}$ ，

$$\begin{aligned} Af(x) &= \beta f'(x) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \left[f(x+y) - f(x) - \frac{y}{1+y^2} f'(x) \right] \nu(dy), \end{aligned}$$

其中 (β, σ, ν) 是第 III 章第 4 节 Lévy-Khintchine 公式中的三元组。

证明。 先注意, 特征指数 ψ 在无穷远处至多按 $|u|^2$ 增长。事实上,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{[-1,1]^c} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \nu(dx) \right| \\ & \leq 2\nu([-1,1]^c) + |u| \int_{[-1,1]^c} \frac{|x|}{1+x^2} \nu(dx), \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-1}^1 \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \nu(dx) \right| \\ & \leq |u| \int_{-1}^1 \left| \frac{x}{1+x^2} - x \right| \nu(dx) + \int_{-1}^1 |e^{iux} - 1 - iux| \nu(dx). \end{aligned}$$

最后一个被积函数由 $c|x|^2|u|^2$ 控制, 其中 c 是常数。

现取 $f \in \mathcal{S}$ 。存在唯一的 $g \in \mathcal{S}$, 使

$$f(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{iyu} g(u) du.$$

令 $g_x(u) = e^{ixu} g(u)$ 。若 μ_t 是 $X_t - X_0$ 的分布, 则

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mu}_t, g_x \rangle &= \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} g(u) \hat{\mu}_t(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} g(u) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{iyu} \mu_t(dy) \right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu_t(dy) \int_{\mathbb{R}} e^{i(x+y)u} g(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x+y) \mu_t(dy) = P_t f(x). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} P_t f(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{t\psi(u)} g_x(u) du \\ &= \langle 1, g_x \rangle + t \langle \psi, g_x \rangle + \frac{t^2}{2} H(t, x), \end{aligned}$$

其中, 因 $e^{s\psi}$ 是概率测度的 Fourier 变换,

$$|H(t, x)| \leq \sup_{0 \leq s \leq t} |\langle \psi^2 e^{s\psi}, g_x \rangle| \leq \langle |\psi|^2, |g_x| \rangle.$$

由前面的增长估计,

$$\langle |\psi|, |g_x| \rangle < \infty, \quad \langle |\psi|^2, |g_x| \rangle < \infty.$$

故 $t^{-1}(P_t f(x) - f(x))$ 一致收敛到 $\langle \psi, g_x \rangle$ 。又

$$f'(y) = i \int_{\mathbb{R}} u g_y(u) du, \quad f''(y) = i^2 \int_{\mathbb{R}} u^2 g_y(u) du.$$

把 Lévy-Khintchine 公式代入 $\langle \psi, g_x \rangle$, 即得所述生成元公式。

下面三个特殊情形是基本的; 在一定意义上, 它们构成许多 Markov 过程的“积木”。

若 X 是一维布朗运动, 则显然对每个 $f \in \mathcal{S}$,

$$Af(x) = \frac{1}{2}f''(x).$$

若 $X = \sigma B$, 其中 B 是一维布朗运动, 则

$$Af(x) = \frac{\sigma^2}{2}f''(x), \quad f \in \mathcal{S}.$$

在这个情形, 可以完整刻画 $\mathcal{D}_A$. 记 C_0^2 为 $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) 上二阶连续可微且函数本身、一阶偏导数和二阶偏导数都属于 C_0 的函数空间。

命题 1.10. 对一维布朗运动,

$$\mathcal{D}_A = C_0^2, \quad Af(x) = \frac{1}{2}f''(x).$$

证明. 由命题 1.4, 对任意 $p > 0$,

$$\mathcal{D}_A = U_p(C_0), \quad AU_p f = pU_p f - f.$$

利用第 III 章练习 2.23 中算出的 U_p 的显式表达式, 读者可验证: 若 $f \in C_0$, 则 $U_p f \in C_0^2$, 且

$$pU_p f - f = \frac{1}{2}(U_p f)''. \quad \square$$

反过来, 若 $g \in C_0^2$, 定义

$$f = pg - \frac{1}{2}g''.$$

函数 $g - U_p f$ 满足微分方程

$$y'' - 2py = 0.$$

这个方程唯一的有界解是零函数, 所以 $g = U_p f$. 因此

$$g \in \mathcal{D}_A, \quad Ag = \frac{1}{2}g''.$$

另外两个特殊情形是:

i) 以速度 β 平移的过程, 其 $\mathcal{D}_A$ 是 C_0 中绝对连续且导数属于 C_0 的函数空间, 并且

$$Af(x) = \beta f'(x);$$

ii) 参数为 λ 的 Poisson 过程满足 $\mathcal{D}_A = C_0$ (见练习 1.14), 并且

$$Af(x) = \lambda(f(x+1) - f(x)).$$

在这些情形中都能描述整个 $\mathcal{D}_A$, 但这种情况并不常见; 通常只能描述其子空间。

下面转向 d 维布朗运动。

命题 1.11. 当 $d \geq 2$ 时, d 维布朗运动的无穷小生成元在 C_0^2 上等于 $\frac{1}{2}\Delta$ 。

证明。 对 $f \in C_0$,

$$P_t f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|z|^2/2} f(x + z\sqrt{t}) \, dz.$$

若 $f \in C_0^2$, Taylor 公式给出

$$P_t f(x) = f(x) + \frac{t}{2} \Delta f(x) + (2\pi)^{-d/2} \frac{t}{2} J(t, x),$$

其中

$$J(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|z|^2/2} \sum_{i,j=1}^d \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\theta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right] z_i z_j \, dz,$$

θ 是线段 $[x, x + z\sqrt{t}]$ 上的某一点。令

$$F(x, z, t) = \max_{i,j} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\theta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|.$$

对任意 $R > 0$,

$$\begin{aligned} |J(t, x)| &\leq \int_{\{|z| \leq R\}} F(x, z, t) e^{-|z|^2/2} \left(\sum_{i,j} |z_i| |z_j| \right) \, dz \\ &\quad + 2 \int_{\{|z| > R\}} \max_{i,j} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\| e^{-|z|^2/2} \left(\sum_{i,j} |z_i| |z_j| \right) \, dz. \end{aligned}$$

当 $t \downarrow 0$ 时, 二阶偏导数的一致连续性表明上式第一项关于 x 一致趋于零。因此

$$\begin{aligned} \limsup_{t \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |J(t, x)| &\leq 2 \max_{i,j} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\| \\ &\quad \times \int_{\{|z| > R\}} e^{-|z|^2/2} \left(\sum_{i,j} |z_i| |z_j| \right) \, dz. \end{aligned}$$

取 R 足够大, 右端可任意小, 故

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| \frac{P_t f - f}{t} - \frac{1}{2} \Delta f \right\| = 0.$$

注 3.

1°) 与 $d = 1$ 不同, 当 $d > 1$ 时, $C_0^2 \neq \mathcal{D}_A$ 。利用 A 的闭性, 不难证明 $\mathcal{D}_A$ 恰为 C_0 中那些按分布意义计算的 Δf 仍属于 C_0 的函数; 此时

$$Af = \frac{1}{2} \Delta f.$$

2°) 对布朗运动, 由命题 1.2, 对 $f \in C_0^2$,

$$\frac{d}{dt} P_t f = \frac{1}{2} \Delta P_t f = \frac{1}{2} P_t \Delta f.$$

这也可直接验证, 因为简单计算给出

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_t}{\partial x^2} = 0,$$

在 d 维也有相应公式。实际上, 对任意有界 Borel 函数 f 和任意 $t > 0$,

$$\frac{d}{dt}P_t f = \frac{1}{2}\Delta P_t f.$$

用偏微分方程的语言说, g_t 及其多维类似物是热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta u = 0$$

的基本解。^a

^a**校订注:** 原书在上述两个热方程中均把应有的减号印成加号; 直接对高斯热核求导, 或与本段的 $\frac{d}{dt}P_t f = \frac{1}{2}\Delta P_t f$ 比较, 即可确认。

设 B 是从 0 出发的 d 维布朗运动, σ 是 $d \times d$ 矩阵。规定在 $X_0 = x$ 几乎处处时

$$X_t = x + \sigma B_t,$$

便定义了一个 $\mathbb{R}^d$ 值 Markov 过程 X 。

推论 1.12. X 的无穷小生成元在 C_0^2 上为

$$Af(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \gamma_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x),$$

其中

$$\gamma = \sigma \sigma^\top.$$

证明. 对 $f \in C_0^2$, 须计算

$$\frac{1}{t} E[f(x + \sigma B_t) - f(x)]$$

的极限。令 $g(y) = f(x + \sigma y)$, 该极限显然等于 $\frac{1}{2}\Delta g(0)$, 直接计算即得结论。

注 4. 矩阵 γ 有直接的概率解释: $t\gamma$ 正是 X_t 的协方差矩阵。

回看命题 1.9, 可以作如下启发式理解: 平稳独立增量过程是平移项、对应于 $\frac{\sigma^2}{2}f''$ 的扩散项与跳跃项的混合, 而跳跃由 Lévy 测度 ν 描述。对 $\mathbb{R}^d$ 中的一般 Markov 过程, 只要 $\mathcal{D}_A \supset C_K^2$, 也有相同的描述; 不过这些过程不再像独立增量过程那样具有空间平移不变性, 所以平移、扩散和跳跃项都会随过程在空间中的位置而变化。

定理 1.13. 设 (P_t) 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 Feller 半群, 并且

$$C_K^\infty \subset \mathcal{D}_A.$$

则:

i) $C_K^2 \subset \mathcal{D}_A$;

ii) 对每个相对紧开集 U , 存在 U 上的函数 a_{ij}, b_i, c 及核 N , 使对每个 $f \in C_K^2$ 和 $x \in U$,

$$\begin{aligned} Af(x) = & c(x)f(x) + \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ & + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{x\}} \left[f(y) - f(x) - \mathbf{1}_U(y) \sum_i (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right] N(x, dy). \end{aligned}$$

这里 $N(x, \cdot)$ 是 $\mathbb{R}^d \setminus \{x\}$ 上的 Radon 测度, 矩阵

$$a(x) = \|a_{ij}(x)\|$$

对称且非负定, 并且 $c \leq 0$. 此外, a 与 c 不依赖于 U .

关于 A 的各个组成项还可给出更完整的信息, 但这里不再深入, 也不证明这一超出本书主线的结论 (不过可参阅练习 1.19). 只需保留如下图景: 具有上述生成元的过程, 从位置 x 出发作“无穷小”运动时, 会叠加向量 $b(x)$ 所给的平移、协方差为 $a(x)$ 的高斯过程, 以及由 $N(x, \cdot)$ 给出的跳跃; 项 $c(x)f(x)$ 对应过程被“杀死”的可能性 (见练习 1.26). 若过程路径连续, 则在 C_K^2 上,

$$Af(x) = c(x)f(x) + \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x),$$

其中 $a(x)$ 对称且非负定. 这样的算子称为半椭圆型二阶微分算子.

正如本节开头指出的, 一个主要问题是反向构造: 给定满足正极大值原理的算子, 构造一个 Feller 过程, 使其生成元是这个算子的扩张. 考虑不含零阶与一阶项的半椭圆型二阶微分算子

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

若 Feller 过程 X 的生成元在 C_K^2 上等于这个算子, 那么参照推论 1.12, 可把 X 在 t 与 $t+h$ 之间的运动理解为 $\sigma(x)B$, 其中

$$2a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^\top,$$

B 是 d 维布朗运动. 形式地,

$$X_{t+h} = X_t + \sigma(X_t)(B_{t+h} - B_t) + O(h).$$

7

因此, 构造这种过程的思路是把它看成关于 B 的积分:

$$X_t = \int_0^t \sigma(X_s) dB_s,$$

或者使用稍后将引入的术语, 把它看成随机微分方程

$$dX = \sigma(X) dB$$

的解. 由于 B 的路径不是有界变差函数, 上述积分在 Stieltjes–Lebesgue 意义下没有定义; 这也正是引入随机积分的主要动机之一. 下一节与第 IX 章将进一步发展这些思想.

⁷校订注: 原书此处写 $a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^\top$, 与紧邻的推论 1.12 所给生成元系数相差因子 2. 对上式的算子, 应有 $\sigma\sigma^\top = 2a$.

练习 1.14 (有界生成元)。

1°) 设 π 是 E 上的转移概率, 满足

$$\pi(C_0(E)) \subset C_0(E),$$

并以 I 表示 $C_0(E)$ 上的恒等算子。证明

$$P_t = \exp(t(\pi - I))$$

是 Feller 半群, 而且

$$\mathcal{D}_A = C_0(E), \quad A = \pi - I.$$

启发式地描述相应过程的行为; Poisson 过程是其中一个特例。

提示: 参阅第 III 章练习 1.8 的最后一个例子。

2°) 更一般地, 若 A 是 Banach 空间上的有界算子, 则

$$T_t = \exp(tA)$$

是由有界算子组成的一致连续半群 (这些算子未必是压缩算子), 即

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T_{t+s} - T_s\| = 0,$$

其无穷小生成元为 A 。

3°) 证明下列三个条件等价:

- i) (T_t) 一致连续;
- ii) $\mathcal{D}_A$ 等于整个空间;
- iii) A 是有界算子。

若这些条件成立, 则 $T_t = \exp(tA)$ 。

提示: 使用闭图像定理与 Banach–Steinhaus 定理。

练习 1.15。 C_0 上的强连续预解式是满足下列条件的一族核 $(U_\lambda)_{\lambda>0}$:

i) 对每个 $\lambda > 0$,

$$\|\lambda U_\lambda\| \leq 1;$$

ii) 对任意 $\lambda, \mu > 0$,

$$U_\lambda - U_\mu = (\mu - \lambda)U_\lambda U_\mu = (\mu - \lambda)U_\mu U_\lambda;$$

iii) 对每个 $f \in C_0$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda U_\lambda f - f\| = 0.$$

第 III 章第 2 节已证明, Feller 半群的预解式是强连续预解式。

1°) 若 $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ 是强连续预解式, 证明每个 U_λ 都是一一映射; 若以

$$\lambda I - A = U_\lambda^{-1}$$

定义算子 A , 则 A 与 λ 无关。若 (U_λ) 是 Feller 半群的预解式, 则 A 就是相应的生成元。

2°) 证明 $f \in \mathcal{D}_A$ 当且仅当极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda U_\lambda f - f)$$

存在; 此时该极限等于 Af 。

练习 1.16。 对齐次转移函数 (P_t) , 令 B_0 为满足

$$\lim_{t \downarrow 0} \|P_t f - f\| = 0$$

的有界 Borel 函数 f 的集合, 其中

$$\|f\| = \sup_x |f(x)|.$$

再令 $\mathcal{D}_A$ 为满足下列条件的函数 f 的集合: 存在函数 Af , 使

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| \frac{P_t f - f}{t} - Af \right\| = 0.$$

证明 $\mathcal{D}_A \subset B_0$, 并以 B_0 代替正文中的 C_0 , 把本节结论推广到这个一般情形。

练习 1.17。 设 (P_t) 是 Feller 半群, $f \in C_0$, 并且

$$t^{-1}(P_t f - f)$$

一致有界且逐点收敛到某个 $g \in C_0$ 。证明

$$f \in \mathcal{D}_A, \quad Af = g.$$

提示: 证明 $f \in U_\lambda(C_0)$ 。

练习 1.18。 设 (P_t) 与 (Q_t) 是同一空间上的两个 Feller 半群, 其无穷小生成元分别为 A, B 。若

$$\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_B, \quad B = A \text{ 于 } \mathcal{D}_A,$$

证明 $P_t = Q_t$ 。因此映射 $P_t \mapsto A$ 是单射, 而且无穷小生成元的任何严格扩张都不可能仍是无穷小生成元。

提示: 对 $f \in \mathcal{D}_A$, 求函数

$$s \mapsto Q_s P_{t-s} f$$

的导数。

练习 1.19。 设

$$A : C^\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C(\mathbb{R}^d)$$

是满足正极大值原理且 $A1 = 0$ 的线性映射。再假设 A 是局部算子: 若 f 在 x 的某个邻域内恒为零, 则 $Af(x) = 0$ 。

1°) 证明 A 满足局部极大值原理: 若 f 在 x 处取得局部极大值, 则 $Af(x) \leq 0$ 。

2°) 若对某个 x , 函数 f 满足

$$|f(y) - f(x)| = o(|y - x|^2) \quad (y \rightarrow x),$$

证明 $Af(x) = 0$ 。

提示: 对适当选取的 α , 把 A 作用于

$$f(y) + \alpha|y - x|^2.$$

3°) 以 χ^i 表示坐标映射, 并令

$$\begin{aligned} b_i(x) &= A\chi^i(x), \\ a_{ij}(x) &= A(\chi^i\chi^j)(x) - b_i(x)\chi^j(x) - b_j(x)\chi^i(x). \end{aligned}$$

证明对每个 x , 矩阵 $(a_{ij}(x))$ 非负定。

提示: 使用函数

$$f(y) = \left| \sum_{i=1}^d \theta_i (\chi^i(y) - \chi^i(x)) \right|^2, \quad \theta \in \mathbb{R}^d.$$

4°) 证明

$$Af(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

提示: 使用 Taylor 公式。

练习 1.20. 设 γ 是 $\mathbb{R}^d$ 上均值为 0、协方差矩阵为 I_d 的高斯测度; f 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 C^∞ 函数, 且 f 与其各阶导数均有界; B 是从 0 出发的 d 维布朗运动。

1°) (Chernoff 不等式) 证明

$$f(B_1) - E[f(B_1)] = \int_0^1 \nabla(P_{1-t}f)(B_t) dB_t,$$

并推出

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(f - \int_{\mathbb{R}^d} f d\gamma \right)^2 d\gamma \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 d\gamma.$$

2°) 再假设 $\|\nabla f\| \leq 1$ 。证明存在一维布朗运动 X 与随机变量 $\tau \leq 1$, 使

$$f(B_1) - E[f(B_1)] = X_\tau.$$

提示: $\|\nabla(P_{1-t}f)\| \leq 1$ 。

3°) 证明对每个 $u > 0$,

$$\gamma\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > \int_{\mathbb{R}^d} f d\gamma + u\right\}\right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_u^\infty e^{-x^2/2} dx.$$

^a

4°) 把第 1 问推广到满足

$$f \in L^2(\gamma), \quad \nabla f \in L^2(\gamma)$$

的函数, 并证明等号成立当且仅当 f 是仿射函数。

^a校订注: 原书此处把集合的取值空间印作 $\mathbb{R}$, 但本题从一开始规定 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 且 γ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的测度, 故应为 $x \in \mathbb{R}^d$ 。

练习 1.21. 在一维布朗运动的情形, 设

$$F \in L^2(\mathcal{F}_\infty^B).$$

假定存在 $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上的函数 ϕ , 使对每个 t ,

$$F(\omega) = \phi(\omega, t, \theta_t(\omega))$$

(见第 III 章练习 3.19), 并且对几乎每个 ω , 函数

$$(x, t) \mapsto \Phi(\omega, x, t) = E_x[\phi(\omega, t, \cdot)]$$

属于 $C_{x,t}^{2,1}$. 证明第 V 章第 3 节给出的 F 的表示为

$$E[F] + \int_0^t \Phi'_x(\omega, B_s(\omega), s) dB_s(\omega).$$

给出满足上述条件的随机变量 F 的例子。

提示: 使用第 IV 章练习 3.12。

练习 1.22. 证明在 0 处被杀死的布朗运动, 其无穷小生成元在

$$C_K^2((0, \infty))$$

上等于

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}.$$

练习 1.23 (偏斜布朗运动). 证明第 III 章练习 1.16 中定义的半群, 其无穷小生成元在空间

$$\{f \in C_0 : f'' \text{ 在 } \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ 上存在,} \\ f''(0-) = f''(0+), (1-\alpha)f'(0-) = \alpha f'(0+)\}$$

上等于

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}.$$

练习 1.24. 若 X 是生成元为 A 的齐次 Markov 过程, 证明与 X 相联系的时空过程 (第 III 章练习 1.10) 的生成元, 在 $\mathbb{R}_+ \times E$ 上适当的函数空间中等于

$$\frac{\partial}{\partial t} + A.$$

练习 1.25.

1°) 设 X 是 Feller 过程, U 是第 III 章练习 2.29 中的势核. 若 $f \in C_0$ 且 $Uf \in C_0$, 则证明

$$Uf \in \mathcal{D}_A, \quad -AUf = f.$$

因此, 势核提供了 A 的一个逆。

提示: 使用练习 1.17。

2°) 验证: 对三维布朗运动, 每个 $f \in C_K$ 都满足第 1 问的条件。用偏微分方程的语言说,

$$\frac{1}{2\pi|x|}$$

是 $-A$ 的基本解, 即按分布意义,

$$-A\left(\frac{1}{2\pi|x|}\right) = \delta_0.$$

^a

^a**校订注:** 原书把基本解写成 $1/|x|$, 并声称 $-A(1/|x|) = \delta_0$ 。但三维布朗运动的 $A = \frac{1}{2}\Delta$, 而 $-\Delta(1/|x|) = 4\pi\delta_0$, 故正确归一化为 $1/(2\pi|x|)$ 。

练习 1.26. 设 X 是 Feller 过程, c 是正 Borel 函数。

1°) 证明下式定义齐次转移函数 (Q_t) :

$$Q_t(x, A) = E_x \left[\mathbf{1}_A(X_t) \exp \left(- \int_0^t c(X_s) \, ds \right) \right].$$

这里不再深入讨论, 但 Q_t 对应于以“速率” $c(X)$ 截断或“杀死” X 的路径。

2°) 若 f 属于 X 的生成元定义域, 并且 c 连续, 证明

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(Q_t f - f) = Af - cf$$

逐点成立。读者还可参阅下一章命题 3.10。

练习 1.27.

1°) 设 Z 是严格正的随机变量, 并在 $\mathbb{R}_+$ 上定义一族核

$$P_t f(x) = E[f((tZ) \vee x)].$$

证明 (P_t) 是半群, 当且仅当 Z^{-1} 是指数随机变量, 即

$$Z^{-1} \stackrel{d}{=} \lambda e, \quad \lambda > 0,$$

其中 e 是参数为 1 的指数随机变量。

2°) 在上述情形写出 (P_t) 的解析形式, 然后证明它是 Feller 半群,

$$\mathcal{D}_A = C_0(\mathbb{R}_+),$$

并且

$$Af(x) = \lambda \int_x^\infty (f(y) - f(x)) y^{-2} \, dy.$$

练习 1.28. 沿用本节记号, 以 A^n 表示 A 的第 n 次迭代, $\mathcal{D}_{A^n}$ 表示其定义域。

1°) 若 $\varphi \in C_K^\infty((0, \infty))$, 证明对 $f \in C_0$, 函数 $P_\varphi f$ (见前面的引理 4.3) 对每个 n 都属于 $\mathcal{D}_{A^n}$ 。再证明

$$\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{D}_{A^n}$$

在 C_0 中稠密。

2°) 若 X 的路径连续, 且 $f \in \mathcal{D}_{A^n}$, 证明

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-t)^k}{k!} A^k f(X_t) + (-1)^n \int_0^t \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} A^n f(X_u) du$$

对每个 v 都是 $(\mathcal{F}_t^0, P_v)$ -鞅。本问不依赖于第 1 问; 此外, 之所以要求路径连续, 只是受本书讨论范围的限制。

2 扩散过程与 Itô 过程

上一节曾以启发式方式指出, 某些 Markov 过程应当是“随机微分方程”的解。现在我们将这一想法严格而系统地表述出来: 这既为第 IX 章的讨论作准备, 也在无穷小生成元理论与随机分析之间建立起桥梁。

下文以 a 和 b 分别表示 $\mathbb{R}^d$ 上的矩阵场与向量场, 并假设:

- i) 映射 $x \mapsto a(x)$ 与 $x \mapsto b(x)$ 都是 Borel 可测且局部有界的;
- ii) 对每个 x , 矩阵 $a(x)$ 对称且非负定, 即对任意 $\lambda \in \mathbb{R}^d$,

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \geq 0.$$

与这样的一对 (a, b) 相联系的二阶微分算子为

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\cdot) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(\cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

第 1 节已经提到, 某些 Markov 过程的无穷小生成元是这类算子的扩张。反过来, 给定这样的算子 L , 能否找到一个 Markov 过程, 使其生成元在 C_K^2 上与 L 一致, 是一个重要问题。

定义 2.1. 设

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), (X_t), (P_x))$$

是状态空间为 $\mathbb{R}^d$ 的 Markov 过程。若:

- i) X 的路径连续;
- ii) 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, $f \in C_K^\infty$ 以及 $t \geq 0$,

$$E_x[f(X_t)] = f(x) + E_x \left[\int_0^t Lf(X_s) ds \right],$$

则称 X 是生成元为 L 的扩散过程。还称 a 是 X 的协方差系数或扩散系数, b 是其漂移系数。

这些名称的合理性来自第 1 节的讨论。需要强调的是, 这里所说的路径连续包括

$$\zeta = \infty \quad P_x\text{-几乎处处}$$

这一要求。于是, 若 (K_n) 是递增的紧集序列, 满足

$$K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}, \quad \bigcup_n K_n = \mathbb{R}^d,$$

并令

$$\sigma_n = T_{K_n^c},$$

则 $\sigma_n \uparrow \infty$ 。矩阵 a 必须非负定这一点，也可由定理 1.13 与练习 1.19 看出；练习 2.8 还会给出一个直接说明。

还可以允许 a, b 依赖于时间 s 。此时对每个 s ，相应的二阶微分算子为

$$L_s = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(s, \cdot) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(s, \cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

这就需把扩散过程的概念推广为非齐次扩散过程。此时， $P_{s,x}$ 表示在时刻 s 从 x 出发的过程的概率律，并要求对 $f \in C_K^\infty$ 与 $s < t$ ，

$$E_{s,x}[f(X_t)] = f(x) + E_{s,x} \left[\int_s^t L_u f(X_u) \, du \right].$$

下文主要处理齐次扩散过程。对 $f \in C^2$ ，记

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) \, ds.$$

过程 M^f 连续，而且局部有界：由对 a, b 的假设，它在每个 $[0, \sigma_n \wedge n]$ 上有界。若 $f \in C_K^\infty$ ，则 M^f 在每个有限区间 $[0, t]$ 上有界，定义 2.1 的积分也都有有限。

命题 2.2。 定义 2.1 的条件 ii) 分别等价于下列两个条件：

- iii) 对任意 $f \in C_K^\infty$ ， M^f 在每个 P_x 下都是鞅；
- iv) 对任意 $f \in C^2$ ， M^f 在每个 P_x 下都是局部鞅。

证明。 若 iii) 成立，则因 $M_0^f = 0$ ，

$$P_t f(x) - f(x) - E_x \left[\int_0^t Lf(X_s) \, ds \right] = E_x[M_t^f] = 0,$$

故 ii) 成立。

反过来，若 ii) 成立，则对任意初始点和任意时长， M^f 的期望均为零。由 Markov 性质，

$$\begin{aligned} E_x[M_t^f | \mathcal{F}_s] &= M_s^f + E_x \left[f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t Lf(X_u) \, du \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= M_s^f + E_{X_s}[M_{t-s}^f] = M_s^f. \end{aligned}$$

因此 ii) 推出 iii)。

若对每个 t ，局部鞅 M^f 在 $[0, t]$ 上有界，则它是鞅，所以 iv) 推出 iii)。

最后证明 iii) 推出 iv)。先设 $f \in C_K^2$ 。可以选取一个紧集 H 和一系列在 H^c 上为零的函数 $(f_p) \subset C_K^\infty$ ，使 f_p 、其一阶导数和二阶导数都在 H 上一致收敛到 f 及相应导数。对每个 t ， $M^{f_p} - M^f$ 在 $[0, t]$ 上的绝对值由某个 $c_p \downarrow 0$ 控制。由

$$\begin{aligned} |E_x[M_t^f | \mathcal{F}_s] - M_s^f| &\leq |E_x[M_t^f | \mathcal{F}_s] - E_x[M_t^{f_p} | \mathcal{F}_s]| \\ &\quad + |M_s^{f_p} - M_s^f| \end{aligned}$$

右端令 $p \rightarrow \infty$ ，可知 M^f 是鞅。

现在取任意 $f \in C^2$ 。可选 $(g_n) \subset C_K^2$ ，使 $g_n = f$ 于 K_n 。于是 M^f 与 M^{g_n} 在时刻 σ_n 以前相同，而刚才已经证明 M^{g_n} 是鞅。由于 $\sigma_n \uparrow \infty$ ， M^f 是局部鞅。

注。

1°) 局部鞅 M^f 对未完备化的 σ -域

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s : s \leq t)$$

以及 $(\mathcal{F}_t^0)$ 的通常增广而言, 都是局部鞅。

2°) 命题 2.2 表明, 每个 C_b^2 函数都属于 X 的扩展无穷小生成元的定义域。若 X 是 Feller 过程, 仿照命题 1.7 的论证可得

$$C_K^2 \subset \mathcal{D}_A, \quad A = L \quad \text{于 } C_K^2.$$

同理, 若 $Lf = 0$, 则 $f(X_t)$ 是局部鞅; 这是第 IV 章命题 3.4 对布朗运动所得结论的推广。取 $f(x) = x$ 还可看出, X 是局部鞅, 当且仅当 L 不含一阶项。

考虑扩散过程的典范实现: 概率空间取为

$$W = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d),$$

X 是坐标过程。上述结论引出下面的概念。

定义 2.3. 称 W 上的概率测度 P 是鞅问题 $\pi(x, a, b)$ 的一个解, 如果:

- i) $P[X_0 = x] = 1$;
- ii) 对任意 $f \in C_K^\infty$, 过程

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) \, ds$$

相对于滤过

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s : s \leq t)$$

是 P -鞅。

这里的思路是: 若 $(\Omega, (X_t), (P_x))$ 是生成元为 L 的扩散过程, 则 $X(P_x)$ 是鞅问题 $\pi(x, a, b)$ 的解。因此, 若要构造生成元为 L 的扩散过程, 可先对每个 x 求解相应鞅问题, 再研究这些解能否彼此协调, 使典范过程成为生成元为 L 的扩散过程。第 IX 章将讨论这个问题。

目前先把命题 2.2 的条件改写成另一组等价条件, 并略微推广到可覆盖非齐次扩散过程的情形。设 a, b 是逐次可测且局部有界的过程, 分别取值于非负定对称 $d \times d$ 矩阵和 d 维向量。对 $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, 令

$$L_s(\omega)f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(s, \omega) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_i b_i(s, \omega) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

命题 2.4. 设 X 是连续、适应的 $\mathbb{R}^d$ 值过程。下列三个条件等价:

- i) 对任意 $f \in C^2$, 过程

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t L_s f(X_s) \, ds$$

是局部鞅;

ii) 对任意 $\theta \in \mathbb{R}^d$, 过程

$$M_t^\theta = \left\langle \theta, X_t - X_0 - \int_0^t b(s) \, ds \right\rangle$$

是局部鞅, 并且

$$\langle M^\theta, M^\theta \rangle_t = \int_0^t \langle \theta, a(s)\theta \rangle \, ds;$$

iii) 对任意 $\theta \in \mathbb{R}^d$, 过程

$$\mathcal{E}_t^\theta = \exp \left(\left\langle \theta, X_t - X_0 - \int_0^t b(s) \, ds \right\rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \langle \theta, a(s)\theta \rangle \, ds \right)$$

是局部鞅。

证明。 *i)* 推出 *ii)*。取 $f(x) = \langle \theta, x \rangle$, 得到 $M^f = M^\theta$, 因而 M^θ 是局部鞅。再在 *i)* 中取 $f(x) = \langle \theta, x \rangle^2$, 可知

$$\begin{aligned} H_t^\theta &= \langle \theta, X_t \rangle^2 - \langle \theta, X_0 \rangle^2 \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle \theta, X_s \rangle \langle \theta, b(s) \rangle \, ds - \int_0^t \langle \theta, a(s)\theta \rangle \, ds \end{aligned}$$

是局部鞅。

若 $Y - Z$ 是局部鞅, 简记 $Y \sim Z$ 。令

$$Q_t = \int_0^t \langle \theta, a(s)\theta \rangle \, ds, \quad A_t = \left\langle \theta, \int_0^t b(s) \, ds \right\rangle.$$

由于 $2\langle \theta, X_0 \rangle M_t^\theta$ 是局部鞅,

$$(M_t^\theta)^2 - Q_t \sim (M_t^\theta + \langle \theta, X_0 \rangle)^2 - Q_t.$$

再减去局部鞅 H^θ , 得到

$$\begin{aligned} (M_t^\theta)^2 - Q_t &\sim (M_t^\theta + \langle \theta, X_0 \rangle)^2 - \langle \theta, X_0 \rangle^2 - Q_t - H_t^\theta \\ &= (\langle \theta, X_t \rangle - A_t)^2 - \langle \theta, X_t \rangle^2 + 2 \int_0^t \langle \theta, X_s \rangle \, dA_s \\ &= -2\langle \theta, X_t \rangle A_t + A_t^2 + 2 \int_0^t \langle \theta, X_s \rangle \, dA_s. \end{aligned}$$

因为

$$\langle \theta, X_t \rangle = M_t^\theta + \langle \theta, X_0 \rangle + A_t$$

是半鞅, 分部积分公式给出

$$(M_t^\theta)^2 - Q_t \sim A_t^2 - 2 \int_0^t A_s \, dA_s = 0.$$

这正说明 $\langle M^\theta, M^\theta \rangle_t = Q_t$ 。

ii) 推出 *iii)*。由第 IV 章命题 3.4,

$$\mathcal{E}_t^\theta = \mathcal{E}(M^\theta)_t,$$

故结论立即成立。

iii) 推出 i)。先取

$$f(y) = \exp(\langle \theta, y \rangle).$$

过程

$$V_t = \exp \left[\left\langle \theta, \int_0^t b(s) \, ds \right\rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \langle \theta, a(s) \theta \rangle \, ds \right]$$

具有有限变差。分部积分表明

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t^\theta V_t - \int_0^t \mathcal{E}_s^\theta \, dV_s &= \exp(\langle \theta, X_t - X_0 \rangle) \\ &\quad - \int_0^t \exp(\langle \theta, X_s - X_0 \rangle) \left(\langle \theta, b(s) \rangle + \frac{1}{2} \langle \theta, a(s) \theta \rangle \right) \, ds \end{aligned}$$

是局部鞅。另一方面,

$$L_s f(x) = \exp(\langle \theta, x \rangle) \left(\langle \theta, b(s) \rangle + \frac{1}{2} \langle \theta, a(s) \theta \rangle \right).$$

^a 因此

$$\frac{1}{f(X_0)} \left(f(X_t) - \int_0^t L_s f(X_s) \, ds \right)$$

是局部鞅。局部鞅类在乘以或加上 $\mathcal{F}_0$ -可测随机变量后仍保持不变, 所以 M^f 是局部鞅。

最后, 指数函数的线性组合在 C^2 中稠密; 这里采用的拓扑是: 函数及其一、二阶导数都在紧集上一致收敛。用局部化和上述逼近, 即可把结论推广到任意 $f \in C^2$ 。

^a校订注: 原书在这一行把 $L_s f(x)$ 右端的 $\exp(\langle \theta, x \rangle)$ 误印成 $\exp(\langle \theta, X_s \rangle)$; 左端是关于变量 x 的函数, 故应作上述修正。

注。

1°) 结合命题 2.2, 令 $a = I_d$ 、 $b = 0$, 可见上面 ii) 推出 i) 的结论推广了 P. Lévy 的刻画定理 (第 IV 章定理 3.6)。

2°) 练习 2.11 还给出了另一个等价条件。

定义 2.5. 满足命题 2.4 中等价条件的过程 X , 称为协方差系数 (或扩散系数) 为 a 、漂移系数为 b 的 Itô 过程。

显然, Itô 过程以及扩散过程都是连续半鞅。下面说明, 它们恰好是某些“随机微分方程”的解; 第 IX 章将正式引入并研究这些方程。

先约定记号。若

$$X = (X^1, \dots, X^d)$$

是向量半鞅, $K = (K_{ij})$ 是取值于 $r \times d$ 矩阵的过程, 且每个 K_{ij} 都逐次可测并局部有界, 则以

$$K \cdot X \quad \text{或} \quad \int_0^t K_s \, dX_s$$

表示 r 维过程, 其第 i 个分量为

$$\sum_j \int_0^t K_{ij}(s) \, dX^j(s).$$

命题 2.6. 设 β 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 上的 $(\mathcal{F}_t)$ - r 维布朗运动; σ 与 b 是局部有界可预测过程, 分别取值于 $d \times r$ 矩阵和 $\mathbb{R}^d$. 若适应连续过程 X 满足

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s) d\beta_s + \int_0^t b(s) ds, \quad (*)$$

则 X 是协方差系数为 $\sigma\sigma^\top$ 、漂移系数为 b 的 Itô 过程。

特别地, 若对定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的两个场 σ, b , 有

$$\sigma(s) = \sigma(X_s), \quad b(s) = b(X_s),$$

且 $X_0 = x$ 几乎处处, 则 $X(P)$ 是鞅问题

$$\pi(x, \sigma\sigma^\top, b)$$

的解。

证明. 直接应用 Itô 公式, 即知命题 2.4 的条件 i) 成立。

现在反过来考虑: 给定一个 Itô 过程 X , 特别是一个扩散过程, 是否存在布朗运动 β , 使 X 对适当的 σ, b 满足 (*)? 困难在于, 承载 X 的概率空间可能过小, 甚至无法容纳一个布朗运动; 例如 X 是实直线上的平移时就是如此。所以, 除非对协方差 a 作非退化假设, 否则必须扩充概率空间。

定理 2.7. 若 X 是协方差系数为 a 、漂移系数为 b 的 Itô 过程, 则在原概率空间的某个扩充上, 存在可预测过程 σ 和布朗运动 B , 使

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s) dB_s + \int_0^t b(s) ds.$$

证明. 由命题 2.4 的 ii), 连续向量局部鞅

$$M_t = X_t - X_0 - \int_0^t b(s) ds$$

满足

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \int_0^t a_{ij}(s) ds.$$

结论立即由第 V 章命题 3.8 得出。

注. 由第 V 章命题 3.8 后的注可知, 若 a 在 $dP \otimes dt$ -几乎处处意义下正定, 则可选择 σ, B 使

$$a = \sigma\sigma^\top.$$

特别地, 若

$$a(s) = c(X_s),$$

其中 c 是 $\mathbb{R}^d$ 上对称正定矩阵组成的可测场, 则可选取可测矩阵场 γ , 使

$$\gamma\gamma^\top = c,$$

并取 $\sigma(s) = \gamma(X_s)$ 。

练习 2.8。

1°) 在命题 2.2 的情形, 对 $f, g \in C^2$, 证明

$$\begin{aligned}\langle M^f, M^g \rangle_t &= \int_0^t (L(fg) - fLg - gLf)(X_s) \, ds \\ &= \int_0^t \langle \nabla f, a \nabla g \rangle(X_s) \, ds.\end{aligned}$$

本题将在第 VIII 章第 3 节解出。

2°) 由第 1 问推出: 矩阵 $a(x)$ 必须非负定。

练习 2.9。 在命题 2.2 的情形, 证明: 若 f 是严格正的 C^2 函数, 则

$$\frac{f(X_t)}{f(X_0)} \exp\left(-\int_0^t \frac{Lf}{f}(X_s) \, ds\right)$$

对每个 x 都是 P_x -局部鞅。

练习 2.10。 设 X 是从 0 出发、协方差系数为 a 、漂移为 0 的 d 维 Itô 过程。证明: 对 $2 \leq p < \infty$, 存在只依赖于 p, d 的常数 C , 使

$$E\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^p\right] \leq CE\left[\left(\int_0^t \text{Tr } a(s) \, ds\right)^{p/2}\right].$$

练习 2.11。 证明命题 2.4 的各条件还等价于:

iv) 对定义在 $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ 上、关于第一个变量一次可微且关于第二个变量二次可微的任意函数 f , 过程

$$f(t, X_t) - \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + L_s(f(s, \cdot))(X_s) \right] \, ds$$

是局部鞅。与练习 1.24 比较。

练习 2.12。 在命题 2.4 的情形, 假设 a, b 不依赖于 ω 。设 v 是 $[0, t) \times \mathbb{R}^d$ 上充分光滑的函数, 并满足后向方程

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s, x) + L_s(v(s, \cdot))(x) + g(s, x) = 0.$$

证明

$$v(s, X_s) + \int_0^s g(r, X_r) \, dr$$

在 $[0, t)$ 上是局部鞅。

特别地, 若 $L_s \equiv L$ 与时间无关, 且 u 满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + g \quad \text{于 } (0, \infty) \times \mathbb{R}^d,$$

则取 $v(s, x) = u(t - s, x)$, 可得

$$u(t - s, X_s) + \int_0^s g(t - r, X_r) \, dr$$

在 $[0, t)$ 上是局部鞅。^a

^a**校订注:** 原书只假设 a, b 不依赖于 ω , 允许 L_s 随时间变化, 却把方程写成 $\partial_t u = L_t u + g$, 并断言最后一个时间反向过程是局部鞅。直接应用 Itô 公式可见, 此时会同时出现 L_s 与 L_{t-s} , 一般不能抵消。上面先给出正确的一般后向方程, 再列出原式成立的齐次特例。

3 一维连续马尔可夫过程

除一维布朗运动本身以外, 我们在前文还遇到过许多定义在 $\mathbb{R}$ 的子集上、路径连续的 Markov 过程, 例如 BES³ 与反射布朗运动。Bessel 过程将在第 XI 章专门研究; 本节先系统讨论一维连续 Markov 过程, 并计算相应的生成元。

设 X 是 Markov 过程, 其状态空间 E 是 $\mathbb{R}$ 中一个以 l, r 为端点的区间; 这个区间可以开、闭或半开, 也可以有界或无界。过程的死亡时刻仍记为 ζ 。本节始终假设:

- i) X 的路径在 $[0, \zeta)$ 上连续;
- ii) X 具有强 Markov 性质;
- iii) 若 $P_x(\zeta < \infty) > 0$, 则端点 l, r 中至少有一个不属于 E , 并且在 $\{\zeta < \infty\}$ 上,

$$\lim_{t \uparrow \zeta} X_t \notin E \quad \text{几乎处处.}$$

也就是说, X 只能在不属于 E 的端点处被“杀死”。

由路径连续性, 从 x 出发的过程若要到达 y , 必先经过 x, y 之间的所有点。单点集 $\{x\}$ 的首达时刻记为

$$T_x = \inf\{t > 0 : X_t = x\},$$

并仍约定 $\inf \emptyset = \infty$ 。显然, 在 $\{T_x < \infty\}$ 上有 $X_{T_x} = x$ 。

我们还作一个假设: 过程 X 是正则的, 即对任意

$$x \in \mathring{E} = (l, r), \quad y \in E,$$

都有

$$P_x(T_y < \infty) > 0.$$

这表示不能把 E 分解成更小的、过程一旦进入便无法离开的集合 (参见练习 3.22)。以下均在上述假设下讨论。

对任意开区间 $I = (a, b)$, 若 $[a, b] \subset E$, 以 σ_I 表示离开 I 的时刻。若 $x \in I$, 则

$$\sigma_I = T_a \wedge T_b \quad P_x\text{-几乎处处};$$

若 $x \notin I$, 则 $\sigma_I = 0$, P_x -几乎处处。另记

$$m_I(x) = E_x[\sigma_I].$$

命题 3.1. 若 I 有界, 则函数 m_I 在 I 上有界。特别地, σ_I 几乎处处有限。

证明。 固定 $y \in I$ 。由 X 的正则性, 可选 $t > 0$ 与 $\alpha < 1$, 使

$$\max(P_y(T_a > t), P_y(T_b > t)) = \alpha.$$

若 $y < x < b$, 则

$$P_x(\sigma_I > t) \leq P_x(T_b > t) \leq P_y(T_b > t) \leq \alpha.$$

对 $a < x < y$ 作同样论证, 得到

$$\sup_{x \in I} P_x(\sigma_I > t) \leq \alpha < 1.$$

在 $\{\sigma_I > u\}$ 上,

$$\sigma_I = u + \sigma_I \circ \theta_u.$$

因此

$$P_x(\sigma_I > nt) = P_x(\{\sigma_I > (n-1)t\} \cap \{(n-1)t + \sigma_I \circ \theta_{(n-1)t} > nt\}).$$

由 Markov 性质,

$$P_x(\sigma_I > nt) = E_x \left[\mathbf{1}_{\{\sigma_I > (n-1)t\}} P_{X_{(n-1)t}}(\sigma_I > t) \right].$$

在 $\{\sigma_I > (n-1)t\}$ 上, $X_{(n-1)t} \in I$, 故

$$P_x(\sigma_I > nt) \leq \alpha P_x(\sigma_I > (n-1)t).$$

归纳可得, 对每个 $x \in I$,

$$P_x(\sigma_I > nt) \leq \alpha^n.$$

于是

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I} E_x[\sigma_I] &\leq \sup_{x \in I} \sum_{n=0}^{\infty} t P_x(\sigma_I > nt) \\ &\leq t(1 - \alpha)^{-1}, \end{aligned}$$

即得结论。

若 $a, b \in E$ 且

$$l \leq a < x < b \leq r,$$

则 $P_x(T_b < T_a)$ 是从 x 出发的过程由右端离开 (a, b) 的概率。由命题 3.1,

$$P_x(T_a < T_b) + P_x(T_b < T_a) = 1.$$

命题 3.2。 在 E 上存在连续严格递增函数 s , 使对任意

$$l \leq a < x < b \leq r, \quad a, b, x \in E,$$

都有

$$P_x(T_b < T_a) = \frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)}.$$

若 $\tilde{s}$ 是另一个具有同样性质的函数, 则

$$\tilde{s} = \alpha s + \beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

证明。 先设 $E = [l, r]$ 是有界闭区间。事件 $\{T_r < T_l\}$ 是下列两个事件的不交并：

$$\{T_r < T_l, T_a < T_b\} \dot{\cup} \{T_r < T_l, T_b < T_a\}.$$

在 $\{T_a < T_b\}$ 上，

$$T_l = T_a + T_l \circ \theta_{T_a}, \quad T_r = T_a + T_r \circ \theta_{T_a}.$$

所以

$$P_x(T_r < T_l, T_a < T_b) = E_x[\mathbf{1}_{\{T_a < T_b\}} \mathbf{1}_{\{T_r < T_l\}} \circ \theta_{T_a}].$$

由于 $\{T_a < T_b\} \in \mathcal{F}_{T_a}$ ，强 Markov 性质给出

$$\begin{aligned} P_x(T_r < T_l, T_a < T_b) &= E_x[\mathbf{1}_{\{T_a < T_b\}} P_{X_{T_a}}(T_r < T_l)] \\ &= P_x(T_a < T_b) P_a(T_r < T_l). \end{aligned}$$

对另一事件同理，故

$$\begin{aligned} P_x(T_r < T_l) &= P_x(T_a < T_b) P_a(T_r < T_l) \\ &\quad + P_x(T_b < T_a) P_b(T_r < T_l). \end{aligned}$$

令

$$s(x) = P_x(T_r < T_l),$$

解出 $P_x(T_b < T_a)$ ，便得到命题中的公式。

为证明 s 严格递增，若存在 $x < y$ 使 $s(x) = s(y)$ ，则对任意 $b > y$ ，刚才的公式给出

$$P_y(T_b < T_x) = 0,$$

这与正则性矛盾。

现在令 E 是任意区间。若

$$l_2 < l_1 < r_1 < r_2$$

是 E 中四点，则可分别在 $[l_1, r_1]$ 与 $[l_2, r_2]$ 上应用上述论证；所得函数在 (l_1, r_1) 上只相差一个斜率为正的仿射变换。因此可以把这些局部函数拼接成一个函数 s ，并使命题中的等式对 E 中任意三点成立。

只需再证连续性。设 $a < x$ ，且 $a_n < x$ 、 $a_n \downarrow a$ 。则

$$T_{a_n} \uparrow T_a \quad P_x\text{-几乎处处}.$$

事实上，由路径连续性，

$$X_{\lim_n T_{a_n}} = a \quad P_x\text{-几乎处处},$$

所以 $\lim_n T_{a_n} \geq T_a$ ，反向不等式显然。又因 $P_x(T_a = T_b) = 0$ ，

$$\{T_a < T_b\} = \lim_n \{T_{a_n} < T_b\} \quad P_x\text{-几乎处处}.$$

因此 s 在 a 处右连续；左连续可完全类似地证明。最后，同一个首达概率公式也说明任何另一个这样的函数都只能是 $\alpha s + \beta$ ，其中 $\alpha > 0$ 。

定义 3.3。 命题 3.2 中的函数 s 称为 X 的尺度函数。

尽管尺度函数只在斜率为正的仿射变换意义下确定，我们仍简称“尺度函数”。若可取 $s(x) = x$ ，

则称过程处于自然尺度。练习 3.15 表明，处于自然尺度的过程向左、向右运动的倾向相同。一维布朗运动、反射布朗运动与吸收布朗运动都处于自然尺度；这已在第 II 章命题 3.8 中证明。对状态空间作一个简单变换，总能把 X 化成自然尺度上的过程。

命题 3.4. 过程

$$\tilde{X}_t = s(X_t)$$

满足本节的全部假设，并且处于自然尺度。

证明。 由定义直接得到。

第 VI 章还计算过 BES^3 的尺度函数。由于从其他点出发不会到达 0，为处在本节的框架内，应把 BES^3 看成只定义在 $(0, \infty)$ 上；按定义 3.9，0 是一个入口边界。在这一设定下，第 VI 章已经证明

$$s(x) = -\frac{1}{x}$$

(另见练习 3.20，以及第 XI 章对其他 Bessel 过程的推广)。当时的证明用到了命题 3.4 中的 $\tilde{X}$ 是局部鞅；下面把这一点推广到一般情形。

记

$$R = \zeta \wedge T_l \wedge T_r.$$

若 $P_x(\zeta < \infty) > 0$ ，并且例如

$$\lim_{t \uparrow \zeta} X_t = l,$$

则 $\lim_{x \rightarrow l} s(x)$ 有限；以后把这一极限记为 $s(l)$ ，并在这种情形约定 $s(X_\zeta) = s(l)$ 。

命题 3.5. 局部有界 Borel 函数 f 是尺度函数，当且仅当停住过程

$$(f(X_t))^R = f(X_{t \wedge R})$$

是局部鞅。特别地， X 处于自然尺度，当且仅当 X^R 是局部鞅。

证明。 若 $(f(X_t))^R$ 是局部鞅，则对 $a < x < b$ ，过程

$$(f(X_t))^{T_a \wedge T_b}$$

是有界的 $(\mathcal{F}_t, P_x)$ -鞅。由可选停止定理，

$$f(x) = f(a)P_x(T_a < T_b) + f(b)P_x(T_b < T_a).$$

另一方面，

$$1 = P_x(T_a < T_b) + P_x(T_b < T_a).$$

解这个关于首达概率的线性方程组，即知 f 是尺度函数。

反过来，若 f 是尺度函数，则由命题 3.2 证明中的论证， f 连续。取 $[a, b] \subset \mathring{E}$ 和 $\varepsilon > 0$ 。可选一个有限递增序列

$$A = (a_k)_{k=0, \dots, K}, \quad a_0 = a, \quad a_K = b,$$

使对每个 $k \leq K-1$,

$$|f(a_{k+1}) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

记

$$S = T_a \wedge T_b.$$

定义停止时刻

$$T_0 = 0, \quad T_1 = T_A,$$

以及

$$T_n = \inf\{t > T_{n-1} : X_t \in A \setminus \{X_{T_{n-1}}\}\} \wedge S.$$

显然 $T_n \uparrow S$ 。尺度函数的首达概率公式与强 Markov 性质表明, 对 $x \in (a, b)$,

$$\begin{aligned} E_x[f(X_{T_n}^S) | \mathcal{F}_{T_{n-1}}] &= E_{X_{T_{n-1}}}[f(X_{T_1}^S)] \\ &= f(X_{T_{n-1}}^S) \quad P_x\text{-几乎处处}. \end{aligned}$$

因此

$$(f(X_{T_n}^S), \mathcal{F}_{T_n})$$

是有界 P_x -鞅。

对 $t > 0$, 令

$$N = \inf\{n \geq 1 : T_n \geq t\},$$

并仍约定 $\inf \emptyset = \infty$ 。 N 是相对于 $(\mathcal{F}_{T_n})$ 的停止时刻, 可选停止定理给出

$$f(x) = E_x[f(X_{T_N}^S)].$$

在 $\{t < S\}$ 上, $N < \infty$ 且

$$T_{N-1} < t \leq T_N \leq S.$$

由 A 的选取,

$$E_x[|f(X_t^S) - f(X_{T_N}^S)|] \leq \varepsilon.$$

因 ε 任意,

$$f(x) = E_x[f(X_t^S)].$$

再用一次 Markov 性质可知 $f(X_t^S)$ 是鞅。让区间 $[a, b]$ 递增耗尽 E , 便得到 $(f(X_t))^R$ 是局部鞅。

注。 由此已经证明: 在斜率为正的仿射变换意义下, 至多存在一个局部有界 Borel 函数 f , 使 $f(X_t)$ 是局部鞅。第 II 章练习 3.13 对布朗运动陈述过这一事实。若 $R = \infty$, 则 s 属于扩展无穷小生成元 A 的定义域, 并且

$$As = 0;$$

这与下面的定理 3.12 完全一致。

下面引入另一个概念, 它描述 X 沿自身路径运行的快慢。第 X 章将说明, 怎样对布朗运动作保持 Markov 性质的时间变换; 这样得到的过程处于自然尺度, 反命题也成立。因此, 命题 3.4 的尺度变换把原过程化成时间变换后的布朗运动, 而把它进一步化成布朗运动所需的时间变换, 则可由即将定义的速度测度求出。第 X 章第 2 节会重新讨论这些问题。

设

$$J = (c, d)$$

是 $I = (a, b)$ 的开子区间。由强 Markov 性质与尺度函数的定义, 当 $a < c < x < d < b$ 时,

$$\begin{aligned} m_I(x) &= E_x[\sigma_J + \sigma_I \circ \theta_{\sigma_J}] \\ &= m_J(x) + \frac{s(d) - s(x)}{s(d) - s(c)} m_I(c) + \frac{s(x) - s(c)}{s(d) - s(c)} m_I(d). \end{aligned} \quad (*)$$

因为 $m_J(x) > 0$, 函数 m_I 是 s -凹函数。参照附录第 3 节与第 VI 章练习 2.8, 对满足 $[a, b] \subset \mathring{E}$ 的 $I = (a, b)$, 定义

$$G_I(x, y) = \begin{cases} \frac{(s(x) - s(a))(s(b) - s(y))}{s(b) - s(a)}, & a \leq x \leq y \leq b, \\ \frac{(s(y) - s(a))(s(b) - s(x))}{s(b) - s(a)}, & a \leq y \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

定理 3.6. 在 E 的内部 $\mathring{E}$ 上存在唯一的 Radon 测度 m , 使对任意满足 $[a, b] \subset \mathring{E}$ 的开区间 $I = (a, b)$ 以及任意 $x \in I$,

$$m_I(x) = \int_I G_I(x, y) m(dy).$$

证明. 由附录第 3 节, 对每个 I , 存在 I 上的测度 ν_I , 使

$$m_I(x) = \int_I G_I(x, y) \nu_I(dy).$$

所以只需证明: 若 $J \subset I$ 如 (*) 所示, 则 ν_J 等于 ν_I 在 J 上的限制。事实上, 对 (*) 取 s -导数, 可见 m_I 与 m_J 的导数只相差一个常数, 因而与这些导数相联系的测度相同。于是各个局部测度能够唯一地拼成所需的 Radon 测度 m 。

定义 3.7. 测度 m 称为过程 X 的速度测度。

例如, 利用第 II 章练习 3.11 或第 VI 章练习 2.8 的结果, 很容易验证: 若布朗运动的尺度函数取为 $s(x) = x$, 则其速度测度是 Lebesgue 测度的两倍。还应注意, E 的每个非空开子区间都有严格正的 m -测度。

定理 3.12 将表明, 尺度函数与速度测度共同决定无穷小生成元。与此几乎等价的是: 它们决定 X 离开一个区间时被杀死之前的势算子。

推论 3.8. 对任意 $I = (a, b)$ 、 $x \in I$ 与非负 Borel 函数 f ,

$$E_x \left[\int_0^{T_a \wedge T_b} f(X_s) ds \right] = \int_I G_I(x, y) f(y) m(dy).$$

证明. 取 $a < c < b$, 令

$$v(x) = E_x \left[\int_0^{T_a \wedge T_b} \mathbf{1}_{(c, b)}(X_u) du \right].$$

函数 v 在 (a, b) 上是 s -凹的, 且 $v(a) = v(b) = 0$ 。因此

$$v(x) = - \int_I G_I(x, y) v''(\mathrm{d}y),$$

其中 v'' 是与 v 的 s -导数相联系的测度 (参见附录第 3 节)。

另一方面, 由 Markov 性质,

$$v(x) = E_x[T_c \wedge T_b] + \frac{s(b) - s(x)}{s(b) - s(c)} v(c), \quad x \in (c, b),$$

而

$$v(x) = \frac{s(x) - s(a)}{s(c) - s(a)} v(c), \quad x \in (a, c).$$

函数

$$x \mapsto E_x[T_c \wedge T_b]$$

等于

$$\int G_{(c,b)}(x, y) m(\mathrm{d}y),$$

故与其二阶 s -导数相联系的测度为 $-\mathbf{1}_{(c,b)}m$ 。其余各项的 s -导数为常数, 相联系的测度为零。因此

$$v(x) = \int_I G_I(x, y) \mathbf{1}_{(c,b)}(y) m(\mathrm{d}y).$$

这就证明了 $f = \mathbf{1}_{(c,b)}$ 的情形。再用单调类定理与通常的推广步骤, 即得一般结论。

以下专门研究本书最需要的情形:

$$E = (0, \infty) \quad \text{或} \quad E = [0, \infty),$$

并考察过程在边界点 0 的行为。其他情形, 特别是紧区间的情形, 可以类似处理。若 $0 \notin E$ 且 $\zeta = \infty$ 几乎处处, 作如下分类。

定义 3.9. 设 $E = (0, \infty)$ 。若对所有 $t > 0, y > 0$,

$$\lim_{x \downarrow 0} P_x(T_y < t) = 0,$$

则称 0 是自然边界。若存在 $t > 0, y > 0$, 使

$$\lim_{x \downarrow 0} P_x(T_y < t) > 0,$$

则称 0 是入口边界。

第 VI 章第 3 节的 BES^3 给出了入口边界的例子; 更一般地, 可参阅第 XI 章中维数不小于 2 的 Bessel 过程。定义 3.9 中的极限具有单调性; 对 BES^3 , 该极限等于从 0 出发的 BES^3 在时刻 t 前到达 y 的概率, 因而严格为正。“入口边界”这个名称很贴切: BES^3 可定义在 $[0, \infty)$ 上, 但从 0 离开以后不再返回 0。

现在用前面的结果计算 BES^3 的速度测度。它的尺度函数为 $-1/x$ 。在推论 3.8 中取极限可得:

对 $x > 0$,

$$\begin{aligned} Uf(x) &= E_x \left[\int_0^\infty f(X_s) \, ds \right] \\ &= \int_0^\infty u(x, y) f(y) m(dy), \end{aligned}$$

其中 m 是速度测度, 并且

$$u(x, y) = \min\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

为计算从 0 出发的 BES^3 的势核 $U(0, \cdot)$, 可令 $x \downarrow 0$ 。事实上, 若 f 在 $[0, \varepsilon]$ 上为零, 则强 Markov 性质给出

$$Uf(0) = Uf(\varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty y^{-1} f(y) m(dy).$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 可见相对于 m , $U(0, \cdot)$ 的密度为

$$y^{-1} \mathbf{1}_{\{y>0\}}.$$

另一方面, 从 0 出发的三维布朗运动的模是 $\text{BES}^3(0)$ 。利用三维布朗运动的势核 (第 III 章练习 2.29) 和球坐标,

$$\begin{aligned} Uf(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(|x|)}{|x|} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty \rho^{-1} f(\rho) \rho^2 \cos \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= 2 \int_0^\infty f(\rho) \rho \, d\rho. \end{aligned}$$

比较 $Uf(0)$ 的两个表达式, 得到 BES^3 的速度测度:

$$m(dy) = 2y^2 \mathbf{1}_{\{y>0\}} \, dy.$$

接下来考虑 $E = [0, \infty)$ 。此时 $s(0)$ 有限, 我们总把尺度函数归一化为

$$s(0) = 0.$$

正则性意味着过程以正概率访问 0; 另一方面, 正则性排除了 0 为吸收点的可能。由第 III 章命题 2.19 后的说明, 从 0 出发的过程立即离开 $\{0\}$ 。

目前速度测度只定义在 $(0, \infty)$ 上, 而定理 3.6 的公式给出从 $x \in (0, b)$ 出发时 $T_0 \wedge T_b$ 的均值。下面扩张 Green 函数, 并定义 $m(\{0\})$, 从而得到从 $x \in [0, b)$ 出发时 T_b 的均值。

先在 $\mathbb{R}$ 上定义

$$\tilde{s}(x) = \begin{cases} s(x), & x \geq 0, \\ -s(-x), & x < 0. \end{cases}$$

对 $J = [0, b)$, 以 $\tilde{G}_J$ 表示在区间 $(-b, b)$ 上用 $\tilde{s}$ 代替 s 所定义的 Green 函数。再对 $x, y \geq 0$ 定义

$$G_J(x, y) = \tilde{G}_J(x, y) + \tilde{G}_J(x, -y).$$

命题 3.10. 可以选取 $m(\{0\})$, 使对任意 $x \in J = [0, b)$ 与任意非负 Borel 函数 f ,

$$E_x \left[\int_0^{T_b} f(X_s) \, ds \right] = \int_J G_J(x, y) f(y) m(dy).$$

证明. 仿照反射布朗运动, 在 $\mathbb{R}$ 上定义一个过程 $\tilde{X}$, 使 X 是 $\tilde{X}$ 在 0 处反射后的过程。借助第 XII 章的游程理论, 特别是该章命题 2.5 的思想, 可以严格完成这一构造; 这里仅说明其半群。

对 $x \geq 0$ 与 $A \subset \mathbb{R}_+$, 令

$$\begin{aligned} \tilde{P}_t(x, A) &= E_x [\mathbf{1}_A(X_t) \mathbf{1}_{\{t \leq T_0\}}] \\ &\quad + \frac{1}{2} E_x [\mathbf{1}_A(X_t) \mathbf{1}_{\{t \geq T_0\}}], \end{aligned}$$

而对 $A \subset \mathbb{R}_-$, 令

$$\tilde{P}_t(x, A) = \frac{1}{2} E_x [\mathbf{1}_{\tilde{A}}(X_t) \mathbf{1}_{\{t \geq T_0\}}], \quad \tilde{A} = -A.$$

若 $x < 0$, 定义

$$\tilde{P}_t(x, A) = \tilde{P}_t(-x, \tilde{A}).$$

利用

$$T_0 = t + T_0 \circ \theta_t \quad \text{于 } \{T_0 > t\},$$

由 Markov 性质可验证这确实定义了转移半群。游程理论还能保证 $\tilde{X}$ 具有本节开头对 X 所要求的全部性质。 $\tilde{s}$ 是 $\tilde{X}$ 的尺度函数, 相应速度测度 $\tilde{m}$ 在 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, \infty)$ 上都与 m 的反射副本一致。

令 $\tilde{f}$ 为 f 的偶延拓:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ f(-x), & x < 0. \end{cases}$$

^a 对 $\tilde{X}$ 应用推论 3.8, 得到

$$\begin{aligned} E_x \left[\int_0^{T_b} f(X_s) \, ds \right] &= \tilde{E}_x \left[\int_0^{T_b \wedge T_{-b}} \tilde{f}(\tilde{X}_s) \, ds \right] \\ &= \int_{-b}^b \tilde{G}_J(x, y) \tilde{f}(y) \tilde{m}(dy) \\ &= \int_{(0, b)} G_J(x, y) f(y) m(dy) \\ &\quad + \frac{1}{2} G_J(x, 0) f(0) \tilde{m}(\{0\}). \end{aligned}$$

令

$$m(\{0\}) = \frac{1}{2} \tilde{m}(\{0\}),$$

即得结论。并且 $m(\{0\}) < \infty$ 。

^a**校订注:** 原书此处误印为 $\tilde{f}(x) = -f(-x)$, 即奇延拓。但下式要计算 $f(|\tilde{X}|)$, 且要把 y 与 $-y$ 两侧的 Green 函数相加, 因此必须使用偶延拓; 原印法会使两侧相减。

定义 3.11。 若 $m(\{0\}) > 0$, 称 0 是慢反射点; 若 $m(\{0\}) = 0$, 称 0 是瞬时反射点。

若正则性没有排除吸收点, 则对吸收点 0, 规定

$$m(\{0\}) = \infty$$

也是一致的。对反射布朗运动, 0 是瞬时反射点; 集合

$$\{t : X_t = 0\}$$

的 Lebesgue 测度为零, 这是瞬时反射点的典型性质。若 0 是慢反射点, 在命题 3.10 中取 $f = \mathbf{1}_{\{0\}}$, 可见上述集合具有正 Lebesgue 测度。第 X 章练习 2.29 将给出一个慢反射点的例子。

现在描述 X 的扩展无穷小生成元 A , 其定义域 (见第 1 节) 记为 $\mathcal{D}_A$ 。这里重新允许 E 是 $\mathbb{R}$ 的任意子区间。回忆: 函数 f 在 x 处的 s -导数, 是极限

$$\frac{df}{ds}(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{s(y) - s(x)}$$

(若此极限存在); 左、右 s -导数类似定义。

定理 3.12。 设 $f \in \mathcal{D}_A$ 有界, $x \in \mathring{E}$ 。则

$$Af(x) = \frac{d}{dm} \frac{d}{ds} f(x),$$

其含义如下:

i) 除了集合

$$\{x : m(\{x\}) > 0\}$$

中的点以外, s -导数 df/ds 处处存在;

ii) 若 $x_1 < x_2$ 是两个 s -导数存在的点, 则

$$\frac{df}{ds}(x_2) - \frac{df}{ds}(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} Af(y) m(dy).$$

证明。 若 $f \in \mathcal{D}_A$, 按定义,

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Af(X_s) ds$$

是鞅。又

$$|M_t^f| \leq 2\|f\| + t\|Af\|.$$

所以若停止时刻 T 满足 $E_x[T] < \infty$, 则 $(M_{t \wedge T}^f)_{t \geq 0}$ 在 P_x 下一致可积, 从而

$$E_x[f(X_T)] - f(x) = E_x \left[\int_0^T Af(X_s) ds \right].$$

取 $[a, b] \subset \mathring{E}$ 、 $a < x < b$, 并令 $T = T_a \wedge T_b$ 。由推论 3.8,

$$\begin{aligned} & f(a)(s(b) - s(x)) + f(b)(s(x) - s(a)) \\ & \quad - f(x)(s(b) - s(a)) \\ & = (s(b) - s(a)) \int_I G_I(x, y) Af(y) m(dy). \end{aligned} \tag{\#}$$

直接整理可写成

$$\frac{f(b) - f(x)}{s(b) - s(x)} - \frac{f(x) - f(a)}{s(x) - s(a)} = \int_I H_I(x, y) A f(y) m(dy),$$

其中

$$H_I(x, y) = \begin{cases} \frac{s(y) - s(a)}{s(x) - s(a)}, & a < y \leq x, \\ \frac{s(b) - s(y)}{s(b) - s(x)}, & x \leq y < b, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

令 $b \downarrow x$, 由支配收敛定理可知 f 的右 s -导数存在; 同理, 左 s -导数也存在。再令 $a \uparrow x$, $b \downarrow x$, 得到

$$\frac{df^+}{ds}(x) - \frac{df^-}{ds}(x) = m(\{x\}) A f(x).$$

^a 若 $m(\{x\}) = 0$, 左右导数相等, 这证明 i)。

为证 ii), 取 h 使 $a < x + h < b$ 。把 (#) 分别用于 x 与 $x + h$, 再相减, 得到

$$\begin{aligned} & f(b) - f(a) - (s(b) - s(a)) \frac{f(x+h) - f(x)}{s(x+h) - s(x)} \\ &= (s(b) - s(a)) \int_I \frac{G_I(x+h, y) - G_I(x, y)}{s(x+h) - s(x)} A f(y) m(dy). \end{aligned}$$

若 f 在 x 处有 s -导数, 令 $h \rightarrow 0$ 并再用一次支配收敛定理, 得到

$$\begin{aligned} & f(b) - f(a) - (s(b) - s(a)) \frac{df}{ds}(x) \\ &= - \int_a^x (s(y) - s(a)) A f(y) m(dy) \\ &\quad + \int_x^b (s(b) - s(y)) A f(y) m(dy) \\ &= - \int_a^b s(y) A f(y) m(dy) + s(a) \int_a^x A f(y) m(dy) \\ &\quad + s(b) \int_x^b A f(y) m(dy). \end{aligned}$$

对两个这样的点 $x_1 < x_2$ 分别写出此式并相减, 便得

$$\frac{df}{ds}(x_2) - \frac{df}{ds}(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} A f(y) m(dy).$$

^a校订注: 原书在这一跳量公式右端多印了因子 2。由上一行的核 $H_I(x, \cdot)$ 可见, $a \uparrow x, b \downarrow x$ 时它收敛到 $\mathbf{1}_{\{x\}}$, 原子只计数一次; 修正后的公式也与命题 3.13 的边界公式一致。

注。

1°) 若把 s 乘以正常数, 则由速度测度的定义, m 要除以同一个常数; 因此生成元保持不变, 这正是应有的结果。

2°) 对一维布朗运动,

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

利用上面求出的 s, m , 还可验证对 BES³,

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x};$$

这与第 VI 章第 3 节给出的 BES³ 随机微分方程一致。

3°) $s(X)^R$ 是局部鞅这一事实, 与生成元的上述形式以及命题 1.6 一致。

再考察 $E = [0, \infty)$ 时边界点的情形。正极大值原理表明, $\mathcal{D}_A$ 中函数的一阶导数必须满足某个边界条件。

命题 3.13. 若 $E = [0, \infty)$, 则对每个有界 $f \in \mathcal{D}_A$,

$$\frac{df^+}{ds}(0) = m(\{0\})Af(0).$$

证明。 在定理 3.12 的证明中, 用命题 3.10 代替推论 3.8, 完全相同的论证即可得到结论, 细节留给读者。

对反射布朗运动, 由连续性,

$$Af(0) = \frac{1}{2}f''(0), \quad f'(0) = 0.$$

这与正极大值原理相容: 若 $f'(0) < 0$, 则 f 可以在 0 处取得极大值, 同时满足 $f''(0) > 0$ 。还值得注意, 反射布朗运动与吸收布朗运动的无穷小生成元, 在

$$C_K^2((0, \infty))$$

上彼此一致 (见练习 3.16)。

可以预料, 映射

$$X \mapsto (s, m)$$

是一一映射; 换言之, (s, m) 刻画过程 X 。下面证明一个将在第 XI 章用到的特殊情形。

命题 3.14. 设 $X, \tilde{X}$ 是 $[0, \infty)$ 上的两个 Feller 过程。若

$$s = \tilde{s}, \quad m = \tilde{m},$$

则二者等价。

证明。 一方面使用命题 1.6、1.7, 另一方面使用定理 3.12 与命题 3.13, 可知两个过程的定义域相同, 生成元也相同。由练习 1.18, 它们的半群相同, 故两个过程等价。

练习 3.15. 证明 X 处于自然尺度, 当且仅当对任意 $a < b$, 令

$$x_0 = \frac{a+b}{2},$$

都有

$$P_{x_0}(T_a < T_b) = \frac{1}{2}.$$

练习 3.16。 证明反射布朗运动的无穷小生成元定义域恰为

$$\{f \in C_0^2([0, \infty)) : f'(0) = 0\}.$$

练习 3.17 (*; Dynkin 算子)。

1°) 对 $x \in \mathring{E}$ 与充分小的 $h > 0$, 令

$$I(h) = (x - h, x + h).$$

若 $f \in \mathcal{D}_A$, 证明

$$Af(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{E_x[f(X_{\sigma_{I(h)}})] - f(x)}{m_{I(h)}(x)}.$$

即使 $f \notin \mathcal{D}_A$, 右端极限也可能存在; 此时仍把这个极限记为 Af , 由此得到算子 A 的进一步扩张。

2°) 对满足 $[a, b] \subset \mathring{E}$ 的 $I = (a, b)$, 令

$$p_I(x) = P_x(T_b < T_a).$$

证明在 I 上

$$Ap_I = 0, \quad Am_I = -1.$$

练习 3.18。 设 ϕ 是区间 E 到区间 $\tilde{E}$ 的同胚, X 是 E 上满足本节假设的过程。则

$$\tilde{X} = \phi(X)$$

是 $\tilde{E}$ 上满足同样假设的过程。证明其尺度函数可取为

$$\tilde{s} = \begin{cases} s \circ \phi^{-1}, & \phi \text{ 严格递增,} \\ -s \circ \phi^{-1}, & \phi \text{ 严格递减,} \end{cases}$$

而 $\tilde{m}$ 是 m 在 ϕ 下的像测度:

$$\tilde{m} = \phi_{\#} m.$$

^a

^a**校订注:** 原书对任意同胚都写 $\tilde{s} = s \circ \phi^{-1}$, 遗漏了 ϕ 递减的情形。区间之间的同胚若递减, 则 $s \circ \phi^{-1}$ 也递减, 不能作为尺度函数; 乘以 -1 后才严格递增。

练习 3.19。 设 X 处于自然尺度, 且 $E = [0, \infty)$ 。证明对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\int_{(0, \varepsilon)} y m(dy) < \infty.$$

练习 3.20。 设 X 是 $\mathbb{R}$ 上的扩散过程，其无穷小生成元为

$$L = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx},$$

其中 σ, b 是局部有界 Borel 函数，且 σ 处处不为零。假设 X 满足本节的各项条件（参见第 IX 章练习 2.10）。

1°) 证明尺度函数可取为

$$s(x) = \int_c^x \exp\left(-\int_c^y 2b(z)\sigma^{-2}(z) dz\right) dy,$$

其中 c 是 $\mathbb{R}$ 中任意一点。特别地，若 $b = 0$ ，则过程处于自然尺度。

2°) 证明速度测度相对于 Lebesgue 测度的密度为

$$\frac{2}{s'(x)\sigma^2(x)}.$$

提示：使用练习 3.18。

练习 3.21。

1°) 设 $E = (l, r)$ 。若存在 x, b 满足

$$l < x < b < r, \quad P_x(T_b < \infty) = 1$$

(例如维数 $d > 2$ 的 BES^d)，证明

$$s(l+) = \lim_{a \downarrow l} s(a) = -\infty.$$

反过来，若 $s(l+) = -\infty$ ，证明对每个 $l < x < b < r$ ，

$$P_x(T_b < \infty) = 1.$$

2°) 再假设

$$s(r-) = \lim_{b \uparrow r} s(b) = \infty.$$

证明 X 常返。

3°) 若不采用第 2 问的条件，而假设

$$s(r-) < \infty,$$

证明

$$P_x\left(\lim_{t \uparrow \zeta} X_t = r\right) = P_x\left(\inf_{t \geq 0} X_t > l\right) = 1,$$

并求

$$\gamma = \inf_{t \geq 0} X_t$$

在 P_x 下的分布。由此推出， X 常返当且仅当

$$s(l+) = -\infty, \quad s(r-) = \infty.$$

4°) 在第 3 问的条件

$$s(l+) = -\infty, \quad s(r-) < \infty$$

下, 证明存在唯一时刻 ρ , 使

$$X_\rho = \gamma.$$

提示: 使用第 VI 章练习 3.17 的方法; 该题的假设正是本题第 3 问假设的一个特殊情形。

练习 3.22. 设 X 是 $\mathbb{R}$ 上路径连续的强 Markov 过程。对 $a \in \mathbb{R}$, 令

$$D_{a+} = T_{(a, \infty)}, \quad D_{a-} = T_{(-\infty, a)}.$$

1°) 证明或者

$$P_a(D_{a+} = \infty) = 1,$$

或者

$$P_a(D_{a+} = 0) = 1;$$

D_{a-} 也有同样的二择一性质。

若下列相应条件成立, 则分别称 a 为正则点、左单向点 (*left shunt*)、右单向点 (*right shunt*) 或陷阱点:

点的类型	P_a -几乎处处成立的条件
正则点	$D_{a+} = 0, D_{a-} = 0$
左单向点	$D_{a+} = \infty, D_{a-} = 0$
右单向点	$D_{a+} = 0, D_{a-} = \infty$
陷阱点	$D_{a+} = \infty, D_{a-} = \infty$

分别给出这四类点的例子。证明正则点关于自身也是正则的, 即在第 III 章练习 2.25 的意义下,

$$P_a(T_a = 0) = 1.$$

对满足本节假设的正则过程, 证明 E 的每个内点都是正则点。^a

2°) 证明正则点全体是开集, 因而是若干区间的并。假设 $\zeta = \infty$ 几乎处处, 并证明可把过程限制在其中任一这样的区间上, 从而得到一个满足本节假设的过程。

^a**校订注:** 原书本问最后写“区间 I 的内点”, 但此处以及本节统一以 E 表示过程的状态区间, 并未定义相应的 I ; 故改为“ E 的内点”。

练习 3.23. 若

$$E = (0, \infty), \quad \zeta = \infty \text{ 几乎处处},$$

并且 X 处于自然尺度, 则 0 是自然边界。

练习 3.24. 设 $E = \mathbb{R}$, 且 X 常返 (见练习 3.21 第 3 问)。选择尺度函数使 $s(0) = 0$ 。若 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的概率测度, 并满足

$$\int_{\mathbb{R}} |s(x)| \mu(dx) < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} s(x) \mu(dx) = 0,$$

证明存在停止时刻 T , 使 X_T 在 P_0 下的分布为 μ 。

练习 3.25 (*; 一个特殊扩散过程的渐近研究)。沿用练习 3.20 的记号, 令

$$\sigma(x) = \sqrt{2(1+x^2)}, \quad b(x) = 2x.$$

1°) 证明

$$X_t = \tan(\gamma_{H_t}),$$

其中 γ 是一维布朗运动, 并且

$$\begin{aligned} H_t &= 2 \int_0^t \frac{ds}{1+X_s^2} \\ &= \inf \left\{ u : \int_0^u (1 + \tan^2(\gamma_s)) ds > 2t \right\}. \end{aligned}$$

提示: 使用练习 3.20 与命题 3.4。

2°) 证明当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$H_t \rightarrow \inf \left\{ u : |\gamma_u| = \frac{\pi}{2} \right\} \quad \text{几乎处处},$$

并且

$$|X_t| \rightarrow \infty \quad \text{几乎处处}.$$

3°) 证明当 t_0 充分大时, 例如取

$$t_0 = \sup\{t : |X_t| = 1\},$$

对每个 $t > t_0$,

$$\begin{aligned} \log |X_t| &= \log |X_{t_0}| + \int_{t_0}^t X_s^{-1} \sqrt{2(1+X_s^2)} d\beta_s \\ &\quad + t - t_0 - \int_{t_0}^t X_s^{-2} ds, \end{aligned}$$

其中 β 是一维布朗运动。

4°) 证明当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$t^{-1/2}(\log |X_t| - t) \xrightarrow{d} \sqrt{2} G,$$

其中 G 是标准高斯随机变量。^a

^a**校订注:** 原书把极限写成 $2G$ 。但第 3 问中鞅项的二次变差率为 $2(1+X_t^2)/X_t^2 \rightarrow 2$, 故中心极限定理给出的极限方差是 2, 即极限为 $\sqrt{2}G$, 不是方差为 4 的 $2G$ 。

4 时间反演及其应用

本节考虑一般状态空间上的 Markov 过程; 它在 $[0, \zeta)$ 上具有连续轨道, 并且在 $\{\zeta < \infty\}$ 上几乎处处存在 $X_{\zeta-}$ 。Feller 过程满足这一条件 (见第 III 章定理 2.7)。我们的目标是说明: 在适当的解析条件下, 从一类特殊随机时刻出发, 把 X 的轨道反向运行, 仍可得到一个 Markov 过程。先定义这类随机时刻。

定义 4.1. 称 Ω 上的正随机变量 L 为余可选时刻 (cooptional time), 如果

i) $\{L < \infty\} \subset \{L < \zeta\}$;

ii) 对每个 $t \geq 0$,

$$L \circ \theta_t = (L - t)^+.$$

读者容易验证, 寿命 ζ 是余可选时刻; Borel 集 A 的末次离开时刻

$$L_A(\omega) = \sup\{t : X_t(\omega) \in A\}$$

也是余可选时刻, 其中约定 $\sup \emptyset = 0$ 。

命题 4.2. 若 L 是余可选时刻, 则对任意 $s \geq 0$, 随机变量 $(L - s)^+$ 也是余可选时刻。

证明. 定义 4.1 的条件 i) 对 $(L - s)^+$ 显然成立, 而且

$$\begin{aligned} (L - s)^+ \circ \theta_t &= (L \circ \theta_t - s)^+ = ((L - t)^+ - s)^+ \\ &= (L - t - s)^+ = ((L - s)^+ - t)^+, \end{aligned}$$

这正是条件 ii)。 □

下文固定一个几乎处处有限且严格为正的余可选时刻 L 。定义取值于 E_Δ 的新过程 $\tilde{X}$: 当 $t > 0$ 时,

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \Delta, & L(\omega) \leq t \text{ 或 } L(\omega) = \infty, \\ X_{L(\omega)-t}(\omega), & 0 < t < L(\omega), \end{cases}$$

并且当 $0 < L < \infty$ 时令 $\tilde{X}_0 = X_{L-}$, 否则令 $\tilde{X}_0 = \Delta$ 。再置

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma(\tilde{X}_s : s \leq t).$$

在 $\{L > t + u\}$ 上, 由定义 4.1(ii) 有 $L(\theta_u) = L - u > t$, 故

$$\tilde{X}_t(\theta_u) = X_{L(\theta_u)-t}(\theta_u) = X_{L-u-t+u} = \tilde{X}_t.$$

由单调类定理可知, 若 $\Gamma \in \tilde{\mathcal{F}}_t$, 则对每个 $u \geq 0$,

$$\theta_u^{-1}(\Gamma) \cap \{t + u < L\} = \Gamma \cap \{t + u < L\}.$$

现在引入证明 $\tilde{X}$ 为 Markov 过程所需的框架。假设:

i) 存在概率测度 μ , 使 X 的势核 U 所确定的势测度

$$\nu = \mu U$$

是 Radon 测度 (参见第 III 章练习 2.29);

ii) 在 E 上存在另一个半群 $(\hat{P}_t)$, 满足:

a) 若 $f \in C_K(E)$, 则 $t \mapsto \hat{P}_t f$ 右连续;

b) 对每个 $p > 0$ 及正 Borel 函数 f, g , 原半群与该半群的预解式 (U_p) 、 $(\hat{U}_p)$ 关于 ν 对偶, 即

$$\int U_p f g \, d\nu = \int f \hat{U}_p g \, d\nu.$$

最后一个等式也记作

$$\langle U_p f, g \rangle_\nu = \langle f, \hat{U}_p g \rangle_\nu.$$

若另一个 Markov 过程 $\hat{X}$ 的转移半群为 $(\hat{P}_t)$, 便称 X 与 $\hat{X}$ 关于 ν 对偶。由 Stone-Weierstrass 定理和单调类定理, 上述对偶关系还推出: 对 $\mathbb{R}_+$ 上任意正 Borel 函数 φ ,

$$\langle P_\varphi f, g \rangle_\nu = \langle f, \hat{P}_\varphi g \rangle_\nu, \quad P_\varphi f(x) = \int_0^\infty \varphi(t) P_t f(x) dt.$$

下面两个引理将用来证明 $\tilde{X}$ 的转移半群正是 $(\hat{P}_t)$ 。

引理 4.3. 给定 $r > 0$ 、 $\mathbb{R}_+$ 上的正 Borel 函数 φ , 以及正的 $\tilde{\mathcal{F}}_r$ -可测随机变量 H 。则对 E 上任意正 Borel 函数 f ,

$$\int_0^\infty \varphi(t) E_\mu[f(\tilde{X}_{t+r})H] dt = \int f h_\varphi d\nu,$$

其中

$$h_\varphi(x) = E_x[H\varphi(L-r)\mathbf{1}_{\{r < L\}}].$$

此外, 对 $s > r$,

$$\int_0^\infty \varphi(t) E_\mu[f(\tilde{X}_{t+s})H] dt = \int f P_{s-r} h_\varphi d\nu.$$

证明. 把 L 换成 $(L-r)^+$, 便可在待证的第一个等式中设 $r = 0$ 。此时左端等于

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty E_\mu[f(X_{L-t})\mathbf{1}_{\{L > t\}}H] \varphi(t) dt \\ &= \int_0^\infty E_\mu[Hf(X_u)\varphi(L-u)\mathbf{1}_{\{L > u\}}] du \\ &= \int_0^\infty E_\mu[(H\varphi(L)\mathbf{1}_{\{L > 0\}}) \circ \theta_u f(X_u)] du. \end{aligned}$$

这里利用了 $\tilde{\mathcal{F}}_0$ 的定义所推出的事实: 在 $\{L > u\}$ 上, $H = H \circ \theta_u$ 。再由 X 的 Markov 性质, 最后一个式子等于

$$\int_0^\infty E_\mu[h_\varphi(X_u)f(X_u)] du = \int f h_\varphi d\nu,$$

从而得到第一部分。

证明第二部分时, 因 $\tilde{\mathcal{F}}_r \subset \tilde{\mathcal{F}}_s$, 随机变量 H 也 $\tilde{\mathcal{F}}_s$ -可测。由第一部分,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \varphi(t) E_\mu[f(\tilde{X}_{t+s})H] dt \\ &= \int f(x) E_x[\varphi(L-s)H\mathbf{1}_{\{s < L\}}] \nu(dx). \end{aligned}$$

而

$$\mathbf{1}_{\{r < L\}} \circ \theta_{s-r} = \mathbf{1}_{\{s < L\}}, \quad H \circ \theta_{s-r} = H \quad \text{在 } \{L > s\} \text{ 上,}$$

故

$$\varphi(L-s)H\mathbf{1}_{\{s < L\}} = (\varphi(L-r)H\mathbf{1}_{\{r < L\}}) \circ \theta_{s-r}.$$

再用 Markov 性便得到第二部分。 $\square$

引理 4.4. 沿用引理 4.3 的记号。若 ψ 是 $\mathbb{R}_+$ 上另一个正 Borel 函数, 则

$$P_\psi h_\varphi = h_{\psi * \varphi} = P_\varphi h_\psi,$$

其中 $*$ 表示卷积。

证明。由上一个证明可知

$$P_{s-r}h_\varphi = E. [\varphi(L-s)H\mathbf{1}_{\{s < L\}}].$$

因此

$$\begin{aligned} P_\psi h_\varphi &= \int_r^\infty \psi(s-r)P_{s-r}h_\varphi \, ds \\ &= E. \left[\int_r^\infty \psi(s-r)\varphi(L-s)H\mathbf{1}_{\{s < L\}} \, ds \right] \\ &= E. \left[\mathbf{1}_{\{r < L\}}H \int_r^L \psi(s-r)\varphi(L-s) \, ds \right] \\ &= h_{\psi * \varphi}. \end{aligned}$$

这给出第一个等式；第二个等式由卷积的交换性得到。 $\square$

定理 4.5。 在 P_μ 下，过程 $\tilde{X}$ 关于滤过 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 是 Markov 过程，其转移函数为 $(\hat{P}_t)$ 。

证明。我们要证明

$$E_\mu [f(\tilde{X}_{t+s}) | \tilde{\mathcal{F}}_s] = \hat{P}_t f(\tilde{X}_s) \quad P_\mu\text{-几乎处处.}$$

沿用引理 4.3 的记号，由该引理有

$$\int_0^\infty \varphi(t) E_\mu [f(\tilde{X}_{t+s})H] \, dt = \langle f, P_{s-r}h_\varphi \rangle_\nu,$$

另一方面，Fubini 定理给出

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \varphi(t) E_\mu [\hat{P}_t f(\tilde{X}_s)H] \, dt \\ &= E_\mu [\hat{P}_\varphi f(\tilde{X}_s)H]. \end{aligned}$$

利用上述两个引理和对偶性来比较这两个等式的右端。对任意正 Borel 函数 ψ ,

$$\begin{aligned} &\int_r^\infty \psi(s-r) \langle f, P_{s-r}h_\varphi \rangle_\nu \, ds \\ &= \langle f, P_\psi h_\varphi \rangle_\nu = \langle f, P_\varphi h_\psi \rangle_\nu \\ &= \langle \hat{P}_\varphi f, h_\psi \rangle_\nu \\ &= \int_r^\infty \psi(s-r) E_\mu [\hat{P}_\varphi f(\tilde{X}_s)H] \, ds. \end{aligned}$$

所以存在 Lebesgue 零测集 $N(f, r, H, \varphi) \subset \mathbb{R}_+$ ，使对 $s > r$ 、 $s \notin N(f, r, H, \varphi)$,

$$E_\mu [\hat{P}_\varphi f(\tilde{X}_s)H] = \langle f, P_{s-r}h_\varphi \rangle_\nu.$$

令 f 遍历 $C_K(E)$ 中的一个稠密序列， φ 遍历 $C_K(\mathbb{R}_+)$ 中的一个稠密序列， r 遍历正有理数；对每个 r ，令 H 遍历一个生成 $\sigma(\tilde{X}_u : u \leq r)$ 的有界函数可数代数。取相应零测集之并为 N 。

于是只要 $s \notin N$, 上式就同时对每个 $f \in C_K(E)$ 、 $\varphi \in C_K(\mathbb{R}_+)$ 、 $r \in \mathbb{Q}_+$ 、 $s > r$, 以及每个有界且 $\sigma(\tilde{X}_u : u \leq r)$ -可测的 H 成立。因此在同样的条件下, 对几乎处处的 t ,

$$E_\mu[f(\tilde{X}_{s+t})H] = E_\mu[\hat{P}_t f(\tilde{X}_s)H].$$

由假设 ii)a) 以及轨道连续性, 两端关于 t 都右连续, 故等式对每个 t 成立。

其次, 由轨道连续性, 滤过 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 在忽略 P_μ -零测集后既右连续又左连续, 即对每个 t ,

$$\tilde{\mathcal{F}}_{t-} = \tilde{\mathcal{F}}_t = \tilde{\mathcal{F}}_{t+}.$$

这先使上式可取任意 $H \in \tilde{\mathcal{F}}_s$; 又因每个 s 都是 N^c 中点列的极限, 故对 s 也不再有任何限制。于是对 $f \in C_K(E)$ 以及任意 $s, t \geq 0$,

$$E_\mu[f(\tilde{X}_{s+t}) | \tilde{\mathcal{F}}_s] = \hat{P}_t f(\tilde{X}_s),$$

即得所求。 □

注。

1°) 上述结论本身并不能保证 $\tilde{X}$ 具有 Feller 性或强 Markov 性等良好性质。不过在许多应用中, $(\hat{P}_t)$ 是 Feller 半群, 从而 $\tilde{X}$ 具有这些良好性质; 另见练习 4.13。

2°) 若已经知道 $(\hat{P}_t)$ 是某个过程 $\hat{X}$ 的半群, 则 P_μ 下的 $\tilde{X}$ 与 $P_{\hat{\mu}}$ 下的 $\hat{X}$ 同分布, 其中

$$\hat{\mu} = X_{L-}(P_\mu)$$

是 P_μ 下 X_{L-} 的分布。

下面把定理 4.5 两次应用于第 VI 章第 3 节引入并研究的三维 Bessel 过程。三维 Bessel 过程和 0 处被杀死的布朗运动 (记作 B^0) 关于测度

$$\nu(dx) = 2x \, dx$$

对偶。事实上, 沿用第 VI 章的记号, 利用 Q_t 关于 Lebesgue 测度自对偶这一事实, 并令 $h(x) = x$, 对 $f, g \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) P_t^3 g(x) x \, dx &= \int_0^\infty f(x) \frac{1}{x} Q_t(gh)(x) x \, dx \\ &= \int_0^\infty Q_t f(x) g(x) x \, dx. \end{aligned}$$

这便证明了所称的对偶性 (把对偶测度乘正常数并无影响)。这是一个更一般结论的特例: 按第 VIII 章第 3 节的定义, BES^3 是 B^0 的 h -过程, 因此关于测度 $h(x)dx$ 与 B^0 对偶 (另见第 VIII 章练习 3.17)。

上一节已经证明, ν 恰为从 0 出发的 $\text{BES}^3(0)$ 的势测度 $U(0, \cdot)$ 。所以定理 4.5 的假设在 $\mu = \delta_0$ 时完全满足, 从而得到:

推论 4.6 (Williams)。 设 X 是 $\text{BES}^3(0)$, B 是从 $b > 0$ 出发的一维布朗运动, 并令

$$L_b = \sup\{t : X_t = b\}.$$

则两个过程

$$(X_{L_b-t}, 0 \leq t \leq L_b), \quad (B_t, 0 \leq t \leq T_0)$$

同分布。

注。

- 1°) 第 XII 章将借助游程理论给出这个结果的另一证明。
 2°) 该推论说明, $\text{BES}^3(0)$ 的 L_b 与从 b 出发的布朗运动的 T_0 同分布; 第 II 章命题 3.7 和第 III 章命题 3.7 已经计算过后一分布。

第二个应用涉及首次到达 $b > 0$ 时被杀死的 BES^3 。更确切地, 若 X 是 BES^3 , 定义过程 X^b 为

$$X_t^b = X_t \quad \text{若 } t < T_b \text{ 且 } X_0 \in [0, b), \quad X_t^b = \Delta \quad \text{在其余情形,}$$

其中一如既往,

$$T_b = \inf\{t > 0 : X_t = b\}.$$

第 III 章练习 2.30 已经说明这是 $[0, b)$ 上的 Markov 过程; 显然, T_b 是 X^b 的寿命, 因而是余可选时刻。

引理 4.7。 过程 X^b 与 $b - X^b$ 关于 $[0, b]$ 上的测度

$$\xi(dx) = x(b-x) dx$$

对偶。

证明。 我们已经用过如下事实: X 的势 U 相对于测度 $2y^2 dy$ 的密度为

$$u(x, y) = \inf\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

由强 Markov 性, 对 $x < b$, X^b 的势 V 满足

$$\begin{aligned} Vf(x) &= E_x \left[\int_0^{T_b} f(X_t) dt \right] = Uf(x) - P_{T_b} Uf(x) \\ &= 2 \int_0^b (u(x, y) - u(b, y)) f(y) y^2 dy. \end{aligned}$$

^a 换言之, V 相对于测度 $2y^2 \mathbf{1}_{\{0 \leq y \leq b\}} dy$ 的密度为

$$v(x, y) = \inf\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) - \frac{1}{b}.$$

显然, 过程 $b - X^b$ 的势 $\widehat{V}$ 相对于 $2(b-y)^2 \mathbf{1}_{\{0 \leq y \leq b\}} dy$ 的密度为 $v(b-x, b-y)$ 。经过一个虽繁琐但初等的计算可验证: 对 $f, g \geq 0$,

$$\int Vf g d\xi = \int f \widehat{V} g d\xi.$$

映射 $f \mapsto Vf$ 和 $f \mapsto \widehat{V}f$ 在 $[0, b]$ 上有界函数空间中都是有界的, 故结论由练习 4.17 得出。□

^a**校订注:** 原书在最后一个积分中漏印了因子 $f(y)$ 。左端是 $Vf(x)$, 且该式正由势核作用于 f 得到; 没有 $f(y)$ 时右端甚至不依赖于 f , 故在此补回。

命题 4.8. 若 X 是 $\text{BES}^3(0)$, 且 $b > 0$, 则过程

$$(X_{T_b-t}, 0 \leq t \leq T_b) \quad \text{与} \quad (b - X_t, 0 \leq t \leq T_b)$$

同分布。

证明. 由刚才的计算, 势测度满足

$$V(0, dy) = 2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{b} \right) y^2 dy = b \xi(dy).$$

结论立即由定理 4.5 和引理 4.7 得出。 $\square$

综合推论 4.6、命题 4.8 与第 VI 章定理 3.11, 便得到下面的路径分解。图 7 用原生 TikZ 重绘, 只表示三段路径的拼接关系。

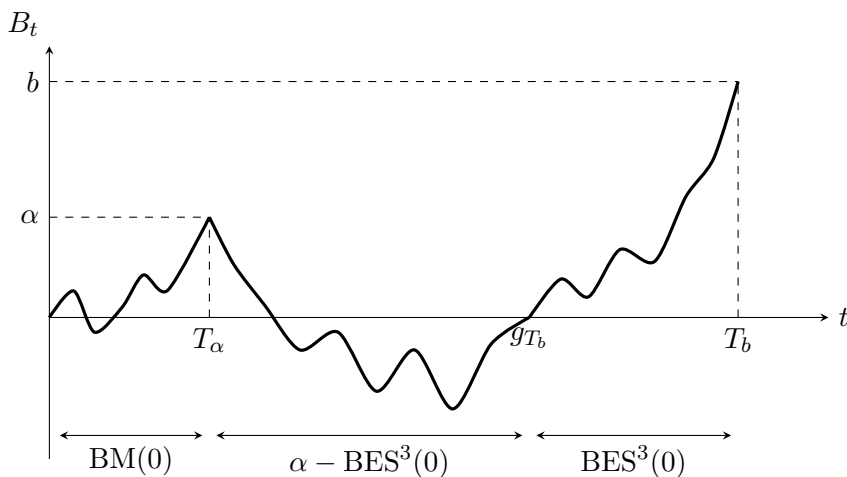


图 7 Williams 布朗路径分解

定理 4.9 (Williams 的布朗路径分解). 给定 $b > 0$, 设下列四个对象相互独立:

- i) 在 $[0, b]$ 上均匀分布的随机变量 α ;
- ii) 标准布朗运动 B ;
- iii) 两个 $\text{BES}^3(0)$ 过程 ρ 与 ρ' .

定义

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \inf\{t : B_t = \alpha\}, \\ g_{T_b} &= T_\alpha + \sup\{t : \alpha - \rho(t) = 0\}, \\ T_b &= g_{T_b} + \inf\{t : \rho'(t) = b\}. \end{aligned}$$

那么在 $0 \leq t \leq T_b$ 上分段定义的过程

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} B_t, & 0 \leq t \leq T_\alpha, \\ \alpha - \rho(t - T_\alpha), & T_\alpha \leq t \leq g_{T_b}, \\ \rho'(t - g_{T_b}), & g_{T_b} \leq t \leq T_b, \end{cases}$$

是从 0 出发、首次到达 b 时被杀死的布朗运动。

证明。由推论 4.6, 在 T_b 时被杀死的布朗运动是一个 $\text{BES}^3(0)$ 的时间反演。对该 Bessel 过程应用第 VI 章定理 3.11 的分解, 再用推论 4.6 和命题 4.8 识别反演后的各段, 即得所述结论。图 7 最清楚地描述了这一结果: 它正是把第 VI 章图 5 “上下翻转”。 $\square$

注。还有别的方法可以证明: 若 g_{T_b} 是 T_b 以前的最后一个零点, 则布朗运动在 g_{T_b} 与 T_b 之间的部分是 BES^3 。若预先知道这一事实, 上面的分解定理就可直接由推论 4.6 和第 VI 章定理 3.11 推出, 而不必借助命题 4.8。

练习 4.10。若 L 与 L' 是两个余可选时刻, 证明

$$L \vee L', \quad L \wedge L'$$

也是余可选时刻。

练习 4.11 (*)。设 L 是余可选时刻, 并令 $\mathcal{G}_L$ 为满足下列条件的 $\Gamma \in \mathcal{F}$ 的全体: 对每个 $u \geq 0$,

$$\Gamma \cap \{L > u\} = \theta_u^{-1}(\Gamma) \cap \{L > u\}.$$

1° 证明 $\mathcal{G}_L$ 是 σ -代数 (另见下方练习 4.13), 并证明 L 与 X_L 都是 $\mathcal{G}_L$ -可测的。

2° 若 $A \in \mathcal{G}_L$, 定义随机变量

$$L^A = L \text{ 在 } A \text{ 上}, \quad L^A = 0 \text{ 在 } A^c \text{ 上}.$$

证明 L^A 是余可选时刻。

练习 4.12 (*)。

1° 设 ρ_t 是二维布朗运动的模, 并假定 $\rho_0 = r$, 其中 $0 < r < 1$ 。证明存在从 $-\log r$ 出发的一维布朗运动 γ , 使

$$-\log \rho_t = \gamma_{C_t}, \quad C_t = \inf \left\{ u : \int_0^u e^{-2\gamma_s} ds > t \right\}.$$

提示: 使用第 V 章第 2 节的思想。

2° 设 X 是 $\text{BES}^2(0)$, 并令

$$T_1 = \inf\{t : X_t = 1\}.$$

证明存在一个 $\text{BES}^3(0)$ 过程 Y , 使

$$(-\log X_t, 0 < t \leq T_1) = \left(Y_{A_t}, 0 < t \leq \int_0^\infty e^{-2Y_s} ds \right),$$

其中

$$A_t = \sup \left\{ u : \int_u^\infty e^{-2Y_s} ds > t \right\}.$$

提示: 把推论 4.6 应用于第 1 问中的布朗运动 γ , 再令 $r \downarrow 0$ 。

3° 把第 1、2 问推广到 $\rho = |\text{BM}^d|$, 其中 $d \geq 3$ 。更确切地, 证明若 X 是 $\text{BES}^d(0)$, 则存在 $\text{BES}^\alpha(0)$ 过程 Y , 使

$$((X_t)^{2-d}, t > 0) = (Y_{A_t}, t > 0),$$

其中

$$A_t = \sup \left\{ u : (d-2)^{-2} \int_u^\infty Y_s^{-\alpha} ds > t \right\}, \quad \alpha = \frac{2(d-1)}{d-2}.$$

练习 4.13 (*)。沿用本节记号, 令 $\tilde{\mathcal{G}}_t$ 为满足下列条件的 $\Gamma \in \mathcal{F}$ 的全体: 对每个 $u \geq 0$,

$$\theta_u^{-1}(\Gamma) \cap \{t+u < L\} = \Gamma \cap \{t+u < L\}.$$

- 1° 证明 $(\tilde{\mathcal{G}}_t)$ 是右连续滤过, 并且包含 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 。验证引理 4.3、4.4 中把 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 换成 $(\tilde{\mathcal{G}}_t)$ 后结论仍然成立。
- 2° 若 T 是 $(\tilde{\mathcal{G}}_t)$ -停止时刻, 证明 $(L-T)^+$ 是余可选时刻。
- 3° 证明定理 4.5 中可把 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 换成 $(\tilde{\mathcal{G}}_t)$; 再利用第 2 问证明 $\tilde{X}$ 具有强 Markov 性。

练习 4.14 (#)。设 L 是余可选时刻, 并令

$$\phi(x) = P_x(L > 0).$$

- 1° 证明 ϕ 是过度函数 (见第 X 章定义 3.1)。
- 2° 若 f 是有限的过度函数, 证明下式定义了新的转移半群 (P_t^f) :

$$P_t^f(x, dy) = \begin{cases} f(x)^{-1} P_t(x, dy) f(y), & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

另见第 VIII 章命题 3.9。

- 3° 定义

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & t < L(\omega), \\ \Delta, & t \geq L(\omega). \end{cases}$$

证明对任意概率测度 μ , 过程 Y 都是转移半群为 (P_t^ϕ) 的 Markov 过程。

练习 4.15 (*; Pitman 定理的另一证明)。设 B 是标准一维布朗运动, L 是它在 0 处的局部时, 并一如既往地令

$$\tau_1 = \inf\{t : L_t > 1\}.$$

把第 VI 章练习 2.29 和第 XII 章练习 4.17 中证明的下列性质记为 (T) :

$$(|B_t|, t \leq \tau_1) \quad \text{与} \quad (|B_{\tau_1-t}|, t \leq \tau_1)$$

同分布。把第 VI 章第 3 节 Pitman 定理所证明的性质记为 (P) :

$$(2S_t - B_t, S_t, t \geq 0) \stackrel{d}{=} (Z_t, J_t, t \geq 0),$$

其中 Z 是 $\text{BES}^3(0)$, 且

$$J_t = \inf_{s \geq t} Z_s.$$

再把推论 4.6 的时间反演性质记为 (R) 。本练习旨在证明: 结合第 VI 章第 2 节证明的 Lévy 等价

$$(S_t - B_t, S_t, t \geq 0) \stackrel{d}{=} (|B_t|, L_t, t \geq 0), \quad (\text{L})$$

性质 (T)、(P)、(R) 中任意两个都能推出第三个。

1°) 一如既往地令

$$T_1 = \inf\{t : B_t = 1\}.$$

由 (L) 推出

$$(|B_{T_1-u}|, u \leq \tau_1) \stackrel{d}{=} (-1 + S_{T_1-u} + (1 - B_{T_1-u}), u \leq T_1),$$

进而证明 (R) 与 (P) 推出 (T)。

2°) 利用 (L) (或 Tanaka 公式) 证明

$$(B_u, u \leq T_1) \stackrel{d}{=} (L_u - |B_u|, u \leq \tau_1),$$

进而证明 (T) 与 (P) 推出 (R)。

提示: 若已知 (L), 则 (P) 等价于性质 (P'):

$$(|B_u| + L_u, u \geq 0) \stackrel{d}{=} (Z_u, u \geq 0).$$

3°) 先用 (T), 再用 (L), 证明

$$(|B_u| + L_u, u \leq \tau_1) \stackrel{d}{=} (1 - B_{T_1-u}, u \leq T_1).$$

利用尺度不变性推出: 对任意 $a > 0$,

$$(|B_u| + L_u, u \leq \tau_a) \stackrel{d}{=} (Z_u, u \leq L_a),$$

其中 $\tau_a = \inf\{t : L_t > a\}$, 而右端的 L_a 是 Z 对水平 a 的末次通过时刻。进而证明 (T) 与 (R) 推出 (P'), 从而推出 (P)。

练习 4.16 (*; 末次通过时刻)。 设 L 是余可选时刻。

1°) 沿用练习 4.14 的记号, 证明上鞅

$$Z_t = \phi(X_t)$$

(见第 X 章命题 3.2) 满足

$$Z_t = P_x(L > t \mid \mathcal{F}_t), \quad P_x\text{-几乎处处}.$$

2°) 假设 X 是 $(0, \infty)$ 上的 Feller 过程, 其尺度函数 s 满足

$$s(0+) = -\infty, \quad s(\infty) = 0$$

(见练习 3.21)。给定 $a > 0$, 令

$$L = L_a = \sup\{t : X_t = a\},$$

并令 (Λ^x) 为局部鞅 $s(X)$ 的局部时族。证明

$$Z_t - \frac{1}{2s(a)} \Lambda_t^{s(a)}$$

是局部鞅。这是 Meyer 分解定理的一个特例。

3°) 证明对任意正可料过程 H ,

$$E_x[H_L] = -\frac{1}{2s(a)} E_x \left[\int_0^\infty H_u \, d\Lambda_u^{s(a)} \right].$$

换言之,

$$-\frac{1}{2s(a)} \Lambda^{s(a)}$$

是 $\mathbf{1}_{\{0 < L \leq \cdot\}}$ 的对偶可料投影。

4°) 进一步假设存在测度 μ , 使:

i) 在 $(0, \infty)^3$ 上存在连续函数 $(t, x, y) \mapsto p_t(x, y)$, 满足

$$P_t(x, dy) = p_t(x, y) \mu(dy);$$

ii) 对 $\mathbb{R}_+$ 上任意正 Borel 函数 f ,

$$\int_0^t f(X_s) \, ds = \int f(y) \Lambda_t^{s(y)} \mu(dy).$$

(参见第 X 章练习 2.32 和第 XI 章第 1 节。) 证明

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x[\Lambda_t^{s(a)}] = p_t(x, a).$$

5°) 证明

$$P_x(L_a \in dt) = -\frac{1}{2s(a)} p_t(x, a) \, dt.$$

第 X 章练习 1.16 是本题的重要补充; 该题将说明, 对 L 作条件化如何与 X 的桥分布联系起来。

练习 4.17 (#)。

1°) 设 (V^p) 与 $(\widehat{V}^p)$ 是可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 上的两个预解式, 并且核

$$V = V^0, \quad \widehat{V} = \widehat{V}^0$$

在有界 Borel 函数空间 $b\mathcal{E}$ 上有界。若测度 ξ 满足: 对任意一对正 Borel 函数 f, g ,

$$\int V f g \, d\xi = \int f \widehat{V} g \, d\xi,$$

证明这两个预解式关于 ξ 对偶。

提示: 当 p 充分小时,

$$V^p = \sum_{n=0}^{\infty} (-p)^n V^{n+1}.$$

a

2°) 若这两个预解式分别属于具有右连续或左连续轨道的两个过程, 其半群为 (P_t) 与 $(\widehat{P}_t)$, 证明对每个 t ,

$$\int P_t f g \, d\xi = \int f \widehat{P}_t g \, d\xi.$$

^a校订注: 原书把提示中的系数印成 p^n 。按本书采用的 $V^p = \int_0^\infty e^{-pt} P_t \, dt$ 约定, 由预解方程 $V^p = V - pV^p V$ 作 Neumann 展开, 应为 $(-p)^n$ 。

练习 4.18. 设 X 是 $[0, \infty)$ 上的 Feller 过程, 其他点不能到达 0, 而 X 在 $(0, \infty)$ 上的限制满足第 3 节的假设. 记相应的尺度函数和速度测度为 s 与 m , 并假设

$$s(0+) = -\infty, \quad s(\infty) = 0$$

(见练习 3.21)。

1°) 计算 X 的势核, 并证明 X 关于 m 与自身对偶。

2°) 证明对每个 $b > 0$, 在 P_0 下, 过程

$$Y_t = X_{L_b - t}, \quad 0 \leq t < L_b,$$

是 $(0, b)$ 上初始测度为 δ_b 的 Markov 过程, 其半群 (Q_t) 满足

$$Q_t f(x) = \frac{P_t(fs)(x)}{s(x)}.$$

因此, P_0 下 L_b 的分布与过程 Y 的 T_0 的分布相同。

3°) 证明 $-1/s$ 是半群为 (Q_t) 的过程的尺度函数, 并且相应的速度测度为 $s^2 m$ 。

注释与评述

第 1 节. 本节只介绍后文所需的最少量半群理论; 这些内容主要用于建立直观, 而非技术需要。欲见详细论述, 可参考 Pazy [1]; Dellacherie–Meyer [1] 第 IV 卷则提供了一种面向概率论读者的讲法。

我们不能确定定理 1.13 最初出自何处, 但可以指出, 它是 Kunita [1] 和 Roth [1] 的一个远为一般的结果的特例; 练习 1.19 也同样如此。练习 1.20 出自 Chen [1] 和 Ledoux [1]。

关于练习 1.21, 读者可在 Kunita [5] 中找到 Itô 公式的更多推广。

本节大多数练习只是记录半群的经典性质, 在这一主题的教科书中均可找到。

第 2 节. 本节大部分内容取自 Stroock–Varadhan [1] 和 Priouret [1]。系统地使用鞅问题来构造扩散过程, 源于 Stroock 与 Varadhan。他们的思想后来被推广到其他情形, 在当代研究中仍占重要地位; 但本书更偏重随机微分方程的观点, 所以鞅问题在我们的叙述中只居次要位置。

本节练习与正文来源相同。练习 2.8 取自 Meyer 的一门课程。

第 3 节. 本节内容最初见于 Feller 的一系列论文。关于这一主题, 有许多远比本书详尽的论述, 例如 Dynkin [1]、Itô–McKean [1]、Freedman [1] 和 Mandl [1]。我们的叙述取自 Breiman [1], 但采用了不同的证明; Breiman 使用的是离散时间过程逼近。本节练习都是很经典的题目。

第 4 节. 本节的主要结论定理 4.5 源于 Nagasawa [1]。正文的论述以及若干练习借鉴了 Meyer [2] 和 Meyer 等 [1]。推论 4.6 见 Williams [3]。具有开创意义的定理 4.9 是同类结果中的第一个, 出自 Williams [2] 和 [3]。

练习 4.12 出自 Williams [3] 和 Yor [16]。练习 4.16 出自 Pitman–Yor [1]; 暂态 Bessel 过程这一特殊情形可参见 Gettoor [2]。

关于练习 4.15, 还应指出 Pitman 定理现已推广到其他过程: 随机游走的情形见 Tanaka [2], [3], Lévy 过程的情形见 Bertoin [5], 某些扩散过程的情形见 Saisho–Tanemura [1]; 尤其可参见第 XI 章练习 1.29。

第 VIII 章 Girsanov 定理及其初步应用

1 Girsanov 定理

本章研究概率测度的绝对连续变换对连续半鞅空间的影响。第 2 节将暗示这些结果在理论上的深远后果，第 3 节则会看到，它们还能导出许多显式计算。

半鞅类在许多运算下保持不变，例如与 C^2 函数复合，更一般地与两个凸函数之差复合；我们也已提到它在时间变换下的不变性。半鞅类在概率测度的绝对连续变换下同样不变。这正是 Girsanov 定理的内容：若 Q 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上相对于 P 绝对连续的概率测度，则每个 P -半鞅也是 Q -半鞅。

这个结论并不直观。有限变差过程在 P 下和 Q 下当然仍有有限变差，但局部鞅可能失去鞅性；它们却仍是半鞅。本节的一个主要目标，正是描述它们在新测度下分解为局部鞅与有限变差过程之和的方式。

采用如下框架。设 $(\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}$ 是右连续滤过，终端 σ -代数 $\mathcal{F}_\infty^0$ ，而 P, Q 是 $\mathcal{F}_\infty^0$ 上的两个概率测度。假设对每个 $t \geq 0$ ， Q 在 $\mathcal{F}_t^0$ 上的限制相对于 P 的限制绝对连续，记作

$$Q \triangleleft P.$$

要强调的是，可能有 $Q \triangleleft P$ ，却没有终端 σ -代数上的 $Q \ll P$ 。记

$$D_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t^0}}{dP|_{\mathcal{F}_t^0}}.$$

这些随机变量的等价类构成一个 $(\mathcal{F}_t^0, P)$ -鞅。由于滤过右连续，可在每个 P -等价类中选取 D_t ，使所得过程 D 适应于 $(\mathcal{F}_t^0)$ ，且几乎每条轨道都是 càdlàg 的（见第 II 章定理 2.5 与命题 2.6）。以下始终采用这样的版本。

命题 1.1. 下列两条等价：

- i) 鞅 D 一致可积；
- ii) 在 $\mathcal{F}_\infty^0$ 上 $Q \ll P$ 。

证明。 见第 II 章练习 2.13。 □

第 I 章第 4 节和第 IV 章开头已经指出，处理定义在 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^0, P)$ 上的随机过程时，通常要采用 $(\mathcal{F}_t^0)$ 关于 P 的通常增广。也就是说，对 $0 \leq t \leq \infty$ ，在 $\mathcal{F}_t^0$ 中加入 $\mathcal{F}_\infty^0$ 关于 P 的完备化 $\mathcal{F}_\infty$ 里的所有 P -零测集，得到 $\mathcal{F}_t$ 。

若 $Q \triangleleft P$ ，但在 $\mathcal{F}_\infty^0$ 上并无 $Q \ll P$ ，则 Q 不能延拓到 $\mathcal{F}_\infty$ 。事实上，若 $P(A) = 0$ 而 $Q(A) > 0$ ，则 A 的所有子集都属于每个 $\mathcal{F}_t$ ，但没有理由认为 Q 能在幂集 $\mathcal{P}(A)$ 上相容地定义。反之，若在 $\mathcal{F}_\infty^0$ 上 $Q \ll P$ ，则有命题 1.1 的如下补充。

命题 1.1'. 命题 1.1 的条件等价于：

- iii) Q 可延拓为 $\mathcal{F}_\infty$ 上的概率测度 $\bar{Q}$ ，并且对每个 $0 \leq t \leq \infty$ ， $\bar{Q}$ 在完备 σ -代数 $\mathcal{F}_t$ 上的限制都满足 $\bar{Q} \ll P$ 。

若这些条件成立, 则

$$D_t = E \left[\frac{d\bar{Q}}{dP} \middle| \mathcal{F}_t^0 \right] \quad P\text{-几乎处处}.$$

证明. ii) 推出 iii) 是显然的。反过来, 若 iii) 成立, 且 $A \in \mathcal{F}_\infty^0$, $P(A) = 0$, 则 $A \in \mathcal{F}_t$, 从而 $\bar{Q}(A) = 0$, 因为 $\bar{Q} \ll P$ 在 $\mathcal{F}_t$ 上成立。因此 $Q \ll P$ 在 $\mathcal{F}_\infty^0$ 上成立。□

下文若在 $\mathcal{F}_\infty^0$ 上 $Q \ll P$, 记号上不再区分 Q 与 $\bar{Q}$, 并使用 $(\mathcal{F}_t)$ -适应过程。若只有 $Q \triangleleft P$, 则默认只使用 $(\mathcal{F}_t^0)$ -适应过程; 由第 IV 章练习 1.30 看, 这一限制并不严重。下面两个结果只假设 $Q \triangleleft P$ 。

命题 1.2. 密度鞅 D 在 Q -几乎处处意义下严格为正。

证明. 令

$$T = \inf\{t : D_t = 0 \text{ 或 } D_{t-} = 0\}.$$

由第 II 章命题 3.4, D 在 $[T, \infty)$ 上 P -几乎处处为零, 故对每个 t , 在 $\{T < t\}$ 上 $D_t = 0$ 。又因 $Q = D_t \cdot P$ 在 $\mathcal{F}_t^0$ 上成立,

$$Q(T < t) = 0,$$

于是得到结论。□

命题 1.3. 若 $Q \triangleleft P$, 则对每个 $(\mathcal{F}_t^0)$ -停止时刻 T ,

$$Q = D_T \cdot P \quad \text{在 } \mathcal{F}_T^0 \cap \{T < \infty\} \text{ 上}.$$

若 $Q \ll P$, 则

$$Q = D_T \cdot P \quad \text{在 } \mathcal{F}_T^0 \text{ 上}.$$

证明. $Q \ll P$ 的特殊情形由可选停止定理得到。一般情形中, D 在每个 $[0, t]$ 上一致可积。若 $A \in \mathcal{F}_T^0$, 则对每个 t , $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{T \wedge t}^0$, 因而

$$\begin{aligned} Q(A \cap \{T \leq t\}) &= \int_{A \cap \{T \leq t\}} E[D_t | \mathcal{F}_{T \wedge t}^0], dP \\ &= \int_{A \cap \{T \leq t\}} D_{T \wedge t} dP = \int_{A \cap \{T \leq t\}} D_T dP. \end{aligned}$$

令 $t \rightarrow \infty$, 得到

$$Q(A \cap \{T < \infty\}) = \int_{A \cap \{T < \infty\}} D_T dP,$$

证明完成。□

密度鞅 D 在下文居于核心地位。不过本书只系统处理连续半鞅, 没有发展不连续情形所需的技术, 所以这里只在密度连续时证明 Girsanov 定理。还要指出: 若 X, Y 在 P, Q 下都是连续半鞅, 且 $Q \triangleleft P$, 则在 P 下计算的任意版本 $\langle X, Y \rangle$, 也是在 Q 下计算的版本, 并可选成 $(\mathcal{F}_t^0)$ -适应的 (见第 IV 章注 1.19 与练习 1.30)。以下即使在 Q 下讨论, 也默认采用这种版本。

定理 1.4 (Girsanov 定理)。若 $Q \triangleleft P$, 且 D 连续, 则每个连续的 $(\mathcal{F}_t^0, P)$ -半鞅都是连续的 $(\mathcal{F}_t^0, Q)$ -半鞅。更确切地, 若 M 是连续的 $(\mathcal{F}_t^0, P)$ -局部鞅, 则

$$\widetilde{M} = M - D^{-1} \cdot \langle M, D \rangle$$

是连续的 $(\mathcal{F}_t^0, Q)$ -局部鞅。若 N 是另一个连续 P -局部鞅, 则

$$\langle \widetilde{M}, \widetilde{N} \rangle = \langle \widetilde{M}, N \rangle = \langle M, N \rangle.$$

证明。先注意, 若 X 是 càdlàg 过程, 且 XD 是 $(\mathcal{F}_t^0, P)$ -局部鞅, 则 X 是 $(\mathcal{F}_t^0, Q)$ -局部鞅。事实上, 由命题 1.3, D_T 是 $\mathcal{F}_T^0$ 上 Q 关于 P 的密度; 若 $(XD)^T$ 是 P -鞅, 则容易验证 X^T 是 Q -鞅 (见第 II 章推论 3.6 后的第一条注)。此外, 一列 $(\mathcal{F}_t^0)$ -停止时刻若在 P -几乎处处意义下递增至 $+\infty$, 则也在 Q -几乎处处意义下如此。

令

$$T_n = \inf\{t : D_t \leq 1/n\}.$$

过程 $(D^{-1} \cdot \langle M, D \rangle)^{T_n}$ 在 P -几乎处处意义下有限, 故 $(\widetilde{M}D)^{T_n}$ 是两个半鞅的乘积。由分部积分公式,

$$\begin{aligned} (\widetilde{M}D)_t^{T_n} &= M_0 D_0 + \int_0^{T_n \wedge t} \widetilde{M}_s \, dD_s + \int_0^{T_n \wedge t} D_s \, d\widetilde{M}_s + \langle \widetilde{M}, D \rangle_{T_n \wedge t} \\ &= M_0 D_0 + \int_0^{T_n \wedge t} \widetilde{M}_s \, dD_s + \int_0^{T_n \wedge t} D_s \, dM_s - \langle M, D \rangle_{T_n \wedge t} + \langle \widetilde{M}, D \rangle_{T_n \wedge t} \\ &= M_0 D_0 + \int_0^{T_n \wedge t} \widetilde{M}_s \, dD_s + \int_0^{T_n \wedge t} D_s \, dM_s. \end{aligned}$$

所以 $(\widetilde{M}D)^{T_n}$ 是 P -局部鞅, 由上段可知 $\widetilde{M}^{T_n}$ 是 Q -局部鞅。命题 1.2 说明 $T_n \uparrow \infty$ 在 Q -几乎处处意义下成立; 而“局部地是局部鞅”的过程仍是局部鞅 (第 IV 章练习 1.30), 故 $\widetilde{M}$ 是 Q -局部鞅。最后, 有限变差过程与任意半鞅的括号恒为零, 因而得到括号等式。□

随机积分还与变换 $M \mapsto \widetilde{M}$ 可交换。以下假设仍与定理 1.4 相同, 所涉及过程均为 $(\mathcal{F}_t^0)$ -适应的。

命题 1.5。若可料过程 $H \in L_{\text{loc}}^2(M)$, 则 $H \in L_{\text{loc}}^2(\widetilde{M})$, 并且

$$H \cdot \widetilde{M} = \widetilde{H \cdot M}.$$

证明。第一条立即由 $\langle M, M \rangle = \langle \widetilde{M}, \widetilde{M} \rangle$ 得到。若 H 局部有界, 则

$$\begin{aligned} H \cdot \widetilde{M} &= H \cdot M - HD^{-1} \cdot \langle M, D \rangle \\ &= H \cdot M - D^{-1} \cdot \langle H \cdot M, D \rangle = \widetilde{H \cdot M}. \end{aligned}$$

读者可验证, 当 $H \in L_{\text{loc}}^2(M)$ 时这些表达式仍有意义, 故一般情形也成立。□

除了少数例外 (例如第 XI 章练习 1.22), 通常 Q 与 P 在每个 $\mathcal{F}_t^0$ 上实际等价。这时 D 在 P -几乎处处意义下也严格为正, 并可写成指数形式。

命题 1.6. 若 D 是严格为正的连续局部鞅, 则存在唯一的连续局部鞅 L , 使

$$D_t = \exp \left\{ L_t - \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_t \right\} = \mathcal{E}(L)_t.$$

而且

$$L_t = \log D_0 + \int_0^t D_s^{-1} dD_s.$$

证明. 唯一性再次由第 IV 章命题 1.2 得到。为证存在性, 因 $D > 0$ 几乎处处, 可对 $\log D$ 使用 Itô 公式:

$$\begin{aligned} \log D_t &= \log D_0 + \int_0^t D_s^{-1} dD_s - \frac{1}{2} \int_0^t D_s^{-2} d\langle D, D \rangle_s \\ &= L_t - \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_t. \end{aligned}$$

这就证明了结论。 □

若 P, Q 在每个 $\mathcal{F}_t^0$ 上等价, 则对每个 t , $Q = \mathcal{E}(L)_t \cdot P$ 在 $\mathcal{F}_t^0$ 上成立。简记为

$$Q = \mathcal{E}(L) \cdot P.$$

此时 Girsanov 定理可改写如下。

定理 1.7. 若 $Q = \mathcal{E}(L) \cdot P$, 且 M 是连续 P -局部鞅, 则

$$\widetilde{M} = M - D^{-1} \cdot \langle M, D \rangle = M - \langle M, L \rangle$$

是连续 Q -局部鞅。此外, 若

$$\widetilde{L} = L - \langle L, L \rangle,$$

则

$$P = \mathcal{E}(-\widetilde{L}) \cdot Q.$$

证明. 第一条只需验证 $D^{-1} \cdot \langle M, D \rangle = \langle M, L \rangle$, 它直接来自

$$L_t = \log D_0 + \int_0^t D_s^{-1} dD_s.$$

对于第二条, 由第一条知

$$-\widetilde{L} = -L + \langle L, L \rangle$$

是 Q -局部鞅, 而且 $\langle \widetilde{L}, \widetilde{L} \rangle = \langle L, L \rangle$ 。所以

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(-\widetilde{L})_t &= \exp \left\{ -L_t + \langle L, L \rangle_t - \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_t \right\} \\ &= \mathcal{E}(L)_t^{-1}, \end{aligned}$$

从而 $P = \mathcal{E}(-\widetilde{L}) \cdot Q$ 。 □

现在再加强假设, 使 P, Q 可以扮演完全对称的角色。

定义 1.8. 若概率测度对 (P, Q) 满足: 在 $\mathcal{F}_\infty^0$ 上 $Q \sim P$, 且 P -密度鞅 D 连续, 则称 (P, Q) 为一个 *Girsanov 对*。

若 (P, Q) 是 Girsanov 对, 则 $(\mathcal{F}_t^0)$ 关于 Q 的完备化与关于 P 的完备化相同, 因而可以使用 $(\mathcal{F}_t)$, 不再区分 $(\mathcal{F}_t^0)$ 。由上面的结果, (Q, P) 也是 Girsanov 对, 而且 P, Q 下的连续半鞅类相同。

定义 1.9. 若 (P, Q) 是 Girsanov 对, 把连续 P -局部鞅空间到连续 Q -局部鞅空间的映射

$$M \mapsto \widetilde{M}$$

记作 G_P^Q , 称为从 P 到 Q 的 *Girsanov 变换*。

下一个命题说明这个映射实际上是双射; 它还表明, 在 $\mathcal{F}_\infty$ 上的概率测度集合中, “ (P, Q) 是 Girsanov 对” 所定义的关系是等价关系。

命题 1.10. 若 (P, Q) 与 (Q, R) 都是 Girsanov 对, 则 (P, R) 也是 Girsanov 对, 并且

$$G_Q^R \circ G_P^Q = G_P^R.$$

特别地,

$$G_Q^P \circ G_P^Q = G_P^Q \circ G_Q^P = I.$$

证明. 因为

$$\left. \frac{dR}{dP} \right|_{\mathcal{F}_t} = \left. \frac{dR}{dQ} \right|_{\mathcal{F}_t} \left. \frac{dQ}{dP} \right|_{\mathcal{F}_t},$$

所以 (P, R) 显然是 Girsanov 对。按定义, $G_P^R(M)$ 是 M 在 R 下的局部鞅部分。另一方面, M 与 $G_P^Q(M)$ 只相差一个有限变差过程, 所以 $G_P^R(M)$ 也正是 $G_P^Q(M)$ 在 R 下的局部鞅部分。这便证明了结论。□

注. 也可以直接使用定理 1.7 的显式表达式证明命题 1.10。

命题 1.11. Girsanov 变换 G_P^Q 与随机积分可交换。

在转向其他问题前, 先简述 Girsanov 对情形下定理 1.7 的另一证明; 它基于第 IV 章练习 3.11 与 3.14。这个证明的意义在于: 为了从 M 中减去而得到 Q -局部鞅的过程 A , 会自然地出现。

由第 IV 章练习 3.14, 只需证明对任意 λ , 过程

$$\exp \left\{ \lambda(M - A) - \frac{\lambda^2}{2} \langle M, M \rangle \right\}$$

是 Q -局部鞅。这等价于证明

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \lambda(M - A) - \frac{\lambda^2}{2} \langle M, M \rangle \right\} \\ & \times \exp \left\{ L - \frac{1}{2} \langle L, L \rangle \right\} \end{aligned}$$

是 P -局部鞅。该乘积等于

$$\exp \left\{ \lambda M + L - \frac{\lambda^2}{2} \langle M, M \rangle - \frac{1}{2} \langle L, L \rangle - \lambda A \right\}.$$

若取 $A = \langle M, L \rangle$, 第 IV 章练习 3.11 说明它正是 $\mathcal{E}(\lambda M + L)$ 。

注。 若 Q 与 P 在每个 $\mathcal{F}_t$ 上等价且 D 连续, 把时间区间限制在 $[0, t]$ 后, (P, Q) 就成为 Girsanov 对, 上面的结论都可使用。但必须注意, 此时所用滤过未必关于 P 或 Q 完备; 在 $[0, t]$ 上工作时, 应加入 $\mathcal{F}_t$ 中的零测集作完备化, 才能恢复上述框架。

下面以布朗运动说明这些结论; 下一节还会更深入地研究这一情形。

定理 1.12。 若 $Q \triangleleft P$, 而 B 是 $(\mathcal{F}_t^0, P)$ -布朗运动, 则

$$\tilde{B} = B - D^{-1} \cdot \langle B, D \rangle = B - \langle B, L \rangle$$

是 $(\mathcal{F}_t^0, Q)$ -布朗运动; 这里 L 表示密度过程的随机对数。

证明。 $\tilde{B}$ 的二次变差与 B 相同, 即 $\langle \tilde{B}, \tilde{B} \rangle_t = t$ 。所以可使用第 IV 章第 3 节的 P. Lévy 刻画定理。□

注。

1°) 同一证明适用于 d 维布朗运动。

2°) 若 $(\mathcal{F}_t)$ 是布朗滤过, 则对 $\mathcal{F}_\infty$ 上任意与 P 等价的 Q , 第 V 章第 3 节说明 (P, Q) 是 Girsanov 对。即便如此, $\tilde{B}$ 的滤过仍可能严格小于 B 的滤过; 见第 IX 章练习 3.15。

3°) 第 IV 章练习 1.35 说明, 同一结论对任意高斯鞅都成立。

本章及以后各章将给出 Girsanov 定理的许多应用, 其中一些以 “Cameron–Martin 公式” 为名; 参见本章末的注释与评述。通常先给定 D , 更确切地说先给定 L , 再在 $\mathcal{F}_t$ 上以

$$Q = \mathcal{E}(L)_t \cdot P$$

构造相应的 Q 。这要求 $\mathcal{E}(L)$ 是真正的 P -鞅, 即 $E[\mathcal{E}(L)_t] = 1$, 而不只是局部鞅; 否则参见练习 1.38。下面将给出保证这一性质的充分判据。

若 $E[\mathcal{E}(L)_t] = 1$, 公式 $Q = \mathcal{E}(L) \cdot P$ 先在代数 $\bigcup_t \mathcal{F}_t$ 上定义集函数; 还需把它延拓成 $\mathcal{F}_\infty$ 上的概率测度, 因此要验证它在该代数上的可列可加性。

命题 1.13。 设 X 是典范空间

$$\Omega = W = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$$

上的坐标过程, 并令

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s : s \leq t)_+.$$

若对每个 t , $E[\mathcal{E}(L)_t] = 1$, 则在 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^0)$ 上存在唯一概率测度 Q , 满足

$$Q = \mathcal{E}(L) \cdot P.$$

这是附录定理 6.1 的推论。

以上讨论说明, 需要判据来保证 $\mathcal{E}(L)$ 是鞅。若 L 有界, 或 $E[\exp(L_\infty^*)] < \infty$, 这一点很容易得到; 本节最后给出两个适用范围更广的判据。回忆: $\mathcal{E}(L)$ 是上鞅; 因为始终假设 $L_0 = 0$, 只要 $E[\mathcal{E}(L)_t] = 1$, 它就是鞅。第一个判据称为 Kazamaki 判据。这里回到一般滤过空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 。

命题 1.14 (Kazamaki 判据)。若局部鞅 L 满足 $\exp(\frac{1}{2}L)$ 是一致可积下鞅, 则 $\mathcal{E}(L)$ 是一致可积鞅。

证明。取 $a \in (0, 1)$ 。直接计算得到

$$\mathcal{E}(aL)_t = (\mathcal{E}(L)_t)^{a^2} (Z_t^{(a)})^{1-a^2}, \quad Z_t^{(a)} = \exp\left(\frac{aL_t}{1+a}\right).$$

由一致可积下鞅的可选停止定理 (第 II 章第 3 节), 假设说明随机变量族

$$\{Z_T^{(a)} : T \text{ 为停止时刻}\}$$

一致可积。若 $\Gamma \in \mathcal{F}$, T 是停止时刻, 则 Hölder 不等式给出

$$\begin{aligned} E[\mathbf{1}_\Gamma \mathcal{E}(aL)_T] &\leq E[\mathcal{E}(L)_T]^{a^2} E[\mathbf{1}_\Gamma Z_T^{(a)}]^{1-a^2} \\ &\leq E[\mathbf{1}_\Gamma Z_T^{(a)}]^{1-a^2}, \end{aligned}$$

因为 $E[\mathcal{E}(L)_T] \leq 1$ 。所以 $\{\mathcal{E}(aL)_T : T \text{ 为停止时刻}\}$ 一致可积, 因而 $\mathcal{E}(aL)$ 是一致可积鞅。于是

$$1 = E[\mathcal{E}(aL)_\infty] \leq E[\mathcal{E}(L)_\infty]^{a^2} E[Z_\infty^{(a)}]^{1-a^2}.$$

假设还说明 L_∞ 几乎处处存在, 且 $\exp(\frac{1}{2}L_\infty)$ 可积。又有

$$Z_\infty^{(a)} \leq \mathbf{1}_{\{L_\infty \leq 0\}} + \exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right) \mathbf{1}_{\{L_\infty > 0\}},$$

由支配收敛定理,

$$\lim_{a \uparrow 1} E[(Z_\infty^{(a)})^{1-a^2}] = 1.$$

令 $a \uparrow 1$, 上面的不等式给出 $E[\mathcal{E}(L)_\infty] \geq 1$ 。另一方面 $E[\mathcal{E}(L)_\infty] \leq 1$, 故它等于 1, 证明完成。□

注。若 L 是一致可积鞅, 且 $E[\exp(\frac{1}{2}L_\infty)] < \infty$, 则 $\exp(\frac{1}{2}L)$ 是一致可积下鞅, Kazamaki 判据适用; 下一证明将使用这一点。还要注意, 对局部鞅 M , 即使对每个 t 都有 $E[e^{M_t}] < \infty$, 也不能推出 e^M 是下鞅。例如 Z 是平面布朗运动且 $0 < \alpha < 2$ 时,

$$e^{-\alpha \log |Z_t|} = |Z_t|^{-\alpha}$$

的期望随 t 递减; 事实上它是上鞅 (另见第 XI 章练习 1.24)。

由命题 1.14 可推出 Novikov 判据。练习 1.30、1.34 将说明, 它虽常更容易使用, 适用范围却较窄。

命题 1.15 (Novikov 判据)。若连续局部鞅 L 满足

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty\right)\right] < \infty,$$

则 $\mathcal{E}(L)$ 是一致可积鞅。此外,

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty^*\right)\right] < \infty,$$

从而对每个 $p \in [1, \infty)$, 都有 $L \in H^p$ 。

证明。 假设说明 $\langle L, L \rangle_\infty$ 具有任意阶矩；由 BDG 不等式, L_∞^* 也具有任意阶矩。特别地, L 是一致可积鞅。此外,

$$\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right) = \mathcal{E}(L)_\infty^{1/2} \exp\left(\frac{1}{4}\langle L, L \rangle_\infty\right).$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)\right] &\leq E[\mathcal{E}(L)_\infty]^{1/2} \\ &\quad \times E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty\right)\right]^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

又因 $E[\mathcal{E}(L)_\infty] \leq 1$, 结合命题 1.14 后的注, $\mathcal{E}(L)$ 是一致可积鞅。

为证明 $E[e^{L_\infty^*/2}] < \infty$, 注意现在已知对 $c < 1/2$,

$$e^{cL_t} = \mathcal{E}^c(L)_t \exp\left(\frac{c^2}{2}\langle L, L \rangle_t\right)$$

是正下鞅。对 $p = 1/(2c)$ 使用 Doob 不等式, 得到

$$E\left[\sup_t e^{L_t/2}\right] \leq C_p E\left[\mathcal{E}^c(L)_\infty^{1/(2c)} \exp\left(\frac{c}{4}\langle L, L \rangle_\infty\right)\right].$$

再由 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned} E\left[\sup_t e^{L_t/2}\right] &\leq C_p E\left[\mathcal{E}^c(L)_\infty^{(2-c)/(4c)}\right]^{2/(2-c)} \\ &\quad \times E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty\right)\right]^{c/2}. \end{aligned}$$

当 $c > 2/5$ 时, $(2-c)/(4c) < 1$, 故右端有限。对 $-L$ 作同样论证, 即得所求。 $\square$

注。 练习 1.31 将说明, 命题 1.15 的假设中 $1/2$ 不能换成 $1/2 - \delta$, 其中 $\delta > 0$ 。

上述结果也可在区间 $[0, t]$ 上表述。使用从 $[0, \infty]$ 到 $[0, t]$ 的递增同胚, 得到:

推论 1.16。 若局部鞅 L 满足以下两条之一:

- i) $\exp(\frac{1}{2}L)$ 是下鞅;
- ii) 对每个 t ,

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L \rangle_t\right)\right] < \infty,$$

则 $\mathcal{E}(L)$ 是鞅。

最后比较这两个判据。Kazamaki 判据必须假定 $\exp(\frac{1}{2}L)$ 是下鞅, 而 Novikov 判据会把这一点作为结论的一部分导出。Novikov 判据还是“双边”的: 它对 L 成立当且仅当对 $-L$ 成立; Kazamaki 判据则可能只对其中一个成立。最后, Kazamaki 判据并不是 $\mathcal{E}(L)$ 成为鞅的必要条件; 第 IX 章练习 2.10 将给出相应例子。

练习 1.17 (#). 设正连续鞅 D 满足: 对每个 t , 在 $\mathcal{F}_t$ 上

$$Q = D_t \cdot P.$$

证明命题 1.2 的如下加强:

$$Y = \inf_t D_t > 0, \quad Q\text{-几乎处处}.$$

再假设 P, Q 在 $\mathcal{F}_\infty$ 上互相奇异, 证明在 Q 下, Y 在 $[0, 1]$ 上均匀分布.

练习 1.18. 设 P_i ($i = 1, 2, 3$) 是三个概率测度, 任意两个都组成 Girsanov 对. 令

$$D_j^i = \mathcal{E}(L_j^i), \quad P_i = D_j^i \cdot P_j.$$

存在一个 P_1 -鞅 M , 使

$$D_2^3 = \mathcal{E}(G_{P_1}^{P_2}(M)).$$

证明

$$L_1^3 = M + L_1^2.$$

练习 1.19. 用 $\mathcal{M}(P)$ 表示相对于 P 的连续局部鞅空间. 设 (P, Q) 是 Girsanov 对, 且 $\Gamma: \mathcal{M}(P) \rightarrow \mathcal{M}(Q)$.

1°) 若对每个 $M \in \mathcal{M}(P)$ 和 $N \in \mathcal{M}(Q)$,

$$\langle \Gamma(M), N \rangle = \langle M, N \rangle,$$

证明 $\Gamma = G_P^Q$.

2°) 若对每个 $M, N \in \mathcal{M}(P)$,

$$\langle \Gamma(M), \Gamma(N) \rangle = \langle M, N \rangle,$$

证明存在映射 $J: \mathcal{M}(P) \rightarrow \mathcal{M}(P)$, 使

$$\langle J(M), J(N) \rangle = \langle M, N \rangle, \quad \Gamma = G_P^Q \circ J.$$

练习 1.20. 若 (P, Q) 是密度为 D 的 Girsanov 对, M 是 P -鞅, 证明 MD^{-1} 是 Q -鞅, 并把它表示为一个 Girsanov 变换. 结合练习 1.19 注意, 映射

$$M \mapsto MD^{-1}$$

既不保持括号, 也不与随机积分可交换.

练习 1.21 (#).

1°) 设 B 是标准一维布朗运动. 给定 $a > 0, b > 0$, 令

$$\sigma_{a,b} = \inf\{t : B_t + bt = a\}.$$

利用 Girsanov 定理证明, $\sigma_{a,b}$ 的密度为

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(a-bt)^2}{2t}\right), \quad t > 0.$$

第 III 章练习 3.28 已用另一方法得到该结果; 比较两种证明。

2°) 直接由 DDS 定理和第 1 问证明 Novikov 判据。

练习 1.22。 若存在 $\varepsilon > 0$, 使对每个 t ,

$$E\left[\exp\left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\langle M, M \rangle_t\right)\right] < \infty,$$

仅使用 Hölder 不等式和初等计算, 证明 $\mathcal{E}(M)$ 是鞅。

练习 1.23。 设 B 是标准一维布朗运动。对任意满足

$$E[e^{T/2}] < \infty$$

的停止时刻 T , 证明

$$E\left[\exp\left(B_T - \frac{1}{2}T\right)\right] = 1.$$

练习 1.24。

1°) 设 B 是标准一维布朗运动。证明

$$T = \inf\{t : B_t^2 = 1 - t\}$$

是停止时刻, 并且

$$P(0 < T < 1) = 1.$$

2°) 令

$$H_s = -\frac{2B_s \mathbf{1}_{\{T \geq s\}}}{(1-s)^2}.$$

证明对每个 t ,

$$\int_0^t H_s^2 ds < \infty \quad \text{几乎处处.}$$

3°) 若

$$M_t = \int_0^t H_s dB_s,$$

计算

$$M_t - \frac{1}{2}\langle M, M \rangle_t + (1 - t \wedge T)^{-2} B_{T \wedge t}^2.$$

4°) 证明

$$E[\mathcal{E}(M)_1] < 1,$$

从而 $(\mathcal{E}(M)_t)_{t \in [0,1]}$ 不是鞅。

练习 1.25 (#). 设滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 的每个鞅都连续 (见第 V 章第 3 节)。若 (H_n) 是一列可料过程, 几乎处处收敛到过程 H , 并且

$$|H_n| \leq K,$$

其中 K 是局部有界可料过程, 证明对每个连续 $(\mathcal{F}_t)$ -半鞅 X 和每个 t ,

$$\int_0^t H_n \, dX \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \int_0^t H \, dX.$$

提示: 选取一个使 (H_n) 一致有界的适当集合 Γ , 使用概率测度

$$Q = \frac{P(\cdot \cap \Gamma)}{P(\Gamma)}.$$

练习 1.26 (第 IV 章练习 5.15 的续题). 证明 N 具有 $(\mathcal{F}_t^Y)$ -可料表示性质。因此每个 $(\mathcal{F}_t^Y)$ -局部鞅都连续。

提示: 先设 h 有界, 再改变概率律, 使 Y 成为布朗运动。

练习 1.27 (*).

- 1° 设 (P, Q) 是相对于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 的 Girsanov 对。若连续 P -局部鞅 M 具有 $(\mathcal{F}_t)$ -可料表示性质, 证明 $G_P^Q(M)$ 也有这一性质。第 IX 章练习 3.12 将说明, 该结论不能推广到纯性。
- 2° 设 $B = (B^1, B^2)$ 是二维布朗运动, 并令

$$X_t = B_t^1 + \int_0^t B_s^2 \, ds.$$

证明 B^1 不适应于 $(\mathcal{F}_t^X)$ 。

提示: 使用

$$Q = \mathcal{E}\left(-\int_0^\cdot B_s^2 \, dB_s^1\right) \cdot P$$

证明存在一个一维布朗运动, 它具有 $(\mathcal{F}_t^X)$ -可料表示性质。

练习 1.28. 沿用本节记号, 假设 $Q \ll P$ 在 $\mathcal{F}_\infty$ 上成立, 且 D 连续。若

$$\frac{dQ}{dP} \in L^2(P),$$

证明按第 IV 章练习 4.13 的记号, $\mathcal{H}_2(P)$ 中的每个半鞅都属于 $\mathcal{H}_1(Q)$ 。

练习 1.29. 证明若

$$\langle M, M \rangle_\infty = \infty,$$

则当 $t \rightarrow \infty$ 时

$$\mathcal{E}(M)_t \longrightarrow 0 \quad \text{几乎处处,}$$

因而 $\mathcal{E}(M)$ 不可能一致可积。

练习 1.30。 设 B 是标准一维布朗运动,

$$T_1 = \inf\{t : B_t = 1\},$$

并定义

$$\tau_t = \begin{cases} \frac{t}{1-t} \wedge T_1, & t < 1, \\ T_1, & t \geq 1. \end{cases}$$

证明

$$M_t = B_{\tau_t}$$

是连续鞅, Kazamaki 判据对它适用, 而 Novikov 判据不适用。

提示: 证明 $\mathcal{E}(-M)$ 不是鞅, 并注意 Novikov 判据对 M 适用当且仅当对 $-M$ 适用。

练习 1.31 (*)。 沿用第 II 章练习 3.14 和第 III 章练习 3.28 的情形与记号; 另见本节练习 1.21。

1°) 证明

$$E\left[\exp\left(B_{\sigma_{1,b}} - \frac{1}{2}\sigma_{1,b}\right)\right] < 1.$$

2°) 由此推出: 对任意 $\delta > 0$, 存在连续鞅 M , 使

$$E\left[\exp\left(\left(\frac{1}{2} - \delta\right)\langle M, M \rangle_\infty\right)\right] < \infty,$$

但 $\mathcal{E}(M)$ 不是一致可积鞅。

练习 1.32 (*)。 设 $M \in \text{BMO}$, 且 $M_0 = 0$ 。利用第 IV 章练习 1.40 证明: 对任意停止时刻 T ,

$$E[\mathcal{E}(M)_\infty \mathcal{E}(M)_T^{-1} | \mathcal{F}_T] \geq \exp\left(-\frac{1}{2}\|M\|_{\text{BMO}_2}^2\right).$$

进而证明 $\mathcal{E}(M)$ 是一致可积鞅。

练习 1.33 (*)。 设连续局部鞅 M 从 0 出发。对实数 α , 令

$$G_t^\alpha = \exp\left\{\alpha M_t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\langle M, M \rangle_t\right\},$$

并定义

$$g(\alpha) = \sup\{E[G_T^\alpha] : T \text{ 为停止时刻}\}.$$

1°) 对 $\alpha \leq \beta < 1$, 证明

$$g(\beta) \leq g(\alpha)^{(1-\beta)/(1-\alpha)};$$

对 $1 < \alpha \leq \beta$, 证明

$$g(\alpha) \leq g(\beta)^{(\alpha-1)/(\beta-1)}.$$

2°) 若 $a \neq 0$, 且

$$T_t = \inf\{s : \langle M, M \rangle_s > t\},$$

证明 $\mathcal{E}(aM)$ 是一致可积鞅, 当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[\mathcal{E}(aM)_{T_t} \mathbf{1}_{\{T_t < \infty\}}] = 0.$$

3°) 若 $\alpha \neq 1$ 且 $g(\alpha) < \infty$, 证明 $\mathcal{E}(\alpha M)$ 与 $\mathcal{E}(M)$ 都是一致可积鞅。

4°) 若 $M \in \text{BMO}$, 证明存在某个 $\alpha \neq 1$, 使 $g(\alpha) < \infty$ 。

练习 1.34 (#). 设 ρ_t 是从 $a \neq 0$ 出发的平面布朗运动的模。证明

$$L_t = \log \frac{\rho_t}{|a|}$$

是局部鞅; 在任意区间 $[0, t]$ 上, Kazamaki 判据对它适用, 而 Novikov 判据不适用。

练习 1.35 (*). 假设滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 的所有鞅都连续。设 X, Y 是两个连续半鞅。若 $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty$, 且 $X - Y$ 在 Γ 上具有有限变差, 证明 X, Y 的鞅部分在 Γ 上相等。这个结论在一般情形下仍然成立, 但无法用本书的方法证明。

提示: 使用

$$Q = \frac{P(\cdot \cap \Gamma)}{P(\Gamma)}.$$

练习 1.36 (*). 设 P 是

$$\Omega = C([0, 1], \mathbb{R})$$

上的 Wiener 测度, $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(s) : s \leq t)$, 而 b 是有界可料过程。令

$$Q = \exp \left\{ \int_0^1 b(s, \omega) d\omega(s) - \frac{1}{2} \int_0^1 b(s, \omega)^2 ds \right\} \cdot P,$$

并定义

$$\theta(\omega)_t = \omega(t) - \int_0^t b(s, \omega) ds.$$

证明若 $(M_t)_{t \leq 1}$ 是 $(\mathcal{F}_t, P)$ -鞅, 则 $(M_t \circ \theta)_{t \leq 1}$ 是 $(\mathcal{F}_t, Q)$ -鞅。例如, 若 $h \in C^{2,1}$ 满足

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0,$$

则 $h(\theta(\omega)_t, t)$ 是 $(\mathcal{F}_t, Q)$ -鞅。

提示: 若

$$\hat{\mathcal{F}}_t = \sigma(\theta(\omega)_s : s \leq t),$$

可利用表示定理证明, 每个 $(\hat{\mathcal{F}}_t, Q)$ -鞅也是 $(\mathcal{F}_t, Q)$ -鞅。

练习 1.37 (*). 设滤过空间 $(\Omega, (\mathcal{F}_t), P)$ 的每个 $(\mathcal{F}_t, P)$ -鞅都连续。令 X 是适应的连续过程, Π 是满足下列条件的概率测度 Q 的全体:

i) 对每个 t ,

$$Q|_{\mathcal{F}_t} \sim P|_{\mathcal{F}_t};$$

ii) X 是 $(\mathcal{F}_t, Q)$ -局部鞅。

1°) 若 $\Pi \neq \emptyset$, 证明 X 是 P -半鞅, 并有典范分解

$$X = M + A,$$

其中

$$dA \ll d\langle M, M \rangle \quad \text{几乎处处.}$$

2°) 反过来, 假设第 1 问的条件在 P 下成立。称

$$h = \frac{dA}{d\langle M, M \rangle}$$

的一个良好版本 (见第 V 章第 3 节)。若可在 $\mathcal{F}_\infty$ 上定义概率测度 $\tilde{Q}$, 使

$$\tilde{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}\left(-\int_0^t h_s dM_s\right)_t \cdot P|_{\mathcal{F}_t},$$

证明 $\tilde{Q} \in \Pi$ 。

3°) 若第 2 问的条件成立, 描述集合 Π 。证明 $\tilde{Q}$ 是 Π 的唯一元素, 当且仅当 M 在 P 下具有可料表示性质。

练习 1.38 (*)。设 P, Q 是同一滤过空间上的两个概率测度, 滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续, 并且关于 P, Q 都完备。令 D_t 是 Q 关于 $(P+Q)/2$ 的密度鞅。注意

$$0 \leq D_t \leq 2 \quad (P+Q)\text{-几乎处处,}$$

并令

$$T = \inf\{t : D_t = 2\}.$$

1°) 证明 $P(T = \infty) = 1$, 并证明在 $\mathcal{F}_t$ 上, Q 关于 P 的 Lebesgue 分解可写成

$$Q(B) = \int_B Z_t dP + Q(B \cap \{T \leq t\}), \quad B \in \mathcal{F}_t,$$

其中

$$Z_t = \frac{D_t}{2 - D_t} \quad \text{在 } \{t < T\} \text{ 上,} \quad Z_t = 0 \quad \text{在 } \{t \geq T\} \text{ 上.}$$

证明 Z 是正 P -上鞅。若另一对 (T', Z') 具有同样性质, 证明 $T' = T$ 在 Q -几乎处处意义下成立, 且 $Z' = Z$ 至多相差 P -不可分辨修改。

2°) 假设 D 连续, 证明概率测度 P, Q 和滤过 $(\mathcal{F}_{t \wedge T})$ 的 Girsanov 定理。

练习 1.39。设 H 是相对于布朗滤过的可料过程, 并存在常数 $0 < c \leq C < \infty$, 使

$$c \leq H \leq C.$$

对任意 $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, ds)$, 证明

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{c^2}{2} \int_0^t f(s)^2 ds\right) &\leq E\left[\exp\left(\int_0^t f(s) H_s dB_s\right)\right] \\ &\leq \exp\left(\frac{C^2}{2} \int_0^t f(s)^2 ds\right). \end{aligned}$$

提示：使用 Novikov 判据。

练习 1.40 (*, 另一种 Novikov 型判据)。设 B 是一个 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, H 是适应过程, 并且存在常数 $a, c > 0$, 使得对每个 $s \leq t$,

$$E[\exp(aH_s^2)] \leq c.$$

证明：若 $r \leq s \leq t$ 且 $s - r$ 充分小, 则

$$E\left[\frac{\mathcal{E}(H \cdot B)_s}{\mathcal{E}(H \cdot B)_r} \middle| \mathcal{F}_r\right] = 1,$$

并由此推出

$$E[\mathcal{E}(H \cdot B)_t] = 1.$$

特别地, 当 H 是高斯过程时, 这一判据适用。

提示：先截断 H , 再利用 Novikov 判据与 Jensen 不等式令截断水平趋于无穷。

练习 1.41 (定理 1.12 的逆命题)。设 P 是 Wiener 空间 $\mathbb{W}$ 上的概率测度。沿用本节记号, 假设对每个与 P 等价的概率测度 Q , $\tilde{X}$ 在 Q 下的分布都与 X 在 P 下的分布相同。证明 P 是某个高斯鞅的分布。

提示：对任意正泛函 F , 使用

$$E_P\left[F(\langle X, X \rangle) \frac{dQ}{dP}\right] = E_P[F(\langle X, X \rangle)].$$

2 Girsanov 定理在 Wiener 空间研究中的应用

本节汇集若干关于 Wiener 空间的结果。它们表面上彼此联系不大, 实际上都由 Girsanov 变换以及无处不在的 Cameron–Martin 空间联系起来; 这个空间正是第 I 章练习 3.12 中的再生核 Hilbert 空间。另一条贯穿本节的主线, 是布朗运动的所谓作用泛函。

固定 $T > 0$, 把时间区间限制在 $[0, T]$ 。记

$$\mathbb{W} = \{\omega \in C([0, T], \mathbb{R}^d) : \omega(0) = 0\}.$$

在 $\mathbb{W}$ 上取一致收敛拓扑, 相应范数记为 $\|\cdot\|_\infty$, 也简记为 $\|\cdot\|$ 。Wiener 测度仍记为 W , 坐标映射记为

$$\beta_t(\omega) = \omega(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

由于 $\mathbb{W}$ 是向量空间, 可以在其中作平移。对 $h \in \mathbb{W}$, 定义 $\tau_h : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$ 为

$$\beta_t(\tau_h(\omega)) = \beta_t(\omega) + h(t).$$

记 $W_h = W \circ \tau_h^{-1}$ 为 W 在 τ_h 下的像测度。于是, 对任意有限个时刻 $t_i \leq T$ 以及 Borel 集 $A_i \subset \mathbb{R}^d$, 有

$$W_h\left(\bigcap_i \{\omega : \beta_{t_i}(\omega) \in A_i\}\right) = W\left(\bigcap_i \{\omega : \beta_{t_i}(\omega) + h(t_i) \in A_i\}\right).$$

因此, 概率测度 Q 等于 W_h , 当且仅当在 Q 下

$$\beta = B + h,$$

其中 B 是标准 d 维布朗运动。下面研究 W_h 与 W 等价的充要条件。

定义 2.1. 由所有函数 $h: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ 构成的空间 H , 若其每个分量 h_i 都绝对连续、 $h_i(0) = 0$, 并且

$$\int_0^T |h'(s)|^2 ds = \sum_{i=1}^d \int_0^T h_i'(s)^2 ds < \infty,$$

则称 H 为 *Cameron–Martin* 空间。

当 $d = 1$ 时, 第 I 章练习 1.12 已引入这个空间; 另见同章练习 3.12。以内积

$$\langle h, g \rangle_H = \sum_{i=1}^d \int_0^T h_i'(s) g_i'(s) ds$$

装备 H , 它成为 Hilbert 空间; 相应范数记为 $\|h\|_H = \langle h, h \rangle_H^{1/2}$ 。用折线函数逼近容易证明, H 在 $\mathbb{W}$ 的一致拓扑下稠密。

若 $h \in H$, 则鞅

$$(h' \cdot \beta)_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t h_i'(s) d\beta_s^i$$

中的随机积分均在 W 下取。它满足 Novikov 判据 1.15, 因此 $\mathcal{E}(h' \cdot \beta)$ 是鞅。这也可直接由 $h' \cdot \beta$ 是高斯鞅得到; 第 V 章已经多次使用这一事实。

定理 2.2 (Cameron–Martin 定理). 概率测度 W_h 与 W 等价, 当且仅当 $h \in H$ 。在这种情形下,

$$W_h = \mathcal{E}(h' \cdot \beta)_T \cdot W.$$

换言之, W 关于 H 是拟不变的, 其 Radon–Nikodym 导数为 $\mathcal{E}(h' \cdot \beta)_T$ 。

证明. 先设 $W_h \sim W$ 。由第 V 章第 3 节以及上一节的结果, 存在连续鞅 M , 使

$$W_h = \mathcal{E}(M)_T \cdot W.$$

由 Girsanov 定理,

$$\beta^i = \tilde{B}^i + \langle \beta^i, M \rangle,$$

其中 $\tilde{B}$ 是 W_h -布朗运动。另一方面, 由 W_h 的定义,

$$\beta = B + h,$$

其中 B 也是 W_h -布朗运动。因此在 W_h 下, 确定性函数 h 是半鞅; 由第 I 章练习 1.38 (另见第 IV 章练习 2.19), 它具有有界变差。在 β 自身生成的滤过中, 上面给出了 β 的两个分解; 由分解唯一性,

$$h_i(t) = \langle \beta^i, M \rangle_t \quad W_h\text{-几乎处处}.$$

再由第 V 章第 3 节, 存在可料过程 ϕ , 使

$$\int_0^T |\phi_s|^2 ds < \infty \quad W\text{-几乎处处}, \quad M_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t \phi_s^i d\beta_s^i.$$

于是

$$h_i(t) = \int_0^t \phi_s^i \, ds.$$

这既说明 $h \in H$ ，又说明可以取确定性函数 $\phi^i = h'_i$ ，从而得到定理中的密度公式。
反过来，若 $h \in H$ ，则

$$Q = \mathcal{E}(h' \cdot \beta)_T \cdot W$$

与 W 等价，并且在 Q 下

$$\beta^i = B^i + \int_0^\cdot h'_i(s) \, ds = B^i + h_i,$$

其中 B 是布朗运动。因此 $Q = W_h$ 。 □

注。 无论 h 如何，在 W_h 下 β 都是高斯过程。由高斯测度的一般结果， W_h 与 W 不是等价就是互相奇异。因此，若 $h \notin H$ ，则 $W_h \perp W$ 。

回忆（见第 XIII 章第 1 节），由 β 生成的 σ -代数 $\mathcal{F}_T$ 正是 $\mathbb{W}$ 的 Borel σ -代数；一个测度的支撑，是承载该测度的最小闭集。

推论 2.3。 Wiener 测度 W 的支撑是整个空间 $\mathbb{W}$ 。

证明。 支撑至少包含一点。由定理 2.2，它包含该点沿 H 中任意元素的全部平移；再由 H 在 $\mathbb{W}$ 中稠密，结论成立。 □

下面补充第 V 章定理 3.4 的鞅表示结果；刚才证明定理 2.2 时已经使用了它。令 $(\mathcal{F}_t)$ 是由 β 生成并关于 W 完备化的滤过。若 $X \in L^2(\mathcal{F}_T, W)$ ，则

$$X = E[X] + \int_0^T \phi_s \, d\beta_s$$

其中 $\phi \in L^2_{\mathcal{P}}(\beta^T)$ 。另一方面， X 几乎处处等于路径 $\omega \in \mathbb{W}$ 的某个函数 $F(\omega)$ ，且

$$E[F(\omega)^2] < \infty.$$

我们的目标，是由 F 直接求出 ϕ 。若 $\psi \in \mathbb{W}$ ，则 $\omega + \psi \in \mathbb{W}$ ，因而 $F(\omega + \psi)$ 有明确意义；有时也把 $F(\omega)$ 写成 $F(\beta)$ 。以下假设 F 满足：

i) 存在常数 K ，使对每个 $\psi \in \mathbb{W}$ ，

$$|F(\beta + \psi) - F(\beta)| \leq K \|\psi\|;$$

ii) 存在从 Ω 到 $[0, T]$ 的核 F' ，使对每个 $\psi \in H$ ，

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (F(\beta + \varepsilon \psi) - F(\beta)) = \int_0^T F'(\beta, dt) \psi(t), \quad \text{对几乎每条 } \beta.$$

条件 i) 蕴含 $E[F(\beta)^2] < \infty$ 。此外，若 F 是 Banach 空间 $\mathbb{W}$ 上具有有界导数的可微函数，则由中值定理，i) 成立；而 $\mathbb{W}$ 上的连续线性泛函可表示为 $[0, T]$ 上的有界测度，所以 ii) 也成立。

定理 2.4 (Clark 公式)。在条件 i)、ii) 下, ϕ 是过程

$$F'(\beta, (t, T])$$

的可料投影。

证明。 令 u 是有界的 $(\mathcal{F}_t)$ -可料过程, 并置

$$\psi_t = \int_0^t u_s \, ds, \quad \tilde{\psi}_t = \int_0^t u_s \, d\beta_s.$$

对每个 ω , 映射 $t \mapsto \psi_t(\omega)$ 属于 $\mathbb{W}$ 。对 $\varepsilon > 0$, 由 Novikov 判据, $\mathcal{E}(\varepsilon\tilde{\psi})_t$ ($t \leq T$) 是一致可积鞅。若

$$Q = \mathcal{E}(\varepsilon\tilde{\psi})_T \cdot W,$$

则在 Q 下 $\beta - \varepsilon\psi$ 是布朗运动。因此

$$E[F(\beta)] = E\left[F(\beta - \varepsilon\psi)\mathcal{E}(\varepsilon\tilde{\psi})_T\right].$$

等价地,

$$\begin{aligned} 0 &= E\left[(F(\beta - \varepsilon\psi) - F(\beta))(\mathcal{E}(\varepsilon\tilde{\psi})_T - 1)\right] \\ &\quad + E[F(\beta - \varepsilon\psi) - F(\beta)] \\ &\quad + E\left[F(\beta)(\mathcal{E}(\varepsilon\tilde{\psi})_T - 1)\right]. \end{aligned}$$

两边除以 ε , 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。由 i), 第一项的绝对值不超过

$$KT \|u\|_\infty E\left[\left|\mathcal{E}(\varepsilon\tilde{\psi})_T - 1\right|\right],$$

故趋于 0。这里 $\mathcal{E}(\varepsilon\tilde{\psi})_T$ 逐点趋于 1, 且

$$\mathcal{E}(\varepsilon\tilde{\psi})_T \leq \exp(\varepsilon\tilde{\psi}_T^*).$$

稍后将证明: 当 $\alpha > 0$ 充分小时,

$$E[\exp(\alpha\tilde{\psi}_T^*)] < \infty.$$

这给出了所需的支配条件。对第二项, i)、ii) 允许使用支配收敛定理。最后,

$$\varepsilon^{-1}(\mathcal{E}(\varepsilon\tilde{\psi})_T - 1) = \int_0^T \mathcal{E}(\varepsilon\tilde{\psi})_s u_s \, d\beta_s,$$

并且

$$\mathcal{E}(\varepsilon\tilde{\psi})u \longrightarrow u \quad \text{于 } L^2(dW \otimes ds).$$

事实上, 由 Doob 不等式,

$$E\left[\sup_{s \leq T} (\mathcal{E}(\varepsilon\tilde{\psi})_s - 1)^2 u_s^2\right] \leq 4 \|u\|_\infty^2 E\left[(\mathcal{E}(\varepsilon\tilde{\psi})_T - 1)^2\right],$$

而最后一项趋于 0: 当 $\varepsilon \leq \alpha$ 时, 被积函数受 $(\exp(\alpha\tilde{\psi}_T^*) + 1)^2$ 支配。由随机积分的 L^2 -等距性,

$$\varepsilon^{-1}(\mathcal{E}(\varepsilon\tilde{\psi})_T - 1) \longrightarrow \int_0^T u_s \, d\beta_s \quad \text{于 } L^2(W).$$

因此

$$E\left[F(\beta) \int_0^T u_s \, d\beta_s\right] = E\left[\int_0^T F'(\beta, dt)\psi_t\right].$$

对右端作分部积分, 并利用 X 的鞅表示, 得到

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T \phi_s u_s \, ds\right] &= E\left[\left(\int_0^T \phi_s \, d\beta_s\right) \left(\int_0^T u_s \, d\beta_s\right)\right] \\ &= E\left[\int_0^T u_s F'(\beta, (s, T]) \, ds\right]. \end{aligned}$$

由可料投影的定义, 结论成立。

还须验证上面两次使用的可积性。由 DDS 定理, 存在布朗运动 γ , 使

$$\tilde{\psi} = \gamma_{\langle \tilde{\psi}, \tilde{\psi} \rangle},$$

而对某个常数 c , $\langle \tilde{\psi}, \tilde{\psi} \rangle_T \leq c$ 。故当 $\alpha > 0$ 充分小时,

$$E\left[\exp(\alpha(\tilde{\psi}_T^*)^2)\right] \leq E\left[\exp(\alpha(\gamma_c^*)^2)\right] < \infty.$$

□

注。 若不想使用可料投影, 也可以把定理 2.4 表述为: ϕ 是 Hilbert 空间 $L^2(dW \otimes dt)$ 中, 过程 $F'(\beta, (t, T])$ 在可料过程等价类所成闭子空间上的正交投影 (见第 IV 章练习 5.18)。

本节余下部分讨论布朗运动的渐近结果。

定义 2.5。 在 $\mathbb{W}$ 上定义泛函

$$I_T(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^T |\phi'(s)|^2 \, ds = \frac{1}{2} \|\phi\|_H^2, & \phi \in H, \\ +\infty, & \phi \notin H, \end{cases}$$

称为布朗运动的作用泛函。

以后常把下标 T 省略。先记录作用泛函的几个基本性质。

引理 2.6。 实值函数 ϕ 在 $[0, T]$ 上绝对连续且 $\phi' \in L^2([0, T])$, 当且仅当

$$M(\phi) = \sup_{\pi} \sum_i \frac{(\phi(t_{i+1}) - \phi(t_i))^2}{t_{i+1} - t_i} < \infty,$$

其中上确界取遍 $[0, T]$ 的所有有限分割 $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ 。在这种情形下,

$$\int_0^T \phi'(s)^2 \, ds = M(\phi).$$

证明。 若 $\phi' \in L^2$, 直接使用 Cauchy-Schwarz 不等式使得

$$M(\phi) \leq \int_0^T \phi'(s)^2 \, ds.$$

反过来, 设 $M(\phi) < \infty$. 对 $[0, T]$ 中任意两两不交的区间 (α_i, β_i) , 再次使用 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned} \sum_i |\phi(\beta_i) - \phi(\alpha_i)| &\leq \left(\sum_i \frac{(\phi(\beta_i) - \phi(\alpha_i))^2}{|\beta_i - \alpha_i|} \right)^{1/2} \left(\sum_i |\beta_i - \alpha_i| \right)^{1/2} \\ &\leq M(\phi)^{1/2} \left(\sum_i |\beta_i - \alpha_i| \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

这证明 ϕ 绝对连续。

令 (α_i^n) 是 $[0, T]$ 的第 n 个二进分割。由鞅理论 (第 II 章练习 2.13), ϕ' 几乎处处等于下列函数的极限:

$$\psi^n(s) = \frac{2^n}{T} \sum_i (\phi(\alpha_{i+1}^n) - \phi(\alpha_i^n)) \mathbf{1}_{[\alpha_i^n, \alpha_{i+1}^n)}(s).$$

由 Fatou 引理,

$$\int_0^T \phi'(s)^2 \, ds \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \psi^n(s)^2 \, ds \leq M(\phi).$$

结合前面的反向不等式, 结论成立。 $\square$

命题 2.7。

- i) 泛函 $\phi \mapsto I_T(\phi)$ 在 $\mathbb{W}$ 上下半连续;
- ii) 对每个 $\lambda \geq 0$, 集合

$$K_\lambda = \{\phi : I_T(\phi) \leq \lambda\}$$

在 $\mathbb{W}$ 中紧。

证明。 结论可逐分量证明, 所以只需考虑 $d = 1$. 先证 ii). 若 $\phi \in K_\lambda$, 则由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq \sqrt{2\lambda} |t - s|^{1/2}, \quad |\phi(t)| \leq \sqrt{2\lambda T}.$$

因此 K_λ 一致有界且等度连续, 由 Arzelà-Ascoli 定理相对紧。若 $\phi_n \rightarrow \phi$ 于 $\mathbb{W}$, 并且 $I_T(\phi_n) \leq \lambda$, 则

$$M(\phi) \leq \sup_n M(\phi_n) \leq 2\lambda.$$

由引理 2.6, $I_T(\phi) \leq \lambda$, 故 K_λ 闭, 从而紧。最后, 所有下水平集闭等价于 i). ^a $\square$

^a**阅读提示:** 原书在此只写出了下水平集的闭性检验; 为使“紧性”论证完整, 这里补出了由一致 $1/2$ -Hölder 控制和 Arzelà-Ascoli 定理得到的相对紧性。

第一个渐近结果是布朗运动的大偏差定理。先给出相应定义。

定义 2.8。 对集合 $A \subset \mathbb{W}$, 定义其 Cramér 变换为

$$\Lambda_T(A) = \inf\{I_T(\phi) : \phi \in A\} \leq +\infty.$$

以下固定 T ，并省略记号中的下标。我们关心当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的概率

$$W[\varepsilon\beta \in A].$$

显然，若 A 闭且 $0 \notin A$ ，这个概率趋于 0；下面将确定其收敛速度。记 $B(\phi, \delta)$ 为 $\mathbb{W}$ 中以 ϕ 为中心、半径为 δ 的开球。以下两个引理通常称为 Ventsel–Freidlin 估计。

引理 2.9。 若 $\phi \in H$ ，则对任意 $\delta > 0$ ，

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log W[\varepsilon\beta \in B(\phi, \delta)] \geq -I(\phi).$$

证明。 当 $I(\phi) = 0$ 时， $\phi = 0$ ，结论显然。以下设 $I(\phi) > 0$ 。由定理 2.2，

$$\begin{aligned} W[\varepsilon\beta \in B(\phi, \delta)] &= W[\beta - \varepsilon^{-1}\phi \in B(0, \delta\varepsilon^{-1})] \\ &= \int_{B(0, \delta\varepsilon^{-1})} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \phi'(s) d\beta_s - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T \phi'(s)^2 ds \right\} dW \\ &= \exp(-\varepsilon^{-2}I(\phi)) \int_{B(0, \delta\varepsilon^{-1})} \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \phi'(s) d\beta_s \right) dW. \end{aligned}$$

当 ε 充分小时，

$$W[B(0, \delta\varepsilon^{-1})] \geq \frac{3}{4}.$$

另一方面，由 Chebyshev 不等式，

$$W \left[\int_0^T \phi'(s) d\beta_s \geq 2\sqrt{2I(\phi)} \right] \leq \frac{1}{8I(\phi)} \int_0^T \phi'(s)^2 ds = \frac{1}{4}.$$

因此

$$W \left[\exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \phi'(s) d\beta_s \right) \geq \exp \left(-\frac{2}{\varepsilon} \sqrt{2I(\phi)} \right) \right] \geq \frac{3}{4}.$$

从而当 ε 充分小时，

$$W[\varepsilon\beta \in B(\phi, \delta)] \geq \frac{1}{2} \exp \left(-\varepsilon^{-2}I(\phi) - 2\varepsilon^{-1}\sqrt{2I(\phi)} \right).$$

^a 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即得结论。 □

^a校订注：原书此处把主指数误排为 $-\varepsilon^2 I(\phi)$ 。由前一行的 Cameron–Martin 密度以及随后乘以 ε^2 取对数的极限可知，正确项应为 $-\varepsilon^{-2} I(\phi)$ 。

引理 2.10。 对任意 $\delta > 0$ ，

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log W[\rho(\varepsilon\beta, K_\lambda) \geq \delta] \leq -\lambda,$$

其中 ρ 是 $\mathbb{W}$ 中的一致距离。

证明。 令 $\alpha = T/n$ ，取等距分割

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T, \quad t_{k+1} - t_k = \alpha.$$

定义 L^ε : 它逐分量在每个区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 上为仿射函数, 并在分割点处等于 $\varepsilon\beta$ 。于是

$$\begin{aligned} W[\rho(\varepsilon\beta, L^\varepsilon) \geq \delta] &\leq \sum_{k=1}^n W\left[\max_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} |\varepsilon\beta_t - L_t^\varepsilon| \geq \delta\right] \\ &\leq nW\left[\max_{0 \leq t \leq \alpha} |\varepsilon\beta_t - L_t^\varepsilon| \geq \delta\right] \\ &= nW\left[\max_{0 \leq t \leq \alpha} \left|\beta_t - \frac{t}{\alpha}\beta_\alpha\right| \geq \delta\varepsilon^{-1}\right] \\ &\leq nW\left[\max_{0 \leq t \leq \alpha} |\beta_t| \geq (2\varepsilon)^{-1}\delta\right]. \end{aligned}$$

最后一个包含关系来自

$$\left\{\max_{0 \leq t \leq \alpha} |\beta_t| > (2\varepsilon)^{-1}\delta\right\} \supset \left\{\max_{0 \leq t \leq \alpha} \left|\beta_t - \frac{t}{\alpha}\beta_\alpha\right| \geq \delta\varepsilon^{-1}\right\}.$$

再由第 II 章命题 1.8 的指数不等式, 上式不超过

$$2nd \exp\left(-\frac{n\delta^2}{8\varepsilon^2 dT}\right).$$

取 n 足够大, 便有

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log W[\rho(\varepsilon\beta, L^\varepsilon) \geq \delta] \leq -\lambda.$$

固定这样的 n 。由于

$$\{\rho(\varepsilon\beta, K_\lambda) \geq \delta\} \subset \{I(L^\varepsilon) > \lambda\} \cup \{\rho(\varepsilon\beta, L^\varepsilon) \geq \delta\},$$

只需证明

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log W[I(L^\varepsilon) > \lambda] \leq -\lambda.$$

但

$$I(L^\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i=1}^{nd} \eta_i^2,$$

其中 η_i 是相互独立的标准高斯随机变量。对每个 $\vartheta > 0$,

$$E\left[\exp\left(\frac{1-\vartheta}{2}\eta_i^2\right)\right] = C_\vartheta < \infty.$$

由 Markov 不等式,

$$\begin{aligned} W[I(L^\varepsilon) > \lambda] &= P\left[\exp\left(\frac{1-\vartheta}{2} \sum_{i=1}^{nd} \eta_i^2\right) > \exp\left(\frac{(1-\vartheta)\lambda}{\varepsilon^2}\right)\right] \\ &\leq C_\vartheta^{nd} \exp\left(-\frac{(1-\vartheta)\lambda}{\varepsilon^2}\right). \end{aligned}$$

故相应的上极限不超过 $-(1-\vartheta)\lambda$ 。令 $\vartheta \downarrow 0$, 引理得证。 □

定理 2.11 (大偏差原理)。对任意 Borel 集 $A \subset \mathbb{W}$,

$$-\Lambda(A^\circ) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log W[\varepsilon\beta \in A] \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log W[\varepsilon\beta \in A] \leq -\Lambda(\bar{A}).$$

证明。若 A 是开集, 则对每个 $\phi \in H \cap A$, 可取充分小的 $\delta > 0$, 使 $B(\phi, \delta) \subset A$ 。由引理 2.9,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log W[\varepsilon\beta \in A] \geq -\inf\{I(\phi) : \phi \in A\} = -\Lambda(A).$$

再设 A 闭。若 $\Lambda(A) = 0$, 结论显然。先设 $\Lambda(A) < \infty$ 。对

$$\Lambda(A) > \gamma > 0,$$

集合 A 与紧集 $K = K_{\Lambda(A)-\gamma}$ 不交。由于 K 紧, 存在 $\delta > 0$, 使对每个 $\psi \in A$, 都有 $\rho(\psi, K) \geq \delta$ 。由引理 2.10,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log W[\varepsilon\beta \in A] \leq -\Lambda(A) + \gamma.$$

令 $\gamma \downarrow 0$, 得到所需上界。若 $\Lambda(A) = +\infty$, 则对任意大的 M 取 $K = K_M$, 同一论证仍然适用。□

下面用大偏差定理证明 Strassen 的泛函重对数律。令

$$g(n) = (2n \log_2 n)^{-1/2}, \quad n \geq 2,$$

并定义

$$X_n(t) = g(n)\beta_{nt}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

⁸ 对每条路径 ω , 这给出 $\mathbb{W}$ 中的一列点。记

$$U = \{h \in H : \|h\|_H \leq 1\} = K_{1/2}.$$

定理 2.12 (Strassen 泛函重对数律)。对 W -几乎每条 ω , 序列 $\{X_n(\cdot, \omega)\}$ 在 $\mathbb{W}$ 中相对紧, 并且它的极限点集恰为 U 。

证明。先证明相对紧性。对 $\delta > 0$, 令

$$K^\delta = \{\omega \in \mathbb{W} : \rho(\omega, U) \leq \delta\}.$$

由 I_T 的下半连续性,

$$\Lambda((K^\delta)^c) > \frac{1}{2}.$$

固定 δ , 取

$$1 < \gamma < 2\Lambda((K^\delta)^c).$$

选取 $\lambda > 1$, 令

$$n(m) = \lfloor \lambda^m \rfloor.$$

由布朗运动的尺度不变性,

$$W[X_{n(m)} \notin K^\delta] = W\left[\sqrt{n(m)}g(n(m))\beta \notin K^\delta\right].$$

⁸ **阅读提示**: 这里把 β 视为定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的标准布朗运动; 每个缩放后的过程 X_n 再限制到固定区间 $[0, T]$, 因而可看作 $\mathbb{W}$ 中的随机元。

由定理 2.11, 当 m 充分大时,

$$W[X_{n(m)} \notin K^\delta] \leq \exp(-\gamma \log_2 n(m)) \leq ((m-1) \log \lambda)^{-\gamma}.$$

由 Borel–Cantelli 引理, 几乎处处有: 当 m 充分大时, $X_{n(m)} \in K^\delta$. 对每个 $\delta > 0$ 都如此, 故 $\{X_{n(m)}\}$ 几乎处处相对紧, 其极限点都在 U .

存在满 W -测度集合 B , 使对每个 $\omega \in B$, 当 λ 取遍某个趋降到 1 的可数序列 $S = \{\lambda_j\}$ 时, 所有子序列 $\{X_{n(m)}(\omega)\}$ 都相对紧, 且极限点属于 U . 下面只作确定性论证, 固定这样的 ω , 省略它。

令

$$M = \sup_{h \in U} \|h\|_\infty, \quad b(t) = \sqrt{t}.$$

由 Cauchy–Schwarz 不等式,

$$\sup_{h \in U} |h(t) - h(s)| \leq b(|t - s|).$$

固定 $\delta > 0$, 从 S 中选取充分接近 1 的 $\lambda > 1$, 使

$$b((1 - \lambda^{-1})T) < \delta.$$

当 n 充分大时, 存在 m , 使

$$n(m) \leq n < n(m+1).$$

简记 $N = n(m+1)$. 此时 $\rho(X_N, U) \leq \delta$, 从而 $\|X_N\|_\infty \leq M + \delta$, 并存在 $k \in U$ 使 $\|X_N - k\|_\infty < \delta$. 于是

$$\begin{aligned} \rho(X_n, U) &\leq \rho(X_N, U) + \rho(X_n, X_N) \\ &\leq \delta + \sup_{t \leq T} \left| \frac{g(n)}{g(N)} X_N\left(\frac{n}{N}t\right) - X_N(t) \right| \\ &\leq \delta + \left| \frac{g(n)}{g(N)} - 1 \right| \|X_N\|_\infty + \sup_{t \leq T} \left| X_N\left(\frac{n}{N}t\right) - X_N(t) \right| \\ &\leq \delta + \left| \frac{g(n)}{g(N)} - 1 \right| (M + \delta) + 2\delta + b\left(\left(1 - \frac{n}{N}\right)T\right). \end{aligned}$$

直接验证可知

$$\left| \frac{g(n)}{g(N)} - 1 \right| \leq \lambda - 1,$$

所以

$$\rho(X_n, U) \leq (\lambda - 1)(M + \delta) + 4\delta.$$

令 $\lambda \downarrow 1$, $\delta \downarrow 0$, 便知整列 $\{X_n\}$ 相对紧, 且所有极限点均在 U .

还须证明 U 的每一点都是 $\{X_n\}$ 的极限点. 集合

$$\{h \in H : \|h\|_H < 1\}$$

中有一个关于 ρ 在 U 中稠密的可数子集. 因此只需对固定的 $h \in H$, $\|h\|_H < 1$ 证明

$$W\left[\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n, h) = 0\right] = 1.$$

对每个整数 k , 定义算子 $L_k: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$:

$$L_k \phi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq T/k, \\ \phi(t) - \phi(T/k), & T/k < t \leq T. \end{cases}$$

当 $k \geq 2, m \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} \rho(X_{k^m}, h) &\leq \sup_{t \leq T/k} |X_{k^m}(t)| + \sup_{t \leq T/k} |h(t)| + |X_{k^m}(T/k)| + |h(T/k)| \\ &\quad + \|L_k(X_{k^m} - h)\|_\infty. \end{aligned}$$

由于 $\{X_n\}$ 几乎处处相对紧, 由 Arzelà–Ascoli 定理, 对几乎每条路径, 可取 $k(\omega)$, 使当 $k \geq k(\omega)$ 时, 上式前四项对所有 m 都小于任意预先给定的正数。因而只需对固定 k 证明

$$W\left[\liminf_{m \rightarrow \infty} \|L_k(X_{k^m} - h)\|_\infty = 0\right] = 1.$$

一方面, 当 m 变化时, 过程 $L_k(X_{k^m})$ 相互独立; 另一方面, 由布朗运动的不变性,

$$W[\|L_k(X_{k^m} - h)\|_\infty < \varepsilon] = W\left[\sup_{0 \leq t \leq T(1-1/k)} \left|\sqrt{k^m} g(k^m) \beta_t - \tilde{h}(t)\right| < \varepsilon\right],$$

其中

$$\tilde{h}(t) = h(t + T/k) - h(T/k), \quad 0 \leq t \leq T(1 - 1/k).$$

^a 又因

$$\int_0^{T(1-1/k)} \tilde{h}'(s)^2 ds \leq \int_0^T h'(s)^2 ds < 1,$$

把大偏差定理的开集下界应用于区间 $[0, T(1 - 1/k)]$, 可知存在 $\gamma < 1$, 使当 m 充分大时,

$$W[\|L_k(X_{k^m} - h)\|_\infty < \varepsilon] \geq \exp(-\gamma \log_2 k^m) = (m \log k)^{-\gamma}.$$

右端之和发散, 再用独立性与 Borel–Cantelli 引理, 证明完成。□

^a校订注: 原书把这里的 $\tilde{h}$ 写成 $h(t + T/k)$, 漏掉了 $-h(T/k)$ 。由算子 $L_k \phi(t) = \phi(t) - \phi(T/k)$ 的定义可知, 必须减去这个常数。

注。 上述证明没有使用第 II 章的经典重对数律; 事实上, 经典重对数律可由定理 2.12 推出, 见练习 2.16。

练习 2.13。

1°) 在定理 2.2 的框架中, 进一步假设每个 h'_i 在 $[0, t]$ 上绝对连续。证明对 $t < T$,

$$\frac{dW_h}{dW} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left\{ \sum_i h'_i(t) \beta_t^i - \sum_i \int_0^t h''_i(s) \beta_s^i ds - \frac{1}{2} \int_0^t |h'(s)|^2 ds \right\}.$$

值得注意的是, 这个导数可以不用随机积分表示。^a

2°) 反过来, 证明 W 是 $\mathbb{W}$ 上唯一满足下列两点的测度: 它关于 H 拟不变, 并且对上述正则的 h 具有上式给出的导数。

提示: 考虑支撑紧含于 $(0, t)$ 的函数 h 。

校订注：原书没有说明 h 的附加正则性，但所写公式含有 h_i'' 。对一般 $h \in H$ ， h_i'' 未必作为函数存在；上述公式应先在 h_i' 绝对连续的情形下理解。一般 Cameron–Martin 密度仍由定理 2.2 中的随机积分公式给出。

练习 2.14。

- 1°) 证明：当 $d \geq 2$ 时，对 d 维布朗运动而言，所有绝对连续函数构成一个极集；“极集”取第 I 章练习 1.20 的意义（另见第 V 章练习 2.26）。
 2°) 设 B 是 $\mathbb{R}^d$ 中任意两点之间的 d 维布朗桥，其中 $d \geq 2$ 。证明对任意 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$P[\exists t \in (0, 1) : B_t = x] = 0.$$

提示：使用第 I 章练习 3.10 的变换。

- 3°) 在第 2 问中取 $d = 2$ 、 $B_0 = B_1 = 0$ 。对 $x \neq 0$ ，点 x 关于闭曲线 B_t ($0 \leq t \leq 1$) 的绕数 $I(x, B)$ 有定义。证明对每个 $n \in \mathbb{Z}$,

$$P[I(x, B) = n] > 0.$$

提示：把推论 2.3 推广到布朗桥，再结合以下事实：若两条曲线在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ 中同伦，则 x 关于它们的绕数相同。

练习 2.15。

- 1°) 由第 III 章练习 3.26，几乎必然存在唯一时刻 σ ，使

$$S_1 = B_\sigma.$$

证明

$$S_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \int_0^1 \phi_s \, dB_s,$$

其中 ϕ_s 是 $\mathbf{1}_{\{\sigma > s\}}$ 的可料投影（等价地，是它在可料 σ -域上的 L^2 -投影）。

提示：沿用定理 2.4 的记号，证明

$$F'(\beta, \cdot) = \varepsilon_\sigma,$$

其中 ε_σ 是 σ 处的 Dirac 测度。

- 2°) 证明 $P[\sigma > t \mid \mathcal{F}_t]$ 有一个右连续版本，与 ϕ 不可分辨。若

$$\Phi(x) = \int_x^\infty g_1(y) \, dy,$$

其中 g_1 是标准正态密度，证明

$$\phi_t = 2\Phi\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{1-t}}\right).$$

提示：使用

$$P[\sigma > t \mid \mathcal{F}_t] = P[T_a < 1-t]_{a=S_t-B_t}.$$

- 3°) 另一方法。对正 Borel 函数 f ，计算 $E[f(S_1) \mid \mathcal{F}_t]$ ，并直接推出第 1 问的公式。

练习 2.16。

1°) 在定理 2.12 的框架中, 设 Φ 是 $\mathbb{W}$ 上的实值连续函数。证明

$$W \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi(X_n) = \sup_{h \in U} \Phi(h) \right] = 1.$$

2°) 由此推出经典重对数律。

练习 2.17。 设 (ξ_n) 是一列独立同分布的实随机变量, 均值为 0、方差为 1, 并令

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

用线性插值把它扩充为连续时间过程:

$$S_t = (1 - t + [t])S_{[t]} + (t - [t])S_{[t]+1}.$$

证明序列

$$X_n(t) = g(n)S_{nt}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

具有定理 2.12 所述的同样性质。

提示: 使用第 VI 章练习 5.10 的结论。

3 扩散过程的泛函与变换

在研究扩散过程和随机微分方程时, Girsanov 定理尤其可用来改变漂移系数。通过调节漂移, 可以把一个随机微分方程化为较简单的方程; 换一个角度看, 也可以给已有的 Markov 过程添加漂移, 从而构造新的 Markov 过程。第 IX 章第 1 节将用到这一思想。

本节先把这个思想用于另一个目标: 计算布朗运动或其他过程的泛函之分布。我们先给出一条一般原理, 然后讨论若干例子。

考虑第 VII 章第 2 节的框架。给定一个取值为 $d \times d$ 对称矩阵的场 σ , 以及一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 的向量场 b 。假设对每个 $x \in \mathbb{R}^d$, 典范空间

$$\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$$

上都有一个概率测度 P_x , 使 $(\Omega, \mathcal{F}_t^0, X_t, P_x)$ 是第 VII 章定义 2.1 意义下的扩散过程, 并且 $a = \sigma\sigma^T$ 。由第 VII 章定理 2.7, 在每个 P_x 下都存在布朗运动 B , 使

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds.$$

此外, 假设对每个 x , P_x 都是鞅问题 $\pi(x, \sigma\sigma^T, b)$ 的唯一解。

现在设有一对函数 (f, F) , 使对每个 x , 过程

$$D_t = \exp \left\{ f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t F(X_s) ds \right\}$$

都是连续的 $(\mathcal{F}_t^0, P_x)$ -鞅。由命题 1.13, 可以在 $\mathcal{F}_t^0$ 上用

$$P_x^f = D_t \cdot P_x$$

定义新的概率测度。若 Z 是 $\mathcal{F}_\infty^0$ -可测函数, 记 $E_{P_x}[Z | X_t = \cdot]$ 为满足

$$E_{P_x}[Z | X_t] = \phi(X_t)$$

的某个 Borel 函数 ϕ 。

命题 3.1。 族 $(\Omega, \mathcal{F}_t^0, X_t, P_x^f)$ 构成 Markov 过程。对每个 x 和 $t > 0$, 概率测度 $P_t^f(x, dy)$ 与 $P_t(x, dy)$ 等价, 而且其 Radon–Nikodym 导数为

$$\frac{P_t^f(x, dy)}{P_t(x, dy)} = \exp\{f(y) - f(x)\} E_{P_x} \left[\exp \left(- \int_0^t F(X_s) ds \right) \middle| X_t = y \right].$$

证明。 映射 $x \mapsto P_x^f$ 的可测性是显然的。设 g 是正 Borel 函数, Y 是 $\mathcal{F}_t^0$ -可测随机变量。由

$$D_{t+s} = D_t(D_s \circ \theta_t),$$

有

$$\begin{aligned} E_x^f[Yg(X_{t+s})] &= E_x[Yg(X_{t+s})D_{t+s}] \\ &= E_x[YD_t E_{X_t}[g(X_s)D_s]] \\ &= E_x^f[Y E_{X_t}^f[g(X_s)]] . \end{aligned}$$

这证明了第一条断言。第二条来自

$$\begin{aligned} P_t^f g(x) &= E_x[D_t g(X_t)] \\ &= E_x \left[g(X_t) e^{f(X_t) - f(x)} E_x \left[e^{-\int_0^t F(X_s) ds} \middle| X_t \right] \right]. \end{aligned}$$

□

上面的 Radon–Nikodym 导数涉及三项: 两个半群, 以及泛函 $\exp(-\int_0^t F(X_s) ds)$ 关于终点 X_t 的条件期望。这一公式可以有多种用法, 尤其是在两个半群已知时计算该条件期望。Girsanov 定理正是在这里发挥作用。对每个 P_x , 都有 $D = \mathcal{E}(M)$, 其中 M 是某个局部鞅; 因此 Girsanov 定理能够给出 P_x^f -过程的无穷小生成元, 至少在理论上也就能确定半群 P_t^f 。反过来, 若上述条件期望已知, 命题中的公式便给出 P_t^f 。

下面给出寻找这类函数对 (f, F) 的一般方法, 随后用它计算若干布朗泛函的分布。过程 X 的扩展生成元在 C^2 函数上为

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a = \sigma \sigma^\top.$$

回忆: 若 $f \in C^2$, 则

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) ds$$

是连续局部鞅。现在说明怎样把一个满足上述要求的 F 与 f 联系起来。

定义 3.2。 在 $C^2 \times C^2$ 上定义平方场算子 (法文常称 *opérateur carré du champ*)

$$\Gamma(f, g) = L(fg) - fLg - gLf.$$

命题 3.3. 若 $f, g \in C^2$, 则在每个 P_x 下,

$$\langle M^f, M^g \rangle_t = \int_0^t \Gamma(f, g)(X_s) \, ds.$$

证明. 若 $A - B$ 是局部鞅, 记作 $A \sim B$. 由分部积分公式, 直接计算得

$$\begin{aligned} (M_t^f)^2 &\sim \int_0^t L(f^2)(X_s) \, ds + \left(\int_0^t Lf(X_s) \, ds \right)^2 - 2f(X_t) \int_0^t Lf(X_s) \, ds \\ &\sim \int_0^t L(f^2)(X_s) \, ds - 2 \int_0^t (fLf)(X_s) \, ds \\ &= \int_0^t \Gamma(f, f)(X_s) \, ds. \end{aligned}$$

再用极化恒等式即得结论。 □

由此, 若 $f \in C^2$, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M^f)_t &= \exp \left\{ f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) \, ds - \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma(f, f)(X_s) \, ds \right\} \\ &= \frac{h(X_t)}{h(X_0)} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{Lh(X_s)}{h(X_s)} \, ds \right\}, \quad h = e^f. \end{aligned}$$

⁹ 若这个局部鞅实际是真鞅, 便可以像本节开头那样定义 P_x^f , 其中

$$F = Lf + \frac{1}{2}\Gamma(f, f).$$

在这一框架下有下列结论。

命题 3.4. 若 L 是 P -过程的扩展生成元, 则 P^f -过程的扩展生成元在 C^2 上为

$$L + \Gamma(f, \cdot) = L + h^{-1}\Gamma(h, \cdot).$$

证明. 若 $\phi \in C^2$, 则

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t L\phi(X_s) \, ds$$

是 P_x -局部鞅。Girsanov 定理说明

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t L\phi(X_s) \, ds - \langle M^f, M^\phi \rangle_t$$

是 P_x^f -局部鞅。再用命题 3.3 即得结论。 □

现在把上述讨论用于若干特殊情形。先设 $Lf = 0$; 想到布朗运动的特例, 也可以把这句话表述为 f 是“调和的”。此时

$$\Gamma(f, f) = L(f^2), \quad F = \frac{1}{2}L(f^2),$$

⁹校订注: 原书第二行指数前误印为正号。由 $L(e^f)/e^f = Lf + \frac{1}{2}\Gamma(f, f)$ 直接可知此处必须取负号, 也只有这样才与第一行相等。

而 P^f -过程的扩展生成元在 $\phi \in C^2$ 上为

$$L\phi + \langle \nabla f, \sigma \sigma^T \nabla \phi \rangle.$$

可见, 这一变换的作用是改变过程的漂移。

若 P -过程是 d 维布朗运动, 而 f 在通常意义下调和, 则

$$F = \frac{1}{2} |\nabla f|^2, \quad L^f \phi = \frac{1}{2} \Delta \phi + \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle.$$

¹⁰ 下面对几个特殊的调和函数作具体计算。譬如取 $\delta \in \mathbb{R}^d$, 令

$$f(x) = \langle \delta, x \rangle.$$

显然 $\mathcal{E}(M^f)$ 是鞅, 所得 Markov 过程的生成元为

$$A^\delta \phi = \frac{1}{2} \Delta \phi + \langle \delta, \nabla \phi \rangle.$$

它就是具有常漂移 δ 的布朗运动, 即 $B_t + t\delta$ 。把对应的概率测度记为 P_x^δ 而不是 P_x^f 。由上面的讨论, 在 $\mathcal{F}_t^0$ 上

$$P_x^\delta = \exp \left\{ \langle \delta, X_t - X_0 \rangle - \frac{1}{2} |\delta|^2 t \right\} \cdot P_x,$$

相应半群为

$$P_t^\delta(x, dy) = \exp \left\{ \langle \delta, y - x \rangle - \frac{1}{2} |\delta|^2 t \right\} P_t(x, dy),$$

其中 P_t 是布朗半群。在这个简单情形中, 当然也可以直接由 P_t 算出 P_t^δ 。在继续讨论别的例子之前, 先研究概率测度 P_0^δ 。

假设 $d \geq 2$ 。由于 P_0^δ 在每个 $\mathcal{F}_t^0$ 上相对于 P_0 绝对连续, 而闭集的击中时刻是 $(\mathcal{F}_t^0)$ -停止时刻, 布朗运动中点的极性说明: 在 P_0^δ 下, 点的击中时刻也几乎处处为无穷。因此几乎处处可对所有 $t > 0$ 写成

$$X_t = \rho_t \theta_t, \quad \rho_t = |X_t|, \quad \theta_t \in S^{d-1}.$$

令

$$\mathcal{R}_t = \sigma(\rho_s : s \leq t), \quad \mathcal{R}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{R}_t.$$

引理 3.5。 在 P_0 下, 对每个 $t > 0$, 随机变量 θ_t 与 $\mathcal{R}_\infty$ 独立, 并且在单位球面 S^{d-1} 上均匀分布。

证明。 先设 $d = 2$ 。令 $Z \geq 0$ 为 $\mathcal{R}_\infty$ -可测随机变量, G 为 S^1 上的正 Borel 函数。Wiener 测度 P_0 在旋转下不变, 所以对每个 $\alpha \in [0, 2\pi]$,

$$E_0[ZG(\theta_t)] = E_0[ZG(e^{i\alpha}\theta_t)].$$

对 α 积分, 得到

$$E_0[ZG(\theta_t)] = E_0 \left[Z \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(e^{i\alpha}\theta_t) d\alpha \right].$$

¹⁰ **校订注:** 原书把这里的 F 误印为 $|\nabla f|^2$ 。本书的布朗生成元是 $L = \frac{1}{2} \Delta$, 故 $\Gamma(f, f) = |\nabla f|^2$, 而定义要求 $F = Lf + \frac{1}{2} \Gamma(f, f) = \frac{1}{2} |\nabla f|^2$ 。

由于 S^1 上的 Lebesgue 测度在乘以任意固定球面点时保持不变,

$$E_0[ZG(\theta_t)] = E_0[Z] \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(e^{i\alpha}) d\alpha.$$

当 $d > 2$ 时有一个小困难: S^{d-1} 只是旋转群的齐性空间。细节留给读者, 另见第 III 章练习 1.17。 $\square$

下文以 μ^d 表示 S^{d-1} 上的均匀分布。若 ϕ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的正 Borel 函数, 定义其球面平均

$$\mathcal{M}\phi(\rho) = \int_{S^{d-1}} \phi(\rho\omega) \mu^d(d\omega).$$

推论 3.6. 在 σ -代数 $\mathcal{R}_t$ 上,

$$P_0^\delta = \mathcal{M}\phi(\rho_t) \exp\left(-\frac{1}{2}|\delta|^2 t\right) \cdot P_0, \quad \phi(x) = e^{\langle \delta, x \rangle}.$$

证明. 因为 $\mathcal{R}_t \subset \mathcal{F}_t^0$, 显然有

$$P_0^\delta = E_0\left[\exp\left\{\langle \delta, X_t \rangle - \frac{1}{2}|\delta|^2 t\right\} \middle| \mathcal{R}_t\right] \cdot P_0 \text{ 在 } \mathcal{R}_t \text{ 上}.$$

结合引理 3.5, 括号中的条件期望恰为 $e^{-|\delta|^2 t/2} \mathcal{M}\phi(\rho_t)$ 。 $\square$

定理 3.7. 在 P_0^δ 下, 过程 ρ 关于滤过 $(\mathcal{R}_t)$ 是 Markov 过程。更确切地, 存在半群 (Q_t) , 使对 $\mathbb{R}_+$ 上任意正 Borel 函数 f ,

$$E_0^\delta[f(\rho_{t+s}) | \mathcal{R}_t] = Q_s f(\rho_t).$$

证明. 取 $A \in \mathcal{R}_t$ 。沿用推论 3.6 的记号,

$$\begin{aligned} \int_A f(\rho_{t+s}) dP_0^\delta &= e^{-|\delta|^2(t+s)/2} \int_A f(\rho_{t+s}) \mathcal{M}\phi(\rho_{t+s}) dP_0 \\ &= e^{-|\delta|^2(t+s)/2} \int_A E_0[E_{X_t}[f(\rho_s) \mathcal{M}\phi(\rho_s)] | \mathcal{R}_t] dP_0. \end{aligned}$$

像推论 3.6 那样计算条件期望, 最后一式等于

$$e^{-|\delta|^2(t+s)/2} \int_A \mathcal{M}\psi(\rho_t) dP_0, \quad \psi(x) = E_x[f(\rho_s) \mathcal{M}\phi(\rho_s)].$$

布朗运动的几何不变性说明 $\psi(x)$ 只依赖于 $|x|$, 所以 $\mathcal{M}\psi = \psi$ 。再使用推论 3.6, 得到

$$\begin{aligned} E_0^\delta[f(\rho_{t+s}) | \mathcal{R}_t] &= e^{-|\delta|^2 s/2} \frac{\psi(\rho_t)}{\mathcal{M}\phi(\rho_t)} \\ &= \frac{E_a[f(\rho_s) \mathcal{M}\phi(\rho_s) e^{-|\delta|^2 s/2}]}{\mathcal{M}\phi(a)} \bigg|_{a=\rho_t}. \end{aligned}$$

这里 P_a 表示从任一模长为 a 的点出发的布朗运动之模的分布。第 XI 章将证明这个过程是 Markov 过程, 其转移半群有密度 $p_s^d(a, \rho)$ 。因此

$$Q_s(a, d\rho) = \frac{\mathcal{M}\phi(\rho)}{\mathcal{M}\phi(a)} e^{-|\delta|^2 s/2} p_s^d(a, \rho) d\rho.$$

由 p_s^d 的半群性质可直接验证 (Q_s) 也是半群, 证明完成. $\square$

注. 当 $x \neq 0$ 时, ρ 在概率测度 P_x^δ 下不再是 Markov 过程。

下面仍以布朗运动为例, 讨论另一个遵循同一模式的情形 (另见练习 1.34)。设 $d = 2$, 采用复数记号, 并取

$$f(z) = \alpha \log |z|, \quad \alpha > 0.$$

函数 f 在极集 $\{0\}$ 之外调和。对每个 t ,

$$\sup_{s \leq t} \mathcal{E}(M^f)_s \leq |a|^{-\alpha} \sup_{s \leq t} |Z_s|^\alpha.$$

右端可积, 所以局部鞅 $\mathcal{E}(M^f)$ 实际是鞅; 于是当 $a \neq 0$ 时, 上述一般方法适用于 P_a 。¹¹ 沿用第 V 章第 2 节的记号, 有

$$F(Z_s) = \frac{1}{2} |\nabla f|^2(Z_s) = \frac{\alpha^2}{2} \rho_s^{-2}.$$

由 Itô 公式, 在 P_a 下

$$\rho_t = \rho_0 + \tilde{\beta}_t + \frac{1}{2} \int_0^t \rho_s^{-1} ds,$$

其中

$$\tilde{\beta}_t = \int_0^t \rho_s^{-1} (X_s dX_s + Y_s dY_s)$$

是一维布朗运动。另一方面,

$$\log \rho_t = \log \rho_0 + \int_0^t \rho_s^{-1} d\tilde{\beta}_s,$$

所以

$$\langle \tilde{\beta}, \log \rho \rangle_t = \int_0^t \rho_s^{-1} ds.$$

Girsanov 定理于是说明, 在 P_a^f 下,

$$\bar{\beta}_t = \tilde{\beta}_t - \alpha \int_0^t \rho_s^{-1} ds$$

是布朗运动, 从而

$$\rho_t = \rho_0 + \bar{\beta}_t + \frac{2\alpha + 1}{2} \int_0^t \rho_s^{-1} ds.$$

因此, ρ 在 P_a 与 P_a^f 下所满足的方程属于同一类型。第 XI 章第 1 节将显式计算方程

$$\rho_t = \rho_0 + \beta_t + \frac{\delta - 1}{2} \int_0^t \rho_s^{-1} ds$$

之解的半群密度 p_t^δ 。

上述结果可以用来计算 Z 绕原点的“绕数” θ_t 的分布。由于 $f(z)$ 只依赖于 $|z|$, 导出命题 3.1 的讨论也可以直接用于 ρ , 并且使用同一个 f 。于是可以计算

$$C_t = \int_0^t \rho_s^{-2} ds$$

的条件 Laplace 变换。记 I_ν 为指标 ν 的第一类修正 Bessel 函数。

¹¹校订注: 原书在这一估计中漏印常数 $|a|^{-\alpha}$ 。由 $\mathcal{E}(M^f)_0 = 1$ 即可看出: 若 $|a| < 1$, 原书所印不等式甚至在 $t = 0$ 也不成立; 补上该常数不影响可积性论证。

命题 3.8. 对每个 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $a \neq 0$,

$$\begin{aligned} E_a \left[e^{i\alpha(\theta_t - \theta_0)} \mid \rho_t = \rho \right] &= E_a \left[e^{-\alpha^2 C_t/2} \mid \rho_t = \rho \right] \\ &= \frac{I_{|\alpha|}(|a|\rho/t)}{I_0(|a|\rho/t)}. \end{aligned}$$

证明. 第一条等式来自第 V 章定理 2.12; 第二条等式来自命题 3.1 以及第 XI 章第 1 节中的显式公式。□

注. 由这个结果可以推出第 X 章定理 4.1 所证明的 θ_t 渐近性质; 参见该章练习 4.9。

下一个例子同样属于命题 3.1 的一般框架。设给定函数 F , 并且能找到 C^2 函数 f , 使

$$F = Lf + \frac{1}{2}\Gamma(f, f).$$

那么上述一般方法就可用来计算

$$E_x \left[e^{-\int_0^t F(X_s) ds} \mid X_t \right].$$

把它用于漂移为 b 的一维布朗运动, 即生成元为

$$L\phi = \frac{1}{2}\phi'' + b\phi'$$

的过程。容易看出 $\Gamma(f, f) = (f')^2$, 所以利用与 f 对应的半群 (P_t^f) , 可以计算上述条件期望, 其中

$$F(x) = \frac{1}{2}f''(x) + b(x)f'(x) + \frac{1}{2}f'(x)^2.$$

通过选择 b 和 f , 可得到许多显式公式。最著名的例子见练习 3.14: 取 $b(x) = \lambda x$, 可得到第 XI 章还将独立证明的 Cameron–Martin 公式。

仍考虑一维布朗运动。下面不只考虑 f , 还把它乘以常数 ν , 并把与 νf 对应的概率测度简记为 P_x^ν , 而不写成 $P_x^{\nu f}$ 。再取

$$b(x) = \alpha f'(x),$$

其中 α 是常数, 并假设 f 满足微分方程

$$(f')^2 = -\frac{1}{2\alpha}f'' + \gamma, \quad (3.1)$$

其中 γ 是常数。对函数 νf , 相应的 F 为

$$F(x) = \frac{(\nu^2 + 2\alpha\nu)\gamma}{2} - \frac{\nu^2}{4\alpha}f''(x).$$

因此命题 3.1 的一般公式给出

$$\begin{aligned} E_x \left[\exp \left\{ \frac{\nu^2}{4\alpha} \int_0^t f''(X_s) ds \right\} \mid X_t = y \right] \\ = \frac{P_t^\nu(x, dy)}{P_t(x, dy)} \exp \left\{ \nu \int_y^x f'(u) du + \frac{(\nu^2 + 2\alpha\nu)\gamma}{2} t \right\}. \end{aligned}$$

¹² 由命题 3.4, P^ν -过程的无穷小生成元为

$$L^\nu g = \frac{1}{2}g'' + (\alpha + \nu)f'g'.$$

¹²校订注: 原书把左端积分前的号误印为负号, 并漏掉右端的常数项 $\frac{1}{2}(\nu^2 + 2\alpha\nu)\gamma t$ 。把上一式中的 F 代入命题 3.1, 并用 $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(u) du$, 即得到这里的修正式。

求解方程 (3.1) 关于 f' 的解, 就能看出上述讨论适用于哪些漂移与函数。令

$$f' = \frac{h'}{2\alpha h}$$

并求解 h , 得到下列三种情形。¹³

情形 1: $\gamma = 0$ 。此时

$$f'(x) = \frac{1}{2\alpha} \frac{A}{Ax + B},$$

其中 A, B 是常数。特别地, 取 $\alpha = \frac{1}{2}, A = 1, B = 0$, 则

$$L^\nu g(x) = \frac{1}{2} g''(x) + \left(\frac{1}{2} + \nu\right) \frac{g'(x)}{x}.$$

所以 P^ν -过程是 Bessel 过程; 第 XI 章将研究它。

情形 2: $\gamma < 0$ 。此时

$$f'(x) = \sqrt{|\gamma|} \frac{A \cos(mx) + B \sin(mx)}{-A \sin(mx) + B \cos(mx)}, \quad m = -2\alpha\sqrt{|\gamma|}.$$

在特殊情形 $\gamma = -1, A = 1, B = 0$ 下, 生成元为

$$L^\nu g(x) = \frac{1}{2} g''(x) + (\alpha + \nu) \cot(2\alpha x) g'(x),$$

这就是所谓 Legendre 过程的生成元。

情形 3: $\gamma > 0$ 。此时

$$f'(x) = \sqrt{\gamma} \frac{A \cosh(mx) + B \sinh(mx)}{A \sinh(mx) + B \cosh(mx)}, \quad m = 2\alpha\sqrt{\gamma}.$$

当 $\gamma = 1, A = 1, B = 0$ 时, 生成元为

$$L^\nu g(x) = \frac{1}{2} g''(x) + (\alpha + \nu) \coth(2\alpha x) g'(x).$$

相应过程称为双曲 Bessel 过程。

现在转向扩散过程乃至一般 Markov 过程的其他重要变换。设 h 是“调和的”, 即 h 属于扩展生成元的定义域且 $Lh = 0$; 再假设 h 严格为正, 并且

$$P_t h = h \quad (t \geq 0).$$

换言之, $h(X_t)/h(X_0)$ 是真鞅。令 $f = \log h$, 则上述一般方法以 $F = 0$ 适用。¹⁴

用这个特殊函数 $f = \log h$ 从 P_t 得到的半群记为 P_t^h , 相应概率测度记为 P_x^h 。显然

$$P_t^h \phi = h^{-1} P_t(h\phi).$$

在概率测度 P_x^h 下的过程 X 称为原 P_t -过程的 h -过程。这类过程在若干超出本书范围的问题中十分重要。这里只记录以下事实, 并假设原 P_t -过程是生成元为 L 的扩散过程。

¹³校订注: 原书在这个代换式中多印了负号; 然而紧接着列出的三类解均对应此处的正号。代入 (3.1) 也可直接验证: 正确代换把方程化为线性方程 $h'' = 4\alpha^2 \gamma h$ 。

¹⁴校订注: 原书只要求 h 对每个 $P_t(x, \cdot)$ 可积, 便断言 $P_t h = h$ 。仅有逐时可积性不能把正局部鞅自动提升为真鞅; 此处真正需要且在后文使用的是半群不变性 $P_t h = h$ 。

命题 3.9. h -过程的扩展无穷小生成元在 C^2 函数 ϕ 上为

$$L^h \phi = h^{-1} L(h\phi).$$

证明. 若 $\phi \in C_c^2$, 则

$$\begin{aligned} P_t^h \phi(x) - \phi(x) - \int_0^t P_s^h (h^{-1} L(h\phi))(x) \, ds \\ = h^{-1}(x) \left[P_t(h\phi)(x) - h(x)\phi(x) - \int_0^t P_s L(h\phi)(x) \, ds \right] = 0. \end{aligned}$$

再用第 VII 章第 2 节的方法即可。 □

在布朗运动情形, 上式变为

$$L^h \phi = \frac{1}{2} \Delta \phi + h^{-1} \langle \nabla h, \nabla \phi \rangle.$$

这仍是给布朗运动添加某种漂移所得的生成元。过程会被拉向 $h^{-1} \nabla h$ 较大的方向。BES³ 就说明了这一点: 我们已经观察并使用过, 它是取 $h(x) = x$ 时, 在 0 处被杀死的一维布朗运动的 h -过程; 参见第 II 章练习 1.15、第 VI 章第 3 节以及本节练习 3.17。

最后注意, 命题 3.1 的证明只用了 D_t 的乘法性。因此给定正 Borel 函数 g , 可把 D_t 换成同样具有乘法性的

$$N_t = \exp \left(- \int_0^t g(X_s) \, ds \right).$$

在原典范空间上, 由

$$P_t^{(g)} f(x) = E_x[N_t f(X_t)], \quad P_x^{(g)} = N_t \cdot P_x \text{ 在 } \mathcal{F}_t^0 \text{ 上}$$

定义一个次 Markov 半群与相容的次概率测度族。加入墓地状态后, 可把它们等价地看成概率测度和被杀死的 Markov 过程。其转移核满足

$$P_t^{(g)}(x, dy) = E_x \left[\exp \left(- \int_0^t g(X_s) \, ds \right) \middle| X_t = y \right] P_t(x, dy).$$

¹⁵ 这个变换可解释为缩短 X 的寿命, 或以速率 g 杀死 X 。新的扩展无穷小生成元记为 $L^{(g)}$, 它也清楚地体现了这一解释。

命题 3.10 (Feynman–Kac 公式). 若 $\phi \in C_c^2$, 则

$$L^{(g)} \phi = L\phi - g\phi.$$

证明. 对 $\phi \in C_c^2$, M^ϕ 是 P_x -鞅。分部积分公式给出

$$\begin{aligned} N_t \phi(X_t) &= \phi(X_0) - \int_0^t \phi(X_s) N_s g(X_s) \, ds + \int_0^t N_s L\phi(X_s) \, ds \\ &\quad + \int_0^t N_s \, dM_s^\phi. \end{aligned}$$

¹⁵ **校订注:** 原书在未加入墓地状态的原路径空间上把 $N_t \cdot P_x$ 称为“概率测度”。若 $g \neq 0$, 其总质量通常小于 (1), 所以这里应称次概率测度; 加入墓地状态后才恢复为概率测度。

最后一项显然是 P_x -鞅。取 P_x -期望便得到

$$P_t^{(g)}\phi(x) = \phi(x) + \int_0^t P_s^{(g)}(L\phi - g\phi)(x) \, ds.$$

再用第 VII 章命题 2.2 即得结论。 $\square$

这些变换彼此相关。¹⁶事实上, 若 $g = Lf + \frac{1}{2}\Gamma(f, f)$, 则由命题 3.1

$$P_t^f(x, dy) = e^{-f(x)} P_t^{(g)}(x, dy) e^{f(y)},$$

即 P^f 是次 Markov 半群 $P^{(g)}$ 关于 $h = e^f$ 的 h -变换; 等价地,

$$P_t^{(g)}(x, dy) = e^{f(x)} P_t^f(x, dy) e^{-f(y)}.$$

练习 3.11. 在定理 3.7 的框架中改取 $x \neq 0$ 。证明在 P_x^δ 下, 二维过程

$$\left(\rho_t, \int_0^t \rho_s^{-2} \, ds \right)$$

关于 $(\mathcal{R}_t)$ 是 Markov 过程。

练习 3.12 (*, 时间反演). 若过程 X 以 $t > 0$ 为指标, 定义

$$\tilde{X}_t = tX_{1/t}, \quad t > 0.$$

1° 沿用本节记号。证明: 若 X 的分布为 P_x^δ , 则 $\tilde{X}$ 的分布为 P_δ^x 。换言之, 对具有常漂移的布朗运动, 时间反演会交换漂移和起点。

2° 设 $d = 2, x = 0, \delta \neq 0$, 即 X 是从 0 出发、漂移为 δ 的复布朗运动。证明

$$X_t = \rho_t \exp(i\gamma_{A_t}), \quad A_t = \int_t^\infty \rho_s^{-2} \, ds,$$

其中 $\rho_t = |X_t|$, γ 是与 $\mathcal{R}_\infty$ 独立的一维布朗运动。

3° 对 $r > 0$, 令

$$T = \inf\{t : \rho_t = r\}.$$

证明 X_T 与 $\mathcal{R}_T$ 独立, 从而 X_T 与 T 独立。注意 $\delta = 0$ 时同样成立; 另见第 III 章练习 1.17。

4° 取 $r = 1$ 。证明 X_T 服从所谓 von Mises 分布: 相对于 S^1 上均匀分布的密度为

$$C_\delta \exp\langle \delta, \theta \rangle,$$

其中 C_δ 是归一化常数, $\langle \delta, \theta \rangle$ 是把 δ, θ 视为 $\mathbb{R}^2$ 中向量时的内积。

练习 3.13. 不再假设方程 (3.1), 而设 f 满足

$$f(x)^2 = \beta f'(x) + \gamma,$$

其中常数 β, γ 与 α 无关。尽可能完成上述各项计算。

¹⁶校订注: 原书把后一关系的两个指数方向印反, 并因此把 h -变换的方向也说反。命题 3.1 直接给出 $P_t^f = e^{-f(x)} P_t^{(g)} e^{f(y)}$ 。

练习 3.14 (*, Ornstein–Uhlenbeck 过程与 Lévy 公式)。令 X 是标准 d 维布朗运动, $\rho = |X|$ 。

1°) 证明命题 3.1 可推广到

$$\tilde{D}_t = \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} (\rho_t^2 - dt) - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \rho_s^2 ds \right\},$$

并证明变换后过程的无穷小生成元在 $\phi \in C^2$ 上为

$$\frac{1}{2} \Delta \phi(x) + \lambda \langle x, \nabla \phi(x) \rangle.$$

把相应概率测度记为 $\tilde{P}_x$ 。

2°) 证明在 $\tilde{P}_x$ 下, 过程 X 满足随机微分方程

$$X_t = x + B_t + \lambda \int_0^t X_s ds,$$

其中 B 是 d 维布朗运动。由此推出它可写为

$$e^{\lambda t} \left(x + \tilde{B} \left(\frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2\lambda} \right) \right),$$

其中 $\tilde{B}$ 是标准 d 维布朗运动; 并求出它的半群。下一章将在一般框架中解决这类问题, 但这个特例可以用第 IV 章第 3 节的方法处理。过程 X 可称为 d 维 OU 过程。

3°) 当 $d = 1, \lambda < 0$ 时, X 就是第 III 章练习 1.13 所定义的 OU 过程。验证: 适当选择初始分布后, 可以使它成为平稳过程。

4°) 证明

$$\begin{aligned} E_x \left[\exp \left(-\frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \rho_s^2 ds \right) \middle| \rho_t = \rho \right] \\ = \frac{\lambda t}{\sinh(\lambda t)} \exp \left\{ \frac{|x|^2 + \rho^2}{2t} (1 - \lambda t \coth(\lambda t)) \right\} \frac{I_\nu(|x|\rho\lambda/\sinh(\lambda t))}{I_\nu(|x|\rho/t)}, \end{aligned}$$

其中 $\nu = d/2 - 1$ 。读者会注意到, 当 $d = 2$ 时, 它给出第 V 章练习 2.19 所研究的随机面积 S_t 的分布。当 $x = 0$ 或 $\rho = 0$, 并记 $k^2 = |x|^2 + \rho^2$ 时, 右端变为

$$\left(\frac{\lambda t}{\sinh(\lambda t)} \right)^{\nu+1} \exp \left\{ \frac{k^2}{2t} (1 - \lambda t \coth(\lambda t)) \right\}.$$

5°) 当 $d = 2$ 时, 证明

$$E_0[e^{i\lambda S_t} | B_t = z] = \frac{\lambda t}{\sinh(\lambda t)} \exp \left\{ -\frac{|z|^2}{2t} (\lambda t \coth(\lambda t) - 1) \right\}.$$

练习 3.15。 证明 BES^3 半群的扩展生成元在 $C^2((0, \infty))$ 上为

$$\phi \mapsto \frac{1}{2} \phi''(x) + \frac{1}{x} \phi'(x).$$

提示: 使用第 VII 章练习 1.22 给出的、在 0 处被杀死的布朗运动之生成元形式。

练习 3.16. 若半群 (P_t) 与 $(\hat{P}_t)$ 关于测度 ξ 对偶 (见第 VII 章第 4 节), 证明 X 的 h -过程半群与 $(\hat{P}_t)$ 关于测度 $h\xi$ 对偶. 第 VII 章第 4 节证明 BES³ 的时间反演结果时, 已经隐含地使用了这一事实。

练习 3.17 (*, 布朗运动的空间反演). 在 $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 中, 设 $d \geq 3$, 并令

$$\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

1° 若 B 是从 $a \neq 0$ 出发的 d 维布朗运动, 证明 $\phi(B)$ 是 Markov 过程, 其转移函数为

$$Q_t(x, dy) = (2\pi t)^{-d/2} |y|^{-2d} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t|x|^2|y|^2}\right) dy.$$

2° 令 (τ_t) 是与

$$A_t = \int_0^t |B_s|^{-4} ds$$

相伴的时间变换 (见第 VI 章引理 3.12)。证明 $Y_t = \phi(B_{\tau_t})$ ($t < A_\infty$) 满足

$$Y_t = Y_0 + \beta_t - (d-2) \int_0^t \frac{Y_s}{|Y_s|^2} ds,$$

其中 β 是在

$$A_\infty = \inf\{t : Y_t = 0\}$$

处停止的布朗运动。

3° 证明 Y 的无穷小生成元在 $C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ 上为

$$\frac{1}{2} \Delta - (d-2) \left\langle \frac{y}{|y|^2}, \nabla \cdot \right\rangle,$$

并证明 Y 是与 $h(x) = |x|^{2-d}$ 对应的 d 维布朗运动 h -过程。

4° 证明在 P_a 下, A_∞ 的密度为

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)(2|a|^2)^\nu t^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{1}{2t|a|^2}\right), \quad \nu = \frac{d}{2} - 1.$$

5° 在条件 $A_\infty = u$ 下, 过程 $(Y_t, 0 \leq t \leq u)$ 是区间 $[0, u]$ 上从 $a/|a|^2$ 到 0 的布朗桥。这个练习可以粗略地解释为: d 维布朗运动在 Riemann 球面上看起来像一条布朗桥。

练习 3.18. 设 Y 是分布为 λ 的 d 维随机变量, 并令

$$B_t^\lambda = B_t + tY,$$

其中 B 是与 Y 独立的标准 d 维布朗运动。分别以 P^λ 和 P^0 表示 B^λ 与 B 的分布。

1° 证明 $P^\lambda \triangleleft P^0$, 其在 $\mathcal{F}_t$ 上的密度为 $h_\lambda(B_t, t)$, 其中

$$h_\lambda(x, t) = \int \exp\left(\langle x, y \rangle - \frac{t}{2}|y|^2\right) \lambda(dy).$$

2°) 证明在滤过 $(\mathcal{F}_t^{B^\lambda})$ 中, B^λ 的半鞅分解为

$$B_t^\lambda = \tilde{B}_t + \int_0^t \nabla_x \log h_\lambda(B_s^\lambda, s) \, ds,$$

其中 $\tilde{B}$ 是该滤过中的布朗运动。写出下列两种情形的显式分解:

- i) $d = 1$, 且 $\lambda = (\delta_{-m} + \delta_m)/2$;
- ii) $d = 3$, 且 λ 是半径为 $r > 0$ 的球面上的旋转不变概率测度。在后一情形中, 若 R_t 是 B_t^λ 的径向部分, 证明

$$R_t = \gamma_t + r \int_0^t \coth(rR_s) \, ds,$$

其中 γ 是布朗运动。

练习 3.19 (有漂移的布朗运动与 Lévy 等价性)。 设 $\mu \geq 0$, 令

$$B_t^\mu = B_t + \mu t,$$

其中 B 是从 0 出发的一维布朗运动。以 L^μ 表示 B^μ 在 0 处的局部时; 特别地, $B^0 = B, L^0 = L$ 。令

$$X^\mu = |B^\mu| + L^\mu, \quad X^0 = X.$$

1°) 利用 B 的分布对称性证明: 对任意有界泛函 F ,

$$E[F(X_s^\mu, s \leq t)] = E\left[F(X_s, s \leq t) \cosh(\mu|B_t|) e^{-\mu^2 t/2}\right].$$

2°) 利用 Lévy 恒等式和第 VI 章推论 3.6, 证明上式还等于

$$E\left[F(X_s, s \leq t) \frac{\sinh(\mu X_t)}{\mu X_t} e^{-\mu^2 t/2}\right].$$

3°) 令

$$S_t^\mu = \sup_{s \leq t} B_s^\mu.$$

证明过程 X^μ 与 $2S^\mu - B^\mu$ 同分布; 这个共同分布是无穷小生成元

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \mu \coth(\mu x) \frac{d}{dx}$$

所对应的扩散过程之分布。

4°) 证明当 $\mu \neq 0$ 时, 过程 $|B^\mu|$ 与 $S^\mu - B^\mu$ 不同分布。

提示: 比较它们在大时间下的行为。

更精确地, 证明对每个有界泛函 F ,

$$E[F(|B_s^\mu|, s \leq t)] = E[F(S_s^\mu - B_s^\mu, s \leq t) \Delta_t],$$

其中

$$\Delta_t = \frac{1}{2} e^{-\mu S_t^\mu} \left(1 + e^{2\mu(S_t^\mu - B_t^\mu)}\right).$$

5°) 证明仍有

$$(|B_s^\mu|, s \leq \tau_t \mid \tau_t < \infty) \stackrel{d}{=} (S_s^\mu - B_s^\mu, s \leq T_t),$$

其中

$$\tau_t = \inf\{s \geq 0 : L_s^\mu > t\}, \quad T_t = \inf\{s \geq 0 : B_s^\mu = t\}.$$

给出 τ_t 与 T_t 的密度之闭式公式。

6°) 结合上述绝对连续关系与第 VI 章练习 4.9 第 4 问, 求随机变量

$$\inf\{s : S_s^\mu - B_s^\mu = a\}$$

之分布的 Laplace 变换闭式公式。

校订注。 原书在练习 3.19 第 4 问的 Δ_t 之第一个指数中漏印参数 μ 。把右端改写到无漂移 Wiener 测度下时, 正确因子应满足

$$e^{\mu B_t} \Delta_t = \cosh(\mu(S_t - B_t)),$$

这恰好给出题中所列修正式。

注释与评述

第 1 节。 本书依照大多数作者的用法所称的 Girsanov 定理, 经历了漫长的发展历史; 其源头包括 Cameron–Martin [1, 2]、Maruyama [1, 2]、Girsanov [1] 和 Van Schuppen–Wong [1]。粗略地说, 它先从高斯过程发展到 Markov 过程, 再发展到鞅。Cameron 与 Martin 研究的是使新旧概率律等价的布朗轨道变换: 他们先考虑确定性平移, 随后考虑随机平移, 以处理漂移非常数的布朗运动。Maruyama 和 Girsanov 把理论推广到扩散过程乃至一般 Markov 过程; 命题 1.12 是这一阶段的典型结果。后来, 随着 Stroock 与 Varadhan 所发展的鞅问题方法出现, 有必要把结论的适用范围扩大到鞅; Van Schuppen 与 Wong 完成了这一步, 定理 1.4 正是后一方向的典型结果。这幅本已相当复杂的图景, 还应补上 Girsanov 定理与著名的 Feynman–Kac 公式、Doob 的 h -过程之间的联系; 这些内容见第 3 节。

关于半鞅概率律变换的一般结果, 可参见 Jacod–Mémin [1, 2]、Lenglart [3], 以及 Dellacherie 与 Meyer [1] 第 II 卷。Yoeurp [3, 4] 也是这一方向的重要论文; 它们强调了 Girsanov 定理与滤过扩张理论的紧密关系。这两个理论中鞅的分解公式显然同出一源; 更精确地, Yoeurp [4] 证明, 利用 Föllmer 测度, 可以把滤过扩张中的分解公式解释为广义 Girsanov 公式的特例。这个领域至今仍不断出现重要进展。

滤过扩张理论是本书的一项重要缺漏。它把正随机变量转化为扩张滤过的停止时刻, 从而能为时间反演、轨道分解定理等许多结果提供另一种证明。有兴趣的读者可参见 Jeulin [2], 以及论文集 *Grossissements de filtrations: exemples et applications*, Lecture Notes in Mathematics 1118, Springer (1985)。Dellacherie、Maisonnewe 与 Meyer [1] 也给出了系统论述。作为上面提到的 Yoeurp 理论工作的补充, 滤过扩张技术还曾与 Girsanov 定理结合使用; 例如可见 Azéma–Yor [4]、Föllmer–Imkeller [1] 和 Mortimer–Williams [1]。

滤过扩张理论还允许对半鞅积分预见过程。Skorokhod [3] 提出了这类过程积分的另一种定义; 这一方向至今仍受到广泛研究, 例如 Buckdahn、Nualart、Pardoux 等人的工作。

“Girsanov 对”这一术语并非标准用语, 而是在本书中首次引入。本书所给 Kazamaki 判据 (Kazamaki [2]) 的证明归于 Yan [1]; 另见 Lépingle–Mémin [1]。

练习 1.24 与练习 1.40 均取自 Liptser–Shiryaev [1]; 练习 1.40 也见于 Friedman [1] 的著作。

第 2 节。基本定理 2.2 归于 Cameron–Martin。关于这个主题的综述和详尽书目, 可参见 Koval’chik [1]。定理 2.4 出自 Clark [1], 本书的表述方式取自 Rogers–Williams [1]。Hausmann [1]、Ocone [2] 与 Bismut [2] 把该结果推广到一大类扩散过程; 对 Bismut 而言, 这还是其 Malliavin 微积分版本的出发点。

本书关于布朗运动大偏差结果的部分论述取自 Friedman [1]。定理 2.11 归于 Schilder [1]。Donsker 与 Varadhan 在系列论文 [1] 中完整发展了 Markov 过程的大偏差理论; 读者还可参见 Azencott [1]、Stroock [4] 以及 Deuschel–Stroock [1]。Strassen 重对数律 (Strassen [1]) 的证明取自 Stroock [4]; 与此结果相关的工作还有 Chover [1] 和 Mueller [1]。

练习 2.14 取自 Yor [3]。练习 2.16 所展示的方法是大偏差理论中的标准方法。练习 2.17 使用 Skorokhod 停止时刻, 正是 Strassen 原始证明中的思想。

第 3 节。命题 3.1 所体现的一般原理, 是 Girsanov 定理在扩散过程框架中的表达; 它以详略不一的形式见于许多论文, 例如 Kunita [1]、Yor [10]、Priouret–Yor [1]、Nagasawa [2]、Elworthy [1]、Elworthy–Truman [1]、Ezawa 等 [2]、Fukushima–Takeda [1]、Oshima–Takeda [1]、Ndumu [1]、Truman [1]、Gruet [3] 等。

平方场算子由 Kunita [1] 与 Roth [1] 引入。需要提醒读者, 有些作者使用 2Γ 或 $\Gamma/2$, 而不是本书的 Γ 。显然, 它只能定义在 (扩展) 无穷小生成元定义域的子代数上; 在一般框架中, 这会引出它是否存在的问题。参见 Mokobodzki [1]; 该文还纠正了此前关于这一主题的一些错误。

命题 3.4 可见于 Kunita [1], 定理 3.7 可见于 Pitman–Yor [1]。关于练习 3.12, 可参见 Kent [1]、Wendel [1, 2]、Pitman–Yor [1] 和 Watanabe [1, 4]。练习 3.14 取自 Pitman–Yor [1] 与 Yor [10]; 该题第 4 问的公式是 Bessel 桥分解研究的出发点, 参见 Pitman–Yor [2, 3]。与练习 3.14 相关, 还可提及 Gaveau [1]: 他的计算导出了 Heisenberg 群上热半群的一种表达式。值得注意的是, P. Lévy 的随机面积公式在 Bismut [4, 5] 给出的 Atiyah–Singer 定理之概率证明中居于核心地位。

练习 3.17 取自 Yor [16], 并承接 L. Schwartz [1] 的早期工作。它也与 Gettoor [2] 有关; Carne [3] 进一步发展了这些结果。

Roynette 等 [1] 研究了用乘法泛函对 Markov 过程的概率律作归一化, 以及相应的弱收敛极限。

第 IX 章 随机微分方程

前面各章已经多次以非正式方式提到随机微分方程。例如，若 M 是连续局部鞅，则它的随机指数满足

$$\mathcal{E}(M)_t = 1 + \int_0^t \mathcal{E}(M)_s \, dM_s.$$

这可以表述为： $\mathcal{E}(M)$ 是随机微分方程

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s \, dM_s$$

的一个解；其微分形式为

$$dX_t = X_t \, dM_t, \quad X_0 = 1.$$

第 IV 章练习 3.10 甚至已经说明， $\mathcal{E}(M)$ 是这个方程的唯一解。类似地，第 VII 章第 2 节还看到，一些 Markov 过程是某些可称为随机微分方程之方程的解。

本章将正式定义这一概念，并对它作系统研究。

1 形式定义与唯一性

随机微分方程可以在一般程度各不相同的多种框架中定义。对本书而言，下面的框架最为方便。

仍以

$$W = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$$

表示连续路径空间。令 $w(s)$ ($s \geq 0$) 为坐标映射，并置

$$\mathcal{B}_t = \sigma(w(s) : s \leq t).$$

若函数 $f : \mathbb{R}_+ \times W \rightarrow \mathbb{R}^r$ 作为 W 上关于滤过 $(\mathcal{B}_t)$ 的过程是可料的，就称 f 是可料函数。若 X 是滤过空间 $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ 上的连续过程，则映射 $s \mapsto X_s(\omega)$ 属于 W 。对可料 f ，以

$$f(s, X_\bullet) \quad \text{或} \quad f(s, X_\bullet(\omega))$$

表示 f 在时刻 s 、路径 $t \mapsto X_t(\omega)$ 上的取值。这里特意写 $X_\bullet(\omega)$ ，而不是 $X_s(\omega)$ ，因为 $f(s, X_\bullet(\omega))$ 可以依赖 $X(\omega)$ 截至时刻 s 的整段轨道。一个重要特例是

$$f(s, w) = \sigma(s, w(s)),$$

其中 σ 定义在 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上；此时

$$f(s, X_\bullet) = \sigma(s, X_s).$$

命题 1.1。 若 X 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 适应，则过程

$$f(t, X_\bullet(\omega))$$

关于 $(\mathcal{F}_t)$ 可料。

证明。由定义直接得到。 □

定义 1.2。 给定两个可料函数 f, g , 其中 f 取值于 $d \times r$ 矩阵, g 取值于 d 维向量。随机微分方程 $e(f, g)$ 的一个解, 是某个滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ 上的一对适应过程 (X, B) , 满足:

- i) B 是 $\mathbb{R}^r$ 中的标准 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动;
- ii) 对 $i = 1, 2, \dots, d$,

$$X_t^i = X_0^i + \sum_j \int_0^t f_{ij}(s, X_\bullet) dB_s^j + \int_0^t g_i(s, X_\bullet) ds.$$

若还要求解满足 $X_0 = x$ 几乎处处, 则把方程记为 $e_x(f, g)$ 。

以后通常把定义中的第 ii) 条写成向量形式

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_\bullet) dB_s + \int_0^t g(s, X_\bullet) ds.$$

下文把“随机微分方程”简称为 SDE。当然, 所有写出的积分都默认有意义; 也就是说, 对每个 t , 几乎处处有

$$\int_0^t \sum_{i,j} f_{ij}(s, X_\bullet)^2 ds < \infty, \quad \int_0^t |g(s, X_\bullet)| ds < \infty.$$

因此, 解 X 显然是连续半鞅。

第 VII 章第 2 节已经看到, 扩散过程是下列简单 SDE 的解:

$$f(s, X_\bullet) = \sigma(s, X_s), \quad g(s, X_\bullet) = b(s, X_s),$$

其中 σ, b 定义在 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上; 齐次情形则为

$$f(s, X_\bullet) = \sigma(X_s), \quad g(s, X_\bullet) = b(X_s).$$

这类 SDE 记为 $e(\sigma, b)$, 而不写 $e(f, g)$ 。

我们还看到, 要把扩散过程表示成 SDE 的解, 必须构造所需的布朗运动。正因如此, SDE 的解被定义为一对 (X, B) , 而不是只有 X 。

前文已经给出许多 SDE 解的例子。因此, 即使尚未证明任何一般存在性结果, 现在也有理由研究唯一性。至少有两种自然的唯一性概念; 本节的主要任务是研究它们之间的关系。

定义 1.3。

- 1°) 若在同一滤过空间上定义的任意两个解 (X, B) 与 (X', B') , 只要

$$B = B', \quad X_0 = X'_0 \quad \text{几乎处处},$$

就有 X 与 X' 不可分辨, 则称 $e(f, g)$ 具有 路径唯一性。

- 2°) 若任意两个解 (X, B) 与 (X', B') ——其中布朗运动 B, B' 可以不同, 解也可定义在不同概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 与 $(\Omega', \mathcal{F}', \mathcal{F}'_t, P')$ 上——只要

$$X_0 \stackrel{d}{=} X'_0,$$

就有 X 与 X' 的分布相同, 则称 $e(f, g)$ 具有 依分布唯一性。换言之, X, X' 是同一个过程的两个版本。

依分布唯一性其实等价于下面这个看起来较弱的条件。

命题 1.4. 假设对每个 $x \in \mathbb{R}^d$, 任意两个满足

$$X_0 = x, \quad X'_0 = x \quad \text{几乎处处}$$

的解 (X, B) 、 (X', B') , 其 X, X' 都同分布。那么 $e(f, g)$ 具有依分布唯一性。

证明. 令 P 是 (X, B) 在典范空间

$$C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d+r})$$

上的分布。这个空间是 Polish 空间, 所以 P 关于初始坐标 σ -代数 $\mathcal{B}_0$ 有正则条件分布 $P(\omega, \cdot)$ 。对几乎每个 ω , 在 $P(\omega, \cdot)$ 下, 最后 r 个坐标映射 β 仍构成 r 维布朗运动, 而且积分

$$\int_0^t f(s, \xi_\bullet) d\beta_s + \int_0^t g(s, \xi_\bullet) ds$$

有意义; 这里 ξ 表示前 d 个坐标映射组成的向量。显然 (见第 IV 章练习 5.16), 对几乎每个 ω , 在 $P(\omega, \cdot)$ 下, (ξ, β) 是 $e(f, g)$ 的一个解, 并且

$$\xi_0 = \xi(\omega) \quad P(\omega, \cdot)\text{-几乎处处}.$$

对另一个解 (X', B') , 同样定义 $P'(\omega, \cdot)$ 。由假设, 在一个对 P, P' 均为全测度的集合上,

$$P(\omega, \cdot) = P'(\omega, \cdot).$$

若 $X_0 \stackrel{d}{=} X'_0$, 对初始分布积分即得 $P = P'$, 证明完成。 $\square$

注. 练习 1.16 将给出一个依分布唯一性不成立的例子。

两种唯一性之间的关系并不显然。下面将证明路径唯一性蕴含依分布唯一性; 在此之前先引入另一个重要概念。

定义 1.5. 设 (X, B) 是滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上 $e(f, g)$ 的一个解。若 X 关于 $(\mathcal{F}_t^B)$ 适应, 其中 $(\mathcal{F}_t^B)$ 是 B 的自然滤过关于 P 的完备化, 则称 (X, B) 是强解。不是强解的解称为弱解。

在许多问题中, 判断 SDE 的解是否为强解十分重要。强解是布朗运动的“非预见”泛函: 一旦知道 B 截至时刻 t 的轨道, 就已经知道解截至时刻 t 的轨道。之所以重要, 是因为 B 往往正是问题中给定的数据。

令

$$W_1 = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \quad W_2 = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^r).$$

在 $W_1 \times W_2$ 上, 对 $i = 1, 2$ 记

$$\mathcal{B}_t^i = \sigma\{w_s^i : s \leq t\}, \quad \mathcal{B}^i = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{B}_t^i,$$

并记

$$\widehat{\mathcal{B}}_t^i = \sigma\{w_u^i - w_t^i : u \geq t\}.$$

于是

$$\mathcal{B}^i = \mathcal{B}_t^i \vee \widehat{\mathcal{B}}_t^i.$$

设 (X, B) 是一个解, Q 是 P 在映射

$$\phi: \omega \mapsto (X_\bullet(\omega), B_\bullet(\omega))$$

下在 $W_1 \times W_2$ 上的像测度。 Q 在 W_2 上的投影是 Wiener 测度 W 。取 Q 关于第二坐标投影的正则条件分布 $Q(w_2, \cdot)$, 于是对 Q -几乎所有 w_2 ,

$$Q(w_2, W_1 \times \{w_2\}) = 1,$$

并且对每个可测集 $A \subset W_1 \times W_2$,

$$Q(w_2, A) = E_Q[\mathbf{1}_A | \mathcal{B}^2](w_2).$$

引理 1.6. 若 $A \in \mathcal{B}_t^1$, 则映射

$$w_2 \mapsto Q(w_2, A)$$

除去一个零测集后是 $\mathcal{B}_t^2$ -可测的。

证明. 先说明一个一般事实。设概率空间上的三个 σ -代数 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \hat{\mathcal{C}}$, 且 $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ 与 $\hat{\mathcal{C}}$ 独立。那么对 $A \in \mathcal{A}_1$,

$$m(A | \mathcal{A}_2) = m(A | \mathcal{A}_2 \vee \hat{\mathcal{C}}) \quad \text{几乎处处.}$$

这只需先对 $\mathcal{A}_2 \vee \hat{\mathcal{C}}$ 中形如 $B \cap C$ 的集合验证条件期望恒等式, 其中 $B \in \mathcal{A}_2, C \in \hat{\mathcal{C}}$, 再用单调类定理即可。

现在取

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_t^1, \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_t^2, \quad \hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{B}}_t^2.$$

由于 B 是布朗运动, $\mathcal{B}_t^1 \vee \mathcal{B}_t^2$ 与 $\hat{\mathcal{B}}_t^2$ 在 Q 下独立。因此

$$Q(\cdot, A) = E_Q[\mathbf{1}_A | \mathcal{B}^2] = E_Q[\mathbf{1}_A | \mathcal{B}_t^2] \quad Q\text{-几乎处处,}$$

后一个版本是 $\mathcal{B}_t^2$ -可测的。 □

定理 1.7. 若 $e(f, g)$ 具有路径唯一性, 则:

- i) $e(f, g)$ 具有依分布唯一性;
- ii) $e_x(f, g)$ 的每一个解都是强解。

证明. 先设 (X, B) 与 (X', B') 是两个初值同为确定点 x 的解。分别在两个 W_1 的副本上记其联合分布为 Q, Q' , 而 W 仍表示 W_2 上的 Wiener 测度。在 $W_1 \times W_1 \times W_2$ 上定义

$$\pi(dw_1, dw'_1, dw_2) = Q(w_2, dw_1) Q'(w_2, dw'_1) W(dw_2).$$

令

$$\mathcal{A}_t = \sigma\{w_1(s), w'_1(s), w_2(s) : s \leq t\}.$$

我们先验证 w_2 在 $(\mathcal{A}_t)$ 下仍为布朗运动。设 $s < t$,

$$A \in \mathcal{B}_s^1, \quad A' \in \mathcal{B}_s^{1'}, \quad C \in \mathcal{B}_s^2,$$

并取 $\xi \in \mathbb{R}^r$ 。由引理 1.6,

$$\begin{aligned} E_\pi \left[e^{i\langle \xi, w_2(t) - w_2(s) \rangle} \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{A'} \mathbf{1}_C \right] \\ &= \int_C e^{i\langle \xi, w_2(t) - w_2(s) \rangle} Q(w_2, A) Q'(w_2, A') W(dw_2) \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2(t-s)} \int_C Q(w_2, A) Q'(w_2, A') W(dw_2) \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2(t-s)} \pi(A \times A' \times C). \end{aligned}$$

由单调类定理, $w_2(t) - w_2(s)$ 与 $\mathcal{A}_s$ 独立, 并具有正确的高斯分布。因此 w_2 是布朗运动。在同一个滤过概率空间 $(W_1 \times W_1 \times W_2, \mathcal{A}_t, \pi)$ 上, (w_1, w_2) 与 (w'_1, w_2) 都是 $e_x(f, g)$ 的解。路径唯一性给出

$$w_1 = w'_1 \quad \pi\text{-几乎处处}.$$

所以 X 与 X' 同分布。再由命题 1.4, 得到 i)。

此外, 对 W -几乎所有 w_2 , 在乘积测度

$$Q(w_2, dw_1) \otimes Q'(w_2, dw'_1)$$

下, 两个独立的随机轨道 w_1, w'_1 几乎处处相等。一个概率测度的两个独立样本若几乎必然相等, 该概率测度必为 Dirac 测度。因此存在可测映射 $F: W_2 \rightarrow W_1$, 使得对 W -几乎所有 w_2 ,

$$Q(w_2, \cdot) = Q'(w_2, \cdot) = \delta_{F(w_2)}.$$

于是 $X = F(B)$ 几乎处处。引理 1.6 进一步说明, 对每个 t , $F(B)$ 截至 t 的部分只依赖于 B 截至 t 的轨道; 因此 X 关于 B 的完备自然滤过适应, 故 (X, B) 是强解。□

注 1. 上述证明还说明: 一旦路径唯一性成立, 联合对 (X, B) 的分布也与所取的解无关。练习 1.20 给出这一结论的逆命题。反过来, 单有依分布唯一性并不能推出路径唯一性 (见练习 1.19); 单有强解存在也不能推出任何唯一性, 甚至不能推出依分布唯一性 (见练习 1.16)。

注 2. 假设对每个 $x \in \mathbb{R}^d$, 方程 $e_x(f, g)$ 都有解, 且路径唯一性成立。由证明可得一个轨道映射

$$F(x, \cdot): W_2 \longrightarrow W_1.$$

可以把这些映射选得关于 (x, w_2) 联合可测。于是若随机变量 X_0 与布朗运动 B 独立, 则 $F(X_0, B)$ 给出以 X_0 为初值的解。

下面转向齐次方程。若 (X, B) 是 $e_x(\sigma, b)$ 的解, 则 X 的分布是鞅问题

$$\pi(x, a, b), \quad a = \sigma \sigma^\top,$$

的一个解。因此, 只要对每个 x 这个鞅问题都唯一, 就得到 $e(\sigma, b)$ 的依分布唯一性。

以下在典范空间

$$W = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$$

上工作; X 表示坐标过程, $\mathcal{B}_t = \sigma\{X_s : s \leq t\}$ 。设矩阵场 a 与向量场 b 局部有界。若 τ 是停时, 则 $\mathcal{B}_\tau$ 可数生成 (见第 I 章练习 4.21), 故总可以取关于 $\mathcal{B}_\tau$ 的正则条件分布 $Q(w, \cdot)$ 。

命题 1.8. 设 P 是 $\pi(x, a, b)$ 的一个解, τ 是有界停时, $Q(w, \cdot)$ 是 P 关于 $\mathcal{B}_\tau$ 的正则条件分布。则存在 P -零测集 N , 使得对每个 $w \notin N$, $\theta_\tau(Q(w, \cdot))$ 都是

$$\pi(X_\tau(w), a, b)$$

的一个解。

证明. 首先, 对几乎所有 w ,

$$Q\{w' : X_\tau(w') = X_\tau(w)\} = 1.$$

所以在 $\theta_\tau(Q(w, \cdot))$ 下, 初始坐标等于 $X_\tau(w)$ 。

对 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 记

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_u) \, du,$$

其中

$$Lf = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij} f + \sum_i b_i \partial_i f.$$

还须证明: 对 $t > s$,

$$E_{Q(w, \cdot)}[M_t^f \circ \theta_\tau \mid \theta_\tau^{-1}(\mathcal{B}_s)] = M_s^f \circ \theta_\tau.$$

等价地, 对每个 $A \in \theta_\tau^{-1}(\mathcal{B}_s)$, 应有

$$\int_A M_t^f \circ \theta_\tau(w') Q(w, dw') = \int_A M_s^f \circ \theta_\tau(w') Q(w, dw'). \quad (1.1)$$

若 $D \in \mathcal{B}_\tau$, 则

$$\begin{aligned} E_P \left[\mathbf{1}_D(w) \int_A M_t^f \circ \theta_\tau(w') Q(w, dw') \right] \\ = E_P \left[\mathbf{1}_D \mathbf{1}_A (M_{\tau+t}^f - M_\tau^f) \right]. \end{aligned}$$

由可选抽样定理, 右端把 t 换成 s 后不变; 再用条件分布的定义, 就得到 (1.1), 但目前可能要排除一个依赖于 (A, f, s, t) 的零测集。

取 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 的一个可数稠密子集 $\mathcal{D}$, 并对每个 s 取 $\theta_\tau^{-1}(\mathcal{B}_s)$ 的一个可数生成族 $\mathcal{C}_s$ 。先令 $f \in \mathcal{D}$, s, t 为非负有理数、 $A \in \mathcal{C}_s$, 把相应零测集取可数并, 便得到一个共同的零测集 N 。最后利用单调类定理以及各过程关于时间和测试函数的连续性, 即可把结论推广到任意 f, s, t, A 。□

定理 1.9. 假设对每个 $x \in \mathbb{R}^d$, 鞅问题 $\pi(x, a, b)$ 有唯一解 P_x , 并且对每个 $t \geq 0$ 与 Borel 集 $A \subset \mathbb{R}^d$, 映射

$$x \mapsto P_x(X_t \in A)$$

可测。那么 (X_t, P_x, x) 是 Markov 过程, 其转移函数为

$$P_t(x, A) = P_x(X_t \in A).$$

事实上, 它还具有强 Markov 性。

证明。 设 τ 是有界停时, $Q_x(w, \cdot)$ 是 P_x 关于 $\mathcal{B}_\tau$ 的正则条件分布。命题 1.8 与唯一性说明, 对每个 $\Gamma \in \mathcal{B}_\infty$,

$$\begin{aligned} P_x[\theta_\tau^{-1}(\Gamma) \mid \mathcal{B}_\tau] &= Q_x(\cdot, \theta_\tau^{-1}(\Gamma)) \\ &= P_{X_\tau}(\Gamma) \quad P_x\text{-几乎处处}. \end{aligned}$$

先令 $\tau = t$ 为确定时刻, 就得到 Markov 性。再对中间状态积分, 得到

$$P_{s+t}(x, A) = \int_{\mathbb{R}^d} P_s(x, dy) P_t(y, A),$$

所以 (P_t) 是半群。上面的停时版本正是强 Markov 性; 一般的非有界停时可由 $\tau \wedge n$ 逼近。□

注。 当 a, b 连续时, 往往还可证明 (P_t) 是 Feller 半群。第 2 节将在更具体的假设下得到这一点。

下面给出两个常用的变换: 改变漂移和改变时间尺度。

定理 1.10。 设 a 是取值于对称非负矩阵的 Borel 函数, b, c 是 $\mathbb{R}^d$ -值 Borel 函数, 并假设

$$a, \quad b, \quad \langle c, ac \rangle$$

有界。则鞅问题 $\pi(x, a, b)$ 的解与 $\pi(x, a, b + ac)$ 的解一一对应。若 P, Q 是相应的两个解, 则

$$\left. \frac{dQ}{dP} \right|_{\mathcal{B}_t} = \exp \left\{ \int_0^t \langle c(X_s), d\bar{X}_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \langle c, ac \rangle(X_s) ds \right\},$$

其中

$$\bar{X}_t = X_t - \int_0^t b(X_s) ds.$$

证明。 在 P 下, $\bar{X}$ 是连续向量局部鞅, 且

$$\langle \bar{X}^i, \bar{X}^j \rangle_t = \int_0^t a_{ij}(X_s) ds.$$

置

$$Y_t = \int_0^t \langle c(X_s), d\bar{X}_s \rangle.$$

则

$$\langle Y \rangle_t = \int_0^t \langle c, ac \rangle(X_s) ds.$$

由有界性和 Novikov 判据, $\mathcal{E}(Y)$ 是真鞅, 可在每个 $\mathcal{B}_t$ 上以

$$dQ = \mathcal{E}(Y)_t dP$$

定义相容的概率测度。

对 $\theta \in \mathbb{R}^d$, 令

$$M_t^\theta = \langle \theta, \bar{X}_t - x \rangle.$$

其二次变差为

$$\langle M^\theta \rangle_t = \int_0^t \langle \theta, a(X_s) \theta \rangle ds,$$

而

$$\langle M^\theta, Y \rangle_t = \int_0^t \langle \theta, a(X_s) c(X_s) \rangle ds.$$

Girsanov 定理说明

$$M^\theta - \langle M^\theta, Y \rangle$$

在 Q 下是局部鞅, 并保持原来的二次变差。于是 Q 解 $\pi(x, a, b + ac)$ 。在每个有限时间区间上应用第 VIII 章命题 1.10 的逆变换, 便得到一一对应。□

定理 1.11. 设 f 是可预见的对称非负 $d \times d$ 矩阵值泛函, g, h 是可预见的 $\mathbb{R}^d$ -值泛函, 并假设 h 有界。则 $e_x(f, g)$ 的解与 $e_x(f, g + fh)$ 的解一一对应。特别地, 其中一个方程具有依分布唯一性, 当且仅当另一个方程具有依分布唯一性。

证明. 设 (X, B) 是 $e_x(f, g)$ 的解, 并令

$$M_t = \int_0^t \langle h(s, X_\bullet), dB_s \rangle.$$

因为 h 有界, $\mathcal{E}(M)$ 是真鞅。以

$$\left. \frac{dQ}{dP} \right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}(M)_t$$

改变测度后,

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t h(s, X_\bullet) ds$$

在 Q 下是布朗运动, 而且

$$\begin{aligned} X_t &= x + \int_0^t f(s, X_\bullet) d\tilde{B}_s \\ &\quad + \int_0^t (g + fh)(s, X_\bullet) ds. \end{aligned}$$

所以 $(X, \tilde{B})$ 是 $e_x(f, g + fh)$ 的解。反向变换取 $-h$, 故得到一一对应。密度完全由 X 与相应布朗运动的联合分布决定, 因此依分布唯一性也在两个方程之间等价。□

注. 这里的有界性只用于保证随机指数为真鞅。可以用 Novikov 条件

$$E \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \|h(s, X_\bullet)\|^2 ds \right\} \right] < \infty, \quad t \geq 0,$$

代替。

推论 1.12. 设 $\sigma(s, x)$ 对所有 (s, x) 都可逆, 且 σ^{-1} 有界。若 $e(\sigma, 0)$ 有解, 则对每个有界 Borel 函数 $b: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $e(\sigma, b)$ 也有解; 若前一个方程具有依分布唯一性, 则后一个方程也具有依分布唯一性。

证明. 在定理 1.11 中取

$$f = \sigma, \quad g = b, \quad h = -\sigma^{-1}b.$$

则 $g + fh = 0$ 。由于 b 与 σ^{-1} 有界, h 有界; 结论直接由该定理得到。 $\square$

注。 强解性质未必在上述漂移变换下保持; 第 3 节将讨论这一现象。

命题 1.13。 设 $\gamma: \mathbb{R}^d \rightarrow (0, \infty)$ 是 Borel 函数, 并且存在常数 $0 < k \leq K < \infty$, 使

$$k \leq \gamma(x) \leq K, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

则鞅问题 $\pi(x, a, b)$ 的解与 $\pi(x, \gamma a, \gamma b)$ 的解一一对应。

证明。 设 P 解 $\pi(x, a, b)$ 。定义加性泛函

$$A_t = \int_0^t \frac{ds}{\gamma(X_s)}$$

及其连续逆

$$\tau_t = \inf\{s \geq 0 : A_s > t\}.$$

在典范空间上定义轨道变换 ϕ :

$$X_t(\phi(w)) = X_{\tau_t}(w).$$

因为

$$\frac{d\tau_u}{du} = \gamma(X_{\tau_u}),$$

对 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 、 $s < t$, 以及相应过去 σ -代数中的事件 D , 有

$$\begin{aligned} & \int_D \left[f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t \gamma(X_u) Lf(X_u) du \right] d\phi(P) \\ &= \int_{\phi^{-1}(D)} \left[f(X_{\tau_t}) - f(X_{\tau_s}) - \int_s^t \gamma(X_{\tau_u}) Lf(X_{\tau_u}) du \right] dP \\ &= \int_{\phi^{-1}(D)} \left[f(X_{\tau_t}) - f(X_{\tau_s}) - \int_{\tau_s}^{\tau_t} Lf(X_v) dv \right] dP = 0. \end{aligned}$$

所以 $\phi(P)$ 解 $\pi(x, \gamma a, \gamma b)$ 。对新问题用 γ^{-1} 作同样的时间变换, 便得到逆对应。 $\square$

校订注。 原书把上述时钟印成 $\int_0^t \gamma(X_s) ds$ 。若采用该式, 逆时钟满足 $d\tau_u/du = \gamma(X_{\tau_u})^{-1}$, 所得生成元应为 $\gamma^{-1}L$, 与命题结论及原证明的变量代换均不相容。因此此处改为 $\int_0^t \gamma(X_s)^{-1} ds$ 。

推论 1.14。 在一维情形, 设 $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 有界且

$$|\sigma(x)| \geq \varepsilon > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

则对每个有界 Borel 函数 $b: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 方程 $e(\sigma, b)$ 有解且具有依分布唯一性。此外, 若以 P_x 表示初值为 x 的解的分布, 则对每个 $t \geq 0$ 与 Borel 集 $A \subset \mathbb{R}$, 映射

$$x \longmapsto P_x(X_t \in A)$$

是 Borel 可测的。

证明。由推论 1.12, 只须处理 $e(\sigma, 0)$ 。从 x 出发的布朗运动给出 $e_x(1, 0)$ 的唯一解。对其应用命题 1.13, 取 $\gamma = \sigma^2$, 便得到 $e_x(\sigma, 0)$ 的存在性与依分布唯一性。各个 P_x 都可由同一个 Wiener 测度在上述平移和时间变换下得到, 因而 $x \mapsto P_x(X_t \in A)$ 可测。□

注。若 b 不依赖于时间, 则由定理 1.9, 所得解族是齐次 Markov 过程; 一般情况下则得到非齐次 Markov 过程。推论 1.14 不易直接推广到高维; 一致椭圆但仅可测的扩散系数需要更深入的方法。

练习 1.15。设 (Y, B) 是

$$e = e_y(f, g)$$

的一个解, 并假设 f 处处不为零。置

$$A_t = \int_0^t \left(2 + \frac{Y_s}{1 + |Y_s|} \right) ds,$$

以 T_t 表示 A_t 的逆。证明:

$$X_t = B_{T_t}$$

是纯局部鞅, 当且仅当 Y 是 e 的强解。

练习 1.16 (#)。

1°) 令

$$a(x) = 1 \wedge |x|^\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2},$$

且 B 是标准一维布朗运动。证明: 对每个 $t > 0$,

$$\int_0^t a(B_s)^{-2} ds$$

都有定义。记 τ_t 为与这个加性泛函相联系的时间变换。

2°) 证明

$$X_t = B_{\tau_t} \quad \text{和} \quad X_t = 0$$

是 $e_0(a, 0)$ 的两个解, 因而该方程不具有依分布唯一性。注意第二个解是强解。

练习 1.17 (#)。设 $\{X^x : x \in \mathbb{R}^d\}$ 是一族 $\mathbb{R}^d$ -值过程, 且 $X_0^x = x$ 几乎处处。若对每个 $c > 0$, 过程

$$(c^{-1}X_{c^2t}^x : t \geq 0) \quad \text{与} \quad (X_t^{c^{-1}x} : t \geq 0)$$

同分布, 则称这族过程具有布朗缩放性质。

假设 $e(\sigma, b)$ 具有依分布唯一性, 且 X^x 是 $e_x(\sigma, b)$ 的解。证明: 若对每个 $c > 0$ 与 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\sigma(cx) = \sigma(x), \quad cb(cx) = b(x),$$

则 $\{X^x\}$ 具有布朗缩放性质。特别地, 若标量函数 σ 与向量函数 ϕ 定义在单位球面上, 并把 σ 按零次齐次方式延拓, 而

$$b(x) = \|x\|^{-1} \phi\left(\frac{x}{\|x\|}\right),$$

则 $e_x(\sigma I_d, b)$ 的解具有布朗缩放性质。

练习 1.18 (*)。在推论 1.14 的情形, 设 (X, B) 是 $e_x(\sigma, b)$ 的一个解, 并置

$$Y_t = X_t - x - \int_0^t b(s, X_s) \, ds.$$

1°) 令 W^x 表示所有满足 $w(0) = x$ 的连续函数 $w: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 所成的空间。对 $w \in W^x$, 定义

$$\psi_n(t, w) = \sigma^{-1}(x), \quad 0 \leq t < 2^{-n},$$

以及当 $k2^{-n} \leq t < (k+1)2^{-n}$ 时,

$$\psi_n(t, w) = 2^n \int_{(k-1)2^{-n}}^{k2^{-n}} \sigma^{-1}(w_s) \, ds.$$

证明对每个 $t \geq 0$,

$$E \left[\left(\int_0^t (\psi_n(s, X_\bullet) - \sigma^{-1}(X_s)) \, dY_s \right)^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2°) 证明存在一个从 W^x 到 W^0 的适应映射 Φ , 它只依赖于 X 的分布, 并且

$$B = \Phi(X).$$

3°) 由第 2 问推出: 若存在强解, 则路径唯一性成立。

提示: 若 (X, B) 与 (X', B) 是两个解, 先证明

$$(X, B) \stackrel{d}{=} (X', B).$$

练习 1.19 (#)。

1°) 设 β 是从 0 出发的布朗运动, 并令

$$B_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s) \, d\beta_s.$$

证明 (β, B) 与 $(-\beta, B)$ 都是 $e_0(\operatorname{sgn}, 0)$ 的解。

更一般地, 设 $(\varepsilon_u: u \geq 0)$ 关于 β 的自然滤过可预见, 且只取 +1 与 -1 两个值。证明

$$(\varepsilon_{g_t} \beta_t, B_t: t \geq 0)$$

是 $e_0(\operatorname{sgn}, 0)$ 的解, 其中

$$g_t = \sup\{s < t: \beta_s = 0\}.$$

2°) 证明 $e_0(\operatorname{sgn}, 0)$ 不可能有强解。

提示: 若 X 是一个解, 对 $|X|$ 写出 Tanaka 公式。

练习 1.20。

1°) 沿用引理 1.6 的记号。证明: (X, B) 是 $e_x(f, g)$ 的强解, 当且仅当存在适应映射

$$F: W_2 \longrightarrow W_1$$

使得

$$Q(w_2, \cdot) = \delta_{F(w_2)} \quad Q\text{-几乎处处.}$$

2°) 设 (X, B) 与 (X', B) 是关于同一个布朗运动的 $e_x(f, g)$ 的两个解。证明：若

$$(X, B) \stackrel{d}{=} (X', B),$$

且两个解中至少有一个是强解，则

$$X = X' \quad \text{几乎处处.}$$

2 Lipschitz 系数情形下的存在性与唯一性

本节假设定义 1.2 中的 f, g 满足如下 Lipschitz 条件：存在常数 K ，使得对任意 t, w, w' ，

$$|f(t, w) - f(t, w')| + |g(t, w) - g(t, w')| \leq K \sup_{s \leq t} |w(s) - w'(s)|,$$

这里的绝对值表示相应空间中的范数。在这个条件下，给定 $\mathbb{R}^r$ 中的布朗运动 B ，我们将证明：对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ ，存在唯一过程 X ，使 (X, B) 是 $e_x(f, g)$ 的解，而且该解是强解。由于 (B_t, t) 可以看作 $(r+1)$ 维半鞅，只须证明下面更一般的结果。

定理 2.1. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 是滤过概率空间， $(\mathcal{F}_t)$ 右连续且完备， Z 是连续 r 维半鞅。假设 f 满足上述 Lipschitz 条件；并且对每个 $y \in \mathbb{R}^d$ ，当 $\bar{y}(t) \equiv y$ 时， $f(\cdot, \bar{y})$ 局部有界。那么对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ ，存在唯一的（相差不可分辨性意义下）过程 X ，使得

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_\bullet) dZ_s.$$

此外， X 关于 Z 的完备自然滤过 $(\mathcal{F}_t^Z)$ 适应。

证明。 只证明 $d = 1$ 的情形；一般维数只会增加记号。设

$$Z = M + A$$

是 Z 的典范分解。先假设直线上的测度 $d\langle M, M \rangle_t$ 与 $|dA|_t$ 都被 Lebesgue 测度 dt 控制。固定 $x \in \mathbb{R}$ 。对任意满足必要可测性条件的过程 U ，定义

$$(SU)_t = x + \int_0^t f(s, U_\bullet) dZ_s.$$

若 V 是另一个这样的过程，记

$$\Phi_t(U, V) = E \left[\sup_{s \leq t} |U_s - V_s|^2 \right].$$

由 $(h+k)^2 \leq 2(h^2 + k^2)$,

$$\begin{aligned} \Phi_t(SU, SV) &\leq 2E \left[\sup_{s \leq t} \left(\int_0^s (f(r, U_\bullet) - f(r, V_\bullet)) dM_r \right)^2 \right] \\ &\quad + 2E \left[\sup_{s \leq t} \left(\int_0^s |f(r, U_\bullet) - f(r, V_\bullet)| |dA|_r \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

利用 Doob 不等式与 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}
 \Phi_t(SU, SV) &\leq 8E \left[\left(\int_0^t (f(r, U_\bullet) - f(r, V_\bullet)) \, dM_r \right)^2 \right] \\
 &\quad + 2E \left[\left(\int_0^t |dA|_s \right) \left(\int_0^t |f(r, U_\bullet) - f(r, V_\bullet)|^2 \, dA|_r \right) \right] \\
 &\leq 8E \left[\int_0^t |f(r, U_\bullet) - f(r, V_\bullet)|^2 \, d\langle M, M \rangle_r \right] \\
 &\quad + 2tE \left[\int_0^t |f(r, U_\bullet) - f(r, V_\bullet)|^2 \, dA|_r \right] \\
 &\leq 2K^2(4+t)E \left[\int_0^t \sup_{s \leq r} |U_s - V_s|^2 \, dr \right] \\
 &= 2K^2(4+t) \int_0^t \Phi_r(U, V) \, dr.
 \end{aligned}$$

用 Picard 迭代定义

$$X_t^0 = x, \quad X^n = S(X^{n-1}).$$

固定 $T > 0$, 置

$$C = 2K^2(4+T), \quad D = \Phi_T(X^0, X^1).$$

由 $f(\cdot, \bar{x})$ 的局部有界性, $D < \infty$ 。反复使用上式, 对 $t \leq T$ 与任意 $n \geq 1$ 得

$$\Phi_t(X^{n-1}, X^n) \leq D \frac{C^n T^n}{n!}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sup_{s \leq t} |X_s^n - X_s^{n-1}| \right\|_2 < \infty.$$

从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{s \leq t} |X_s^n - X_s^{n-1}|$$

几乎处处收敛, X^n 在每个有界时间区间上一致收敛到某个连续过程 X 。由第 IV 章定理 2.12, $X = SX$, 所以 X 是所给方程的解。每一步 Picard 迭代都关于 $(\mathcal{F}_t^Z)$ 适应, 故极限 X 也适应。

再证唯一性。设 X, Y 是两个解, 并令

$$T_k = \inf\{t : |X_t| > k \text{ 或 } |Y_t| > k\}.$$

以停住的 Z^{T_k} 代替 Z , 定义算子 $\tilde{S}$ 。于是

$$X^{T_k} = \tilde{S}(X^{T_k}), \quad Y^{T_k} = \tilde{S}(Y^{T_k}).$$

对 $t \leq T$,

$$\Phi_t(X^{T_k}, Y^{T_k}) \leq C \int_0^t \Phi_s(X^{T_k}, Y^{T_k}) \, ds.$$

由 f 的性质, 左端关于 t 局部有界, 故 Gronwall 引理给出 $\Phi_t(X^{T_k}, Y^{T_k}) = 0$ 。于是 $X = Y$ 于 $[0, T_k \wedge T]$ 上。令 $k, T \rightarrow \infty$, 得到唯一性。

一般情形可由时间变换归结为上述特殊情形。置

$$A'_t = t + \langle M, M \rangle_t + \int_0^t |dA|_s.$$

它连续且严格递增。令 C_t 是与 A' 相联系的时间变换，并令

$$\widetilde{M}_t = M_{C_t}, \quad \widetilde{A}_t = A_{C_t}, \quad \widetilde{Z}_t = Z_{C_t}.$$

这些过程满足前一情形的支配假设。又因 $C_t \leq t$,

$$|f(C_t, U_\bullet) - f(C_t, V_\bullet)| \leq K \sup_{s \leq t} |U_s - V_s|.$$

所以前半段证明仍适用于方程

$$\widetilde{X}_t = x + \int_0^t f(C_s, \widetilde{X}_\bullet) d\widetilde{Z}_s,$$

它有唯一解。由第 V 章第 1 节的时间变换结果，

$$X_t = \widetilde{X}_{A'_t}$$

正是原方程的唯一解。 □

和常微分方程一样，定理 2.1 本身并不给出具体方程的闭式解。不过，下面这类方程可以显式求解。练习 2.8 还将说明 SDE 与 ODE（常微分方程）之间的一种联系。

定义 2.2. 若随机方程可以写成

$$Y_t = H_t + \int_0^t Y_s dX_s,$$

其中 H, X 是给定的连续半鞅，则称它为线性随机方程。等价地，

$$dY_t = dH_t + Y_t dX_t, \quad Y_0 = H_0.$$

一个重要例子是 Langevin 方程

$$dV_t = dB_t - \beta V_t dt,$$

其中 B 是一维布朗运动， β 是实常数；第 VIII 章练习 3.14 已研究过这个方程。另一个例子是

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s dX_s,$$

第 IV 章第 3 节已经说明其唯一解为 $Y = \mathcal{E}(X)$ 。结合常微分方程中一阶线性方程的公式，便得到下述闭式解；其存在性与唯一性由定理 2.1 保证。

命题 2.3. 定义 2.2 中线性方程的解为

$$Y_t = \mathcal{E}(X)_t \left(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s^{-1} (dH_s - d\langle H, X \rangle_s) \right).$$

特别地, 若 $\langle H, X \rangle = 0$, 则

$$Y_t = \mathcal{E}(X)_t \left(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s^{-1} dH_s \right).$$

证明. 对命题所给 Y 计算 $\int_0^t Y_s dX_s$. 由 $\mathcal{E}(X)_s dX_s = d\mathcal{E}(X)_s$ 和分部积分公式,

$$\begin{aligned} \int_0^t Y_s dX_s &= H_0 \int_0^t \mathcal{E}(X)_s dX_s \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s dX_s \left(\int_0^s \mathcal{E}(X)_u^{-1} (dH_u - d\langle H, X \rangle_u) \right) \\ &= -H_0 + H_0 \mathcal{E}(X)_t + \mathcal{E}(X)_t \int_0^t \mathcal{E}(X)_s^{-1} (dH_s - d\langle H, X \rangle_s) \\ &\quad - \int_0^t \mathcal{E}(X)_s (\mathcal{E}(X)_s^{-1} dH_s - \mathcal{E}(X)_s^{-1} d\langle H, X \rangle_s) \\ &\quad - \left\langle \mathcal{E}(X), \int_0^\cdot \mathcal{E}(X)_s^{-1} (dH_s - d\langle H, X \rangle_s) \right\rangle_t \\ &= Y_t - H_t + \langle H, X \rangle_t - \left\langle \int_0^\cdot \mathcal{E}(X)_s dX_s, \int_0^\cdot \mathcal{E}(X)_s^{-1} dH_s \right\rangle_t \\ &= Y_t - H_t. \end{aligned}$$

这正是所需等式。 □

注. 也可以在事先不知道解的形式时推导上述公式, 见练习 2.6 第 2 问。若 H 只是渐进可测过程而未必是半鞅, 也可证明

$$Y = H - \mathcal{E}(X) \int H d(\mathcal{E}(X)^{-1})$$

是定义 2.2 中线性方程的解。当 H 是半鞅时, 这与命题 2.3 的公式一致。

因此, 从 v 出发的 Langevin 方程之解为

$$V_t = e^{-\beta t} \left(v + \int_0^t e^{\beta s} dB_s \right).$$

当 $\beta > 0$ 时, 这就是第 III 章练习 1.13 中参数为 β 的 Ornstein-Uhlenbeck (OU) 过程; 另见练习 2.16。物理学中有时用 $\int_0^t V_s ds$ 作为物理布朗运动的另一种数学模型, 因此 V 也称为参数 β 的 OU 速度过程。在物理解释中 β 严格为正; 当 $\beta = 0$ 时,

$$V_t = v + B_t.$$

在所有情形, 参数为 β 的 OU 过程的无穷小生成元都是

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta x \frac{\partial}{\partial x}.$$

现在回到一般方程 $e(f, g)$, 其中 f, g 满足本节开头的条件。给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上的布朗运动 B , 对每个 $x \in \mathbb{R}^d$, 以 X^x 表示 $e_x(f, g)$ 的唯一解。下面证明: 可以在每个不可分辨类中选择版本, 使所得过程关于初值 x 连续。

定理 2.4. 若 f, g 有界, 则存在过程

$$\{X_t^x : x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}_+\},$$

其样本轨道关于 (t, x) 联合连续, 并且对每个 x ,

$$X_t^x = x + \int_0^t f(s, X_\bullet^x) dB_s + \int_0^t g(s, X_\bullet^x) ds \quad P\text{-几乎处处}.$$

证明. 固定 $p \geq 2$ 和 $t > 0$. 沿用定理 2.1 证明中的记号, 但写 S_x 以突出初值 x . 由

$$|a + b + c|^p \leq 3^{p-1}(|a|^p + |b|^p + |c|^p),$$

有

$$\begin{aligned} \sup_{s \leq t} |S_x(U)_s - S_y(V)_s|^p &\leq 3^{p-1} \left\{ |x - y|^p \right. \\ &\quad + \sup_{s \leq t} \left| \int_0^s (f(r, U_\bullet) - f(r, V_\bullet)) dB_r \right|^p \\ &\quad \left. + \sup_{s \leq t} \left| \int_0^s (g(r, U_\bullet) - g(r, V_\bullet)) dr \right|^p \right\}. \end{aligned}$$

由 BDG 不等式和 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned} &E \left[\sup_{s \leq t} \left| \int_0^s (f(r, U_\bullet) - f(r, V_\bullet)) dB_r \right|^p \right] \\ &\leq C_p E \left[\left(\int_0^t |f(r, U_\bullet) - f(r, V_\bullet)|^2 dr \right)^{p/2} \right] \\ &\leq C_p t^{(p-2)/2} E \left[\int_0^t |f(r, U_\bullet) - f(r, V_\bullet)|^p dr \right] \\ &\leq K^p C_p t^{(p-2)/2} E \left[\int_0^t \sup_{s \leq r} |U_s - V_s|^p dr \right]. \end{aligned}$$

同样,

$$\sup_{s \leq t} \left| \int_0^s (g(r, U_\bullet) - g(r, V_\bullet)) dr \right|^p \leq K^p t^{p-1} \int_0^t \sup_{s \leq r} |U_s - V_s|^p dr.$$

取 $U = X^x$ 、 $V = X^y$, 并置

$$h(t) = E \left[\sup_{s \leq t} |X_s^x - X_s^y|^p \right].$$

于是存在只依赖于 p, t 的常数 b_t^p, c_t^p , 使

$$h(t) \leq b_t^p |x - y|^p + c_t^p \int_0^t h(s) ds.$$

Gronwall 引理说明, 存在只依赖于 p, t 的 a_t^p , 满足

$$E \left[\sup_{s \leq t} |X_s^x - X_s^y|^p \right] \leq a_t^p |x - y|^p.$$

由于 p 可以任意取大, 应用第 I 章定理 2.1 的 Kolmogorov 连续性判据 (取 $p > d$), 可得到 X 关于 (t, x) 双连续的修正。容易验证: 对每个固定 x , 修正后的 X^x 仍是 $e_x(f, g)$ 的解。□

注。 有界性只用于保证证明中的函数 h 有限。在某些具体情形，即使 f, g 无界， h 仍然有限，此时定理依然成立。

以下专门考虑 $e(\sigma, b)$ ，其中 σ, b 都只依赖于 x ，并且有界、Lipschitz 连续。置

$$P_t(x, A) = P(X_t^x \in A).$$

由定理 1.9，每个 X^x 都是以 P_t 为转移函数的 Markov 过程。事实上还有下面更强的结论。

定理 2.5。 转移函数 P_t 是 Feller 转移函数。

证明。 取 $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ 。由

$$P_t f(x) = E[f(X_t^x)]$$

和定理 2.4， $P_t f$ 连续。还要证明 $P_t f \in C_0$ 。事实上，对任意 $r > 0$ ，

$$|P_t f(x)| \leq \sup_{\{y: |y-x| \leq r\}} |f(y)| + \|f\|_\infty P(|X_t^x - x| > r),$$

而

$$\begin{aligned} P(|X_t^x - x| > r) &\leq r^{-2} E[|X_t^x - x|^2] \\ &\leq 2r^{-2} E \left[\left| \int_0^t \sigma(X_s^x) dB_s \right|^2 + \left| \int_0^t b(X_s^x) ds \right|^2 \right] \\ &\leq 2k^2 r^{-2} (t + t^2), \end{aligned}$$

其中 k 是 σ, b 的共同一致上界。先令 $|x| \rightarrow \infty$ ，再令 $r \rightarrow \infty$ ，得到

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} P_t f(x) = 0.$$

另一方面，对每个 x ，由轨道连续性和有界收敛定理， $t \mapsto P_t f(x)$ 也连续。这就证明了 Feller 性。□

对照第 VII 章第 1 节末提出的计划，我们看到：随机积分方法已经构造出一类 Feller 过程；当 σ, b 有界且 Lipschitz 连续，并且

$$a = \sigma \sigma^\top,$$

其生成元在 $C_c^2(\mathbb{R}^d)$ 上等于

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

练习 2.6 (#, 命题 2.3 的补充)。

1°) 以 $*$ 表示第 IV 章练习 2.18 的反向积分。证明命题 2.3 中的解也可写成

$$Y_t = \mathcal{E}(X)_t \left(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s^{-1} * dH_s \right).$$

这个形式与常微分方程中线性方程的公式更加相似。

2°) 按如下思路重写命题 2.3 的证明：令

$$Y = \mathcal{E}(X)Z,$$

求出要使 Y 成为解时 Z 应满足的条件。

练习 2.6 bis (向量线性方程)。 设 X 是连续半鞅组成的 $d \times d$ 矩阵, H 是局部有界可预见过程组成的 $r \times d$ 矩阵。定义右随机积分

$$(H \cdot dX)_t = \int_0^t H_s \cdot dX_s$$

为 $r \times d$ 矩阵, 其 (i, j) 元为

$$\sum_k \int_0^t H_s^{ik} dX_s^{kj}.$$

维数匹配时, 同样可定义左积分 $dX \cdot H$ 。

1°) 若 Y 是连续半鞅组成的 $r \times d$ 矩阵, 定义 $\langle Y, X \rangle$ 为 $r \times d$ 矩阵, 其 (i, j) 元是

$$\sum_k \langle Y^{ik}, X^{kj} \rangle.$$

证明

$$d(YX) = dY \cdot X + Y \cdot dX + d\langle Y, X \rangle,$$

并在维数匹配时证明

$$\langle H \cdot dY, X \rangle = H \cdot d\langle Y, X \rangle, \quad \langle Y, dX \cdot H \rangle = d\langle Y, X \rangle \cdot H.$$

2°) 对给定 X , 以 $\mathcal{E}(X)$ 表示矩阵方程

$$U_t = I_d + \int_0^t U_s \cdot dX_s$$

的唯一解, 并置

$$\mathcal{E}'(X) = \mathcal{E}(X^\top)^\top.$$

证明 $\mathcal{E}'(X)$ 是某个含左积分的线性方程之解, 并证明

$$\mathcal{E}'(-X + \langle X, X \rangle)$$

是矩阵 $\mathcal{E}(X)$ 的逆。因此 $\mathcal{E}(X)$ 可逆; 也可以通过证明其行列式满足一维线性方程得到这一事实。

提示: 计算

$$d[\mathcal{E}(X) \mathcal{E}'(-X + \langle X, X \rangle)].$$

3°) 若 H 是连续半鞅组成的 $r \times d$ 矩阵, 证明方程

$$Y_t = H_t + \int_0^t Y_s \cdot dX_s$$

的解为

$$\left(H_0 + \int_0^t (dH_s - d\langle H, X \rangle_s) \mathcal{E}(X_s)^{-1} \right) \mathcal{E}(X_t).$$

陈述并证明方程

$$Y_t = H_t + \int_0^t dX_s \cdot Y_s$$

的类似结果。

练习 2.7. 设 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, f 是常微分方程

$$f'(s) = F(s)f(s), \quad f(0) = 1$$

的解。

1°) 设 G 是另一个连续函数, X 是连续半鞅。证明

$$Z_t = f(t) \left[z + \int_0^t f(u)^{-1} G(u) \, dX_u \right]$$

是 SDE

$$Z_t = z + \int_0^t F(u) Z_u \, du + \int_0^t G(u) \, dX_u$$

的唯一解。此外, 对 $0 \leq s \leq t$,

$$Z_t = \frac{f(t)}{f(s)} Z_s + \int_s^t \frac{f(t)}{f(u)} G(u) \, dX_u.$$

2°) 若 X 是布朗运动, 证明 Z 是高斯 Markov 过程。

3°) 写出前两问的多维版本。特别地, 求解 d 维 Langevin 方程

$$dX_t = \sigma \, dB_t + \beta X_t \, dt,$$

其中 σ, β 是 $d \times d$ 矩阵。

提示: 使用练习 2.6 bis。

练习 2.8 (*, Doss-Sussmann 方法). 设 σ 是实直线上的 C^2 函数, 且 σ', σ'' 有界; 设 b Lipschitz 连续。令 $h(x, s)$ 是常微分方程

$$\frac{\partial h}{\partial s}(x, s) = \sigma(h(x, s)), \quad h(x, 0) = x$$

的解。

设 X 是满足 $X_0 = 0$ 的连续半鞅。对每个 ω , 令 D_t 是常微分方程

$$\frac{dD_t}{dt} = b(h(D_t, X_t(\omega))) \exp \left\{ - \int_0^{X_t(\omega)} \sigma'(h(D_t, s)) \, ds \right\}, \quad D_0 = y,$$

的解。证明 $h(D_t, X_t)$ 是方程

$$Y_t = y + \int_0^t \sigma(Y_s) \circ dX_s + \int_0^t b(Y_s) \, ds$$

的唯一解, 其中 $\circ$ 表示 Stratonovich 积分。此外,

$$D_t = h(Y_t, -X_t).$$

练习 2.9. 对半鞅 H, X , 以 $\mathcal{E}_X(H)$ 表示定义 2.2 中线性方程的解。

1°) 若 K 是另一个半鞅, 证明

$$\mathcal{E}_X(H + K \cdot X) = \mathcal{E}_X(H + K) - K.$$

2°) 设 X, Y 是两个半鞅, 并置

$$Z = X + Y + \langle X, Y \rangle.$$

证明: 对任意半鞅 H, K , 存在半鞅 L , 使

$$\mathcal{E}_X(H)\mathcal{E}_Y(K) = \mathcal{E}_Z(L).$$

当 $H = K = 1$ 时, 这就是第 IV 章练习 3.11 的特殊情形。

3°) 若 X, Y, H 是三个半鞅, 则方程

$$Z = H + \langle Z, Y \rangle \cdot X$$

有唯一解

$$Z = H + \mathcal{E}_{\langle X, Y \rangle}(\langle H, Y \rangle) \cdot X.$$

练习 2.10 (*, 爆炸)。若对每个 $n \in \mathbb{N}$, 存在常数 C_n , 使得对球 $B(0, n)$ 中任意 x, y ,

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\| + \|b(x) - b(y)\| \leq C_n \|x - y\|,$$

则称 $\mathbb{R}^d$ 上的函数 σ, b 局部 Lipschitz。

1°) 若 σ, b 局部 Lipschitz, 证明: 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 以及概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上任意布朗运动 B , 存在唯一的 $(\mathcal{F}_t^B)$ -适应过程 X 。若

$$e = \inf\{t : |X_t| = +\infty\},$$

则 X 在 $[0, e)$ 上连续, 并且在 $\{t < e\}$ 上

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds.$$

称 e 为 X 的爆炸时刻。

提示: 取全局 Lipschitz 函数 σ_n, b_n , 使它们在 $B(0, n)$ 上分别等于 σ, b 。

2°) 若存在常数 K , 使对每个 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\|\sigma(x)\|^2 + \|b(x)\|^2 \leq K(1 + \|x\|^2),$$

证明 $E[|X_t|^2] < \infty$, 并推出 $P(e = \infty) = 1$ 。

提示: 令

$$T_n = \inf\{t : |X_t| > n\},$$

用 Itô 公式展开 $|X_{t \wedge T_n}|^2$ 。

3°) 令 $\widehat{W}$ 是所有映射

$$w : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\Delta\}$$

组成的空间, 并要求: 若

$$\zeta(w) = \inf\{t : w(t) = \Delta\},$$

则对所有 $s \geq \zeta(w)$ 有 $w(s) = \Delta$, 且 w 在 $[0, \zeta(w))$ 上连续。空间 $\widehat{W}$ 包含 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, 后者上 $\zeta \equiv +\infty$ 。以 Y 表示坐标过程, Q_x 表示第 1 问中 X 在 $\widehat{W}$ 上的分布, P_x 表示从 x 出发的布朗运动之分布。证明: 当 $d = 1, \sigma = 1$ 时, 对每个 $A \in \mathcal{F}_t$,

$$Q_x(A \cap \{t < \zeta\}) = E_{P_x} \left[\mathbf{1}_A \mathcal{E} \left(\int_0^\cdot b(Y_s) dY_s \right)_t \right].$$

因此

$$\mathcal{E}\left(\int_0^\cdot b(Y_s) dY_s\right)$$

是真鞅，当且仅当 $Q_x(\zeta < \infty) = 0$ 。

4°) 证明：对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{E}\left(\alpha \int_0^\cdot B_s dB_s\right)$$

是真鞅；并证明当 $\alpha > 0$, $t \geq 2/\alpha$ 时 Kazamaki 判据不适用。

校订注。原书把练习 2.10 第 4 问中 Kazamaki 判据失效的阈值印成 $t \geq \alpha^{-1}$, 并未注明 $\alpha > 0$ 。若

$$M_t = \alpha \int_0^t B_s dB_s = \frac{\alpha}{2}(B_t^2 - t),$$

则

$$E[e^{M_t/2}] = e^{-\alpha t/4} E[e^{\alpha B_t^2/4}]$$

在 $\alpha > 0$ 时有限当且仅当 $\alpha t < 2$ ；当 $\alpha \leq 0$ 时在任意有限区间均有限。因此阈值改为 $2/\alpha$, 并补出正参数条件。

练习 2.11 (#, Zvonkin 方法)。

1°) 假设 $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 局部 Lipschitz (见练习 2.10), 并且远离 0; 设 b 是局部有界 Borel 函数。证明微分方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2 h'' + bh' = 0$$

的每个非常数解 h 都严格递增或严格递减, 并且

$$g = (\sigma h') \circ h^{-1}$$

局部 Lipschitz。

2°) 在第 1 问的条件下, 证明方程 $e(\sigma, b)$ 具有路径唯一性。

提示: 建立 $e(\sigma, b)$ 的解与 $e(g, 0)$ 的解之间的对应, 再使用前一练习的结果。

这种方法相当于把解变换到自然尺度上; 参见第 VII 章练习 3.20。

3°) 设 σ 有界且 $\sigma \geq \varepsilon > 0$, b Lebesgue 可积。证明 $e(\sigma, b)$ 的解常返。

练习 2.12 (#, 布朗桥)。 建议先阅读第 IV 章练习 3.18 的第 1、2 问。

1°) 证明 SDE

$$X_t^x = \beta_t + \int_0^t \frac{x - X_s^x}{1-s} ds, \quad t \in [0, 1), x \in \mathbb{R},$$

的解为

$$\begin{aligned} X_t^x &= xt + \beta_t - (1-t) \int_0^t \frac{\beta_s}{(1-s)^2} ds \\ &= xt + (1-t) \int_0^t \frac{d\beta_s}{1-s}. \end{aligned}$$

2°) 证明

$$\lim_{t \uparrow 1} X_t^x = x \quad \text{几乎处处.}$$

若定义 $X_1^x = x$, 则 $(X_t^x : 0 \leq t \leq 1)$ 是布朗桥。

提示: 若 g 是 $[0, 1]$ 上正、连续、递减且 $g(1) = 0$ 的函数, 而 $f \geq 0$ 满足

$$\int_0^1 f(u)g(u) \, du < \infty,$$

则

$$\lim_{t \uparrow 1} g(t) \int_0^t f(u) \, du = 0.$$

取

$$g(t) = 1 - t, \quad f(t) = |\beta_1 - \beta_t|(1 - t)^{-2}.$$

3°) 设 P^x 是 X^x 在 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上的分布。前两问结合第 IV 章练习 3.18 第 1 问, 给出第 I 章练习 3.16 的另一个证明: (P^x) 是 Wiener 测度关于 $\sigma(B_1)$ 的正则分解, 这里 B 是典范过程。

4°) 以下沿用第 IV 章练习 3.18 的情形与记号。证明 X^x 与 β 具有相同的滤过。

5°) 证明: 每个 $(\mathcal{F}_t)$ -可预见过程都与某个过程

$$K(B_1(\omega), s, \omega)$$

不可分辨, 其中

$$K : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

关于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\beta)$ 可测, $\mathcal{P}(\beta)$ 是相对于 β 的滤过的可预见 σ -代数。证明任意平方可积的 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅均可写成

$$f(B_1) + \int_0^t K_s \, d\beta_s,$$

其中 f, K 满足适当的可积性条件。

练习 2.13。

1°) 设 B 是一维布朗运动, b 是有界 Borel 函数, 并置

$$Y_t = B_t - \int_0^t b(B_s) \, ds.$$

证明对每个 t ,

$$\mathcal{F}_t^Y = \mathcal{F}_t^B.$$

提示: 使用 Girsanov 定理和练习 2.11 第 2 问。

2°) 若 b 无界, 结论不再成立。例如, 令

$$Y_t = B_t - \int_0^t B_s^{-1} \, ds,$$

其中积分按第 VI 章练习 1.19 定义。证明

$$E[B_1 \mid \sigma(Y_s : s \leq 1)] = 0.$$

提示: 对 $f \in L^2([0, 1])$, 证明

$$E[B_1 \mathcal{E}(f \cdot Y)_1] = 0,$$

再使用第 V 章引理 3.1 的论证。也可参看第 VI 章练习 1.29 第 4 问。

练习 2.14 (*, 带反射的随机微分方程)。设 $\sigma(s, x), b(s, x)$ 是 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ 上的两个函数, B 是布朗运动。给定 $x_0 \geq 0$, 称过程对 (X, K) 为带反射 SDE $e_{x_0}(\sigma, b)$ 的解, 如果:

i) X 连续、非负、关于 $(\mathcal{F}_t^B)$ 适应, 并且

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s) ds + K_t;$$

ii) K 连续、递增、 $K_0 = 0$ 、关于 $(\mathcal{F}_t^B)$ 适应, 并且

$$\int_0^\infty X_s dK_s = 0.$$

若 σ, b 有界, 且存在常数 C , 使对所有 s, x, y ,

$$|\sigma(s, x) - \sigma(s, y)| + |b(s, x) - b(s, y)| \leq C|x - y|,$$

证明带反射的 $e_{x_0}(\sigma, b)$ 的解存在且唯一。

提示: 使用逐次逼近法, 并以第 VI 章引理 2.1 作为从一次迭代过渡到下一次迭代的工具。

练习 2.15 (*, 爆炸判据)。沿用练习 2.11 的情形, 并置

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_0^x \exp \left\{ - \int_0^y 2b(z)\sigma(z)^{-2} dz \right\} dy, \\ m(x) &= 2 \int_0^x \exp \left\{ \int_0^y 2b(z)\sigma(z)^{-2} dz \right\} \sigma(y)^{-2} dy, \\ k(x) &= \int_0^x m(y) ds(y). \end{aligned}$$

关于 s, m 的解释可参见第 VII 章练习 3.20。

1°) 设 U 是微分方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2 U'' + bU' = U$$

满足 $U(0) = 1, U'(0) = 0$ 的唯一解。验证

$$U(x) = 1 + \int_0^x ds(y) \int_0^y U(z) dm(z),$$

并证明

$$1 + k \leq U \leq \exp(k).$$

2°) 设 e 是爆炸时刻, X 是 $e_x(\sigma, b)$ 的解。证明对每个 x ,

$$e^{-t \wedge e} U(X_{t \wedge e})$$

是正超鞅。推出: 若

$$k(-\infty) = k(+\infty) = \infty,$$

则对每个 $x, P_x(e = \infty) = 1$ 。

3°) 照例令

$$T_0 = \inf\{t : X_t = 0\}.$$

证明对每个 x ,

$$e^{-t \wedge T_0} U(X_{t \wedge T_0})$$

是有界 P_x -鞅。推出：若

$$k(-\infty) < \infty \quad \text{或} \quad k(+\infty) < \infty,$$

则对每个 x , $P_x(e < \infty) > 0$ 。

4°) 证明：若对每个 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $P_x(e < \infty) = 1$, 则下列三种情形之一成立：

- i) $k(-\infty) < \infty$ 且 $k(+\infty) < \infty$;
- ii) $k(-\infty) < \infty$ 且 $s(+\infty) = +\infty$;
- iii) $k(+\infty) < \infty$ 且 $s(-\infty) = -\infty$ 。

5°) 假设处于上面的情形 i), 定义

$$G(x, y) = \frac{(s(x) - s(-\infty))(s(+\infty) - s(y))}{s(+\infty) - s(-\infty)} \quad \text{当 } x \leq y,$$

并令 $G(x, y) = G(y, x)$ 当 $y \leq x$ 。再置

$$U_1(x) = \int_{\mathbb{R}} G(x, y) \, dm(y).$$

再次可参见第 VII 章第 3 节理解这个公式。证明

$$U_1(X_{t \wedge e}) + t \wedge e$$

是局部鞅, 并推出

$$E_x[e] < \infty,$$

因而 $P_x(e < \infty) = 1$ 。

6°) 证明在情形 ii) 与 iii) 下也有 $P_x(e < \infty) = 1$ 。

校订注。 练习 2.15 第 4 问的原书情形 iii) 把 $s(-\infty)$ 印成 $+\infty$, 但按定义 s 严格递增且 $s(0) = 0$, 故只能是 $-\infty$ 。第 5 问原书又把速度测度积分印作 $\int G(x, y)m(y) \, dy$; 这里 m 已定义为累积函数, 且第 1 问使用的是 dm , 故改为 $\int G(x, y) \, dm(y)$ 。

练习 2.16。

1°) 证明：当 $\beta > 0$ 时, Langevin 方程的解 V_t 是参数为 β 、尺度为 $1/(2\beta)$ 的 OU 过程。

2°) 假设 X_0 与 B 独立。证明：满足 $V_0 = X_0$ 的解 V 平稳, 当且仅当

$$X_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2\beta}\right).$$

在这种情况下,

$$\begin{aligned} V_t &= (2\beta)^{-1/2} e^{-\beta t} \tilde{B}(e^{2\beta t}) \\ &= (2\beta)^{-1/2} e^{\beta t} \tilde{\Gamma}(e^{-2\beta t}), \end{aligned}$$

其中 $\tilde{B}, \tilde{\Gamma}$ 是两个标准一维布朗运动, 满足

$$\tilde{B}_u = u \tilde{\Gamma}_{1/u}.$$

练习 2.17 ().** 本练习例外地不要求定义 1.2 的条件 i) 成立。

1°) 证明随机方程

$$X_t = B_t + \int_0^t \frac{X_s}{s} ds$$

在 $t \in [0, 1]$ 上有解。

提示：对练习 2.12 中方程的解作时间反演。

2°) 证明：若 $0 < \varepsilon < t \leq 1$ ，则

$$X_t = \frac{t}{\varepsilon} X_\varepsilon + t \int_\varepsilon^t \frac{dB_u}{u}.$$

3°) 证明 X 不关于 $(\mathcal{F}_t^B)$ 适应。

提示：若解是强解，第 2 问右端的两项应相互独立。令 $\varepsilon \downarrow 0$ ，便会推出：对 $\lambda \neq 0$ ，

$$E[e^{i\lambda X_t}] = 0,$$

这是不可能的。

4°) 用同样方法证明：若 ϕ 是 $(0, \infty)$ 上局部有界的 Borel 函数，则只要

$$\int_0^1 \exp \left\{ 2 \int_u^1 \phi(s) ds \right\} du = \infty,$$

方程

$$X_t = B_t + \int_0^t \phi(s) X_s ds$$

就没有 $(\mathcal{F}_t^B)$ -适应解。

练习 2.18 (布朗运动指数泛函的分布)。 设 β, γ 是两个相互独立的标准一维布朗运动，并对 $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ 置

$$\beta_t^{(\mu)} = \beta_t + \mu t, \quad \gamma_t^{(\nu)} = \gamma_t + \nu t.$$

1°) 证明：对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$ ，过程

$$X_t = \exp(\beta_t^{(\mu)}) \left(x_0 + \int_0^t \exp(-\beta_s^{(\mu)}) d\gamma_s^{(\nu)} \right)$$

是扩散过程，其无穷小生成元为

$$\frac{1+x^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \left(x \left(\mu + \frac{1}{2} \right) + \nu \right) \frac{d}{dx}.$$

2°) 证明 X 与 $(\sinh(Y_t) : t \geq 0)$ 同分布，其中 Y 是生成元为

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + (\mu \tanh y + \nu (\cosh y)^{-1}) \frac{d}{dy}$$

的扩散过程。

3°) 由第 2 问推出：对固定 t ，

$$\int_0^t \exp(\beta_s^{(\mu)}) d\gamma_s^{(\nu)} \stackrel{d}{=} \sinh(Y_t).$$

特别地, 得到 Bougerol 恒等式: 对固定 t ,

$$\int_0^t e^{\beta s} d\gamma_s \stackrel{d}{=} \sinh(\beta t).$$

提示: 若 Lévy 过程 L 从 0 出发, 则在固定 t 上, 过程 $(L_s : s \leq t)$ 与 $(L_t - L_{t-s} : s \leq t)$ 等价。

4°) 当 $\nu = 0$, $Y_0 = 0$ 时, 证明在 $\mathcal{F}_t$ 上 Y 的分布 P^μ 相对于 Wiener 测度的密度为

$$\cosh(X_t)^\mu \exp \left\{ -\frac{\mu - \mu^2}{2} \int_0^t \cosh(X_s)^{-2} ds \right\} \exp \left\{ -\frac{\mu^2}{2} t \right\}.$$

进一步证明: 对固定 t ,

$$\int_0^t e^{\beta s + \varepsilon s} d\gamma_s \stackrel{d}{=} \sinh(\beta t + \varepsilon t),$$

其中 ε 是与 β 独立的对称 Bernoulli 随机变量 (以相同概率取 ± 1)。

提示: 参见第 VIII 章练习 3.18 第 2 问的情形 i)。

练习 2.19 (Lévy 等价性的推广)。

1°) 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 并令

$$b_\lambda(x) = -\lambda \operatorname{sgn}(x).$$

证明一维方程 $e(1, b_\lambda)$ 具有路径唯一性。

提示: 使用练习 2.11。

2°) 以 X^λ 表示从 0 出发的 $e(1, b_\lambda)$ 之解, 以 B^λ 表示从 0 出发、常漂移为 λ 的布朗运动, 并置

$$S_t^\lambda = \sup_{s \leq t} B_s^\lambda.$$

证明

$$(S_t^\lambda - B_t^\lambda : t \geq 0) \stackrel{d}{=} (|X_t^\lambda| : t \geq 0).$$

提示: 使用第 VI 章引理 2.1 的 Skorokhod 引理。

3 一维 SDE 及与 Hölder 连续系数有关的结果

本节给出定理 1.7 的一个部分逆命题: 在某些条件下, 依分布唯一性蕴含路径唯一性, 从而扩大后者的适用范围。证明大量使用局部时, 因此限于一维。我们研究 $e(\sigma, b)$, 其中 σ 在 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上局部有界; 考虑定义在同一概率空间、由同一个布朗运动驱动的两组解。回忆任意解 X 都是连续半鞅, 以下以 $L^x(X)$ 表示其局部时关于空间变量的右连续版本。

下面的结论看似有些意外: 即使相应 ODE 不唯一, SDE 仍可能唯一。原因在于布朗运动二次变差具有正则化作用, 这一点将在证明中显现。对 ODE 而言, 两个解的上确界仍是解; SDE 通常并非如此, 因为会出现局部时项。准确地说:

命题 3.1. 设 X^1, X^2 是 $e(\sigma, b)$ 的两个解, 并且

$$X_0^1 = X_0^2 \quad \text{几乎处处.}$$

则 $X^1 \vee X^2$ 是一个解, 当且仅当

$$L^0(X^1 - X^2) \equiv 0.$$

证明。 由 Tanaka 公式,

$$\begin{aligned} X_t^1 \vee X_t^2 &= X_t^1 + (X_t^2 - X_t^1)^+ \\ &= X_t^1 + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^2 > X_s^1\}} d(X_s^2 - X_s^1) + \frac{1}{2} L_t^0(X^2 - X^1). \end{aligned}$$

把

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t \sigma(s, X_s^i) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^i) ds, \quad i = 1, 2,$$

代入, 直接整理得

$$\begin{aligned} X_t^1 \vee X_t^2 &= (X_0^1 \vee X_0^2) + \int_0^t \sigma(s, X_s^1 \vee X_s^2) dB_s \\ &\quad + \int_0^t b(s, X_s^1 \vee X_s^2) ds + \frac{1}{2} L_t^0(X^2 - X^1). \end{aligned}$$

这就证明了结论。 □

下面的结果是本节的关键。

命题 3.2。 假设 $e(\sigma, b)$ 具有依分布唯一性, 并且对任意一对初值相同的解 (X^1, X^2) , 都有

$$L^0(X^1 - X^2) = 0.$$

则 $e(\sigma, b)$ 具有路径唯一性。

证明。 由命题 3.1, 若 X^1, X^2 是两个解, 则 $X^1 \vee X^2$ 也是解。依分布唯一性说明 X^1 与 $X^1 \vee X^2$ 同分布; 但后者处处不小于前者, 只有二者几乎处处相等才可能同分布。交换 X^1, X^2 , 使得 $X^1 = X^2$ 。 □

下面的引理用于验证命题 3.2 中的局部时条件。以下 ρ 始终表示从 $(0, \infty)$ 到自身的 Borel 函数, 并满足

$$\int_{0+} \frac{da}{\rho(a)} = +\infty.$$

引理 3.3。 设 X 是连续半鞅。若存在 $\varepsilon > 0$, 使对每个 t ,

$$A_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{0 < X_s \leq \varepsilon\}} \rho(X_s)^{-1} d\langle X, X \rangle_s < \infty \quad \text{几乎处处,}$$

则

$$L^0(X) = 0.$$

证明。 固定 $t > 0$ 。由第 VI 章推论 1.6 的占用时间公式,

$$A_t = \int_0^\varepsilon \rho(a)^{-1} L_t^a(X) \, da.$$

若 $L_t^0(X)$ 以正概率不为零, 则由

$$L_t^a(X) \longrightarrow L_t^0(X) \quad (a \downarrow 0)$$

以及 $\int_{0+} \rho(a)^{-1} da = \infty$, 会有 $P(A_t = \infty) > 0$, 矛盾。 $\square$

推论 3.4。 设 $b_i, i = 1, 2$ 是两个 Borel 函数, 并假设对所有 s, x, y ,

$$|\sigma(s, x) - \sigma(s, y)|^2 \leq \rho(|x - y|).$$

若 X^i 是由同一个布朗运动驱动的 $e(\sigma, b_i)$ 的解, 则

$$L^0(X^1 - X^2) = 0.$$

证明。 有

$$\begin{aligned} X_t^1 - X_t^2 &= X_0^1 - X_0^2 + \int_0^t (\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2)) \, dB_s \\ &\quad + \int_0^t (b_1(s, X_s^1) - b_2(s, X_s^2)) \, ds. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &\int_0^t \rho(X_s^1 - X_s^2)^{-1} \mathbf{1}_{\{X_s^1 > X_s^2\}} \, d\langle X^1 - X^2, X^1 - X^2 \rangle_s \\ &= \int_0^t \rho(X_s^1 - X_s^2)^{-1} (\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2))^2 \mathbf{1}_{\{X_s^1 > X_s^2\}} \, ds \\ &\leq t. \end{aligned}$$

引理 3.3 给出结论。 $\square$

定理 3.5。 在下列任一情形, $e(\sigma, b)$ 都具有路径唯一性:

i)

$$|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq \rho(|x - y|), \quad |\sigma| \geq \varepsilon > 0,$$

且 b, σ 有界;

ii)

$$|\sigma(s, x) - \sigma(s, y)|^2 \leq \rho(|x - y|),$$

且 b 局部 Lipschitz: 对每个紧集 $H \subset \mathbb{R}$ 与每个 t , 存在常数 $K_{H,t}$, 使对 $x, y \in H, s \leq t$,

$$|b(s, x) - b(s, y)| \leq K_{H,t} |x - y|;$$

iii)

$$|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq |f(x) - f(y)|,$$

其中 f 递增且有界, $\sigma \geq \varepsilon > 0, b$ 有界。

注。 情形 i) 与 iii) 中的 σ 不依赖于时间；情形 ii) 允许非齐次系数。

证明。 i) 因为 $|\sigma| \geq \varepsilon$ ，推论 1.14 给出 $e(\sigma, b)$ 的依分布唯一性。再由推论 3.4 和命题 3.2，得到路径唯一性。

ii) 设 X^1, X^2 是同一布朗运动驱动、初值几乎处处相同的两个解。由推论 3.4，

$$|X_t^1 - X_t^2| = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^1 - X_s^2) d(X_s^1 - X_s^2).$$

由 σ, b 的假设，可取一列停时 $T_n \uparrow \infty$ ，使若

$$Y^i = (X^i)^{T_n}, \quad i = 1, 2,$$

则对固定 n ， $\sigma(s, Y_s^i)$ 有界，并且在 $s \leq t$ 时

$$|b(s, Y_s^1) - b(s, Y_s^2)| \leq C_t |Y_s^1 - Y_s^2|.$$

于是

$$|Y_t^1 - Y_t^2| - \int_0^t \operatorname{sgn}(Y_s^1 - Y_s^2) (b(s, Y_s^1) - b(s, Y_s^2)) ds$$

是从 0 出发的鞅，并且

$$E[|Y_t^1 - Y_t^2|] \leq C_t \int_0^t E[|Y_s^1 - Y_s^2|] ds.$$

Gronwall 引理给出 $Y^1 = Y^2$ 。令 $n \rightarrow \infty$ ，即得路径唯一性。

iii) 推论 1.14 再次说明 $\sigma \geq \varepsilon$ 蕴含依分布唯一性。我们将取 $\rho(x) = x$ ，通过推论 3.4 和命题 3.2 证明结论。固定 $\delta > 0$ ，记

$$\begin{aligned} & E \left[\int_0^t (X_s^1 - X_s^2)^{-1} \mathbf{1}_{\{X_s^1 - X_s^2 > \delta\}} d\langle X^1 - X^2, X^1 - X^2 \rangle_s \right] \\ & \leq E \left[\int_0^t \frac{f(X_s^1) - f(X_s^2)}{X_s^1 - X_s^2} \mathbf{1}_{\{X_s^1 - X_s^2 > \delta\}} ds \right] =: K(f)_t. \end{aligned}$$

取一列一致有界、递增的 C^1 函数 f_n ，使得在 f 的每个连续点 x 上都有 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ 。递增函数 f 的不连续点集 D 可数。由占用时间公式以及 $\sigma \geq \varepsilon$ ，几乎处处地，使 X_s^1 或 X_s^2 落在 D 中的时刻集合具有零 Lebesgue 测度。因此

$$f_n(X_s^1) - f_n(X_s^2) \rightarrow f(X_s^1) - f(X_s^2)$$

对几乎所有 $s \leq t$ 成立，从而

$$K(f)_t = \lim_{n \rightarrow \infty} K(f_n)_t.$$

对 $u \in [0, 1]$ ，置

$$Z^u = X^2 + u(X^1 - X^2).$$

于是

$$\begin{aligned} K(f_n)_t &= E \left[\int_0^t \left(\int_0^1 f'_n(Z_s^u) du \right) \mathbf{1}_{\{X_s^1 - X_s^2 > \delta\}} ds \right] \\ &\leq \int_0^1 E \left[\int_0^t f'_n(Z_s^u) ds \right] du \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 E \left[\int_{\mathbb{R}} f'_n(a) L_t^a(Z^u) da \right] du. \end{aligned}$$

这里

$$Z_t^u = Z_0^u + \int_0^t \sigma^u(s) dB_s + \int_0^t b^u(s) ds,$$

其中 $\sigma^u \geq \varepsilon$, 且存在常数 M 使

$$|\sigma^u| + |b^u| \leq M.$$

由 Tanaka 公式的直接应用,

$$\sup_{a,u} E[L_t^a(Z^u)] = C < \infty.$$

故

$$K(f_n)_t \leq \varepsilon^{-2} C \sup_n \|f_n\|_\infty.$$

于是 $K(f)_t$ 的上界与 δ 无关。令 $\delta \downarrow 0$, 即可验证引理 3.3 对 $\rho(x) = x$ 的假设, 证明完成。□

注 1。 情形 iii) 中的 $\sigma \geq \varepsilon$ 不能弱化为 $|\sigma| \geq \varepsilon$: 当 $\sigma(x) = \text{sgn}(x)$ 时, $e(\sigma, 0)$ 不具有路径唯一性。

注 2。 情形 iii) 的意义在于: 当 σ 具有有界二次变差时, 路径唯一性成立。由练习 1.16 可见, 这已经是所能得到的最佳结果。

注 3。 定理 3.5 的假设还可略微削弱, 见练习 3.13 与 3.14。

本节开头提到 SDE 与 ODE 的差异。例如, 若

$$\sigma(x) = \sqrt{|x|},$$

则 ODE $dX_t = \sigma(X_t) dt$ 有多个解, 而在上述条件下 SDE $e(\sigma, b)$ 只有一个解。关键在于, 对 SDE 的估计使用解的鞅部分之递增过程, 因而起作用的是

$$(\sigma(x) - \sigma(y))^2,$$

而不是 $|\sigma(x) - \sigma(y)|$ 。

上述结果结合推论 1.14 说明: 若 b 有界, 方程 $e(1, b)$ 总有解, 而且解是强解; 练习 2.11 还给出了另一证明。下面的 Tsirelson 例子表明: 若把 b 换成依赖于 X 全部过去轨道的泛函, 结论便不再成立。

定义 $\mathbb{R}_+ \times W$ 上的有界函数 τ 。取严格递增序列

$$(t_k : k \in \mathbb{N}),$$

满足

$$0 < t_k < 1 \quad (k < 0), \quad t_0 = 1, \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} t_k = 0.$$

置

$$\tau(t, w) = \begin{cases} \left[\frac{w(t_k) - w(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right], & t_k < t \leq t_{k+1}, \\ 0, & t = 0 \text{ 或 } t > 1, \end{cases}$$

其中 $[x]$ 表示实数 x 的小数部分。显然, τ 是 W 上的可预见泛函。

若 (X, B) 是 $e(1, \tau)$ 的一个解, 则在 $(t_k, t_{k+1}]$ 上,

$$\begin{aligned} X_t - X_{t_k} &= B_t - B_{t_k} \\ &\quad + \left[\frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}} \right] (t - t_k). \end{aligned}$$

对 $t_k < t \leq t_{k+1}$, 令

$$\eta_t = \frac{X_t - X_{t_k}}{t - t_k}, \quad \varepsilon_t = \frac{B_t - B_{t_k}}{t - t_k}.$$

于是

$$\eta_t = \varepsilon_t + [\eta_{t_k}]. \quad (3.1)$$

命题 3.6. 方程 $e(1, \tau)$ 没有强解。更准确地:

- i) 对每个 $t \in [0, 1]$, 随机变量 $[\eta_t]$ 与 $\mathcal{F}_1^B$ 独立, 并在 $[0, 1]$ 上均匀分布;
- ii) 对任意 $0 < s \leq t$,

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma([\eta_s]) \vee \mathcal{F}_t^B.$$

证明. “没有强解”显然由 i)、ii) 推出, 而 ii) 直接由定义得到。只须证明 i)。

取 $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, 并置

$$d_k = E[e^{2\pi i p \eta_{t_k}}].$$

由 (3.1),

$$\begin{aligned} d_k &= E\left[e^{2\pi i p(\varepsilon_{t_k} + [\eta_{t_{k-1}}])}\right] \\ &= E\left[e^{2\pi i p(\varepsilon_{t_k} + \eta_{t_{k-1}})}\right] \\ &= d_{k-1} E[e^{2\pi i p \varepsilon_{t_k}}] \\ &= d_{k-1} \exp\{-2\pi^2 p^2 (t_k - t_{k-1})^{-1}\}. \end{aligned}$$

这里 ε_{t_k} 与 $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ 独立, $(\mathcal{F}_t)$ 是定义 (X, B) 的滤过。因此

$$|d_k| \leq |d_{k-1}| e^{-2\pi^2 p^2} \leq \dots \leq |d_{k-n}| e^{-2n\pi^2 p^2}.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得到 $d_k = 0$ 。所以 $[\eta_{t_k}]$ 在 $[0, 1]$ 上均匀分布。

再令

$$\mathcal{B}_{k,n} = \sigma\{B_u - B_v : t_{k-n} \leq u \leq v \leq t_k\}.$$

于是

$$\begin{aligned} E[e^{2\pi i p \eta_{t_k}} | \mathcal{B}_{k,n}] &= E\left[e^{2\pi i p(\varepsilon_{t_k} + \varepsilon_{t_{k-1}} + \dots + \varepsilon_{t_{k-n+1}} + \eta_{t_{k-n}})} \mid \mathcal{B}_{k,n}\right] \\ &= e^{2\pi i p(\varepsilon_{t_k} + \dots + \varepsilon_{t_{k-n+1}})} d_{k-n} = 0, \end{aligned}$$

因为 $\eta_{t_{k-n}}$ 与 $\mathcal{B}_{k,n}$ 独立。由此容易推出

$$E[e^{2\pi i p \eta_{t_k}} | \mathcal{F}_{t_k}^B] = 0.$$

又因 $\mathcal{F}_{t_k}$ 与 $\{B_t - B_{t_k} : t \geq t_k\}$ 独立,

$$E[e^{2\pi i p \eta_{t_k}} | \mathcal{F}_1^B] = 0.$$

最后, 若 $t_k < t \leq t_{k+1}$, 则

$$E[e^{2\pi i p \eta_t} | \mathcal{F}_1^B] = e^{2\pi i p \varepsilon_t} E[e^{2\pi i p \eta_{t_k}} | \mathcal{F}_1^B] = 0.$$

这对每个非零整数 p 都成立。由 $[0, 1]$ 上分布的 Fourier 系数刻画, $[\eta_t]$ 均匀分布且与 $\mathcal{F}_1^B$ 独立。□

注。确实存在一个概率空间上的布朗运动 B 以及两个过程 X^1, X^2 , 使得 (X^i, B) 都是 $e(1, \tau)$ 的解。练习 3.17 将说明 X^1, X^2 之间的某些关系; 练习 3.18 还会由此构造其他不存在强解的例子。

下面用本节的方法证明 SDE 解的比较定理。仍沿用以上记号, 并假设

$$(\sigma(s, x) - \sigma(s, y))^2 \leq \rho(|x - y|)$$

或 σ 满足定理 3.5 的条件 iii)。

定理 3.7。 设 $b^i, i = 1, 2$ 是两个有界 Borel 函数, 满足

$$b^1 \geq b^2$$

处处成立, 并且二者中至少有一个满足 Lipschitz 条件。若 X^i 是同一概率空间上、由同一个布朗运动驱动的 $e(\sigma, b^i)$ 的解, 且

$$X_0^1 \geq X_0^2 \quad \text{几乎处处,}$$

则

$$P(X_t^1 \geq X_t^2 \text{ 对所有 } t \geq 0) = 1.$$

证明。推论 3.4 与定理 3.5 的证明已经说明, 在两种假设下均有

$$L^0(X^1 - X^2) = 0.$$

因此, 令

$$\phi(t) = E[(X_t^2 - X_t^1)^+],$$

Tanaka 公式给出

$$\phi(t) = E \left[\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^2 > X_s^1\}} (b^2(s, X_s^2) - b^1(s, X_s^1)) \, ds \right].$$

若 b^1 是 Lipschitz 函数, 常数为 K_t , 则由 $b^2 \leq b^1$,

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq E \left[\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^2 > X_s^1\}} |b^1(s, X_s^2) - b^1(s, X_s^1)| \, ds \right] \\ &\leq K_t \int_0^t \phi(s) \, ds. \end{aligned}$$

Gronwall 引理给出 $\phi = 0$, 再由轨道连续性得到同时对所有 t 的结论。

若 b^2 是 Lipschitz 函数, 则把同一被积函数写成

$$\begin{aligned} b^2(s, X_s^2) - b^1(s, X_s^1) &= b^2(s, X_s^2) - b^2(s, X_s^1) \\ &\quad + b^2(s, X_s^1) - b^1(s, X_s^1). \end{aligned}$$

第二项非正, 再如上估计第一项即可。□

在更强的假设下, 还可得到严格不等式。

定理 3.8. 沿用定理 3.7 的假设。再假设 b^1, b^2 不依赖于时间且连续, σ Lipschitz 连续, 并且下列条件之一成立:

- i) $b^1 > b^2$ 处处成立;
- ii) $|\sigma| \geq \varepsilon > 0$, b^1, b^2 中至少一个 Lipschitz 连续, 并且存在初始点 x 的一个邻域 $V(x)$, 使

$$\int_{V(x)} \mathbf{1}_{\{b^1(a)=b^2(a)\}} da = 0.$$

若 (X^i, B) 是 $e_x(\sigma, b^i)$ 的解, 则

$$P(X_t^1 > X_t^2 \text{ 对所有 } t > 0) = 1.$$

证明. 在情形 i) 中, 可以假设 b^1, b^2 至少有一个 Lipschitz 连续: 否则可取 Lipschitz 函数 b^3 , 使

$$b^1 > b^3 > b^2,$$

并分两次应用结论。

以下设 b^1 Lipschitz; 另一情形类似。可写成

$$X_t^1 - X_t^2 = H_t + \int_0^t (X_s^1 - X_s^2) dM_s,$$

其中

$$H_t = \int_0^t (b^1(X_s^2) - b^2(X_s^2)) ds,$$

以及

$$\begin{aligned} M_t = & \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^1 \neq X_s^2\}} (X_s^1 - X_s^2)^{-1} \\ & \cdot [(\sigma(X_s^1) - \sigma(X_s^2)) dB_s + (b^1(X_s^1) - b^1(X_s^2)) ds]. \end{aligned}$$

关于 σ, b^1 的假设保证 H, M 是连续半鞅。由命题 2.3,

$$X_t^1 - X_t^2 = \mathcal{E}(M)_t \int_0^t \mathcal{E}(M)_s^{-1} dH_s.$$

所以只须证明对每个 $t > 0$, $H_t > 0$ 几乎处处。情形 i) 下这一点显然。

在情形 ii) 下, 占用时间公式给出正确的恒等式

$$H_t = \int_{\mathbb{R}} (b^1(a) - b^2(a)) \sigma(a)^{-2} L_t^a(X^2) da.$$

若对所有 $t > 0$ 都有 $L_t^x(X^2) > 0$, 则由 $a \mapsto L_t^a(X^2)$ 的右连续性、 $\sigma^{-2} > 0$ 以及情形 ii) 的零集条件, 立即得到 $H_t > 0$ 。因此只须证明下一引理。□

校订注. 原书在上述占用时间公式处印作

$$H_t \geq \varepsilon^{-2} \int (b^1 - b^2)(a) L_t^a(X^2) da.$$

这既漏掉 $\sigma(a)^{-2}$, 不等号方向也不正确: $|\sigma| \geq \varepsilon$ 实际给出 $\sigma^{-2} \leq \varepsilon^{-2}$ 。此处改为精确的速度因子恒等式; 它已足以证明严格正性。

引理 3.9. 若 X 是 $e_x(\sigma, b)$ 的一个解, 并且

$$|\sigma| \geq \varepsilon > 0,$$

则几乎处处地, 对每个 $t > 0$,

$$L_t^x(X) > 0.$$

证明. 可以假设 X 定义在典范空间上。由 Girsanov 定理, 存在概率测度 Q , 使 X 在 Q 下是 $e_x(\sigma, 0)$ 的解。 P, Q 下的随机积分相同, 而 Tanaka 公式

$$|X_t - x| = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - x) dX_s + L_t^x(X)$$

说明局部时在两个测度下相同。

在 Q 下,

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

由 DDS 定理,

$$X_t = \beta_{A_t}, \quad A_t = \int_0^t \sigma(s, X_s)^2 ds,$$

其中 β 是从 x 出发的布朗运动。因 $|\sigma| \geq \varepsilon$, A 严格递增。布朗运动从 x 出发后在任意正时间于 x 的局部时都严格为正, 时间变换遂给出结论。 $\square$

练习 3.10 (#, 随机面积)。

1°) 按下述方法重新证明第 V 章练习 2.19 的第 3° 问: 利用本章的结果证明

$$(\mathcal{F}_t^p) \subset (\mathcal{F}_t^{\tilde{\beta}}),$$

其中 $\tilde{\beta}$ 是第 V 章定理 2.11 证明中定义的布朗运动; 并计算 $\langle S, S \rangle$ 与 $\langle S, \tilde{\beta} \rangle$ 。

2°) 证明

$$E[e^{i\lambda S_t}] = \left(E \left[\exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{8} \int_0^t \beta_s^2 ds \right\} \right] \right)^2,$$

其中 β 是一维布朗运动。这个关于 λ, t 的函数的精确值将在第 XI 章第 1 节算出。

练习 3.11 (*, 第 V 章练习 4.15 的续题)。 令 T^n 是与 $\langle M^n, M^n \rangle$ 相伴的时间变换。

1°) 令

$$Z_t^n = B_{T_t^n}^{n+1}.$$

证明

$$(Z_t^n)^2 = c_n \int_0^t Z_s^n d\beta_s^n + d_n t,$$

其中 c_n, d_n 是两个常数, β^n 是 M^n 的 DDS 布朗运动。

2°) 若 n 为奇数, 证明 M^n 是纯鞅。

提示: 利用定理 3.5 证明 T^n 是 $\mathcal{F}^{\beta^n}$ -可测的。

练习 3.12 (*)。

- 1°) 沿用第 VIII 章练习 1.27 的记号, 并假设 $(\mathcal{F}_t) = (\mathcal{F}_t^B)$, 其中 B 在 P 下是布朗运动。令 τ 是 Tsirelson 漂移, 并在 $\mathcal{F}_1$ 上定义

$$Q = \mathcal{E} \left(\int_0^\cdot \tau(s, B_\bullet) dB_s \right)_1 \cdot P.$$

置

$$A_t = \int_0^t \left(2 + \frac{B_s}{1 + |B_s|} \right) ds,$$

并以 T 表示 A 的逆。利用练习 1.15 证明 $G_P^Q(B)_T$ 不是纯鞅, 从而说明: 纯鞅的 Girsanov 变换未必仍是纯鞅。

- 2°) 在命题 3.6 的情形下, 令 U 是过程

$$\int_0^t (1 + \tau(s, X_\bullet)) ds$$

的逆, 并置 $M_t = B_{U_t}$ 。证明 M 不是纯鞅, 尽管对每个 $\varepsilon > 0$ 都有

$$\mathcal{F}_\infty^M = \sigma(\mathcal{F}_\varepsilon^M, \mathcal{F}_\infty^B).$$

本问与第 1 问相互独立。下一问表明, 若把纯性换成极端性, 情形便有所不同。

- 3°) 设 M 是一个 $(\mathcal{F}_t)$ -局部鞅, 并具有下述表示性质: 对每个 $\varepsilon > 0$ 及每个 $X \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$, 都存在适当的可预测过程 Φ_ε , 使

$$X = E[X | \mathcal{F}_\varepsilon] + \int_\varepsilon^\infty \Phi_\varepsilon(s) dM_s.$$

证明 M 具有 $(\mathcal{F}_t)$ -PRP。

练习 3.13。 证明: 若在定理 3.5 的 iii) 中删去 f 有界的假设, 或者把 $\sigma \geq \varepsilon$ 替换为

对每个 $r > 0$, 存在 $\varepsilon_r > 0$, 使得 $\sigma \geq \varepsilon_r$ 于 $[-r, r]$ 上,

则定理 3.5 仍然成立。

练习 3.14。 证明: 若把定理 3.5 中关于 σ 的假设改为下述条件, 则该定理的 i)、ii) 仍然成立: 存在局部可积函数 g, c 以及常数 $\delta > 0$, 使得对每个 x 及每个 $y \in [x - \delta, x + \delta]$,

$$(\sigma(s, x) - \sigma(s, y))^2 \leq (c(s) + g(x)\sigma^2(s, x))\rho(|x - y|).$$

练习 3.15。 令 γ 是 W 上的可预测泛函, τ 是 Tsirelson 漂移, 并定义

$$\bar{\tau}(s, w) = \tau(s, w) + \gamma \left(s, w - \int_0^s \tau(u, w) du \right).$$

设 (X, B) 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上方程 $e_0(1, \bar{\tau})$ 的一个解。

- 1°) 令

$$\beta = X - \int_0^\cdot \tau(u, X_\bullet) du.$$

证明 $(\mathcal{F}_t^B) \subset (\mathcal{F}_t^\beta)$ 。

2°) 在 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ 上找出一个与 P 等价的概率测度 Q , 使 β 在 Q 下是布朗运动, 而 (X, β) 是 $e_0(1, \tau)$ 的解。由此推出 (X, B) 不是 $e_0(1, \tau)$ 的强解。

练习 3.16 (#)。

1°) 设 B 是标准一维布朗运动。证明 $Z_t = B_t^2$ 满足随机微分方程

$$Z_t = 2 \int_0^t \sqrt{Z_s} \, d\beta_s + t,$$

并由此重新证明第 VI 章推论 2.2 中的等式

$$\mathcal{F}_t^\beta = \mathcal{F}_t^{|B|}.$$

2°) 更一般地, 设 B 是从 0 出发的 d 维布朗运动。证明 $|B|$ 与一维布朗运动

$$\beta_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t |B_s|^{-1} B_s^i \, dB_s^i$$

具有相同的滤过。参见第 VI 章第 3 节与第 XI 章第 1 节。

3°) 设 A 是对称的 $d \times d$ 矩阵, B 是从 0 出发的 d 维布朗运动。证明局部鞅

$$\int_0^\cdot \langle AB_s, dB_s \rangle$$

与一个 r 维布朗运动具有相同的滤过, 其中 r 是 A 的互异非零特征值的个数。特别地, 证明平面布朗运动 (B^1, B^2) 与

$$(|B^1 + B^2|, |B^1 - B^2|)$$

具有相同的滤过。

提示: 使用第 IV 章练习 1.36 与 3.20。

练习 3.17 (*)。

1°) 在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上给定 $\mathbb{R}^d$ 中的高斯向量局部鞅 B , 满足

$$\langle B^i, B^j \rangle_t = \rho_{ij} t, \quad \rho_{ii} = 1.$$

对每个 i , 假设存在 $(\mathcal{F}_t)$ -适应过程 X^i , 使 (X^i, B^i) 是 $e(1, \tau)$ 的解, 且 $X_0^i = B_0^i = 0$ 。沿用命题 3.6 所导出的显然记号, 证明随机向量

$$[\eta_t] = ([\eta_t^i], i = 1, \dots, d)$$

的分布与 t 无关; 并且, 只要 $u = (u_i)$ 满足

$$\sum_i p_i u_i = 0$$

对所有满足

$$p = (p_i) \in \mathbb{Z}^d, \quad \sum_{i,j} \rho_{ij} p_i p_j = 0$$

的 p 都成立, 该分布就在模 1 意义下的平移 $x_i \mapsto x_i + u_i$ 下不变。再证明 $[\eta_t]$ 与 $\mathcal{F}_1^B$ 独立。

2°) 从现在起, 假设 B 的所有分量 B^i 都等于同一个一维布朗运动 β 。令 α 是一个与 $\mathcal{F}_1^\beta$ 独立的随机向量, 其分布集中在 $[0, 1]^d$ 上, 并在每个对角平移

$$x_i \mapsto x_i + u \pmod{1}, \quad u \in \mathbb{R}$$

下不变 (这里是 $u \in \mathbb{R}$, 不是 $u \in \mathbb{R}^d$)。置

$$[\eta_{t_{k+1}}] = \alpha.$$

证明可以递归地定义唯一过程 η , 使

$$\eta_t = \varepsilon_t + [\eta_{t_k}], \quad t_k < t \leq t_{k+1}.$$

对每个 t , 随机向量 $[\eta_t]$ 与 $\mathcal{F}_1^\beta$ 独立。

3°) 证明

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^\beta \vee \sigma([\eta_t])$$

构成一个滤过, 并且 β 是 $(\mathcal{G}_t)$ -布朗运动。

4°) 对 $t_l < t \leq t_{l+1}$, 定义

$$X_t = \beta_t + \sum_{k \leq l} (t_k - t_{k-1})[\eta_{t_{k-1}}] + (t - t_l)[\eta_{t_l}].$$

证明 X 是 $(\mathcal{G}_t)$ -适应的, 并且对每个 i , (X^i, β) 都是 $e(1, \tau)$ 的一个解。

5°) 证明: 对每个 $Z \in L^2(\mathcal{F}_1^X, P)$, 都存在 $\mathcal{F}^X$ -可预测过程 ϕ , 使

$$E \left[\int_0^1 \phi_s^2 ds \right] < \infty, \quad Z = Z_0 + \int_0^1 \phi_s d\beta_s,$$

其中 Z_0 是 $\mathcal{F}_0^X$ -可测的。

练习 3.18 (*, 无漂移的 Tsirelson 型方程)。 取与 Tsirelson 漂移相同的序列 (t_k) , 并在 W 上定义可预测泛函

$$f(t, w) = \operatorname{sgn}(w(t_k) - w(t_{k-1})), \quad t_k < t \leq t_{k+1}.$$

1°) 设 B 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, 且 $(X^i, B), i = 1, 2, \dots, n$, 都是 $e_0(f, 0)$ 的解。定义

$$\eta_t^i = \operatorname{sgn}(X_t^i - X_{t_k}^i), \quad t_k < t \leq t_{k+1}.$$

证明: 对每个 $t \in (0, 1]$, η_t 的分布在整体反射

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, \dots, -x_n)$$

下不变; η_t 与 $\mathcal{F}_1^B$ 独立; 并且几乎必然地, 对每个 $s \leq t$,

$$\sigma(X_u : u \leq t) = \mathcal{F}_t^B \vee \sigma(\eta_s).$$

2°) 反过来, 设 α 是取值于 $\{-1, 1\}^n$ 的 $\mathcal{F}_\infty$ -可测随机变量, 与 $\mathcal{F}_1^B$ 独立, 且其分布在上述整体反射下不变。证明存在一个滤过 $(\mathcal{G}_t)$ 和一个 $(\mathcal{G}_t)$ -适应过程 X , 使得:

- i) B 是 $(\mathcal{G}_t)$ -布朗运动;
- ii) 对每个 i , (X^i, B) 是 $e_0(f, 0)$ 的解, 且

$$\alpha^i = \text{sgn}(X_{t_0}^i - X_{t_{-1}}^i).$$

练习 3.19 (第 VI 章练习 2.24 的续题)。 采用相应的显然定义, 证明方程 (*) 具有路径唯一性。

提示: 可以使用第 VI 章练习 1.21。

练习 3.20。 沿用定理 3.8 的情形与记号。

- 1°) 对引理 3.3 中的 ρ , 证明对每个 $t > 0$,

$$\int_0^t \rho(X_s^1 - X_s^2)^{-1} ds = \infty \quad \text{a.s.}$$

提示: 使用定理 3.8 的证明中把 $X^1 - X^2$ 表示为 M, H 的函数的公式。

- 2°) 再假设 $b^1 - b^2 \geq a > 0$, 并且现在 ρ 满足

$$\int_{0+} \rho(u)^{-1} du < \infty.$$

证明对每个 $t > 0$,

$$\int_0^t \rho(X_s^1 - X_s^2)^{-1} ds < \infty \quad \text{a.s.}$$

练习 3.21 ().** 沿用定理 3.7 的情形与记号, 并假设 σ, b_i 满足 Lipschitz 条件。证明: 当 $a \rightarrow 0$ 时, 对每个 $t > 0$ 和 $\varepsilon \in (0, 1/2)$,

$$L_t^a(X^1 - X^2) = O(a^{1/2-\varepsilon}) \quad \text{a.s.}$$

提示: 使用第 VI 章推论 1.9 以及定理 3.8 证明中的指数公式。

注释与评论

第 1 节。 随机微分方程这一概念源于 Itô; 见 Itô [2]。撰写本节时, 我们参考了 Ikeda-Watanabe [2]、Stroock-Varadhan [1] 与 Priouret [1]。更一般的论述可见 Jacod [2]。重要的定理 1.7 由 Yamada 与 Watanabe [1] 证明; 定理 1.7 后注 2) 所述结果由 Kallenberg [2] 证明。

练习 1.15 取自 Stroock-Yor [1], 练习 1.16 取自 Girsanov [2]。练习 1.18 的结果属于 Perkins; 见 Knight [7]。路径唯一性是一种涉及所有概率空间的性质。Kallsen [1] 找到了一个 Tsirelson 型的随机微分方程例子: 它在某个特定空间上具有存在唯一性, 但在所有空间上并不具有这一性质。

第 2 节。 与随机微分方程的许多结果一样, 本节结果也源于 Itô。定理 2.1 由 Doléans-Dade [1] 对一般的 (即未必连续的) 半鞅证明。命题 2.3 来自 Yoeurp 与 Yor 的一篇未发表论文。定理 2.4 及其推论取自 Neveu [2] 与 Priouret [1], 当然其中大部分思想都可追溯至 Itô。定理

2.4 是随机微分方程流理论的出发点；例如在适当假设下，该理论证明解关于初值 x 可微。它还通向随机微分几何的若干内容。Kunita [4] 的讲义给出了这些主题的导论。

练习 2.6bis 取自 Jacod [3] 与 Karandikar [1]。练习 2.8 属于 Doss [1] 和 Sussman [1,2]；练习 2.9 取自 Yoeurp [3]；练习 2.10 部分取自 Ikeda-Watanabe [2]。练习 2.12 受 Jeulin-Yor [2] 与 Yor [10] 启发，源于 Itô [6]，并给出了滤过扩张理论的一个基本例子。练习 2.14 取自 El Karoui 与 Chaleyat-Maurel [1]。练习 2.15 陈述了 Feller 的结果；一般说来，本书的注释与评论并未充分强调 Feller 对扩散理论的贡献。

练习 2.17 与 Chitashvili-Toronjadze [1] 十分接近，并在 Jeulin-Yor [4] 中得到进一步发展。把该练习的结果与 Carlen [1] 及 Carlen-Elworthy [1] 联系起来，会是很意义的。关于练习 2.18，参见 Bougerol [1]、Alili [1] 以及 Alili-Dufresne-Yor [1]；把带漂移布朗运动换成 Lévy 过程时，相近的结果见 Carmona 等 [1]。

Kloeden-Platen [1] 利用 Itô 公式列出了若干随机微分方程的显式解。练习 2.19 的结果可见 Fitzsimmons [1]；事实上，该文研究的是 Lévy 等价性的一个逆命题。

第 3 节。 我们对定理 3.5 的论述以 Le Gall [1] 为基础；后者改进了 Nakao [1] 与 Perkins [5] 的较早结果。这类一维随机微分方程解的稳定性问题见 Kawabata-Yamada [1] 与 Le Gall [1]。这里给出的 Tsirelson 例子的证明取自 Stroock-Yor [1]，并受 Krylov 的一个证明启发；后者见 Liptser-Shiryayev [1]。Benés [1] 给出了另一个证明及若干推广。与这一例子相关的练习也主要取自 Stroock-Yor [1]，唯一的例外是练习 3.17，它取自 Le Gall-Yor [1]。Yor [19] 进一步发展了离散时间 Tsirelson 方程的一般结果。

注意，在 Tsirelson 例子中，尽管 $(\mathcal{F}_t^B)$ 严格小于 $(\mathcal{F}_t^X)$ ，后一个滤过仍是第 V 章注释与评论所讨论的强布朗滤过。

比较定理可参见 Yamada [1]、Ikeda-Watanabe [1,2] 与 Le Gall [1]；实际上，研究这一问题的论文还有许多，无法在此一一列出。

练习 3.10 取自 Williams [4] 与 Yor [11]，练习 3.11 是 Stroock-Yor [2] 的结果。练习 3.16 取自 Yor [7]。沿用该练习的记号，我们提出下面的开放问题。

问题 1。 若练习 3.16 的第 3° 问中不再假设矩阵 A 对称，则该鞅的滤过是否仍然等于某个 r 维布朗运动的滤过？若答案肯定，如何由 A 确定 r ？

Auerhan-Lépingle [1] 给出了部分答案；Malric [1] 又对这一问题取得了进一步进展。

第 X 章 布朗运动的加性泛函

1 一般定义

尽管我们照例主要关心一维布朗运动，但暂时先考虑一般的 Markov 过程，并沿用第 III 章的记号与结果。

定义 1.1. X 的一个加性泛函是定义在 Ω 上、取值于 $\mathbb{R}_+$ 的 $(\mathcal{F}_t)$ -适应过程 $A = (A_t, t \geq 0)$ ，并满足：

i) 几乎处处地， A 非减、右连续、在零点取零，并且

$$A_t = A_{\zeta-} \quad \text{于} \{\zeta \leq t\} \text{ 上};$$

ii) 对每一对 (s, t) ,

$$A_{s+t} = A_t + A_s \circ \theta_t \quad \text{a.s.}$$

若加性泛函还满足 $t \mapsto A_t$ 连续，则称它为连续加性泛函 (continuous additive functional, 简称 CAF)。

注。 定义 1.1(ii) 中的零测集可以依赖 s, t ；利用右连续性，可把它选成只依赖于 t 。

条件

$$A_t = A_{\zeta-} \quad \text{于} \{\zeta \leq t\} \text{ 上}$$

表示过程离开状态空间以后，加性泛函不再增加。按照约定，状态空间 E 上的任一 Borel 函数都满足 $f(\Delta) = 0$ 。因此，若 Γ 是 E 的 Borel 子集，则 Γ 的占用时间

$$A_t = \int_0^t \mathbf{1}_\Gamma(X_s) \, ds$$

满足这个条件；这是一个简单而极其重要的 CAF 例子。特别地，取 $\Gamma = E$ 得到

$$A_t = t \wedge \zeta,$$

它也是 CAF。

再设 X 是有跳 Markov 过程。对 $\varepsilon > 0$ ，令

$$T_\varepsilon = \inf\{t > 0 : d(X_t, X_{t-}) > \varepsilon\}.$$

则 T_ε 几乎处处严格为正，并且是停时。递归定义

$$T_1 = T_\varepsilon, \quad T_n = T_{n-1} + T_\varepsilon \circ \theta_{T_{n-1}}.$$

读者可以证明

$$A_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}$$

是一个纯不连续加性泛函；它计算截至时刻 t 振幅大于 ε 的跳跃次数。

现在来看布朗运动局部时这一基本例子。第 VI 章已经从随机分析的角度定义了它。事实上，下面的讨论还适用于一维 Markov 过程 X ：它同时是连续半鞅，并且对某个函数 ϕ 满足

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t \phi(X_s) \, ds.$$

借助时间变换还可进一步推广；参见第 XI 章练习 1.25。特别地，Ornstein–Uhlenbeck 过程、维数 $d \geq 1$ 的 Bessel 过程以及第 XI 章将研究的 Bessel 平方过程都属于这种情形。读者可以留意，下文的论证对这些过程几乎不需修改。

现在把布朗运动视为 Markov 过程：我们在典范空间

$$W = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

上工作，并同时考虑概率测度族 $(P_a, a \in \mathbb{R})$ 。根据第 VI 章第 1 节，对每个 P_a 都可取过程 L ，它是鞅 B 在零点的局部时，即

$$|B_t| = |a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) \, dB_s + L_t, \quad P_a\text{-a.s.}$$

事实上， L 可以对所有 P_a 同时定义。由第 VI 章推论 1.9，对任意递减到零的正实数列 (ε_k) ，

$$L_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\varepsilon_k} \int_0^t \mathbf{1}_{[-\varepsilon_k, \varepsilon_k)}(B_s) \, ds \quad \text{a.s.}$$

对点 a 的局部时作同样讨论，得到过程 L^a 。第 VI 章的结果说明映射

$$(a, t) \longmapsto L_t^a$$

几乎处处连续。

每个 L^a 都是加性泛函，甚至具有下面的强可加性。

命题 1.2。 若 T 是停时，则对每个 $a, b \in \mathbb{R}$ 及每个非负随机变量 S ，

$$L_{T+S}^a = L_T^a + L_S^a(\theta_T) \quad P_b\text{-a.s.}$$

证明。 置

$$I(\varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

由第 VI 章推论 1.9，若 T 是停时，则对每个 b ，

$$L_{T+S}^a = L_T^a + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^S \mathbf{1}_{I(\varepsilon)}(B_u(\theta_T)) \, du, \quad P_b\text{-a.s.}$$

另一方面，布朗运动的强 Markov 性给出

$$\begin{aligned} P_b \left[L_S^a(\theta_T) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^S \mathbf{1}_{I(\varepsilon)}(B_u(\theta_T)) \, du \right] \\ = E_b \left[E_{B_T} \left[L_S^a = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^S \mathbf{1}_{I(\varepsilon)}(B_u) \, du \right] \right] = 1. \end{aligned}$$

两式合并即得

$$L_{T+S}^a = L_T^a + L_S^a \circ \theta_T \quad \text{a.s.}$$

□

特别地, 若 T, S 都是停时, 则第 III 章命题 3.3 说明 $T + S \circ \theta_T$ 仍是停时, 此时命题 1.2 写成

$$L_{T+S \circ \theta_T}^a = L_T^a + L_S^a \circ \theta_T.$$

这里必须区分两个对象: $L_S^a \circ \theta_T$ 是映射

$$\omega \longmapsto L_{S(\theta_T(\omega))}^a(\theta_T(\omega)),$$

而命题 1.2 中的 $L_S^a(\theta_T)$ 是映射

$$\omega \longmapsto L_{S(\omega)}^a(\theta_T(\omega)).$$

下面的推论在第 XII 章游程理论以及其他地方都很重要。与第 VI 章一样, 记 τ_t 为与 $L_t = L_t^0$ 相伴的时间变换。

命题 1.3. 对每个 t , 存在零测集 Γ_t , 使得当 $\omega \notin \Gamma_t$ 时, 对每个 $s > 0$,

$$\begin{aligned}\tau_{t+s}(\omega) &= \tau_t(\omega) + \tau_s(\theta_{\tau_t}(\omega)), \\ \tau_{(t+s)-}(\omega) &= \tau_t(\omega) + \tau_{s-}(\theta_{\tau_t}(\omega)).\end{aligned}$$

证明。 显然, τ_t 几乎处处有限, 而且 $\tau_{t+s} > \tau_t$ 。因此

$$\begin{aligned}\tau_{t+s} &= \inf\{u > 0 : L_u > t + s\} \\ &= \tau_t + \inf\{u > 0 : L_{\tau_t+u} > t + s\}.\end{aligned}$$

利用 L 的强可加性以及 $L_{\tau_t} = t$, 可得几乎处处地, 对每个 s ,

$$\begin{aligned}\tau_{t+s} &= \tau_t + \inf\{u > 0 : L_{\tau_t} + L_u(\theta_{\tau_t}) > t + s\} \\ &= \tau_t + \inf\{u > 0 : L_u(\theta_{\tau_t}) > s\} \\ &= \tau_t + \tau_s \circ \theta_{\tau_t}.\end{aligned}$$

第二个等式立即由第一个等式得到。 □

注。

- 1°) 把 L 换成 L^a , 结论显然仍然成立。事实上, 它对任意有限 CAF 都成立; 虽然这超出本书范围, 但每个 Markov 过程的加性泛函都具有强可加性。
- 2°) 在 P_0 下, 过程 (L_t) 与 (S_t) 同分布 (第 VI 章第 2 节)。由第 III 章第 3 节可知, (τ_t) 是指数为 $1/2$ 的稳定次序过程。也可利用上述结果与强 Markov 性直接证明这一点; 见练习 1.11。
- 3°) 结合第 III 章命题 3.3, 上述结果还推出

$$\theta_{\tau_{t+s}} = \theta_{\tau_t} \circ \theta_{\tau_s} \quad \text{a.s.}$$

我们的目标是把这些性质推广到一维布朗运动的所有连续加性泛函。方法是证明它们实际上都是局部时的积分, 从而推广占用时间的已知表示。为此先证明若干结果; 这些结果在后文其他地方只会偶尔用到。

再次考虑一般 Markov 过程。由加性泛函定义中的 i), 对每个 ω , 都可把 $t \mapsto A_t(\omega)$ 看成 $\mathbb{R}_+$ 上一个测度的分布函数, 正如第 IV 章第 1 节对递增过程所做的那样。若 F 是一个过程, 只要积分有意义, 就以

$$\int_0^t F_s \, dA_s$$

表示 F 在 $[0, t]$ 上关于该测度的积分。定义 1.1(ii) 恰好表达了测度 dA_s 的一种不变性。

命题 1.4. 设 f 是有界非负 Borel 函数, 并且对每个 t , A_t 有限。则由

$$(f \cdot A)_t = \int_0^t f(X_s) dA_s$$

定义的过程 $f \cdot A$ 是加性泛函。若 A 是 CAF, 则 $f \cdot A$ 也是 CAF。

证明. 过程 X 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 渐进可测, 故 $f(X)$ 也渐进可测, 从而对每个 t , $(f \cdot A)_t$ 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。定义 1.1 的其他条件很容易验证, 留给读者。□

注.

1°) 假设 f 有界, 只是为了保证 $t \mapsto (f \cdot A)_t$ 右连续。若 f 仅为非负, 但 $f \cdot A$ 右连续, 那么它仍是加性泛函。向右作匀速运动的过程与

$$f(x) = x^{-1} \mathbf{1}_{(x>0)}$$

说明右连续性并非总会自动成立。

2°) 若 $A_t = t \wedge \zeta$, $f = \mathbf{1}_\Gamma$, 则 $(f \cdot A)_t$ 是 X 在 Γ 中的占用时间。

定义 1.5. 对 $\alpha \geq 0$, 函数

$$U_A^\alpha(x) = E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dA_t \right]$$

称为 A 的 α -势。我们还以 $U_A^\alpha f(x)$ 表示 $f \cdot A$ 的 α -势, 即

$$U_A^\alpha f(x) = E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t) dA_t \right].$$

当 $A_t = t \wedge \zeta$ 时, $U_A^\alpha f = U^\alpha f$ 。更一般地, 容易验证

$$(x, \Gamma) \mapsto U_A^\alpha \mathbf{1}_\Gamma(x)$$

是 $(E, \mathcal{E})$ 上的核, 记作 $U_A^\alpha(x, \cdot)$ 。这些核满足下面的预解式型方程。

命题 1.6. 设 $\alpha, \beta \geq 0$ 。若 $U_A^\alpha f(x)$ 与 $U_A^\beta f(x)$ 有限, 则

$$\begin{aligned} U_A^\alpha f(x) - U_A^\beta f(x) &= (\beta - \alpha) U_A^\alpha U_A^\beta f(x) \\ &= (\beta - \alpha) U_A^\beta U_A^\alpha f(x). \end{aligned}$$

证明. 由定义与 Markov 性,

$$\begin{aligned} U_A^\alpha U_A^\beta f(x) &= E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} E_{X_t} \left[\int_0^\infty e^{-\beta s} f(X_s) dA_s \right] dt \right] \\ &= E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} E_x \left[\int_0^\infty e^{-\beta s} f(X_s(\theta_t)) dA_s(\theta_t) \mid \mathcal{F}_t \right] dt \right] \\ &= E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \int_0^\infty e^{-\beta s} f(X_{s+t}) dA_s(\theta_t) \right]. \end{aligned}$$

由定义 1.1(ii), 进一步得到

$$\begin{aligned} U^\alpha U_A^\beta f(x) &= E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \int_0^\infty e^{-\beta s} f(X_{s+t}) dA_{s+t} \right] \\ &= E_x \left[\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)t} dt \int_t^\infty e^{-\beta u} f(X_u) dA_u \right]. \end{aligned}$$

应用 Fubini 定理即得第一个等式; 交换 α, β 得到第二个等式。 $\square$

下面证明, 从 A 到核族 $U_A^\alpha(x, \cdot)$ 的对应是一一的。照例, $A = B$ 表示 A, B 不可分辨; 在这里即对每个 x ,

$$P_x[\exists t : A_t \neq B_t] = 0.$$

由右连续性, 这等价于对每个 x, t ,

$$P_x[A_t = B_t] = 1.$$

下一命题将在第 2 节使用。

命题 1.7. 设 A, B 是两个加性泛函。若对某个 $\alpha \geq 0$,

$$U_A^\alpha = U_B^\alpha < \infty, \quad U_A^\alpha f = U_B^\alpha f \quad \text{对每个 } f \in C_K^+(E),$$

则 $A = B$ 。

证明. 题设容易推广为

$$U_A^\alpha f = U_B^\alpha f \quad \text{对每个 } f \in b\mathcal{E}_+.$$

特别地,

$$U_A^\alpha U^\alpha f = U_B^\alpha U^\alpha f.$$

与上一证明相似的计算给出

$$U_A^\alpha U^\alpha f(x) = E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t) A_t dt \right],$$

对 B 也有同样公式。因此

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} E_x[f(X_t) A_t] dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_x[f(X_t) B_t] dt.$$

由命题 1.6 的预解方程, 同一等式对每个 $\beta \geq \alpha$ 都成立。

若 f 连续有界, 则 $t \mapsto E_x[f(X_t) A_t]$ 有限, 因为

$$\infty > U_A^\alpha(x) \geq E_x \left[\int_0^t e^{-\alpha s} dA_s \right] \geq e^{-\alpha t} E_x[A_t].$$

这个映射右连续; 把 A 换成 B 也一样。Laplace 变换的单射性于是给出

$$E_x[f(X_t) A_t] = E_x[f(X_t) B_t]$$

对每个 t 与每个连续有界 f 成立, 并立即推广到 $f \in b\mathcal{E}_+$ 。最后, 利用 Markov 性以及 A, B 的可加性作归纳, 得到: 若

$$0 < t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq t, \quad f_k \in b\mathcal{E}_+,$$

则

$$E_x \left[\prod_{k=1}^n f_k(X_{t_k}) A_t \right] = E_x \left[\prod_{k=1}^n f_k(X_{t_k}) B_t \right].$$

由于 A_t, B_t 都是 $\mathcal{F}_t$ -可测的, 而 $\mathcal{F}_t$ 由 $X_s, s \leq t$ 生成, 遂有 $A = B$. $\square$

练习 1.8. 设 A, B 是两个加性泛函, 并且对每个 $t > 0$ 与每个 $x \in E$,

$$E_x[A_t] = E_x[B_t] < \infty.$$

证明对每个 $x \in E$,

$$M_t = A_t - B_t$$

是 $(\mathcal{F}_t, P_x)$ -鞅。(本题将在练习 2.22 中继续。)

练习 1.9 (#, 极值过程)。

1°) 对标准一维布朗运动, 沿用通常记号, 令

$$X_a = L_{T_a}^0, \quad a \geq 0.$$

证明过程 $a \mapsto X_a$ 具有独立但非平稳的增量。进一步证明: 若

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_p, \quad a_1 < a_2 < \cdots < a_p,$$

则

$$\begin{aligned} & P_0[X_{a_1} > x_1, X_{a_2} > x_2, \dots, X_{a_p} > x_p] \\ &= \exp \left\{ -\frac{x_1}{2a_1} - \frac{x_2 - x_1}{2a_2} - \cdots - \frac{x_p - x_{p-1}}{2a_p} \right\}. \end{aligned}$$

2°) 照例令 τ_t 是与 L 相伴的时间变换。证明过程

$$Y_t = S_{\tau_t}$$

是过程 X_a 的逆。由此推出: 若

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_p, \quad y_1 < y_2 < \cdots < y_p,$$

则

$$\begin{aligned} & P_0[Y_{t_1} < y_1, Y_{t_2} < y_2, \dots, Y_{t_p} < y_p] \\ &= \exp \left\{ -\frac{t_1}{2y_1} - \frac{t_2 - t_1}{2y_2} - \cdots - \frac{t_p - t_{p-1}}{2y_p} \right\}. \end{aligned}$$

关于这些过程的进一步资料可见第 XII 章练习 4.11。

练习 1.10. 对 $0 < \alpha < 1$, 定义

$$Z_\alpha(t) = \int_0^\infty L_{\tau_t}^x x^{(1-2\alpha)/\alpha} dx,$$

其中 τ_t 是与 $L = L^0$ 相伴的时间变换。

1°) 证明 Z_α 是指数为 α 的稳定次序过程。

提示：使用第 VI 章练习 2.11 的尺度性质。

2°) 证明

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} (Z_\alpha(t))^\alpha = S_{\tau_t} \quad \text{a.s.}$$

极限过程的研究见上一练习。

练习 1.11 (*#)。令 L 是一维布朗运动在零点的局部时， τ_t 是它的逆。

1°) 由命题 1.3 与强 Markov 性推出：在 P_0 下， τ_t 是递增 Lévy 过程。

2°) 利用第 VI 章中 L 的定义与分部积分公式，证明 L 在零点的 α -势 ($\alpha > 0$) 为

$$U_L^\alpha(0) = (2\alpha)^{-1/2}.$$

这也将由下一节的一般结果推出。

3°) 对 $x \in \mathbb{R}$ ，由等式

$$U_L^\alpha(x) = \int_0^\infty E_x[e^{-\alpha\tau_t}] dt$$

推出

$$E_x[e^{-\alpha\tau_t}] = E_x[e^{-\alpha\tau_0}]e^{-t\sqrt{2\alpha}},$$

并由此证明在 P_0 下， (τ_t) 是指数为 $1/2$ 的稳定次序过程。这样便得到另一证明，它不依赖于 L_t 与 S_t 同分布的事实。另见第 VI 章练习 4.9 的第 6° 问。

4°) 若 β 是独立的 d 维布朗运动，证明 (β_{τ_t}) 是 d 维 Cauchy 过程，即 $\mathbb{R}^d$ 中增量服从 d 维 Cauchy 分布的 Lévy 过程；参见第 III 章练习 3.24。

练习 1.12。设 X 是 $\mathbb{R}$ 上具有连续轨道的 Markov 过程，其转移函数关于 Lebesgue 测度有密度 $p_t(x, y)$ ，并且这个密度关于三个变量分别连续。再假设在每个 P_x 下， X 都是半鞅，且

$$\langle X, X \rangle_t = t.$$

若 $(L^y, y \in \mathbb{R})$ 是它的局部时族，证明

$$\frac{d}{dt} E_x[L_t^y] = p_t(x, y)$$

对每个

$$(t, x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

成立。

读者可以把本题与第 VII 章练习 4.16 比较。

练习 1.13 (#)。设 $X = (X_t, \mathcal{F}_t, P_x)$ 是状态空间为 E 的 Markov 过程， A 是 X 的加性泛函。证明：对任意 P_x ，二元过程 (X, A) 是 $E \times \mathbb{R}_+$ 上的 $(\mathcal{F}_t)$ -Markov 过程，其转移函数为

$$Q_t\phi(x, a) = E_x[\phi(X_t, a + A_t)].$$

提示：第 III 章练习 3.19 的 Markov 性或许有用。第 VI 章练习 2.18 已研究过一个特例。

练习 1.14。

1°) 令 $(L^a, a \in \mathbb{R})$ 是布朗运动的局部时族, 并置

$$L_t^* = \sup_a L_t^a.$$

证明: 对每个 $p \in (0, \infty)$, 存在常数 c_p, C_p , 使任意停时 T 都满足

$$c_p E[T^{p/2}] \leq E[(L_T^*)^p] \leq C_p E[T^{p/2}].$$

提示: 使用第 IV 章定理 4.10 与 4.11。

2°) 把上述结果适当地推广到所有连续局部鞅。第 XI 章第 2 节将证明这一结果。

练习 1.15 (#, 弹性布朗运动)。

1°) 设 A 是 Markov 过程 X 的加性泛函, e 是与 X 独立、参数为 γ 的指数随机变量。令

$$\xi = \inf\{t : A_t > e\}.$$

定义

$$\tilde{X}_t = X_t \text{ 于 } \{t < \xi\} \text{ 上}, \quad \tilde{X}_t = \Delta \text{ 于 } \{t \geq \xi\} \text{ 上}.$$

证明在 X 的概率测度 P_x 下, $\tilde{X}$ 是 Markov 过程, 并证明它的半群 (Q_t) 满足

$$Q_t f(x) = E_x[f(X_t) e^{-\gamma A_t}].$$

若 X 是一维布朗运动、 A 是它在零点的局部时, 则 $\tilde{X}$ 称为弹性布朗运动。

2°) 记 $\tilde{U}_\alpha$ 为弹性布朗运动的预解。若 f 有界连续, 证明 $u = \tilde{U}_\alpha f$ 满足

$$\begin{cases} \alpha u - \frac{1}{2} u'' = f, \\ u'_+(0) - u'_-(0) = 2\gamma u(0). \end{cases}$$

粗略地说, 这表示 $\tilde{X}$ 的无穷小生成元在空间

$$\{u \in C^2(\mathbb{R}) : u'_+(0) - u'_-(0) = 2\gamma u(0)\}$$

上由 $\mathcal{A}u = \frac{1}{2}u''$ 给出。

练习 1.16 (, 关于某些随机时刻的条件化)。** 设 X 是连续 Markov 过程, 并且在 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ 上存在概率测度族

$$(P_{x,y}^s : s > 0, x, y \in E),$$

满足:

- i) 对每个 $s > 0$, 存在一族 $\mathcal{F}_s$ -可测随机变量 C_s , 它关于逐点乘法封闭并生成 $\mathcal{F}_s$; 而且对每个 $x \in E$ 与 $C \in \mathcal{C}_s$, 映射

$$(t, y) \mapsto E_{x,y}^t[C]$$

在 $(s, \infty) \times E$ 上连续;

- ii) 对每个 $\Gamma \in \mathcal{F}_t$, 随机变量

$$P_{x,X_t}^t(\Gamma)$$

是 $E_x[\mathbf{1}_\Gamma | X_t]$ 的一个版本。

第 XII 章将给出一整族满足这些假设的过程。

1°) 设 A 是 X 的加性泛函, 并且对每个 t , $E_x[A_t] < \infty$. 证明对每个非负过程 H ,

$$E_x \left[\int_0^\infty H_s \, dA_s \right] = E_x \left[\int_0^\infty E_{x, X_s}^s[H_s] \, dA_s \right].$$

2°) 设 L 是正的、几乎处处有限的 $\mathcal{F}_\infty$ -可测随机变量, λ 是可预测过程, Λ 是加性泛函, 并且对每个非负可预测过程 H ,

$$E_x[H_L] = E_x \left[\int_0^\infty H_s \lambda_s \, d\Lambda_s \right].$$

参见第 VII 章练习 4.16。若

$$\Gamma_x = \{(s, y) : E_{x, y}^s[\lambda_s] = 0\},$$

证明

$$P_x[(L, X_L) \in \Gamma_x] = 0,$$

并且

$$E_x[H_L | L = s, X_L = y] = \frac{E_{x, y}^s[H_s \lambda_s]}{E_{x, y}^s[\lambda_s]}.$$

3°) 再假设过程 X 满足练习 1.12 的条件, 并且存在测度 ν , 使

$$\Lambda_t = \int_{\mathbb{R}} L_t^z \nu(dz).$$

证明在 P_x 下, (L, X_L) 的分布关于 $dt \nu(dy)$ 有密度

$$E_{x, y}^t[\lambda_t] p_t(x, y).$$

由此重新证明第 VII 章练习 4.16 的最后一个结果。

2 一维布朗运动加性泛函的表示定理

我们将为每个加性泛函关联一个测度; 在布朗运动的情形, 这一测度将用来把加性泛函表示成局部时的积分。为此, 先引入下面的定义。

若 N 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的核, m 是正测度, 则对 $A \in \mathcal{E}$, 令

$$(mN)(A) = \int_E m(dx) N(x, A).$$

容易验证, 映射 $A \mapsto (mN)(A)$ 是 $\mathcal{E}$ 上的测度, 仍记为 mN 。

定义 2.1. $(E, \mathcal{E})$ 上的正 σ -有限测度 m , 若对每个 $t > 0$ 都有

$$mP_t = m \quad (\text{分别地, } mP_t \leq m),$$

则称 m 对过程 X (或对它的半群) 是不变测度 (分别地, 过度测度)。

对任意正测度 m , 可以照常地在 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ 上定义测度 P_m :

$$P_m[\Gamma] = \int_E P_x[\Gamma] m(dx).$$

这推广了第 III 章中以概率测度 ν 为初始分布的构造; 不过当 $m(E) \neq 1$ 时, P_m 不是概率测度。测度 m 不变, 当且仅当 P_m 对每个平移映射 θ_t 都不变。进一步, 若 m 有限且不变, 并把它归一化为 $m(E) = 1$, 则在 P_m 下过程是平稳的 (见第 I 章第 3 节)。

对 $\mathbb{R}^d$ 上任意具有独立增量的过程, Lebesgue 测度都是不变测度; 特别地, 它对 d 维布朗运动不变。过度测度的例子则由势测度

$$\nu U = \int_0^\infty \nu P_t dt$$

给出, 只要这个测度是 σ -有限的; 例如当 $d \geq 3$ 时, d 维布朗运动是暂留的, 便属于这种情形。

不变性的定义也可以用预解族而不是半群给出。显然, 若 m 不变 (分别地, 过度), 则

$$mU^1 = m \quad (\text{分别地, } mU^1 \leq m);$$

逆命题也成立 (见练习 2.21)。

从现在起, 假设存在一个过度测度 m , 并在以下讨论中固定它。在实际应用中, 这一假设几乎总能满足: 对于暂留过程, 可以取适当的势测度; 而在常返情形, 在温和的条件下可以证明存在不变测度。下文说一个定义在 E 上的函数可积, 均指它关于 m 可积。

设 A 是加性泛函。对 $f \in b\mathcal{E}_+$, 定义

$$\nu_A(f) = \sup_{t>0} \frac{1}{t} E_m[(f \cdot A)_t].$$

命题 2.2. 对每个 $f \in b\mathcal{E}_+$ 及每个加性泛函 A ,

$$\nu_A(f) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} E_m[(f \cdot A)_t] = \lim_{\alpha \uparrow \infty} \alpha \int_E m(dx) U_A^\alpha f(x).$$

而且第二个极限是单调递增的极限。

证明. 因为 m 是过度测度, 由 Markov 性容易看出, 函数

$$t \mapsto E_m[(f \cdot A)_t]$$

是次可加的。因此, 第一个等式来自次可加函数的熟知性质。第二个等式由 Laplace 变换的 Abel 型定理得到; 最后, 预解方程说明该极限单调递增。□

对每个 $\alpha > 0$, 映射

$$f \mapsto \alpha \int_E m(dx) U_A^\alpha f(x)$$

是一个正测度。由于两个递增极限的次序可以交换, $f \mapsto \nu_A(f)$ 也是正测度, 记作 ν_A 。

定义 2.3. 测度 ν_A 称为与加性泛函 A 关联的测度。若 ν_A 是有限测度 (分别地, σ -有限测度), 则称 A 可积 (分别地, σ -可积)。

显然, 测度 ν_A 不对极集赋正质量。还应注意, A 与 ν_A 的对应依赖于 m ; 不过通常都有一个典范的 m 可供选取, 例如布朗运动情形中的 Lebesgue 测度。

还要指出, 与

$$A_t = t \wedge \zeta$$

关联的测度就是 m , 并且

$$\nu_{f \cdot A} = f \cdot \nu_A.$$

特别地, 若

$$A_t = \int_0^t f(X_s) \, ds$$

是加性泛函, 则 $\nu_A = f \cdot m$, 而且 A 可积当且仅当 f 可积。

最后强调, 若 m 是不变测度, 则 ν_A 可由更简单的公式

$$\nu_A(f) = E_m \left[\int_0^1 f(X_s) \, dA_s \right]$$

定义。

下面计算一维布朗运动在点 a 的局部时 L^a 所关联的测度。正如上面所说, 这里 m 是 Lebesgue 测度; 事实上, 它也是布朗运动唯一的过度测度 (见练习 3.14)。

命题 2.4. 局部时 L^a 是可积加性泛函, 其关联测度是点 a 处的 Dirac 测度 δ_a 。

证明。 显然, 只需取 $a = 0$, 并记 $L = L^0$ 。第 VI 章命题 1.3 表明 ν_L 的支集为 $\{0\}$, 而 ν_L 的总质量等于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_x[L_1] \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} E_0[L_1^x] \, dx = E_0 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} L_1^x \, dx \right] = 1,$$

最后一个等式来自占用时间公式。证明完毕。 $\square$

马上就要用到测度 ν_A , 因此需要知道 σ -可积加性泛函这一类究竟有多大。先证明下面的引理。

引理 2.5. 设 C 是可积加性泛函, $h \in b\mathcal{E}_+$ 。若存在 $\alpha > 0$, 使

$$U_A^\alpha h \leq U_C^\alpha,$$

则 $\nu_A(h) < \infty$ 。

证明。 对 $\beta > \alpha$, 由预解方程,

$$\begin{aligned} \beta \int_E (U_C^\beta - U_A^\beta h) \, dm &= \beta \int_E (U_C^\alpha - U_A^\alpha h) \, dm \\ &\quad - (\beta - \alpha) \int_E \beta U^\beta (U_C^\alpha - U_A^\alpha h) \, dm. \end{aligned}$$

由于 m 是过度测度,

$$\begin{aligned} \beta \int_E (U_C^\beta - U_A^\beta h) \, dm &\geq \beta \int_E (U_C^\alpha - U_A^\alpha h) \, dm \\ &\quad - (\beta - \alpha) \int_E (U_C^\alpha - U_A^\alpha h) \, dm \\ &= \alpha \int_E (U_C^\alpha - U_A^\alpha h) \, dm \geq 0. \end{aligned}$$

于是对每个 $\beta > \alpha$,

$$\beta \int_E U_A^\beta h \, dm \leq \beta \int_E U_C^\beta \, dm.$$

令 $\beta \uparrow \infty$, 便得到所需结论。 $\square$

定理 2.6. 每个连续加性泛函都是 σ -可积的。进一步, E 可以写成一系列全域可测集 E_n 的并, 并且势

$$U_A^1(\cdot, E_n) = U_A^1 \mathbf{1}_{E_n}$$

既有界又可积。

证明. 取一个有界、可积、处处严格为正的 Borel 函数 f , 并令

$$\phi(x) = E_x \left[\int_0^\zeta e^{-t} f(X_t) e^{-A_t} \, dt \right].$$

显然 $0 < \phi \leq \|f\|$ 。下面计算 $U_A^1 \phi$:

$$\begin{aligned} U_A^1 \phi(x) &= E_x \left[\int_0^\zeta e^{-t} E_{X_t} \left[\int_0^\zeta e^{-s} f(X_s) e^{-A_s} \, ds \right] \, dA_t \right] \\ &= E_x \left[\int_0^\zeta e^{-t} E_x \left[\int_0^\zeta e^{-s} f(X_{s+t}) e^{-A_{s \circ \theta_t}} \, ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \, dA_t \right]. \end{aligned}$$

利用第 V 章练习 1.13 的第 1° 问和第 0 章命题 4.7, 上式进一步等于

$$\begin{aligned} &E_x \left[\int_0^\zeta e^{-t} \, dA_t \int_0^\zeta e^{-s} f(X_{s+t}) e^{-A_{s+t}} e^{A_t} \, ds \right] \\ &= E_x \left[\int_0^\zeta e^{-s} f(X_s) e^{-A_s} \, ds \int_0^s e^{A_t} \, dA_t \right] \\ &= E_x \left[\int_0^\zeta e^{-s} f(X_s) (1 - e^{-A_s}) \, ds \right] = U^1 f(x) - \phi(x). \end{aligned}$$

取

$$E_n = \{\phi > 1/n\}, \quad C_t = \int_0^t f(X_s) \, ds, \quad h = n^{-1} \mathbf{1}_{E_n}.$$

因为 $h \leq \phi$ 且 $U_A^1 \phi \leq U_C^1$, 应用引理 2.5 即得结论。 $\square$

本节余下部分专门讨论一维布朗运动, 记为 B 。回忆预解核 U^α 是卷积核, 并具有连续、对称的密度。更准确地,

$$U^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} u^\alpha(x, y) f(y) \, dy, \quad u^\alpha(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \exp(-\sqrt{2\alpha} |y - x|).$$

因此, 当 m 是 Lebesgue 测度时, 对任意两个正函数 f, g ,

$$\int_{\mathbb{R}} g U^\alpha f \, dm = \int_{\mathbb{R}} (U^\alpha g) f \, dm. \quad (*)$$

此外, 这些核具有强 Feller 性质: 若 f 是有界 Borel 函数, 则 $U^\alpha f$ 连续。这是卷积核的熟知性质。

最后要用到如下观察: 若 f 是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 函数, 并且 $f(B_t)$ 在 $t = 0$ 处几乎必然右连续, 则 f 连续; 这由重对数律立即得到。特别地, 只要连续加性泛函的 α -势有限, 这一观察就适用于

它。事实上,

$$\begin{aligned} U_A^\alpha(B_t) &= E_x \left[\left(\int_0^\infty e^{-\alpha s} dA_s \right) \circ \theta_t \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{\alpha t} E_x \left[\int_t^\infty e^{-\alpha s} dA_s \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad P_x\text{-a.s.}, \end{aligned}$$

而根据第 II 章定理 2.3, 当 $t \downarrow 0$ 时, 右端收敛到 $U_A^\alpha(x)$ 。

命题 2.7. 在一维布朗运动的情形, 对每个连续加性泛函 A , 关联测度 ν_A 都是 Radon 测度。

证明。 由引理 2.5, 只须证明定理 2.6 的证明中各集合

$$E_n = \{\phi > 1/n\}$$

都是开集, 亦即证明 ϕ 连续。与上面相同, 这可由 $\phi(B_t)$ 在 $t = 0$ 处的右连续性推出。事实上, 在 P_x -几乎处处意义下,

$$\begin{aligned} \phi(B_t) &= E_{B_t} \left[\int_0^\zeta e^{-u} f(B_u) e^{-A_u} du \right] \\ &= E_x \left[\int_0^\zeta e^{-u} f(B_{u+t}) e^{-A_{u+t} + A_t} du \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{A_t} e^t E_x \left[\int_t^\zeta e^{-u} f(B_u) e^{-A_u} du \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

根据第 II 章推论 2.4, 这在 P_x -几乎处处意义下收敛到 $\phi(x)$ 。 □

现在反过来研究: 给定 Radon 测度 ν , 要把它同个满足 $\nu = \nu_A$ 的连续加性泛函 A 联系起来。虽然下面的论证可以在更一般的框架下进行, 我们仍只讨论一维布朗运动。

定理 2.8. 若 A 是连续加性泛函, 则对每个 $\alpha > 0$ 和 $f \in \mathcal{E}_+$,

$$U_A^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} u^\alpha(x, y) f(y) \nu_A(dy).$$

特别地,

$$U_A^\alpha = \int_{\mathbb{R}} u^\alpha(\cdot, y) \nu_A(dy).$$

证明。 因为 $\nu_{f \cdot A} = f \cdot \nu_A$, 只须证明后一条特殊情形。

先假设 U_A^α 有界且可积, 并取 $\phi \in C_K^+$ 。由命题 2.2,

$$\int_{\mathbb{R}} U^\alpha \phi(y) \nu_A(dy) = \lim_{\beta \uparrow \infty} \beta E_m \left[\int_0^\infty e^{-\beta s} U^\alpha \phi(B_s) dA_s \right].$$

函数 $s \mapsto e^{-\beta s} U^\alpha \phi(B_s)$ 连续, 因此它是下列和式的极限:

$$S_n(s) = \sum_{k \geq 0} \exp\left(-\frac{\beta(k+1)}{n}\right) U^\alpha \phi(B_{k/n}) \mathbf{1}_{(k/n, (k+1)/n]}(s).$$

把 S_n 看成 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上的函数, 则

$$S_n(s) \leq \alpha^{-1} \|\phi\| e^{-\beta s}.$$

由于上述可积性假设, 这个上界关于定义在 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上的测度 $P_m \otimes dA_s$ 可积; 该测度由

$$(P_m \otimes dA_s)(\Gamma) = E_m \left[\int_0^\infty \mathbf{1}_\Gamma(\omega, s) dA_s \right]$$

定义。因此, Lebesgue 支配收敛定理给出

$$\begin{aligned} E_m \left[\int_0^\infty e^{-\beta s} U^\alpha \phi(B_s) dA_s \right] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} E_m \left[\int_0^\infty S_n(s) dA_s \right]. \end{aligned}$$

利用 Markov 性以及 m 的不变性, 右端进一步等于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq 0} E_m \left[e^{-\beta(k+1)/n} U^\alpha \phi(B_{k/n}) E_{B_{k/n}}[A_{1/n}] \right] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \geq 0} e^{-\beta(k+1)/n} \right) \int_{\mathbb{R}} U^\alpha \phi(y) E_y[A_{1/n}] m(dy) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\beta/n}}{1 - e^{-\beta/n}} \int_{\mathbb{R}} \phi(y) U^\alpha(E \cdot [A_{1/n}])(y) m(dy), \end{aligned}$$

最后一步使用了上面的对偶关系 (*). 对每个固定的 β ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta e^{-\beta/n}}{n(1 - e^{-\beta/n})} = 1.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} U^\alpha \phi(y) \nu_A(dy) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\mathbb{R}} \phi(y) U^\alpha(E \cdot [A_{1/n}])(y) m(dy) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty n e^{-\alpha t} E_{\phi \cdot m}[E_{B_t}[A_{1/n}]] dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty n e^{-\alpha t} E_{\phi \cdot m}[A_{t+1/n} - A_t] dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n(e^{\alpha/n} - 1) \int_{1/n}^\infty e^{-\alpha s} E_{\phi \cdot m}[A_s] ds \right. \\ &\quad \left. - n \int_0^{1/n} e^{-\alpha s} E_{\phi \cdot m}[A_s] ds \right\} \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} E_{\phi \cdot m}[A_s] ds \\ &= E_{\phi \cdot m} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} dA_s \right]. \end{aligned}$$

最后一个等式使用了分部积分公式。于是得到

$$\int_{\mathbb{R}} U^\alpha \phi(y) \nu_A(dy) = \int_{\mathbb{R}} U_A^\alpha(x) \phi(x) m(dx),$$

也就是

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u^\alpha(x, y) \phi(x) m(dx) \nu_A(dy) = \int_{\mathbb{R}} U_A^\alpha(x) \phi(x) m(dx).$$

从而

$$\int_{\mathbb{R}} u^\alpha(x, y) \nu_A(dy) = U_A^\alpha(x) \quad m\text{-几乎处处}.$$

两端都连续：右端的连续性来自命题 2.7 之前的观察，左端的连续性来自 u^α 的连续性。因此等式事实上处处成立。

一般情形下 A 是 σ -可积的；取单调递增极限即可完成证明。 $\square$

下面给出本节的主要结果，它推广了定义 2.3 后面的占用时间公式。

定理 2.9。 若 A 是一维布朗运动的连续加性泛函，则

$$A_t = \int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a \nu_A(da).$$

因此，一维布朗运动的每个连续加性泛函都是强加性泛函。

证明。 因为 ν_A 是 Radon 测度，而且对每个 t ，映射 $a \mapsto L_t^a$ 连续并具有紧支集，所以

$$\tilde{A}_t = \int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a \nu_A(da)$$

有限，并且显然定义了一个连续加性泛函。计算它的关联测度。对 $f \in \mathcal{E}_+$ ，利用 m 的不变性可得

$$\begin{aligned} \nu_{\tilde{A}}(f) &= E_m \left[\int_0^1 f(B_s) d\tilde{A}_s \right] \\ &= E_m \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 f(B_s) dL_s^a \right) \nu_A(da) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \nu_A(da) E_m \left[\int_0^1 f(B_s) dL_s^a \right] \\ &= \nu_A(f), \end{aligned}$$

最后一步使用命题 2.4，即 L^a 的关联测度为 δ_a 。因此 $\nu_{\tilde{A}} = \nu_A$ 。由定理 2.8 和命题 1.7， $A = \tilde{A}$ （在等价意义下），证明完毕。 $\square$

注。 事实上，Feller 过程的每个加性泛函都是强加性泛函，但这一结果的证明超出了本书的范围。

下面列出上述定理的若干推论。

推论 2.10。 一维布朗运动的每个连续加性泛函都是有限的，并且映射

$$A \mapsto \nu_A$$

是一一映射。

证明。 留给读者。 $\square$

顺便指出，对直线上的右平移过程，确实存在非有限的连续加性泛函，即存在有限的 t 使

$A_t = \infty$ 。例如，可取

$$A_t = \int_0^t f(X_s) \, ds, \quad f(x) = |x|^{-1} \mathbf{1}_{\{x < 0\}}.$$

推论 2.11. 每个连续加性泛函都有一个关于 $(\mathcal{F}_t^0)$ 适应的修正。

证明. 回忆 $(\mathcal{F}_t^0)$ 是布朗运动未经完备化的滤过。由上一节的讨论，这个性质对局部时成立；因而它也对所有连续加性泛函成立。 $\square$

推论 2.12. 对一维布朗运动的每个连续加性泛函 A ，都存在凸函数 f ，使

$$A_t = f(B_t) - f(B_0) - \int_0^t f'_-(B_s) \, dB_s.$$

证明. 取一个二阶分布导数恰为 $2\nu_A$ 的凸函数 f （见附录命题 3.2）。对这个函数应用 Tanaka 公式，就恰好得到结论中的公式。 $\square$

推论 2.13. 若 A 是连续加性泛函， f 是正 Borel 函数，则

$$\int_0^t f(B_s) \, dA_s = \int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a f(a) \, \nu_A(da).$$

证明. 由定理 2.9 立即得到。 $\square$

推论 2.14. 对一维布朗运动的任意非零连续加性泛函 A ，

$$A_\infty = \infty \quad \text{几乎必然.}$$

证明. 由第 VI 章推论 2.4 以及布朗运动的平移不变性，几乎必然同时对每个 $a \in \mathbb{R}$ 都有 $L_\infty^a = \infty$ 。这显然推出本推论。 $\square$

注. 命题 3.14 将证明一个更一般的结果。

还要指出，虽然本书不作证明，布朗运动除连续加性泛函之外不存在别的加性泛函；这一事实与第 V 章定理 3.4 密切相关。

现在考察与连续加性泛函 A 相联系的时间变换，即

$$\tau_t = \inf\{s : A_s > t\}, \quad t \geq 0.$$

由于 A 不仅是递增过程，而且是加性泛函，所以有下面的结论。

命题 2.15. 对每个 t ，都存在一个零测集，使得在其外，对每个 s 均有

$$\tau_{t+s} = \tau_t + \tau_s \circ \theta_{\tau_t}.$$

证明. 证明与第 1 节局部时的情形相同。 $\square$

下文固定 A , 并用 $S(A)$ 表示测度 ν_A 的支集, 记

$$T^A = T_{S(A)}.$$

我们将证明, 只有当布朗运动位于 $S(A)$ 中时, A_t 才会增长。由此可见, A 严格递增当且仅当 ν_A 对每个非空开集都赋予正质量。

引理 2.16. 时刻 τ_0 与 T^A 几乎必然相等。

证明. 为简化记号, 在本证明中把 T^A 写成 T . 取 $a \in S(A)$. 第 VI 章命题 2.5 的证明已经表明: 对 $t > 0$,

$$L_t^a > 0, \quad P_a\text{-几乎必然}.$$

由 $x \mapsto L_t^x$ 的连续性, 在 P_a -几乎处处意义下, L_t^x 在 a 的某个邻域内为正。因此

$$A_t = \int_{-\infty}^{+\infty} L_t^x \nu_A(dx) > 0, \quad P_a\text{-几乎必然}.$$

现在任取 $x \in \mathbb{R}$. 利用 A 的强加性和强 Markov 性, 对 $t > 0$ 有

$$P_x[A_{T+t} > 0] \geq E_x[P_{B_T}[A_t > 0]] = 1,$$

因为 $S(A)$ 是闭集, 所以 $B_T \in S(A)$ 几乎必然。这说明 $\tau_0 \leq T$ 几乎必然。

另一方面, 由推论 2.13,

$$\int_0^t \mathbf{1}_{S(A)^c}(B_s) dA_s = \int_{S(A)^c} L_t^a \nu_A(da) = 0 \quad \text{几乎必然}.$$

因而

$$A_t = \int_0^t \mathbf{1}_{S(A)}(B_s) dA_s \quad \text{几乎必然}.$$

这推出 $A_T = 0$, 从而 $\tau_0 \geq T$ 几乎必然。 □

命题 2.17. 下列三个集合几乎必然相等:

- i) 测度 dA_t 的支集;
- ii) 集合

$$\bigcup_{s \geq 0} (\tau_{s-}, \tau_s)$$

的补集 Σ_A ;

- iii) 集合

$$\Gamma = \{t : B_t \in S(A)\}.$$

证明. 与局部时的情形一样, 可以证明前两项中的集合相等; 因此 Σ_A 是 dA_t 的支集。又因为

$$\int_0^t \mathbf{1}_{S(A)^c}(B_s) dA_s = 0,$$

且各区间 (τ_{s-}, τ_s) 正是 A 的常值区间, 所以

$$\Gamma^c \subset \bigcup_{s \geq 0} (\tau_{s-}, \tau_s),$$

进而 $\Sigma_A \subset \Gamma$ 。为证明反向包含，注意

$$\Sigma_A = \{t : A(t + \varepsilon) - A(t - \varepsilon) > 0 \text{ 对每个 } \varepsilon > 0\}.$$

于是

$$\{\omega : \Gamma(\omega) \not\subset \Sigma_A(\omega)\} \subset \bigcup \{A_s - A_r = 0, r + T^A \circ \theta_r < s\},$$

其中并集遍历所有满足 $0 \leq r < s$ 的有理数对 (r, s) 。但对每个 x ,

$$\begin{aligned} P_x[A_s - A_r = 0, r + T^A \circ \theta_r < s] \\ = E_x[P_{B_r}[A_{s-r} = 0, T^A < s - r]] = 0, \end{aligned}$$

最后一个等式来自引理 2.16。这就完成了证明。 $\square$

现在研究在加性泛函 A 所给时间变换之下布朗运动变成什么过程。这也部分说明了第 VII 章第 3 节中的评论：自然尺度上的一维 Markov 过程可以看成经过时间变换的布朗运动。令

$$\hat{B}_t = B_{\tau_t}, \quad \hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}.$$

过程 $\hat{B}$ 关于滤过 $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ 适应。由于 $t \mapsto \tau_t$ 右连续，该滤过右连续；对于布朗运动的各个概率测度 P_x ，它也是完备的。

若 T 是 $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ -停时，则 τ_T ，即映射 $\omega \mapsto \tau_{T(\omega)}(\omega)$ ，是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。事实上，对任意 s ,

$$\{\tau_T < s\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_+} (\{T \leq q\} \cap \{\tau_q < s\}),$$

而 $\{T \leq q\} \in \mathcal{F}_{\tau_q}$ ，所以右端每个集合都属于 $\mathcal{F}_s$ 。此外，几乎必然对每个 t 都有

$$\tau_{T+t} = \tau_T + \tau_t \circ \theta_{\tau_T}.$$

这可由命题 2.15 推出：用一系列递减的、只取可数多个值的停时逼近 T 即可。以上事实将用于证明下面的定理。

定理 2.18. 若 ν_A 的支集是区间 I ，则

$$(\hat{B}_t, \hat{\mathcal{F}}_t, P_x, x \in I)$$

是 I 上具有连续样本路径的正则强 Markov 过程，其尺度为自然尺度，速度测度为 $2\nu_A$ 。它的半群 Q_t 由

$$Q_t f(x) = E_x[f(B_{\tau_t})]$$

给出。

证明. 先说明 B_{τ_t} 具有连续样本路径。事实上，由命题 2.17，若 $\tau_{t-} \neq \tau_t$ ，则 $B_{\tau_{t-}}$ 必为 I 的一个有限端点，并且 B 在时刻 τ_{t-} 离开 I 。而 τ_t 是 B 此后重新进入 I 的时刻；显然，它只能从同一个端点重返。因此

$$B_{\tau_t} = B_{\tau_{t-}},$$

从而得到连续性。

下面证明 $\hat{B}$ 的强 Markov 性。设 f 是正 Borel 函数， T 是 $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ -停时。由定理前面的讨论，在

$\{T < \infty\}$ 上 P_x -几乎必然有

$$\begin{aligned} E_x[f(\hat{B}_{T+t}) \mid \hat{\mathcal{F}}_T] &= E_x[f(B_{\tau_t} \circ \theta_{\tau_T}) \mid \mathcal{F}_{\tau_T}] \\ &= Q_t f(\hat{B}_T). \end{aligned}$$

于是结论由第 III 章练习 3.16 得到。

$\hat{B}$ 正则且处于自然尺度是显然的。只须计算它的速度测度。设 $J = (a, b)$ 是 I 的开子区间。采用第 VII 章第 3 节的记号, 对 $x \in J$ 及正 Borel 函数 f ,

$$\begin{aligned} E_x \left[\int_0^{T_a \wedge T_b} f(B_s) \, ds \right] &= \int_J E_x[L_{T_a \wedge T_b}^y] f(y) \, dy \\ &= 2 \int_J G_J(x, y) f(y) \, dy. \end{aligned}$$

所以

$$E_x[L_{T_a \wedge T_b}] = 2G_J(x, \cdot)$$

几乎处处成立; 由连续性, 它处处成立。

定义

$$\hat{T}_a = \inf\{t : \hat{B}_t = a\} = \inf\{t : \tau_t = T_a\},$$

$\hat{T}_b$ 类似。由第 V 章第 1 节的时间变换公式,

$$\begin{aligned} E_x \left[\int_0^{\hat{T}_a \wedge \hat{T}_b} f(\hat{B}_s) \, ds \right] &= E_x \left[\int_0^{\tau_{\hat{T}_a \wedge \hat{T}_b}} f(B_s) \, dA_s \right] \\ &= E_x \left[\int_0^{T_a \wedge T_b} f(B_s) \, dA_s \right] \\ &= \int_J E_x[L_{T_a \wedge T_b}^y] f(y) \, \nu_A(dy) \\ &= 2 \int_J G_J(x, y) f(y) \, \nu_A(dy). \end{aligned}$$

这就证明速度测度为 $2\nu_A$ 。严格说来, 还应另行讨论端点情形, 但同一论证仍然适用。 $\square$

利用推论 2.11, 容易验证: 若 f 是 Borel 函数, 则 $Q_t f$ 也是 Borel 函数。再利用 Stieltjes 积分的变量替换公式, 可以验证 $\hat{B}$ 的预解由

$$V^\alpha f(x) = E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha A_t} f(B_t) \, dA_t \right]$$

给出。

上述结果还有一个不尽理想之处: 若 I 有有限端点, 则该点必为反射边界或慢反射边界; 特别地, 按第 VII 章第 3 节的记号, 它属于状态空间 E 。我们尚未说明怎样把 $(0, \infty)$ 上的过程表示成布朗运动的时间变换。由第 VII 章练习 3.23 可知, 若过程处于自然尺度, 则 0 必须是自然边界。下面简述怎样从布朗运动得到这种过程。

设 ν 是 $(0, \infty)$ 上的 Radon 测度, 并且对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\nu((0, \varepsilon)) = \infty.$$

此时积分

$$\int_{(0, \infty)} L_t^a \nu(da)$$

不再定义加性泛函，因为对任意 $t > 0$ ，它在 P_0 -几乎处处意义下为无穷。不过，可以把它看成在时刻 T_0 被杀死的布朗运动的连续加性泛函。相应的时间变换过程将是 $(0, \infty)$ 上自然尺度的正则过程，并以 0 为自然边界。证明这些断言留作练习；读者也可以参看后面的练习，其中包含若干特殊情形和相关结果。

还应注意，定理 2.18 有逆命题：从过程 X 出发，可以找到布朗运动 B 及 B 的连续加性泛函，使 X 正是相应的时间变换过程（见练习 2.34）。

练习 2.19。 设 A 是布朗运动的连续加性泛函， (τ_t) 是零点局部时的右连续逆。证明过程

$$(A_{\tau_t})_{t \geq 0}$$

具有平稳独立增量。另见第 XII 章命题 2.7。

练习 2.20。 设 B 是 d 维布朗运动， $d > 1$ ， v 是单位向量。一维布朗运动

$$X = \langle v, B \rangle$$

在点 y 的局部时是 B 的加性泛函。求它的关联测度。

练习 2.21。 设 m 是 σ -有限测度，并且

$$mU^1 = m.$$

证明 m 是不变测度。

提示：若 $m(A) < \infty$ ，证明对每个 $\alpha > 0$ 都有

$$\alpha mU^\alpha(A) = m(A),$$

再利用 Laplace 变换的性质。

练习 2.22 (带符号加性泛函)。 在连续加性泛函的定义中，若把“递增”改为“在每个有界区间上仅要求有限变差”，就得到带符号连续加性泛函的概念。

1°) 证明：若 A 是带符号连续加性泛函，则存在两个连续加性泛函 A^+ 与 A^- ，使

$$A = A^+ - A^-,$$

并且这一分解是最小的。

2°) 在布朗运动的情形，把本节结果推广到带符号连续加性泛函。特别地，对任意带符号连续加性泛函 A ，存在一个局部可表示为两个凸函数之差的函数 f ，使

$$f''(dx) = 2\nu_A(dx)$$

且

$$A_t = f(B_t) - f(B_0) - \int_0^t f'_-(B_s) dB_s.$$

练习 2.23 (布朗运动的半鞅函数)。

1°) 若对每个 P_x , $f(B_t)$ 都是连续半鞅, 证明 f 在局部上是两个凸函数之差。

提示: 使用上一练习和第 II 章练习 3.13。

由于已知布朗运动的所有加性泛函都是连续的, 事实上可以去掉 $f(B_t)$ 连续这一假设, 并反过来证明它必然连续。

2°) (**) 若对某一个初始测度 ν , $f(B_t)$ 在 P_ν 下是连续半鞅, 证明第 1° 问的结论仍然成立。

提示: 证明第 1° 问的假设成立。

练习 2.24 (#, 斜布朗运动)。 设 $0 < \alpha < 1$, 并定义

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} (1-\alpha)^{-2}, & x \geq 0, \\ \alpha^{-2}, & x < 0. \end{cases}$$

若 B 是一维布朗运动, 记 Y^α 为由加性泛函

$$\int_0^t g_\alpha(B_s) \, ds$$

所对应的时间变换从 B 得到的过程。再令

$$r_\alpha(x) = \begin{cases} x/(1-\alpha), & x \geq 0, \\ x/\alpha, & x < 0, \end{cases} \quad X_t^\alpha = r_\alpha(Y_t^\alpha).$$

过程 X^α 称为参数为 α 的斜布朗运动。为使讨论完整, 读者也可以研究极限情形 $\alpha = 0$ 与 $\alpha = 1$ 。

1°) 求 X^α 的尺度函数、速度测度和无穷小生成元。由此 X^α 具有第 III 章练习 1.16 中的转移密度。证明对每个 $t > 0$,

$$P_0[X_t^\alpha > 0] = \alpha.$$

2°) 斜布朗运动是半鞅。证明当 $\alpha \neq \frac{1}{2}$ 时, 它的局部时在空间变量的零点处不连续, 并求这一跳跃的大小。

3°) 证明

$$X_t^\alpha = \beta_t + (2\alpha - 1)\tilde{L}_t,$$

其中 β 是布朗运动, 而 $\tilde{L}$ 是 X^α 在零点的对称局部时:

$$\tilde{L}_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(X_s^\alpha) \, ds.$$

4°) (*) 设 γ 是常数, X 是方程

$$X_t = \beta_t + \gamma \tilde{L}_t$$

的一个解, 其中 $\tilde{L}$ 是按第 3° 问定义的 X 的对称局部时。把 $L_t^0(X)$ 与 $L_t^{0-}(X)$ 表示为 $\tilde{L}_t$ 的函数, 并由此推出: 上述方程存在解当且仅当

$$|\gamma| \leq 1.$$

提示: 使用第 VI 章练习 2.24; 另见第 IX 章练习 3.19。

练习 2.25 (*, 加性局部鞅)。

- 1°) 设 A 是一维布朗运动的连续加性泛函。证明：几乎必然，测度 dA_t 关于 dt 绝对连续，当且仅当存在正 Borel 函数 f ，使

$$A_t = \int_0^t f(B_s) ds.$$

- 2°) 证明：连续过程 M 从零出发，并且满足

- i) 对每个 P_x ，它都是 $(\mathcal{F}_t)$ -局部鞅；
ii) 对每一对 s, t ,

$$M_{t+s} - M_t = M_s \circ \theta_t \quad \text{几乎必然,}$$

当且仅当存在 Borel 函数 f ，使

$$M_t = \int_0^t f(B_s) dB_s \quad \text{几乎必然.}$$

提示：使用第 V 章第 3 节的表示结果，以及 (M, B) 是加性泛函这一事实。

练习 2.26 (#, 练习 1.13 的续题)。

- 1°) 设 X 是一维布朗运动。证明对每个 $(\mathcal{F}_t)$ -停时，二元过程 (X, A) 都具有强 Markov 性。
2°) 若

$$A_t = \int_0^t f(X_s) ds,$$

则 (X, A) 是 $\mathbb{R}^2$ 中的扩散过程，其生成元为

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + f(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

特别地，第 III 章练习 1.12 中过程的生成元为

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

练习 2.27 (*).

- 1°) 在定理 2.18 的框架下，验证 ν_A 是 $\hat{B}$ 的过度测度。
2°) 更一般地，若 X 是闭区间上的一维 Markov 过程，但不一定处于自然尺度，证明其速度测度是过度测度。
3°) 把这一结果推广到一般情形。

提示：使用第 VII 章练习 3.18。

练习 2.28。 在定理 2.18 的框架下，假设

$$\nu_A(dx) = V(x) dx, \quad V > 0 \quad \text{于 } \mathring{I} = \text{Int}(I).$$

证明 $\hat{B}$ 的扩展无穷小生成元在 $C^2(\mathring{I})$ 上由

$$\hat{\mathcal{A}}f = \frac{1}{2} V^{-1} f''$$

给出。把答案同第 VII 章定理 3.12 的结果核对, 并与第 IX 章命题 1.13 比较。
提示: 使用借助鞅刻画扩展生成元的方法。

练习 2.29 (*).

1°) 在定理 2.18 的框架下, 若

$$A_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} ds + \lambda L_t^0, \quad 0 < \lambda < \infty,$$

证明 0 是 $\hat{B}$ 的慢反射边界。

2°) 证明: 若 $\hat{B}$ 是 Feller 过程, 则其无穷小生成元 $\hat{A}$ 的定义域为

$$\left\{ f \in C^2((0, \infty)), f''(0) = \lim_{x \downarrow 0} f''(x) \text{ 存在}, \right. \\ \left. f'_+(0) = \lambda f''(0) \right\},$$

并且

$$\hat{A}f(x) = \frac{1}{2}f''(x) \quad (x > 0), \quad \hat{A}f(0) = \frac{1}{2\lambda}f'_+(0).$$

a

^a校订注: 原书最后一式把 $\hat{A}f(0)$ 印成 $\lambda^{-1}f'_+(0)$, 遗漏了因子 1/2。由定理 2.18, 速度测度在 0 处的原子质量为 2λ ; 第 VII 章命题 3.13 的边界公式 $f'_+(0) = m(\{0\})\hat{A}f(0)$ 遂给出上式。它也与定义域条件 $f'_+(0) = \lambda f''(0)$ 及 $\hat{A}f(x) = \frac{1}{2}f''(x)$ 的连续延拓一致。

练习 2.30 (#). 重新考虑练习 2.24 中参数 $0 < \alpha < 1$ 的斜布朗运动 X^α , 并记 L 为它在零点的局部时。

1°) 证明存在布朗运动 β , 使

$$X_t^\alpha = \beta_t + \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} L_t.$$

2°) 设 $a, b > 0$, 且

$$\alpha = \frac{b}{a+b}, \quad \sigma(x) = a\mathbf{1}_{\{x>0\}} - b\mathbf{1}_{\{x\leq 0\}}.$$

令

$$Y_t = a(X_t^\alpha)^+ - b(X_t^\alpha)^-, \quad B_t = |X_t^\alpha| - \frac{1}{2}L_t(|X^\alpha|).$$

证明 (Y, B) 是 $e_0(\sigma, 0)$ 的一个解。

3°) 再考虑另一个斜布朗运动 Z^α , 使

$$|X^\alpha| = |Z^\alpha|$$

(见第 XII 章练习 2.16)。证明方程 $e_0(\sigma, 0)$ 不具有逐路唯一性。

练习 2.31 (#). 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的正 Borel 函数, B 是一维布朗运动。

1°) 若 f 不是局部可积的, 证明存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得对每个 $t > 0$,

$$\int_0^t f(B_s) ds = \infty, \quad P_a\text{-几乎必然}.$$

2°) 证明下列三个条件等价:

(i)

$$P_0 \left[\int_0^t f(B_s) \, ds < \infty \text{ 对每个 } t \in [0, \infty) \right] > 0;$$

(ii) 对每个 $x \in \mathbb{R}$,

$$P_x \left[\int_0^t f(B_s) \, ds < \infty \text{ 对每个 } t \in [0, \infty) \right] = 1;$$

(iii) f 局部可积。**练习 2.32。**

1°) 在定理 2.18 的情形, 证明存在一族关于 (t, a) 双连续的随机变量 L_t^a , 使得对每个正 Borel 函数 f ,

$$\int_0^t f(\hat{B}_s) \, ds = \int_I f(a) L_t^a \nu_A(\mathrm{d}a) \quad \text{几乎必然.}$$

2°) 若进一步 $I = \mathbb{R}$, 则 $\hat{B}$ 是局部鞅。证明

$$\langle \hat{B}, \hat{B} \rangle_t = \tau_t.$$

练习 2.33。 构造 $\mathbb{R}$ 上一个连续的正则强 Markov 过程 X , 使它“把全部时间都花在 $\mathbb{Q}$ 上”; 也就是说, 集合

$$\{t : X_t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

的 Lebesgue 测度几乎必然为 0。

练习 2.34。

1°) 采用第 VII 章命题 3.5 的记号。证明对每个 $x \in \dot{I}$, 过程

$$m_I(X_{t \wedge \sigma_I}) + t \wedge \sigma_I$$

是 P_x -一致可积鞅。

2°) 假设 X 处于自然尺度, 并且 $E = \mathbb{R}$ 。记 m 为其速度测度, B 为 X 的 Dambis–Dubins–Schwarz 布朗运动, τ_t 为 $\langle X, X \rangle$ 的右连续逆。证明

$$\tau_t = \int_{\mathbb{R}} L_t^a(B) m(\mathrm{d}a)$$

(另见练习 2.32)。特别地, X 是纯局部鞅。

提示: 测度 m 是凹函数 m_I 的二阶分布导数的相反数的两倍; 使用 Tanaka 公式。

3 加性泛函的遍历定理

第 II 章第 1 节和第 V 章第 2 节已经证明了一维及二维布朗运动的若干常返性质。现在重新讨论这个问题, 以证明占用时间乃至一般加性泛函的一个遍历结果。由于几乎不增加额外工作便能涵盖其他情形, 本节考虑一般 Markov 过程 X , 并沿用第 III 章的记号和结论。另假设预解 U^α 具有强 Feller 性质, 即对每个 $\alpha > 0$ 和每个有界 Borel 函数 f , $U^\alpha f$ 都连续; 还假设对每个 $t \geq 0$,

$$P_t \mathbf{1} = \mathbf{1},$$

这等价于

$$P[\zeta = \infty] = 1.$$

下面的第一个定义对任意 Markov 过程都有意义，并且是概率势理论中的一个基本概念。

定义 3.1. 若正的全域可测函数 f 满足

i) 对每个 $t > 0$, $P_t f \leq f$;

ii) $\lim_{t \downarrow 0} P_t f = f$,

则称 f 对过程 X (或对它的半群) 是过度函数。

若有限的全域可测函数 h 对每个 t 都满足

$$P_t h = h,$$

则称 h 是不变函数。

命题 3.2. 若 f 是过度函数，则对每个初始概率测度 ν , $f(X_t)$ 在 P_ν 下是 $(\mathcal{F}_t)$ -上鞅。若 h 是不变函数，则 $h(X_t)$ 是鞅。

证明. 由 Markov 性和定义 3.1 的 i),

$$\begin{aligned} E_\nu[f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_s] &= E_{X_s}[f(X_t)] \\ &= P_t f(X_s) \leq f(X_s), \quad P_\nu\text{-几乎必然.} \end{aligned}$$

对不变函数，上式中的不等号成为等号。 □

上述证明只用了定义中的 i)，所以并没有说明上鞅 $f(X_t)$ 是否存在良好的版本。条件 ii) 正是保证 $f(X_t)$ 几乎必然右连续所需的条件，不过本书不证明这一点。这里只作如下观察：若 f 过度，则对每个 $\alpha > 0$,

$$\alpha U^\alpha f \leq f, \quad \lim_{\alpha \uparrow \infty} \alpha U^\alpha f = f.$$

读者容易验证，后一极限单调递增。由 U^α 的强 Feller 性质容易推出，过度函数是下半连续的。

若 h 有界且不变，则

$$\alpha U^\alpha h = h,$$

所以 h 连续；于是鞅 $h(X_t)$ 几乎必然右连续，后面会用到这一事实。反过来，若 h 有界并且对每个 $\alpha > 0$ 都有 $\alpha U^\alpha h = h$ ，则 h 的连续性以及 $t \mapsto P_t h$ 的右连续性，再结合 Laplace 变换的唯一性，说明 h 不变。

定义 3.3. 若事件 $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty$ 对每个 t 都满足

$$\theta_t^{-1}(\Gamma) = \Gamma,$$

则称 Γ 是不变事件。所有不变事件组成的 σ -域 $\mathcal{I}$ 称为不变 σ -域； $\mathcal{I}$ -可测随机变量也称为不变随机变量。

若两个不变随机变量 Z, Z' 满足：对每个 x ,

$$P_x[Z = Z'] = 1,$$

则称二者等价。

状态空间上的不变函数与不变随机变量之间有如下联系。

命题 3.4. 公式

$$h(x) = E_x[Z]$$

在有界不变函数与有界不变随机变量的等价类之间建立一一对应。并且

$$Z = \lim_{t \rightarrow \infty} h(X_t) \quad \text{几乎必然.}$$

证明. 若 Z 不变, 简单应用 Markov 性即可看出

$$h(\cdot) = E_\cdot[Z]$$

不变。注意, 若没有 $\zeta = \infty$ 几乎必然这一假设, 我们只能得到 $P_t h \leq h$ 。

反过来, $h(X_t)$ 是右连续的有界鞅, 故几乎必然收敛到一个有界随机变量 Z , 而且可以把 Z 选为不变随机变量。再由 Lebesgue 支配收敛定理, 对每个 $x \in E$,

$$h(x) = E_x[Z].$$

这样得到的对应显然是——的。 □

设 A 是 Borel 集。令

$$\begin{aligned} R(A) &= \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{1}_A(X_t) = 1 \right\} \\ &= \bigcap_{t \geq 0} \{t + T_A \circ \theta_t < \infty\}. \end{aligned}$$

这是当 $t \rightarrow \infty$ 时路径无穷多次到达 A 的事件。又因为

$$R(A) = \bigcap_{n \geq 0} \{n + T_A \circ \theta_n < \infty\},$$

所以 $R(A) \in \mathcal{F}_\infty^0$, 并且显然是不变事件。相应的不变函数

$$h_A = P_\cdot[R(A)]$$

是在任意大的时刻仍会到达 A 的概率。由命题 3.4,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_A(X_t) = \mathbf{1}_{R(A)} \quad \text{几乎必然.}$$

定义 3.5. 若 $h_A = 0$, 则称集合 A 暂留; 若 $h_A = 1$, 则称 A 常返。

一般而言, 一个集合可能既非常返也非暂留。不过有下面的等价刻画。

命题 3.6. 下列三个命题等价:

- i) 有界不变函数都是常函数;
- ii) 不变 σ -域 $\mathcal{I}$ 几乎必然平凡;
- iii) 每个集合或者常返, 或者暂留。

证明。 i) 与 ii) 的等价性由命题 3.4 立即得到；ii) 显然推出 iii)。

证明 iii) 推出 ii)。设 $\Gamma \in \mathcal{I}$ ，并对 $0 < a < 1$ 令

$$A = \{x : P_x[\Gamma] > a\}.$$

已经知道

$$\mathbf{1}_\Gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{X_t}[\Gamma] \quad \text{几乎必然.}$$

若 A 常返，则 $\Gamma = \Omega$ 几乎必然；若 A 暂留，则 $\Gamma = \emptyset$ 几乎必然。 $\square$

虽然本书不发展相应的一般理论，Markov 过程大致有两种基本行为。一种是趋向无穷，此时称过程暂留；另一种是在任意大的时刻仍会回到较小的集合，例如任意小半径的开球，此时称过程常返。先证明一个关于暂留情形的结果，之后主要研究常返情形。先注意，由样本路径右连续性，若 A 是开集，则

$$R(A) = \left\{ \limsup_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in \mathbb{Q}_+}} \mathbf{1}_A(X_q) = 1 \right\}.$$

下面的结果特别适用于 $d > 2$ 的 d 维布朗运动，不过在这种情形，第 V 章第 2 节已经证明过它。

命题 3.7。 若对每个相对紧集 A ，势 $U(\cdot, A)$ 都有限，则过程趋向无穷。

证明。 由 Markov 性，

$$\begin{aligned} P_t(U(\cdot, A))(x) &= E_x \left[E_{X_t} \left[\int_0^\infty \mathbf{1}_A(X_s) \, ds \right] \right] \\ &= E_x \left[\int_t^\infty \mathbf{1}_A(X_s) \, ds \right]. \end{aligned}$$

一方面，这说明 $U(\cdot, A)$ 是过度函数，因而下半连续；另一方面，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(U(\cdot, A)) = 0.$$

由第一个性质，

$$(U(X_q, A))_{q \in \mathbb{Q}_+}$$

是正上鞅；由第二个性质的 Fatou 引理，当 $q \rightarrow \infty$ 时，它的极限几乎必然为零。

现取两个相对紧开集 Γ, Γ' ，使

$$\bar{\Gamma} \subset \Gamma'.$$

由于样本路径右连续，函数 $U(\cdot, \Gamma')$ 在 Γ' 上严格为正。再由它的下半连续性，存在 $a > 0$ ，使

$$U(\cdot, \Gamma') \geq a \quad \text{于 } \bar{\Gamma}.$$

因此，在无穷多个任意大时刻到达 Γ 的路径上，

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} U(X_q, \Gamma') \geq a.$$

由上一段，这类路径组成的集合几乎必然为空。故几乎必然存在有限时刻，此后过程不再到达 $\bar{\Gamma}$ 。由此容易推出过程趋向无穷。 $\square$

现在研究相反的情形。

定义 3.8。 若存在不变测度 m , 使得

$$m(A) > 0 \implies A \text{ 常返},$$

则称过程 X *Harris* 常返, 或简称为 *Harris* 过程。

下文讨论 *Harris* 过程时, 总假设 m 的支集是整个状态空间。事实上, 不变测度的支集是吸收集。证明如下: 设 Γ 是该支集的补集。因为 Γ 是开集, 样本路径的右连续性说明, 过程能够到达 Γ 的起点全体恰为

$$\Gamma' = \{x : U^\alpha(x, \Gamma) > 0\}$$

(这里取某个 $\alpha > 0$)。显然 $\Gamma' \supset \Gamma$ 。由于 m 不变,

$$\alpha m U^\alpha(\Gamma) = m(\Gamma) = 0,$$

故 $m(\Gamma') = 0$ 。而 Γ 是最大的开 m -零测集, 所以 $\Gamma' = \Gamma$, 从而 Γ^c 是吸收集。因此, 假设 Γ 为空几乎不损失一般性, 而且在多数情形下它自然成立。这一条件还说明每个非空开集都常返。

反过来有下面的结论。它说明 $d = 1, 2$ 的 d 维布朗运动、Ornstein–Uhlenbeck 过程, 以及许多一维 Markov 过程 (例如低维 Bessel 过程) 都是 *Harris* 常返的。

命题 3.9。 若 X 有不变测度, 并且每个非空开集都常返, 则 X 是 *Harris* 过程。

证明。 设 $m(A) > 0$ 。由于对每个 t ,

$$P_m[X_t \in A] = m(A),$$

所以存在常数 $a > 0$, 使集合

$$\Gamma = \{x : P_x[T_A < \infty] > a\}$$

非空。
函数

$$f = P_x[T_A < \infty]$$

是过度函数, 因为

$$P_t f(x) = P_x[t + T_A \circ \theta_t < \infty] \leq f(x).$$

又容易验证

$$\lim_{t \downarrow 0} (t + T_A \circ \theta_t) = T_A,$$

所以 $\lim_{t \downarrow 0} P_t f(x) = f(x)$ 。因此 Γ 是开集。进一步, 由第 II 章推论 2.4,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in \mathbb{Q}_+}} P_{X_q}[T_A < \infty] &= \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in \mathbb{Q}_+}} P_x[q + T_A \circ \theta_q < \infty \mid \mathcal{F}_q] \\ &= \mathbf{1}_{R(A)} \quad \text{几乎必然.} \end{aligned}$$

由于 Γ 常返, 左端几乎必然不小于 a , 故 $\mathbf{1}_{R(A)} \geq a$ 几乎必然, 也就是 $R(A) = \Omega$ 几乎必然。证明完毕。□

对 *Harris* 过程, 命题 3.6 的各个等价条件都成立。

命题 3.10. 若 X 是 Harris 过程，则所有过度函数以及所有有界不变函数都是常函数。

证明。 若过度函数 f 不是常函数，则可以找到常数 $a < b$ ，使

$$J = \{f > b\}, \quad J' = \{f \leq a\}$$

都非空。集合 J 是开集，因而常返。又 $f(X_q)$ 是正上鞅，所以当 $q \rightarrow \infty$ 时收敛；由于路径在任意大的时刻仍到达 J ，其极限不小于 b 。由 Fatou 引理，对每个 $x \in E$ ，

$$f(x) \geq \lim_{q \rightarrow \infty} P_q f(x) \geq E_x \left[\lim_{q \rightarrow \infty} f(X_q) \right] \geq b,$$

这与 $J' \neq \emptyset$ 矛盾。

若 h 是有界不变函数，把刚证明的结论应用于正过度函数 $h + \|h\|$ ，即可知道 h 为常函数。□

由占用时间公式、第 VI 章推论 2.4（或本章推论 2.14）可知：对一维布朗运动，若 m 是 Lebesgue 测度，则

$$m(A) > 0 \implies \int_0^\infty \mathbf{1}_A(X_s) ds = \infty \text{ 几乎必然.}$$

¹⁷ 这个性质表面上比 Harris 条件更强。下面证明，每个 Harris 过程都具有这一性质，特别地，二维布朗运动也具有它。我们考虑强加性泛函 A ；正如前面已经指出的，这事实上不构成限制。

命题 3.11. 若 ν_A 不是零测度，则

$$A_\infty = \infty \text{ 几乎必然.}$$

这里的 ν_A 当然是相对于不变测度 m 计算的；在相差一个正常数因子的意义下， m 是 X 唯一的不变测度（见练习 3.14）。

证明。 对 $\varepsilon > 0$ ，令

$$\tau_\varepsilon = \inf\{t : A_t > \varepsilon\}.$$

若 ν_A 非零，则可以找到 $\varepsilon > 0$ 与 $a > 0$ ，使

$$m(\{x : P_x[\tau_\varepsilon < \infty] > a\}) > 0.$$

因此，由 Harris 常返性，

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P_{X_t}[\tau_\varepsilon < \infty] \geq a \text{ 几乎必然.}$$

另一方面，对每个 $x \in E$ ，

$$P_{X_t}[\tau_\varepsilon < \infty] = P_x[t + \tau_\varepsilon \circ \theta_t < \infty | \mathcal{F}_t], \quad P_x\text{-几乎必然.}$$

由第 II 章推论 2.4，这在 P_x -几乎处处意义下收敛到

$$\mathbf{1}_{\bigcap_{t \geq 0} \{t + \tau_\varepsilon \circ \theta_t < \infty\}}.$$

¹⁷ **校订注：**原书此处把“第 VI 章推论 2.4”误印为“第 IV 章推论 2.4”。第 IV 章并无相应推论；这里所用的是一维布朗运动各点局部时在无穷远发散的结论，正见第 VI 章推论 2.4。

于是

$$\bigcap_{t \geq 0} \{t + \tau_\varepsilon \circ \theta_t < \infty\} = \Omega \quad \text{几乎必然,}$$

从而更有

$$P[\tau_\varepsilon < \infty] = 1.$$

递归定义停时

$$T^1 = \tau_\varepsilon, \quad T^n = T^{n-1} + \tau_\varepsilon \circ \theta_{T^{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

简单应用强 Markov 性便知

$$P[T^n < \infty] = 1.$$

由 A 的强加性, 对每个 n ,

$$A_{T^n} \geq n\varepsilon,$$

故 $A_\infty = \infty$ 几乎必然。 □

注。

1°) 可以证明函数

$$P[\tau_\varepsilon < \infty]$$

是过度函数, 因而是常函数; 也可以以这些事实为基础证明命题。

2°) 这一结果说明, 当 $m(A) > 0$ 时,

$$U(\cdot, A) \equiv \infty;$$

应把它与命题 3.7 比较。

现在证明本节的主要结果——极限商定理。

定理 3.12. 设 X 是 Harris 过程, A, C 是两个可积加性泛函, 并且 $\|\nu_C\| > 0$ 。则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t}{C_t} = \frac{\|\nu_A\|}{\|\nu_C\|} \quad \text{几乎必然.}$$

由命题 3.11, 条件 $\|\nu_C\| > 0$ 保证: 至少当 t 充分大时, 左端的商有意义。

证明。 分别把 A, C 与同一个严格为正的占用时间泛函比较, 再取两个极限的商即可。因此, 只须证明

$$C_t = \int_0^t f(X_s) \, ds$$

的情形, 其中 f 是有界、可积且处处严格为正的 Borel 函数。

固定 $a > 0$, 对算子 θ_a 应用 Chacon–Ornstein 定理 (见附录)。因为 m 对过程不变, $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的测度 P_m 对 θ_a 不变, 故

$$Z \mapsto Z \circ \theta_a$$

是 $L^1(P_m)$ 上的正压缩算子。又由命题 3.11,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_a \circ \theta_{na} = C_\infty = \infty \quad P_m\text{-几乎处处.}$$

这说明 Ω 关于 θ_a 的 Hopf 分解中的耗散部分 D 为空；换言之，算子 $Z \mapsto Z \circ \theta_a$ 是保守的。现在可以应用 Chacon–Ornstein 定理。由假设， $A_a, C_a \in L^1(P_m)$ ，所以极限

$$\lambda_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{na}}{C_{na}}$$

在 P_m -几乎处处意义下存在。由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} C_t = \infty$ ，而且 f 有界，容易看出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{(n+1)a}}{C_{na}} = 1.$$

令 $n = \lfloor t/a \rfloor$ 。由 A, C 的单调性，

$$\frac{A_{na}}{C_{na}} \frac{C_{na}}{C_{(n+1)a}} \leq \frac{A_t}{C_t} \leq \frac{A_{(n+1)a}}{C_{(n+1)a}} \frac{C_{(n+1)a}}{C_{na}}.$$

因此

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t}{C_t} = \lambda_a \quad P_m\text{-几乎处处}.$$

于是存在随机变量 λ ，使

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t}{C_t} = \lambda \quad P_m\text{-几乎处处},$$

并且对每个 $a > 0$ ，

$$\lambda = \lambda \circ \theta_a \quad P_m\text{-几乎处处}.$$

由命题 3.6 与命题 3.10， λ 在 P_m -几乎处处意义下等于某个常数。再由 Chacon–Ornstein 定理，这个常数对任意 $a > 0$ 都必须等于

$$\frac{E_m[A_a]}{E_m[C_a]} = \frac{\|\nu_A\|}{\|\nu_C\|}.$$

令

$$F = \left\{ \omega : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t(\omega)}{C_t(\omega)} = \frac{\|\nu_A\|}{\|\nu_C\|} \right\}.$$

上面已经证明 $P_m(F^c) = 0$ 。而且若 $\omega \in F$ ，则对每个 s ， $\theta_s(\omega) \in F$ ；换言之，

$$\mathbf{1}_F \leq \mathbf{1}_F \circ \theta_s.$$

反过来，因为 $C_t \rightarrow \infty$ 几乎必然，若 $\theta_s(\omega) \in F$ ，则 $\omega \in F$ 。所以对每个 s ，

$$\mathbf{1}_F = \mathbf{1}_F \circ \theta_s \quad \text{几乎必然}.$$

因此函数 $P[F^c]$ 有界且不变，故为常函数；又因 $P_m(F^c) = 0$ ，它只能恒等于零。证明完毕。□

注。

- 1°) 对布朗运动，证明的最后部分也可以建立在渐近 σ -域的平凡性上（见第 III 章练习 2.28）。细节留给读者。
- 2°) 对一维布朗运动，只用大数定律也能证明上述结果（见练习 3.16）。
- 3°) 若不变测度 m 有限，例如 Ornstein–Uhlenbeck 过程就是如此（见第 III 章练习 1.13），

则常函数可积。在定理中取 $C_t = t$, 得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t}{t} = \frac{\|\nu_A\|}{m(E)} \quad \text{几乎必然.}$$

所以在这种情形, 加性泛函按 t 的量级增长。当 $m(E) = \infty$ 时, 描述加性泛函趋于无穷的速度则是一个有趣的问题。下一节将对二维布朗运动处理这个问题, 第 XIII 章第 2 节则处理一维布朗运动 (另见 “注释与评述”)。

4°) 把上述结果用于占用时间时需要谨慎。确实存在可积函数 f , 使

$$\int_0^t f(X_s) ds$$

并不是加性泛函: 对极集中的某些 x , 可能在 P_x -几乎处处意义下, 对每个 $t > 0$ 都有

$$\int_0^t f(X_s) ds = \infty$$

(见练习 3.17)。第 XI 章练习 2.6 将在二维布朗运动情形构造这样的函数; 一维布朗运动的情形另见上面的练习 2.31。此时, 极限商定理对极集以外的 x 在 P_x -几乎处处意义下成立。若 f 有界, 则该结论对 $\int_0^t f(X_s) ds$ 无须任何附加限定。

练习 3.13。 在本节假设下, 设 X 是 Harris 过程。证明对每个 $A \in \mathcal{E}$, 或者

$$U(\cdot, A) \equiv \infty,$$

或者

$$U(\cdot, A) \equiv 0.$$

进一步证明, 所有余可选时刻几乎必然都等于 0。

提示: 参见第 VIII 章练习 4.14。

练习 3.14。 设 X 是以 m 为不变测度的 Harris 过程, 并且本节的假设成立。

1°) 证明对每个 $\alpha > 0$ 和 $x \in E$, 测度 m 与

$$U^\alpha(x, \cdot)$$

等价。

2°) 证明 m 是 X 唯一的过度测度, 相差一个正常数因子除外。

提示: 先证明任意不变测度都与 m 等价, 再使用极限商定理。

练习 3.15 (#)。 设 X 是 Harris 过程, A 是 X 的可积加性泛函, C 是 σ -可积但不可积的加性泛函。证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t}{C_t} = 0 \quad \text{几乎必然.}$$

提示: 取 F 使 $\nu_C(F) < \infty$, 并把遍历定理用于 A 和 $\mathbf{1}_F \cdot C$ 。

练习 3.16. 对一维布朗运动以及 $a < b$, 定义

$$T^1 = T_b + T_a \circ \theta_{T_b}, \quad T^n = T^{n-1} + T^1 \circ \theta_{T^{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

1°) 设 A 是连续加性泛函。证明随机变量

$$Z_n = A_{T^n} - A_{T^{n-1}}, \quad n \geq 2,$$

在每个 P_x ($x \in \mathbb{R}$) 下独立同分布。若 $\|\nu_A\| < \infty$, 证明各 Z_n 在 P_x 下可积。

提示: 证明可积性时, 可以先考虑局部时, 再使用第 VI 章第 4 节的结果。

2°) 对随机变量 Z_n 应用大数定律, 证明定理 3.12。

提示: 先证明当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{A_t}{\inf\{n : T^n \geq t\}}$$

收敛, 再取商。

3°) 把上述证明模式推广到常返的一维 Markov 过程。

练习 3.17. 设 X 是 Harris 过程, f 是正的 m -可积函数。证明: 除去一个极集中的起点 x 以外, 对每个 $t > 0$,

$$\int_0^t f(X_s) ds < \infty \quad P_x\text{-几乎必然}.$$

第 XI 章练习 2.6 表明, 这一结论不能再加强。

练习 3.18 (*). 在定理 3.12 的框架下, 证明对 m -几乎每个 x ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_x[A_t]}{E_x[C_t]} = \frac{\|\nu_A\|}{\|\nu_C\|}.$$

提示: 证明对每个 $a > 0$, P_a 是 $L^1(m)$ 上的保守压缩算子, 再应用 Chacon-Ornstein 定理。

练习 3.19. 沿用练习 2.22 第 2° 问的情形, 并令

$$\nu_A = \nu_{A^+} - \nu_{A^-}.$$

1°) 若 ν_A 是有限带符号测度,

$$\nu_A(1) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} |x| |\nu_A|(dx) < \infty,$$

证明 f 有界, 并且

$$f'_- \in L^1(dx) \cap L^2(dx).$$

提示: 第 XIII 章第 2 节将解决这一问。

2°) 在第 1° 问的假设下, 证明存在常数 C , 使对每个点 x 以及每个满足 $E_x[T] < \infty$ 的停时 T , 都有

$$|E_x[A_T]| \leq C.$$

3°) 设 A^i ($i = 1, 2$) 是一维布朗运动的正可积加性泛函, 并且

$$\|\nu_{A^i}\| > 0, \quad \int_{\mathbb{R}} |x| \nu_{A^i}(dx) < \infty.$$

证明对 $\mathbb{R}$ 上任意概率测度 μ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_\mu[A_t^1]}{E_\mu[A_t^2]} = \frac{\|\nu_{A^1}\|}{\|\nu_{A^2}\|}.$$

第 2° 与第 3° 问的结论都加强了上一练习的结果。

练习 3.20 (*, #).

1°) 设 $c > 0$. 在 d 维 Wiener 空间 W^d 上, 变换

$$\omega \mapsto \frac{\omega(c \cdot)}{\sqrt{c}}$$

是可测的, 并且保持 Wiener 测度 W 不变. 对这个变换应用 Birkhoff 定理, 证明当 $d \geq 3$ 时,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\log t} \int_1^t \frac{ds}{|B_s|^2} = \frac{1}{d-2} \quad W\text{-几乎必然}.$$

提示: 要证明 Birkhoff 定理给出的极限是常数, 可使用独立增量过程的零一律. 该常数既可直接计算, 也可由第 IV 章练习 4.23 求得.

2°) 证明与上述几乎处处收敛相伴的中心极限定理: 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\sqrt{\log t} \left(\frac{1}{\log t} \int_1^t \frac{ds}{|B_s|^2} - \frac{1}{d-2} \right) \xrightarrow{d} N,$$

其中 N 是一个高斯随机变量.

提示: 使用第 IV 章练习 4.23 的方法.

4 平面布朗运动的渐近结果

本节研究二维布朗运动若干泛函的渐近性质. 特别地, 我们将部分回答上一节末注 3 中提出的问题. 下文使用第 V 章定理 2.11 给出的二维布朗运动斜积表示及其中的记号, 并始终在 $z \neq 0$ 时的概率测度 P_z 下工作.

定理 4.1 (Spitzer). 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{2\theta_t}{\log t} \xrightarrow{d} C,$$

其中 C 是参数为 1 的 Cauchy 随机变量.

证明. 由二维布朗运动的几何不变性和尺度不变性, 可以假设 $z = 1$. 对 $r > 1$ 及 $a > 0$, 令

$$\sigma_r = \inf\{u : |Z_u| = r\}, \quad T_a = \inf\{t > 0 : \beta_t = a\}.$$

由第 V 章定理 2.11 的斜积表示,

$$C_{\sigma_r} = T_{\log r}.$$

因而

$$\theta_{\sigma_r} = \gamma_{C_{\sigma_r}} = \gamma_{T_{\log r}} \stackrel{d}{=} (\log r) \gamma_{T_1}.$$

最后一个等号来自 β 与 γ 的独立性以及二者的尺度性质 (第 III 章命题 3.10)。因此, 对每个 $r > 1$,

$$\frac{\theta_{\sigma_r}}{\log r} \stackrel{d}{=} C,$$

其中 C 是参数为 1 的 Cauchy 随机变量。等价地,

$$\frac{2\theta_{\sigma_{\sqrt{t}}}}{\log t} \stackrel{d}{=} C.$$

故只需证明

$$\frac{\theta_t - \theta_{\sigma_{\sqrt{t}}}}{\log t} \xrightarrow{P} 0.$$

令 $\widehat{Z}_s = Z_s - 1$, 则 $\widehat{Z}$ 是从零出发的二维布朗运动, 并且

$$\theta_t - \theta_{\sigma_{\sqrt{t}}} = \operatorname{Im} \int_{\sigma_{\sqrt{t}}}^t \frac{dZ_s}{Z_s} = \operatorname{Im} \int_{\sigma_{\sqrt{t}}}^t \frac{d\widehat{Z}_s}{1 + \widehat{Z}_s}.$$

置

$$\widetilde{Z}_s = t^{-1/2} \widehat{Z}_{ts},$$

则

$$\theta_t - \theta_{\sigma_{\sqrt{t}}} = \operatorname{Im} \int_{t^{-1}\sigma_{\sqrt{t}}}^1 \frac{d\widetilde{Z}_s}{t^{-1/2} + \widetilde{Z}_s}.$$

固定一个从零出发的二维布朗运动 Z' 。由尺度性质,

$$\sigma_{\sqrt{t}} \stackrel{d}{=} t \inf\{u : |t^{-1/2} + Z'_u| = 1\}.$$

记

$$\nu_t = \inf\{u : |t^{-1/2} + Z'_u| = 1\}, \quad \sigma'_1 = \inf\{u : |Z'_u| = 1\}.$$

容易验证 $\nu_t \xrightarrow{P} \sigma'_1$ 。于是

$$\theta_t - \theta_{\sigma_{\sqrt{t}}} \stackrel{d}{=} \operatorname{Im} \int_{\nu_t}^1 \frac{dZ'_s}{t^{-1/2} + Z'_s}.$$

由第 VIII 章练习 1.25, 右端依概率收敛到几乎必然有限的随机变量

$$\operatorname{Im} \int_{\sigma'_1}^1 \frac{dZ'_s}{Z'_s}.$$

再除以 $\log t$, 便得到所需结论。 □

现在进一步区分 Z 靠近零点与远离零点时产生的绕数。固定 $r > 0$, 置

$$\theta_t^0 = \int_0^t \mathbf{1}_{\{|Z_s| \leq r\}} d\theta_s, \quad \theta_t^\infty = \int_0^t \mathbf{1}_{\{|Z_s| > r\}} d\theta_s.$$

我们的目标是研究二元组 $(\theta^0, \theta^\infty)$ 的渐近性质; 事实上将处理一个更一般的问题。设 ϕ 是 $\mathbb{R}$ 上有界的正函数, 并且

$$m_1(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx < \infty.$$

令

$$A_t = \int_0^t |Z_s|^{-2} \phi(\log |Z_s|) ds.$$

严格说来, 这未必是加性泛函, 因为在 P_0 下, 对每个 $t > 0$, A_t 都可能几乎必然为无穷; 不过, 当 $z \neq 0$ 时,

$$A_{s+t} = A_t + A_s \circ \theta_t \quad P_z\text{-几乎必然}$$

仍然成立 (见定理 3.12 后注 4)。此外, 由斜积表示容易验证

$$E_m[A_1] = 2\pi m_1(\phi),$$

故它在这一意义下是可积的。

定理 4.2。 在 P_z ($z \neq 0$) 下, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 三维随机变量族

$$\frac{2}{\log t}(\theta_t^0, \theta_t^\infty, A_t)$$

依分布收敛到

$$\left(\int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{\beta_s \leq 0\}} d\gamma_s, \int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{\beta_s \geq 0\}} d\gamma_s, m_1(\phi) L_{T_1}^0 \right),$$

其中 (β, γ) 是从零出发的标准二维布朗运动, L^0 是 β 在零点的局部时, 并且

$$T_1 = \inf\{t : \beta_t = 1\}.$$

在下面的证明以及第 XIII 章的类似问题中, 我们将反复使用尺度变换。若 B 是布朗运动, $a > 0$, 就以 $B^{(a)}$ 表示布朗运动

$$B_t^{(a)} = a^{-1} B_{a^2 t},$$

并给与 $B^{(a)}$ 有关的对象加上上标 (a) 。当 $a = 1$ 时省略这个上标。例如,

$$T_1^{(a)} = \inf\{t : \beta_t^{(a)} = 1\} = a^{-2} T_a.$$

证明。 仍可假设 $z = 1$, 并像定理 4.1 的证明那样, 在时刻 σ_t 观察所给过程。由前面使用过的时间变换及其性质,

$$\begin{aligned} \theta_{\sigma_t}^0 &= \int_0^{C_{\sigma_t}} \mathbf{1}_{\{\beta_s \leq \log r\}} d\gamma_s \\ &= \int_0^{T_{\log t}} \mathbf{1}_{\{\beta_s \leq \log r\}} d\gamma_s. \end{aligned}$$

令 $a = \log t$, 则

$$\frac{\theta_{\sigma_t}^0}{\log t} = \int_0^{T_1^{(a)}} \mathbf{1}_{\{\beta_s^{(a)} \leq a^{-1} \log r\}} d\gamma_s^{(a)}.$$

同理,

$$\frac{\theta_{\sigma_t}^\infty}{\log t} = \int_0^{T_1^{(a)}} \mathbf{1}_{\{\beta_s^{(a)} > a^{-1} \log r\}} d\gamma_s^{(a)}.$$

第三个分量满足

$$\begin{aligned} A_{\sigma_t} &= \int_0^{C_{\sigma_t}} \phi(\beta_s) ds = \int_0^{T_{\log t}} \phi(\beta_s) ds \\ &= a^2 \int_0^{T_1^{(a)}} \phi(a\beta_s^{(a)}) ds. \end{aligned}$$

因此, $(\log t)^{-1}(\theta_{\sigma_t}^0, \theta_{\sigma_t}^\infty, A_{\sigma_t})$ 与下式同分布:

$$\left(\int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{\beta_s \leq a^{-1} \log r\}} d\gamma_s, \int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{\beta_s > a^{-1} \log r\}} d\gamma_s, a \int_0^{T_1} \phi(a\beta_s) ds \right).$$

由第 IV 章定理 2.12, 前两个分量依概率收敛。对第三个分量, 使用占用时间公式得到

$$\begin{aligned} a \int_0^{T_1} \phi(a\beta_s) \, ds &= a \int_{\mathbb{R}} \phi(ax) L_{T_1}^x \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(y) L_{T_1}^{y/a} \, dy \longrightarrow m_1(\phi) L_{T_1}^0 \end{aligned}$$

几乎必然成立; 最后一步使用支配收敛定理。

至此已经证明, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{1}{\log t} (\theta_{\sigma_t}^0, \theta_{\sigma_t}^\infty, A_{\sigma_t})$$

依分布收敛到

$$\left(\int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{\beta_s \leq 0\}} \, d\gamma_s, \int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{\beta_s \geq 0\}} \, d\gamma_s, m_1(\phi) L_{T_1}^0 \right).$$

此外, 与定理 4.1 的证明相同,

$$\frac{\theta_t^0 - \theta_{\sigma_{\sqrt{t}}}^0}{\log t} \xrightarrow{P} 0, \quad \frac{\theta_t^\infty - \theta_{\sigma_{\sqrt{t}}}^\infty}{\log t} \xrightarrow{P} 0.$$

又因为 ϕ 有界,

$$\frac{2}{\log t} |A_t - A_{\sigma_{\sqrt{t}}}| \leq \frac{2\|\phi\|_\infty}{\log t} \left| \int_{t^{-1}\sigma_{\sqrt{t}}}^1 |t^{-1/2} Z_{ts}|^{-2} \, ds \right|,$$

而右端依概率收敛到零: 如定理 4.1 证明的末尾, 绝对值内的积分依分布收敛到一个几乎必然有限的随机变量。取 $\sigma_{\sqrt{t}}$ 相当于在上一极限中以 $\log \sqrt{t} = \frac{1}{2} \log t$ 代替 $\log t$, 定理因而得证。□

18

注。 值得注意的是, 极限表达式与 r 无关。特别地, 取 $r = 1$, 把证明开头对 $\theta_{\sigma_t}^0$ 和 $\theta_{\sigma_t}^\infty$ 的计算同

$$\frac{2}{\log t} (\theta_t^0 - \theta_{\sigma_{\sqrt{t}}}^0, \theta_t^\infty - \theta_{\sigma_{\sqrt{t}}}^\infty) \xrightarrow{P} (0, 0)$$

结合起来, 就得到

$$\frac{2}{\log t} (\theta_t^0, \theta_t^\infty) - \left(\frac{2}{\log t} \int_0^{T_{\log \sqrt{t}}} \mathbf{1}_{\{\beta_s \leq 0\}} \, d\gamma_s, \frac{2}{\log t} \int_0^{T_{\log \sqrt{t}}} \mathbf{1}_{\{\beta_s \geq 0\}} \, d\gamma_s \right) \xrightarrow{P} (0, 0).$$

第 XIII 章第 3 节将使用这一事实。

下面进一步分析这个极限的分布, 记它为

$$(W^-, W^+, \Lambda),$$

这是一个取值于 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ 的随机向量。

命题 4.3。 若 $m_1(\phi) = 1$, 则对 $a > 0$ 及 $(b, c) \in \mathbb{R}^2$,

$$E[\exp\{-a\Lambda + ibW^- + icW^+\}] = f(2a + |b|, c),$$

¹⁸**校订注:** 原书在证明定理 4.2 时直接估计 $A_t - A_{\sigma_{\sqrt{t}}}$, 漏写了两处绝对值。当 $\sigma_{\sqrt{t}} > t$ 时, 该差为负, 原式不能给出所需控制; 上文改为估计绝对差, 论证才对随机时刻的两种次序都成立。

其中

$$f(u, c) = \begin{cases} \left(\cosh c + \frac{u}{c} \sinh c \right)^{-1}, & c \neq 0, \\ (1+u)^{-1}, & c = 0. \end{cases}$$

证明。 对 $\mathcal{F}_\infty^\beta$ 取条件期望, 得到

$$E[\exp\{-a\Lambda + ibW^- + icW^+\}] = E[e^{-H_{T_1}}],$$

其中

$$H_t = aL_t^0 + \frac{b^2}{2} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s \leq 0\}} ds + \frac{c^2}{2} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s \geq 0\}} ds.$$

现在, $e^{-H_{T_1}}$ 只涉及 β 。我们的想法是寻找函数 F , 使 $F(\beta_t)e^{-H_t}$ 成为适当的局部鞅。由 Tanaka 公式, 问题化为在分布意义下求解

$$F'' = (2a\delta_0 + b^2\mathbf{1}_{(-\infty, 0)} + c^2\mathbf{1}_{[0, \infty)})F.$$

取

$$F(x) = e^{|b|x}\mathbf{1}_{\{x < 0\}} + \left(\cosh(cx) + \frac{2a + |b|}{c} \sinh(cx) \right) \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}},$$

其中 $c = 0$ 时按连续延拓理解。把局部鞅 $F(\beta_t)e^{-H_t}$ 停在 T_1 , 得到一个有界局部鞅。因此可应用可选停止定理:

$$1 = E[F(\beta_{T_1})e^{-H_{T_1}}] = F(1)E[e^{-H_{T_1}}].$$

于是

$$E[e^{-H_{T_1}}] = F(1)^{-1} = f(2a + |b|, c),$$

结论得证。 □

推论 4.4。

- i) 随机变量 $\Lambda = L_{T_1}^0$ 服从参数为 $1/2$ 的指数分布。
- ii) 给定 Λ 后, W^- 与 W^+ 条件独立; W^- 是参数为 $\Lambda/2$ 的 Cauchy 随机变量, 而 W^+ 的条件特征函数为

$$E[e^{icW^+} | \Lambda] = \frac{c}{\sinh c} \exp \left\{ -\frac{\Lambda}{2}(c \coth c - 1) \right\}.$$

- iii) W^+ 的密度为

$$x \mapsto \frac{1}{2 \cosh(\pi x/2)}.$$

证明。 第 i 项由命题 4.3 直接得到; 第 VI 章命题 4.6 也独立证明了这一结论。为证第 ii 项, 令

$$f_{b,c}(\lambda) = \frac{c}{\sinh c} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2}(c \coth c - 1 + |b|) \right\}.$$

利用第 i 项给出的 Λ 的分布, 计算得

$$\begin{aligned} E[e^{-a\Lambda} f_{b,c}(\Lambda)] &= \frac{c}{\sinh c} (1 + 2a + c \coth c - 1 + |b|)^{-1} \\ &= f(2a + |b|, c), \end{aligned}$$

其中右端的 f 与命题 4.3 相同。由于 $a > 0$ 任意,

$$f_{b,c}(\Lambda) = E[e^{ibW^- + icW^+} | \Lambda],$$

这就证明了第 ii 项。第 iii 项是经典的 Fourier 变换计算 (见第 0 章第 6 节)。 $\square$

注。 第 ii 项中的独立性有如下直观解释: 随机变量 Λ 记录过程在圆盘边界上停留的时间, 或者说过程穿越该边界的次数。给定这一信息以后, 圆盘内发生的情形与圆盘外发生的情形相互独立。此外, 穿越次数越多, 绕数的绝对值通常也越大。

最后注意: 我们始终假设 $z \neq 0$ 。若 G 是可积加性泛函且 $m_1(\phi) > 0$, 由上一节末注 4,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G_t}{A_t} = \frac{\|\nu_G\|}{2\pi m_1(\phi)} \quad P_z\text{-几乎必然.}$$

因此, 可以在上述结论中用 G 代替 A , 得到下面的推论。

推论 4.5。 若 G 是任意可积加性泛函, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{2}{\log t} (\theta_t^0, \theta_t^\infty, G_t) \xrightarrow{d} \left(W^-, W^+, \frac{\|\nu_G\|}{2\pi} \Lambda \right)$$

在 P_z 下成立。

定理 4.2 研究的是

$$\frac{2}{\log t} \left(\int_0^t \mathbf{1}_{\{|Z_s| \leq r\}} \frac{dZ_s}{Z_s}, \int_0^t \mathbf{1}_{\{|Z_s| \geq r\}} \frac{dZ_s}{Z_s} \right)$$

的虚部。为后文所需, 也值得记录其实部的渐近性质。置

$$N_t^0 = \operatorname{Re} \int_0^t \mathbf{1}_{\{|Z_s| \leq r\}} \frac{dZ_s}{Z_s}, \quad N_t^\infty = \operatorname{Re} \int_0^t \mathbf{1}_{\{|Z_s| \geq r\}} \frac{dZ_s}{Z_s}.$$

命题 4.6。 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{2}{\log t} (N_t^0, N_t^\infty, A_t) \xrightarrow{d} \left(\frac{1}{2} \Lambda, 1 - \frac{1}{2} \Lambda, m_1(\phi) \Lambda \right).$$

证明。 仿照定理 4.2 的证明可知,

$$\frac{2}{\log t} (N_t^0, N_t^\infty, A_t)$$

的分布收敛到

$$\left(\int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{\beta_s \leq 0\}} d\beta_s, \int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{\beta_s \geq 0\}} d\beta_s, m_1(\phi) L_{T_1}^0 \right)$$

的分布。由 Tanaka 公式及 $\beta_{T_1} = 1$,

$$\int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{\beta_s \leq 0\}} d\beta_s = \frac{1}{2} L_{T_1}^0, \quad \int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{\beta_s \geq 0\}} d\beta_s = 1 - \frac{1}{2} L_{T_1}^0.$$

这就给出结论。 $\square$

19

练习 4.7。 由定理 4.2 推出定理 4.1。

练习 4.8。 沿用定理 4.1 的记号, 证明

$$X_u = \theta(\sigma_{\exp u}), \quad Y_u = \theta(\sigma_{\exp(-u)})$$

是两个 Cauchy 过程。

练习 4.9 (*)。 把定理 4.1 作为第 VIII 章命题 3.8 的推论加以证明。

提示: 使用 ρ_t 的密度的显式表达式, 并作变量替换 $\rho = u\sqrt{t}$ 。

练习 4.10 (*)。 设 B 是从零出发的二维布朗运动, 并以 $\tilde{\theta}_t$ ($t > 0$) 表示 $\arg(B_t)$ 的一个连续选定值。证明当 $t \downarrow 0$ 时,

$$\frac{2\tilde{\theta}_t}{\log t} \xrightarrow{d} C,$$

其中 C 是参数为 1 的 Cauchy 随机变量。

提示: 由尺度性质或时间反演,

$$\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_t \stackrel{d}{=} \tilde{\theta}_{1/t} - \tilde{\theta}_1.$$

练习 4.11 (定理 4.1 的另一证明)。

1°) 沿用定理 4.1 与定理 4.2 的记号, 证明

$$a^{-2}C_t = \inf \left\{ u : a^2 \int_0^u \exp(2a\beta_s^{(a)}) ds > t \right\}.$$

2°) 用 Laplace 方法证明: 对一个固定的布朗运动 B , 几乎必然对每个 u 都有

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2a} \log \left(\int_0^u e^{2aB_s} ds \right) - \sup_{0 \leq s \leq u} B_s \right\} = 0$$

(见第 I 章练习 1.18)。

3°) 取 $a = \frac{1}{2} \log t$, 证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| a^{-2}C_t - T_1^{(a)} \right| = 0 \quad \text{依概率.}$$

提示: 各过程 $\beta^{(a)}$ 都与 B 同分布, 因此上述收敛先依分布成立。

4°) 根据第 3° 问的结论, 给出定理 4.1 的另一证明。

¹⁹**校订注:** 原书命题 4.6 把第二个极限分量误印为 $\frac{1}{2}\Lambda - 1$ 。其证明上一行给出的第二个随机积分, 按 Tanaka 公式以及 $\beta_{T_1} = 1$, 应等于 $1 - \frac{1}{2}L_{T_1}^0$; 故上文改正了符号。

练习 4.12 (*)。设 Z 是从 1 出发的二维布朗运动, θ 是满足 $\theta_0 = 0$ 的 $\arg Z$ 的连续选定值。令

$$T_n = \inf\{t : |Z_t| \geq n\}.$$

1°) 若

$$\tau = \inf\{t : \theta_t \geq 1\},$$

证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n) P[\tau > T_n]$$

存在。

提示: $P[\tau > T_n] = P[C_\tau > C_{T_n}]$ 。

2°) 若

$$\tilde{\tau} = \inf\{t : |\theta_t| \geq 1\},$$

证明

$$P[\tilde{\tau} > T_n] = O(1/n).$$

注释与评述

第 1 节。关于加性泛函, 基本参考书是 Blumenthal–Gettoor [1], 本节大多数证明即取自该书。例如, 读者可在那里找到加性泛函强可加性的证明, 以及这一课题的历史概述。本书只介绍第 X 章和第 XIII 章的渐近结果所必需的最低限度内容; 它并不能反映这一领域的当代全貌, 关于后者, 我们推荐 Sharpe [3]。

练习 1.9 的极值过程由 Dwass [1] 和 Resnick [1] 研究。它作为极限过程出现在若干渐近结果中, 例如 Watanabe [2]; 该文还包含练习 1.10 的内容。

事实上, 练习 1.11 在远为一般的框架下仍成立, 见 Blumenthal–Gettoor [1] 第 V 章。设 X 是一般强 Markov 过程, 且点 x 对自身正则, 也就是说, 按第 III 章练习 2.24 的定义, x 对集合 $\{x\}$ 正则。可以证明, 存在加性泛函 A , 使测度 dA_t 几乎必然由集合

$$\{t : X_t = x\}$$

承载。这个加性泛函在相差一个常数因子的意义下唯一, 称为 X 在点 x 的局部时。因此, 对于同时也是半鞅的 Markov 过程 (例如布朗运动), 局部时有两种可能的定义。Çınlar 等 [1] 对 Markov 过程与半鞅之间的关系作了深入研究。

练习 1.14 取自 Barlow–Yor [1, 2], 提示中的方法则来自 Bass [2] 和 B. Davis [5]。

练习 1.16 与第 VII 章练习 4.16 密切相关。读者可在 Jeulin–Yor [3] 和 Yor [16] 中找到这两个练习的若干应用。关于这一课题的更新结果, 参见 Fitzsimmons 等 [1]; 该文特别采用了更弱的假设。

第 2 节。本节以 Revuz [1] 为基础。表示定理 2.9 对每一点都有局部时的任意过程均成立, 例如第 VII 章第 3 节的一维 Markov 过程。该定理最初由 Tanaka [1] 在布朗运动情形下证明, 其若干推论则归功于 Wang [2]。关于布朗运动的所有加性泛函都是连续的这一结论, 可参见 Blumenthal–Gettoor [1]。

对 $d > 1$ 的 d 维布朗运动, 并没有像定理 2.9 那样简单的结果; 原因正在于此时单点集是极集, 不存在点局部时。尽管如此, 关于仍然可以得到的结论, 读者可参阅 Brosamler [1] (另见 Meyer [7]) 和 Bass [1]。

练习 2.23 取自 Çınlar 等 [1]。练习 2.24 与 2.30 中的斜布朗运动见 Harrison–Shepp [1]、Walsh

[3] 和 Barlow [4]。Walsh 对斜布朗运动所作的多维推广由 Barlow 等 [2] 研究。练习 2.31 归功于 Engelbert–Schmidt [1]。

第 3 节。 本节的叙述以 Azéma 等 [1] (1967) 和 Revuz [2] 为基础。不过, 对一维布朗运动而言, 极限商定理很早以前就已为人所知 (见 Itô–McKean [1]); 二维布朗运动的情形则由 Maruyama–Tanaka [1] 证明。关于本节所用的遍历理论结果, 可参见 Krengel [1]、Neveu [4] 或 Revuz [3]。

练习 3.18 取自 Azéma 等 [1] (1967), 练习 3.19 取自 Revuz [4]。顺便提出下面的问题。

问题 1。 练习 3.19 的结论能否推广到所有 Harris 过程?

练习 3.20 取自 Yor [17]。

第 4 节。 Spitzer [1] 通过显式计算 θ_t 的分布证明了定理 4.1。本节给出的证明以及定理 4.2 的证明取自 Messulam–Yor [1]; 他们采用了 Williams [4] 的想法, 并结合 Pitman–Yor [5] 的改进。练习 4.11 给出了一个基于 Laplace 方法的证明变体; Durrett [1] 和 Le Gall–Yor [2] 曾使用这一变体。Bertoin–Werner [1, 2] 与 Shi [1] 研究了绕数的几乎处处渐近行为。

定理 4.2 中关于加性泛函的渐近性质最初由 Kallianpur–Robbins [1] 证明。第 XIII 章第 2 节将对一维布朗运动证明同类结果; 关于更一般的常返 Markov 过程, 参见 Darling–Kac [1]、Bingham [1] 以及 Kasahara [1, 2, 3] 的系列论文。

命题 4.3 的公式在文献中以多种不同形式出现; 它显然与 P. Lévy 的随机面积公式有关, 读者可参阅 Williams [5]、Azéma–Yor [2] 和 Jeulin–Yor [3]。关于 Lévy 公式的更多变体, 参见 Biane–Yor [2] 以及收录了大量参考文献的 Duplantier [1]。

第 XI 章 Bessel 过程与 Ray–Knight 定理

1 Bessel 过程

本节继续第 VI 章第 3 节已经开始的 Bessel 过程研究，并沿用该节的记号。先作如下观察。

若 B 是 δ 维布朗运动，并令 $\rho = |B|$ ，则 Itô 公式给出

$$\rho_t^2 = \rho_0^2 + 2 \sum_{i=1}^{\delta} \int_0^t B_s^i dB_s^i + \delta t.$$

当 $\delta > 1$ 时，对每个 $t > 0$ ，几乎必然有 $\rho_t > 0$ ；当 $\delta = 1$ 时，集合 $\{s : \rho_s = 0\}$ 几乎必然具有零 Lebesgue 测度。因此在所有情形下都可以考虑过程

$$\beta_t = \sum_{i=1}^{\delta} \int_0^t \frac{B_s^i}{\rho_s} dB_s^i.$$

由于 $\langle \beta, \beta \rangle_t = t$ ， β 是一维布朗运动，故 ρ^2 满足随机微分方程

$$\rho_t^2 = \rho_0^2 + 2 \int_0^t \rho_s d\beta_s + \delta t.$$

对任意实数 $\delta \geq 0$ 和 $x \geq 0$ ，考虑方程

$$Z_t = x + 2 \int_0^t \sqrt{|Z_s|} d\beta_s + \delta t.$$

因为对 $z, z' \geq 0$,

$$|\sqrt{z} - \sqrt{z'}| \leq \sqrt{|z - z'|},$$

第 IX 章第 3 节的结果适用。因此，对每个 δ, x ，该方程都有唯一强解。此外，当 $\delta = x = 0$ 时，解为 $Z_t \equiv 0$ ；比较定理遂保证在所有情形下都有 $Z_t \geq 0$ 几乎必然成立。因而可删去上述方程根号内的绝对值。

定义 1.1。 对每个 $\delta \geq 0$ 和 $x \geq 0$ ，方程

$$Z_t = x + 2 \int_0^t \sqrt{Z_s} d\beta_s + \delta t$$

的唯一强解称为从 x 出发的 δ 维 Bessel 平方过程，记作 $\text{BESQ}^\delta(x)$ 。数 δ 称为 BESQ^δ 的维数。

$\text{BESQ}^\delta(x)$ 在 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 上的分布记为 Q_x^δ 。还将使用数

$$\nu = \frac{\delta}{2} - 1,$$

它称为相应过程的指标。当希望用指标 ν 而不是维数 δ 标记时, 写作 $\text{BESQ}^{(\nu)}$ 与 $Q_x^{(\nu)}$ 。下文有时在同一陈述中同时使用 ν 与 δ , 二者始终由上式联系。

由此得到一个单参数过程族; 在整数维情形, 它就是相应 δ 维布朗运动模长的平方。设 X 是坐标过程。由比较定理, 对每个 t 及 $a \geq 0$, 映射

$$x \mapsto Q_x^\delta[X_t \geq a]$$

单调递增, 因而是 Borel 可测的。再由单调类定理, 对每个 Borel 集 A , 映射 $x \mapsto Q_x^\delta[X_t \in A]$ 都是 Borel 可测的。第 IX 章定理 1.9 因而说明这些过程是 Markov 过程。事实上, 它们还是 Feller 过程; 这将由下面 BESQ^δ 族的可加性推出。

若 P, Q 是 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 上的两个概率测度, 用 $P * Q$ 表示其卷积, 即 $P \otimes Q$ 在映射

$$(\omega, \omega') \mapsto \omega + \omega'$$

下的像测度。采用这一记号, 有如下结论; 在整数维情形它是显然的。

定理 1.2。 对任意 $\delta, \delta' \geq 0$ 及 $x, x' \geq 0$,

$$Q_x^\delta * Q_{x'}^{\delta'} = Q_{x+x'}^{\delta+\delta'}.$$

证明。 取两个独立的一维布朗运动 β, β' , 令 Z, Z' 分别是与 (x, δ) 及 (x', δ') 对应的解, 并置 $X = Z + Z'$ 。于是

$$X_t = x + x' + 2 \int_0^t (\sqrt{Z_s} d\beta_s + \sqrt{Z'_s} d\beta'_s) + (\delta + \delta')t.$$

再取与 β, β' 独立的第三个布朗运动 β'' , 定义

$$\gamma_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > 0\}} \frac{\sqrt{Z_s} d\beta_s + \sqrt{Z'_s} d\beta'_s}{\sqrt{X_s}} + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = 0\}} d\beta''_s.$$

由于 $\langle \gamma, \gamma \rangle_t = t$, γ 是一维布朗运动, 并且

$$X_t = x + x' + 2 \int_0^t \sqrt{X_s} d\gamma_s + (\delta + \delta')t.$$

由解的唯一性即得结论。 □

注。 具有这一可加性的并不只有过程族 (Q_x^δ) , 参见练习 1.13。

推论 1.3。 设 μ 是 $\mathbb{R}_+$ 上满足

$$\int_0^\infty (1+t) \mu(dt) < \infty$$

的测度。则存在两个数 $A_\mu, B_\mu > 0$, 使

$$Q_x^\delta \left[\exp \left(- \int_0^\infty X_t \mu(dt) \right) \right] = A_\mu^x B_\mu^\delta,$$

其中 X 是坐标过程。

证明。记左端为 $\varphi(x, \delta)$ 。关于 μ 的假设保证

$$\begin{aligned}\varphi(x, \delta) &\geq \exp \left\{ -Q_x^\delta \left(\int_0^\infty X_t \mu(dt) \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_0^\infty (x + \delta t) \mu(dt) \right\} > 0.\end{aligned}$$

另一方面, 由定理 1.2 容易得到

$$\varphi(x + x', \delta + \delta') = \varphi(x, \delta) \varphi(x', \delta'),$$

从而

$$\varphi(x, \delta) = \varphi(x, 0) \varphi(0, \delta).$$

函数 $\varphi(\cdot, 0)$ 与 $\varphi(0, \cdot)$ 均具有乘法性, 并且在零点取值为 1。此外, 它们单调, 因而可测。结论立即得到。 $\square$

在推论 1.3 中取 $\mu = \lambda \varepsilon_t$, 便得到 BESQ^δ 转移函数的 Laplace 变换。相应的 A_μ, B_μ 可通过取 $\delta = 1$ 计算。对 $\lambda > 0$, 若 B 是一维布朗运动, 则

$$\begin{aligned}Q_x^1[e^{-\lambda X_t}] &= Q_x^1 \left[\exp \left(-\lambda \int_0^\infty X_s \varepsilon_t(ds) \right) \right] \\ &= E_{\sqrt{x}}[e^{-\lambda B_t^2}] \\ &= (1 + 2\lambda t)^{-1/2} \exp \left(-\frac{\lambda x}{1 + 2\lambda t} \right).\end{aligned}$$

因此

$$Q_x^\delta[e^{-\lambda X_t}] = (1 + 2\lambda t)^{-\delta/2} \exp \left(-\frac{\lambda x}{1 + 2\lambda t} \right).$$

对这个 Laplace 变换作反演, 得到下述推论。

推论 1.4。当 $\delta > 0$ 时, BESQ^δ 的半群关于变量 y 的密度为

$$q_t^\delta(x, y) = \frac{1}{2t} \left(\frac{y}{x} \right)^{\nu/2} \exp \left(-\frac{x+y}{2t} \right) I_\nu \left(\frac{\sqrt{xy}}{t} \right), \quad t > 0, x > 0,$$

其中 ν 是与 δ 对应的指标, I_ν 是指标为 ν 的 Bessel 函数。当 $x = 0$ 时, 该密度为

$$q_t^\delta(0, y) = (2t)^{-\delta/2} \Gamma(\delta/2)^{-1} y^{\delta/2-1} e^{-y/(2t)}.$$

当 $x > 0$ 时, BESQ^0 的半群为

$$Q_t^0(x, \cdot) = e^{-x/(2t)} \varepsilon_0 + \Xi_t(x, \cdot),$$

其中 $\Xi_t(x, \cdot)$ 的密度为

$$q_t^0(x, y) = (2t)^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)^{-1/2} \exp \left(-\frac{x+y}{2t} \right) I_1 \left(\frac{\sqrt{xy}}{t} \right)$$

(回忆 $I_1 = I_{-1}$)。

这些结果特别说明, 正如先前所说, BESQ^δ 是 Feller 过程。既可直接利用上述密度看出这一点, 也可作如下观察: 对 $f \in C_0([0, \infty))$, $Q_x^\delta[f(X_t)]$ 关于 x, t 连续; 先对 $f(x) = e^{-\lambda x}$ 验证, 再

应用 Stone-Weierstrass 定理即可。因此，第 III 章的全部结果都适用于这些过程。下面讨论它们的若干路径性质。

比较定理以及低维布朗运动的已知性质给出：

- i) 当 $\delta \geq 3$ 时， BESQ^δ 是暂留的；当 $\delta \leq 2$ 时，它是常返的；
- ii) 当 $\delta \geq 2$ 时，集合 $\{0\}$ 是极集；当 $\delta \leq 1$ 时，过程几乎必然到达零点。此外，当 $\delta = 0$ 时，零点是吸收点，因为恒零过程显然是定义 1.1 中方程的一个解。

这些观察对小维数 δ 的行为仍留有空缺。置

$$s_\nu(x) = \begin{cases} -x^{-\nu}, & \nu > 0, \\ \log x, & \nu = 0, \\ x^{-\nu}, & \nu < 0, \end{cases}$$

并以 T 表示 $\{0\}$ 的到达时刻。由 Itô 公式， $s_\nu(X)^T$ 在 Q_x^δ 下是局部鞅。用第 VII 章第 3 节的语言， s_ν 是 BESQ^δ 的尺度函数。按照该章练习 3.21 的论证，当 $0 \leq \delta < 2$ 时过程几乎必然到达零点；同理，当 $\delta > 2$ 时过程暂留。也很清楚，第 VII 章第 3 节的假设适用于 BESQ^δ ：当 $\delta < 2$ 时取 $E = [0, \infty)$ ，当 $\delta \geq 2$ 时取 $E = (0, \infty)$ 。后一情形中，零点是入口边界；前一情形有下述命题。

命题 1.5。 当 $\delta = 0$ 时，零点是吸收点；当 $0 < \delta < 2$ 时，零点是瞬时反射边界。

证明。 $\delta = 0$ 的情形显然。设 $0 < \delta < 2$ ，且 X 是 BESQ^δ 。它是半鞅；又显然 $L_t^{0-}(X) = 0$ ，故由第 VI 章定理 1.7，

$$L_t^0(X) = 2\delta \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=0\}} ds.$$

另一方面， $d\langle X, X \rangle_t = 4X_t dt$ ，所以占用时间公式给出

$$\begin{aligned} t &\geq \int_0^t \mathbf{1}_{\{0 < X_s\}} ds \\ &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{0 < X_s\}} (4X_s)^{-1} d\langle X, X \rangle_s \\ &= \int_0^\infty (4a)^{-1} L_t^a(X) da. \end{aligned}$$

若 $L_t^0(X) \neq 0$ ，由局部时关于空间变量的右连续性，上式右端将在零点附近发散，矛盾。因此 $L_t^0(X) = 0$ ，进而 X 在零点停留的时间具有零 Lebesgue 测度。第 VII 章推论 3.13 遂给出结论。□

注。

- i) 事后可知，定理 1.2 证明中的项

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=0\}} d\beta_s''$$

其实为零，唯一的例外是 $\delta = \delta' = 0$ 的情形。

- ii) 当然， BESQ^δ 是半鞅；当 $\delta \geq 2$ 时，由于零点是极点，显然有 $L^0(X) = 0$ 。

上述结果还表明：若以 m_ν 表示 BESQ^δ 的速度测度，则当 $\delta > 0$ 时， $m_\nu(\{0\}) = 0$ 。为了求

出 $(0, \infty)$ 上的 m_ν , 注意由第 VII 章命题 1.7, BESQ^δ 的无穷小生成元在 $C_K^2((0, \infty))$ 上为

$$2x \frac{d^2}{dx^2} + \delta \frac{d}{dx}.$$

由第 VII 章定理 3.14, 在上述尺度函数的选取下, m_ν 关于 Lebesgue 测度的密度为

$$\frac{x^\nu}{2\nu} \quad (\nu > 0), \quad \frac{1}{2} \quad (\nu = 0), \quad -\frac{x^\nu}{2\nu} \quad (\nu < 0).$$

读者可以直接求导核验这些公式, 也可以使用第 VII 章练习 3.20。

下面说明 BESQ^δ 的尺度性质。回忆: 若 B 是标准 δ 维布朗运动且 $B_t^x = x + B_t$, 则对每个 $c > 0$, 过程 $(B_{c^2 t}^x)$ 与 $(cB_t^{x/c})$ 同分布。这称为布朗尺度性质。Bessel 平方过程具有同类性质。

命题 1.6. 若 X 是 $\text{BESQ}^\delta(x)$, 则对每个 $c > 0$, 过程 $(c^{-1}X_{ct})$ 是 $\text{BESQ}^\delta(x/c)$ 。

证明. 对随机积分作直接变量替换, 得到

$$c^{-1}X_{ct} = c^{-1}x + 2 \int_0^t (c^{-1}X_{cs})^{1/2} c^{-1/2} dB_{cs} + \delta t.$$

由于 $(c^{-1/2}B_{ct})$ 是布朗运动, 结论由该随机微分方程解的唯一性得到。□

现在回到推论 1.3, 说明怎样计算常数 A_μ, B_μ ; 这还将给出若干布朗泛函的精确分布。回忆 (见附录 8): 若 μ 是 $[0, \infty)$ 上的 Radon 测度, 则分布意义下的微分方程

$$\phi'' = \phi\mu$$

有唯一的解 ϕ_μ , 它在 $[0, \infty)$ 上为正且非增, 并满足 $\phi_\mu(0) = 1$ 。函数 ϕ_μ 是凸的, 所以它的右导数 $\phi'_{\mu,+}$ 存在且不大于零。又因 ϕ_μ 非增, 极限

$$\phi_\mu(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \phi_\mu(x)$$

存在且属于 $[0, 1]$ 。若排除 $\mu = 0$ 的平凡情形, 则事实上 $\phi_\mu(\infty) < 1$: 若该极限等于 1, 则 $\phi_\mu \equiv 1$, 从而 $\mu = 0$ 。

以下假设

$$\int_{[0, \infty)} (1+x) \mu(dx) < \infty.$$

下面的证明还会说明, 这一条件蕴含 $\phi_\mu(\infty) > 0$ 。令

$$X_\mu = \int_0^\infty X_t \mu(dt).$$

在此框架下, 可以求出推论 1.3 中常数 A_μ, B_μ 的精确值。

定理 1.7. 在上述假设下,

$$Q_x^\delta \left[e^{-X_\mu/2} \right] = \phi_\mu(\infty)^{\delta/2} \exp \left(\frac{x}{2} \phi'_{\mu,+}(0) \right).$$

证明。 函数 $\phi'_{\mu,+}$ 右连续且递增, 故

$$F_\mu(t) = \frac{\phi'_{\mu,+}(t)}{\phi_\mu(t)}$$

右连续且具有有限变差。由分部积分公式 (见第 IV 章练习 3.9),

$$F_\mu(t)X_t = F_\mu(0)x + \int_0^t F_\mu(s) dX_s + \int_0^t X_s dF_\mu(s).$$

又有

$$\begin{aligned} \int_0^t X_s dF_\mu(s) &= \int_0^t X_s \frac{d\phi'_{\mu,+}(s)}{\phi_\mu(s)} - \int_0^t X_s \frac{\phi'_{\mu,+}(s)^2}{\phi_\mu(s)^2} ds \\ &= \int_0^t X_s \mu(ds) - \int_0^t X_s F_\mu(s)^2 ds. \end{aligned}$$

由于 $M_t = X_t - \delta t$ 是 Q_x^δ 下的连续局部鞅, 过程

$$\mathcal{E} \left(\frac{1}{2} \int_0^\cdot F_\mu(s) dM_s \right)_t = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t F_\mu(s) dM_s - \frac{1}{2} \int_0^t X_s F_\mu(s)^2 ds \right\}$$

是连续局部鞅, 而且等于

$$Z_t^\mu = \exp \left\{ \frac{1}{2} [F_\mu(t)X_t - F_\mu(0)x - \delta \log \phi_\mu(t)] - \frac{1}{2} \int_0^t X_s \mu(ds) \right\}.$$

因为 $F_\mu \leq 0$ 且 $X \geq 0$, 这个局部鞅在 $[0, a]$ 上有界, 因而

$$E[Z_a^\mu] = E[Z_0^\mu] = 1. \quad (*)$$

令 $a \rightarrow \infty$ 即可得到定理。

首先, 由命题 1.6 容易看出, X_a/a 在 $a \rightarrow \infty$ 时依分布收敛。其次,

$$\phi'_{\mu,+}(x) = -(\phi_\mu \mu)([x, \infty))$$

(见附录 3), 所以

$$0 \geq aF_\mu(a) \geq - \int_{[a, \infty)} x \mu(dx) \rightarrow 0.$$

因此 $F_\mu(a)X_a \xrightarrow{P} 0$ 。在 (*) 中取极限, 得到

$$\left(\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-(\delta/2) \log \phi_\mu(a)} \right) e^{-x F_\mu(0)/2} Q_x^\delta [e^{-X_\mu/2}] = 1.$$

由于 $X_\mu < \infty$ 几乎必然, 这同时说明 $\phi_\mu(\infty) > 0$, 并完成证明。□

注。

- 1°) 直接计算各个有关过程的跳并观察它们彼此抵消, 也可以看出 Z^μ 连续; 细节留给读者。
- 2°) 上述证明的关键是 $aF_\mu(a) \rightarrow 0$ 。事实上, 当 $a \rightarrow \infty$ 时, 它等价于 $-a\mu([a, \infty)) \rightarrow 0$ 。

这个结果给出 Cameron-Martin 公式的一个证明: 若 B 是标准一维布朗运动, 则

$$E \left[\exp \left(-\lambda \int_0^1 B_s^2 ds \right) \right] = (\cosh \sqrt{2\lambda})^{-1/2}.$$

这一公式最初由解析方法证明；在下面的推论中取 $x = 0, \delta = 1$ 即可得到它。

推论 1.8。

$$Q_x^\delta \left[\exp \left(-\frac{b^2}{2} \int_0^1 X_s \, ds \right) \right] = (\cosh b)^{-\delta/2} \exp \left(-\frac{1}{2} x b \tanh b \right).$$

证明。 需要在 $\mu(ds) = b^2 \, ds$ ($0 \leq s \leq 1$) 时计算 ϕ_μ 。在 $[0, 1]$ 上必有

$$\phi_\mu(t) = \alpha \cosh(bt) + \beta \sinh(bt),$$

而 $\phi_\mu(0) = 1$ 强制 $\alpha = 1$ 。又因 ϕ_μ 在 $[1, \infty)$ 上为常数，且 $\phi'_{\mu,+}$ 连续，必须有 $\phi'_{\mu,+}(1) = 0$ ，即

$$b \sinh b + \beta b \cosh b = 0.$$

故 $\beta = -\tanh b$ ，从而在 $[0, 1]$ 上

$$\phi_\mu(t) = \cosh(bt) - (\tanh b) \sinh(bt).$$

于是

$$\phi_\mu(\infty) = \phi_\mu(1) = (\cosh b)^{-1}, \quad \phi'_{\mu,+}(0) = -b \tanh b.$$

代入定理 1.7 即得结论。 □

注。 这一推论可用于第 V 章练习 2.19 和第 IX 章练习 3.10 中引入的随机面积。

到目前为止，我们只讨论了 Bessel 过程的平方；现在转向 Bessel 过程本身。函数 $x \mapsto \sqrt{x}$ 是 $\mathbb{R}_+$ 的同胚。因此，若 X 是 $\mathbb{R}_+$ 上的 Markov 过程，则 $\sqrt{X}$ 也是 Markov 过程。把这一点应用于 BESQ^δ 族，就得到 Bessel 过程族。

定义 1.9。 $\text{BESQ}^\delta(a^2)$ ($\delta \geq 0, a \geq 0$) 的平方根称为从 a 出发的 δ 维 Bessel 过程，记作 $\text{BES}^\delta(a)$ 。其分布记为 P_a^δ 。

在整数维情形，第 VI 章第 3 节已经引入这些过程：它们可以实现为相应 δ 维布朗运动的模长。

BESQ^δ 的若干性质可直接转化为 BES^δ 的相应性质。Bessel 过程是具有连续路径的 Feller 过程，并满足第 VII 章第 3 节的假设。使用该章练习 3.20 或练习 3.18，容易看出 BES^δ 的尺度函数可取为

$$-x^{-2\nu} \quad (\nu > 0), \quad 2 \log x \quad (\nu = 0), \quad x^{-2\nu} \quad (\nu < 0).$$

在这一尺度函数选取下，速度测度的密度分别为

$$\frac{x^{2\nu+1}}{\nu} \quad (\nu > 0), \quad x \quad (\nu = 0), \quad -\frac{x^{2\nu+1}}{\nu} \quad (\nu < 0).$$

此外，当 $0 < \delta < 2$ 时，零点是瞬时反射边界；当 $\delta \geq 2$ 时，它是极点。利用第 VII 章定理 3.12，还可容易算出 BES^δ 的无穷小生成元。

由 BESQ^δ 的半群密度作直接变量替换，还得到 BES^δ 的半群密度。当 $\delta > 0$ 时，

$$p_t^\delta(x, y) = t^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)^\nu y \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2t} \right) I_\nu \left(\frac{xy}{t} \right), \quad x > 0, t > 0,$$

并且

$$p_t^\delta(0, y) = 2^{-\nu} t^{-(\nu+1)} \Gamma(\nu+1)^{-1} y^{2\nu+1} e^{-y^2/(2t)}.$$

还可以作如下观察：当 $\delta \geq 2$ 、 $x > 0$ 时，零点对 $\text{BESQ}^\delta(x)$ 是极点。记该过程为 X ，对 $\sqrt{x}$ 应用 Itô 公式，得到

$$X_t^{1/2} = \sqrt{x} + \beta_t + \frac{\delta-1}{2} \int_0^t X_s^{-1/2} ds,$$

其中 β 是布朗运动。换言之， $a > 0$ 时的 $\text{BES}^\delta(a)$ 是随机微分方程

$$\rho_t = a + \beta_t + \frac{\delta-1}{2} \int_0^t \rho_s^{-1} ds$$

的解。由第 IX 章练习 2.10，它是这个方程的唯一解。当 $\delta < 2$ 时，情形远为复杂；例如，由于出现局部时， BES^1 并不是第 IX 章意义下某个随机微分方程的解（见第 IX 章练习 2.14）。

最后，命题 1.6 转化为下述结论；当 $\delta \geq 2$ 时，它也可由第 IX 章练习 1.17 推出。

命题 1.10. BES^δ 具有布朗尺度性质。

现在研究这一过程族的另一种不变性。设 (X^δ) 是一族扩散过程，分别满足

$$X_t^\delta = x + B_t + \int_0^t b_\delta(X_s^\delta) ds,$$

其中 (b_δ) 是一族 Borel 函数。又设 f 是正的、严格递增的 C^2 函数，逆函数为 f^{-1} 。我们要研究：在怎样的条件下，对 $f(X^\delta)$ 作适当时间变换后，所得过程仍属于同一族。

Itô 公式给出

$$\begin{aligned} f(X_t^\delta) &= f(x) + \int_0^t f'(X_s^\delta) dB_s \\ &\quad + \int_0^t \left(f'(X_s^\delta) b_\delta(X_s^\delta) + \frac{1}{2} f''(X_s^\delta) \right) ds. \end{aligned}$$

令

$$\tau_t = \inf \left\{ u : \int_0^u f'(X_s^\delta)^2 ds > t \right\}, \quad Y_t^\delta = f(X_{\tau_t}^\delta).$$

则上式可以改写为

$$Y_t^\delta = f(x) + \beta_t + \int_0^t \left(\frac{f' b_\delta + \frac{1}{2} f''}{(f')^2} \circ f^{-1} \right) (Y_s^\delta) ds,$$

其中 β 是布朗运动。因此，若可找到 $\tilde{\delta}$ ，使

$$\frac{f' b_\delta + \frac{1}{2} f''}{(f')^2} = b_{\tilde{\delta}} \circ f,$$

则 Y^δ 将满足给定过程族中的一个随机微分方程。

这导出下面的结论，其中 ρ_ν 表示指标为 ν 的 Bessel 过程。

命题 1.11. 设 p, q 是共轭指数，即

$$p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

若 $\nu > -1/q$ ，则在 ρ_ν 所在的同一概率空间上存在一个 $\text{BES}^{(\nu q)}$ ，记为 $\rho_{\nu q}$ ，使

$$q \rho_\nu(t)^{1/q} = \rho_{\nu q} \left(\int_0^t \rho_\nu(s)^{-2/p} ds \right).$$

证明。当 $\nu \geq 0$ 时, ρ_ν 取值于 $(0, \infty)$, 而 $x^{1/q}$ 在该区间上二次可微。因此可在上述方法中取 $f(x) = qx^{1/q}$ 。此时

$$b_\nu(x) = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)x^{-1},$$

且

$$\frac{b_\nu f' + \frac{1}{2}f''}{(f')^2} = b_{\nu q} \circ f.$$

结论遂由 $\nu \geq 0$ 时 Bessel 过程所满足方程的解唯一性得到。

当 $\nu < 0$ 时, 令 τ_t 是与

$$\int_0^\cdot \rho_\nu(s)^{-2/p} ds$$

相伴的时间变换。仿照第 X 章练习 2.29, 可以证明 $q\rho_\nu(\tau_t)^{1/q}$ 在 $(0, \infty)$ 上与 $\rho_{\nu q}$ 具有同一生成元。又因过程在零点停留的时间为零, 边界零还是瞬时反射的。因此, $q\rho_\nu(\tau_t)^{1/q}$ 的生成元就是 $\rho_{\nu q}(t)$ 的生成元; 应用第 VII 章命题 3.14 即得结论。细节留给读者。 $\square$

这一不变性原理可以用来显式表示若干布朗泛函的分布。

推论 1.12。 在命题 1.11 的框架下, 若 $\rho_\nu(0) = 0$ 几乎必然, 则

$$\int_0^1 \rho_\nu(s)^{-2/p} ds \stackrel{d}{=} q^2 \left(\int_0^1 \rho_{\nu q}(s)^{2q/p} ds \right)^{-1/q}.$$

证明。 令

$$C_t = \int_0^t \rho_\nu(s)^{-2/p} ds,$$

并以 τ 表示相伴的时间变换。命题 1.11 的证明已经说明

$$q\rho_\nu(\tau_s)^{1/q} = \rho_{\nu q}(s).$$

又因为

$$d\tau_t = \rho_\nu(\tau_t)^{2/p} dt,$$

所以

$$\tau_t = \int_0^t (q^{-1}\rho_{\nu q}(s))^{2q/p} ds.$$

只需再证明 C_1 与 $\tau_1^{-1/q}$ 同分布。首先注意

$$\{C_1 > t\} = \{\tau_t < 1\}.$$

再用 $\rho_{\nu q}$ 的尺度性质, 得到

$$\tau_t = \int_0^1 (q^{-1}\rho_{\nu q}(tu))^{2q/p} du \stackrel{d}{=} t^q \tau_1.$$

于是

$$P(C_1 > t) = P(t^q \tau_1 < 1) = P(\tau_1^{-1/q} > t),$$

结论得证。 $\square$

这个推论的意义在于：对适当的 ν ，左端是布朗泛函，而右端的 Laplace 变换在某些情形下可以计算。例如取 $p = q = 2$ ，得到

$$\int_0^1 \rho_\nu(s)^{-1} ds \stackrel{d}{=} 2 \left(\int_0^1 \rho_{2\nu}(s)^2 ds \right)^{-1/2};$$

后一个随机变量的分布已由推论 1.8 给出。

练习 1.12bis (推论 1.12 的续题)。

1°) 在命题 1.11 的框架下，证明

$$E \left[\left(\int_0^1 \rho_{\nu q}(s)^{2q/p} ds \right)^{-1/q} \right] = q \frac{\Gamma(1/q + \nu)}{\Gamma(1 + \nu)}.$$

2°) 推出

$$E \left[\left(\sup_{s \leq 1} \rho_{\nu q}(s) \right)^{-2} \right] = \frac{1}{2(1 + \nu q)}.$$

结合练习 1.18 第 1° 问解释这一结果。

练习 1.13。

1°) 设 $(X^\delta)_{\delta \geq 2}$ 是一族扩散过程，满足

$$X_t^\delta = x + B_t + \int_0^t b_\delta(X_s^\delta) ds.$$

证明：若存在常数 b ，使

$$2xb_\delta(x) + 1 = \delta + bx^2,$$

则各过程 $(X^\delta)^2$ 的分布具有定理 1.2 的可加性。特别地，这适用于 $\mathbb{R}^\delta$ 值 Ornstein-Uhlenbeck 过程的 Euclidean 范数族，即 $X_t = |Y_t|$ ，其中

$$Y_t = y + B_t + \frac{b}{2} \int_0^t Y_s ds$$

(见第 VIII 章练习 3.14)。

2°) 设 $\beta \neq 0, \delta \geq 0$ 。证明：在 $C_K^\infty((0, \infty))$ 上无穷小生成元为

$$2x \frac{d^2}{dx^2} + (2\beta x + \delta) \frac{d}{dx}$$

的扩散过程，可以写成

$$e^{2\beta t} X \left(\frac{1 - e^{-2\beta t}}{2\beta} \right) \quad \text{或} \quad e^{2\beta t} Y \left(\frac{|e^{-2\beta t} - 1|}{2|\beta|} \right),$$

其中 X, Y 是适当的 BESQ $^\delta$ 过程。

提示：先取 $\delta = 1$ 。此时该过程是一个 Ornstein-Uhlenbeck 过程的平方；然后使用第 1° 问。

练习 1.14 (Wiener 空间上的无穷可分分布)。

1°) 对每个 $\delta \geq 0, x \geq 0$, 证明分布 Q_x^δ 无穷可分: 对每个 n , 存在 $W = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 上的概率分布 $P^{(n)}$, 使

$$Q_x^\delta = P^{(n)} * \cdots * P^{(n)} \quad (n \text{ 项}).$$

2°) 设 B, C 是两个相互独立、从零出发的布朗运动, R 是与 B 独立的 $\text{BES}^\delta(x)$ 。证明下列各过程的分布均无穷可分:

$$\begin{aligned} \text{a)} & (B_t C_t)_{t \geq 0}, & \text{b)} & \left(\int_0^t (B_s \, dC_s - C_s \, dB_s) \right)_{t \geq 0}, \\ \text{c)} & \left(\int_0^t R_s \, dB_s \right)_{t \geq 0}, & \text{d)} & \left(\int_0^t \varphi(s) \, dR_s^2 \right)_{t \geq 0}, \end{aligned}$$

其中 $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是有界 Borel 函数。

练习 1.15。 当 μ 是 Dirac 测度的线性组合, 即

$$\mu = \sum_i \lambda_i \varepsilon_{t_i},$$

时, 计算推论 1.3 中的 A_μ, B_μ 。

提示: 使用 Markov 性。

练习 1.16 (#; 第 V 章练习 2.13 中反例的进一步讨论)。 设 X 是 $\text{BES}^\delta(x)$ 。回忆: 若 $\delta > 2, x > 0$, 则 $X_t^{2-\delta}$ 是局部鞅。

1°) 利用当 $z \rightarrow 0$ 时

$$I_\nu(z) \sim \Gamma(\nu + 1)^{-1} (z/2)^\nu,$$

证明对 $\alpha < \delta/(\delta - 2)$ 及 $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{\varepsilon \leq t \leq 1} E[X_t^{\alpha(2-\delta)}] < \infty.$$

提示: 使用 BES^δ 的尺度性质以及随机微分方程的比较定理。

2°) 对每个 $p \geq 1$, 给出一个在 L^p 中有界、但不是鞅的正连续局部鞅的例子。

提示: 证明 $E[X_t^{2-\delta}]$ 不关于 t 为常数。

练习 1.17 (*)。 设 M 属于第 IV 章练习 3.26 中的类 $\mathcal{M}$, 并满足

$$\lim_{t \downarrow 0} M_t = +\infty.$$

证明连续递增过程

$$A_t = \int_0^t e^{-2M_s} \, d\langle M, M \rangle_s$$

取有限值, 并且存在一个 BES^2 过程 X , 使

$$e^{-M_t} = X_{A_t}.$$

练习 1.18 (*, #)。

1°) 若 X 是 $\text{BES}^\delta(0)$, 证明

$$T_1 = \inf\{t : X_t = 1\} \quad \text{与} \quad \left(\sup_{t \leq 1} X_t\right)^{-2}$$

同分布。

提示: 写成 $\{T_1 > t\} = \{\sup_{s \leq t} X_s < 1\}$, 再使用尺度不变性。

2°) 若还有 $\delta > 2$, 证明

$$L = \sup\{t : X_t = 1\} \quad \text{与} \quad \left(\inf_{t \geq 1} X_t\right)^{-2}$$

同分布。

3°) 设 Y 是与 X 独立的 $\text{BES}^\delta(1)$ 。利用 X 的尺度不变性, 证明

$$\inf_{t \geq 1} X_t \quad \text{与} \quad X_1 \inf_{t \geq 0} Y_t$$

同分布。

4°) 利用 $Y^{2-\delta}$ 是局部鞅这一性质, 证明

$$\inf_{t \geq 0} Y_t \stackrel{d}{=} U^{1/(\delta-2)},$$

其中 U 在 $[0, 1]$ 上均匀分布。

提示: 使用第 III 章练习 3.12。

5°) 最后证明, 第 2° 问中的随机变量 L 与 Z_1^{-2} 同分布, 其中 Z 是 $\text{BES}^{\delta-2}(0)$ 。把这一结果同第 VII 章练习 4.16 中暂留扩散过程末次通过时刻的分布作比较。

练习 1.19。 设 $p > 0$, X 是 $\text{BES}^{2p+3}(0)$ 。证明存在一个 $\text{BES}^3(0)$ 过程 Y , 使

$$X_t^{2p+1} = Y \left(\int_0^t (2p+1)^2 X_s^{4p} ds \right).$$

提示: 使用 Itô 公式以及与 $\int_0^t (2p+1)^2 X_s^{4p} ds$ 相伴的时间变换。

练习 1.20。 对 $\delta \geq 1$, 证明 BES^δ 满足各种重对数律。

提示: 使用第 II 章练习 1.21 和第 IX 章第 3 节的比较定理。

练习 1.21。 设 $0 < \delta < 1$, X 是 BES^δ 。证明

$$\{t : X_t = 0\}$$

是无内点的完全集。

练习 1.22 (*, #)。

1°) 设 $(\mathcal{F}_t^0)$ 是坐标过程 X 生成的滤过。对指标 $\mu, \nu \geq 0$ 、有界 $(\mathcal{F}_t^0)$ -停时 T 、任意正的

$\mathcal{F}_T^0$ -可测随机变量 Y 及 $a > 0$, 证明

$$\begin{aligned} P_a^{(\mu)} & \left[Y \exp \left(-\frac{\nu^2}{2} \int_0^T X_s^{-2} ds \right) \left(\frac{X_T}{a} \right)^{-\mu} \right] \\ & = P_a^{(\nu)} \left[Y \exp \left(-\frac{\mu^2}{2} \int_0^T X_s^{-2} ds \right) \left(\frac{X_T}{a} \right)^{-\nu} \right]. \end{aligned}$$

提示: 先取 $\mu = 0, \nu > 0$, 使用第 VIII 章练习 1.34 所述的 $P_a^{(0)}$ -鞅 $\mathcal{E}(\nu M)$, 其中 $M = \log(X/a)$ 。

2°) 设 W_a 是从 a 出发的一维布朗运动的分布, 并令

$$T_0 = \inf\{t : X_t = 0\}.$$

在 $\mathcal{F}_t^0$ 上定义概率测度

$$R_a = \frac{X_{t \wedge T_0}}{a} \cdot W_a.$$

证明 R_a 是 BES^3 的分布, 即本练习记号中的 $P_a^{(1/2)}$ 。

提示: 用 Girsanov 定理证明: 在 R_a 下, 过程 X 满足正确的随机微分方程。

3°) 推出对每个 $\nu \geq 0$, 在 $\mathcal{F}_t^0$ 上有

$$P_a^{(\nu)} = \left(\frac{X_{t \wedge T_0}}{a} \right)^{\nu+1/2} \exp \left\{ -\frac{\nu^2 - 1/4}{2} \int_0^t X_s^{-2} ds \right\} \cdot W_a.$$

练习 1.23 (#). 证明: 对 $\nu > 0, b > 0$, 在 $P_0^{(\nu)}$ 下

$$\{X_{L_b-t} : t < L_b\}$$

的分布, 与在 $P_b^{(-\nu)}$ 下

$$\{X_t : t < T_0\}$$

的分布相同, 其中 $L_b = \sup\{t : X_t = b\}$ 。

提示: 使用第 VII 章定理 4.5。

特别地, $P_0^{(\nu)}$ 下的 L_b 与 $P_b^{(-\nu)}$ 下的 T_0 同分布; 这推广了第 VII 章推论 4.6。证明这一共同分布是

$$\frac{2}{\gamma_\nu}$$

的分布, 其中 γ_ν 是参数为 ν 的 Gamma 随机变量。

提示: 使用练习 1.18。

练习 1.24. 设 Z 是二维布朗运动。对 $\alpha < 2$, 证明随机指数

$$\mathcal{E}(-\alpha \log |Z|)$$

不是鞅。

提示: 假设它是鞅, 再遵循第 VIII 章命题 3.8 前所述的方案推出矛盾。

练习 1.25。

- 1°) 证明：尽管当 $\nu < -1/2$ 时 $\text{BES}^{(\nu)}$ 不是半鞅，它仍有一个双连续的占用密度族，即存在过程族 (l_t^x) ，使

$$\int_0^t f(\rho_\nu(s)) \, ds = \int_0^\infty f(x) l_t^x m_\nu(dx) \quad \text{几乎必然.}$$

显然，当 $\nu \geq -1/2$ 时该公式也成立。

提示：在命题 1.11 中取 $q = -2\nu$ 。

- 2°) 证明当 $\nu \in (-1, 0)$ 时，零点局部时的逆过程 τ 是指标为 $-\nu$ 的稳定次协调子（见第 III 章第 4 节），即

$$E[e^{-\lambda \tau}] = e^{-c\lambda^{-\nu}}.$$

练习 1.26 (维数 $\delta \in (0, 1)$ 的 Bessel 过程)。 设 $\delta > 0$ ， ρ 是 BES^δ 。

- 1°) 证明当 $\delta \geq 1$ 时， ρ 是半鞅，并有分解

$$\rho_t = \rho_0 + \beta_t + \frac{\delta - 1}{2} \int_0^t \rho_s^{-1} \, ds, \quad \delta > 1,$$

以及

$$\rho_t = \rho_0 + \beta_t + \frac{1}{2} l_t^0, \quad \delta = 1,$$

其中 l^0 是 ρ 在零点的局部时。这将成为研究 $\delta < 1$ 情形的关键步骤。

- 2°) 对 $0 < \alpha < 1/2$ 及标准一维布朗运动 B ，证明

$$\begin{aligned} |B_t|^{1-\alpha} &= |B_0|^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t |B_s|^{-\alpha} \text{sgn}(B_s) \, dB_s \\ &\quad - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \text{P.V.} \int_0^t |B_s|^{-1-\alpha} \, ds, \end{aligned}$$

其中主值定义为

$$\text{P.V.} \int_0^t |B_s|^{-1-\alpha} \, ds = \int_{-\infty}^\infty |b|^{-1-\alpha} (\ell_t^b - \ell_t^0) \, db.$$

提示：关于主值的存在性，见第 VI 章练习 1.29。

- 3°) 现在设 ρ 是维数 $\delta \in (0, 1)$ 的 Bessel 过程。以 (l^a) 表示由下式定义的局部时族：

$$\int_0^t \phi(\rho_s) \, ds = \int_0^\infty \phi(x) l_t^x x^{\delta-1} \, dx,$$

这与练习 1.25 一致。证明

$$\rho_t = \rho_0 + \beta_t + \frac{\delta - 1}{2} k_t,$$

其中

$$\begin{aligned} k_t &= \text{P.V.} \int_0^t \rho_s^{-1} \, ds \\ &:= \int_0^\infty a^{\delta-2} (l_t^a - l_t^0) \, da. \end{aligned}$$

提示：使用第 2° 问以及命题 1.11，其中 $\nu = -1/2$ 。

练习 1.27。

1°) 证明

$$Q_x^4 \left[\frac{x}{X_t} \right] = 1 - e^{-x/(2t)}.$$

提示: $\xi^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda \xi} d\lambda$.2°) 把推论 1.4 中 Q_t^4 与 Q_t^0 的公式作比较, 并利用上一结果验证

$$Q_t^0(x, \mathbb{R}_+) = 1.$$

练习 1.28 (*; Lamperti 关系)。1°) 设 B 是从零出发的一维布朗运动。对 $\nu \geq 0$, 证明存在一个 $\text{BES}^{(\nu)}$ 过程 $R^{(\nu)}$, 使

$$e^{B_t + \nu t} = R^{(\nu)} \left(\int_0^t e^{2(B_s + \nu s)} ds \right).$$

2°) 对任意 $\nu \in \mathbb{R}$, 给出上一结论的适当推广。3°) 证明: 若 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b > 0$, 则

$$\int_0^\infty e^{aB_s - bs} ds \stackrel{d}{=} \frac{2}{a^2 \gamma_{2b/a^2}},$$

其中 γ_α 表示参数为 α 的 Gamma 随机变量。

提示: 使用练习 1.23。

练习 1.29 (Pitman 定理向暂留 Bessel 过程的推广)。 设 $(\rho_t, t \geq 0)$ 是从零出发、维数 $\delta > 2$ 的 Bessel 过程, 并令

$$J_t = \inf_{s \geq t} \rho_s.$$

证明存在布朗运动 $(\gamma_t, t \geq 0)$, 使

$$\rho_t = \gamma_t + 2J_t - \frac{\delta - 3}{2} \int_0^t \frac{ds}{\rho_s}.$$

提示: 使用命题 1.11。

练习 1.30 (与 Pitman 定理等价的一个性质)。 设 B 是一维布朗运动, S 是它的上确界过程。假设对每个 t , 给定 $\mathcal{F}_t^{2S-B}$ 后, 随机变量 S_t 在 $[0, 2S_t - B_t]$ 上均匀分布。证明 $2S - B$ 是 $\text{BES}^3(0)$ 。与第 VI 章第 3 节、特别是推论 3.6 的结果作比较。提示: 证明 $(2S_t - B_t)^2 - 3t$ 是局部鞅。**练习 1.31 (Seshadri 恒等式)。** 沿用第 VI 章第 2、3 节的记号, 写成

$$(2S_t - B_t)^2 = (S_t - B_t)^2 + r_t^2 = S_t^2 + \rho_t^2.$$

1°) 对固定的 $t > 0$, 证明随机变量 r_t^2 与 ρ_t^2 都服从指数分布, 并且 $(S_t - B_t)^2$ 与 r_t^2 独立; 同样, S_t^2 与 ρ_t^2 独立。

提示: 使用第 0 章第 6 节关于 Gamma 与 Beta 随机变量的结果。

2°) 进一步证明: 尽管很容易作出这样的猜想, 过程 r^2 与 ρ^2 都不是 $\text{BESQ}^2(0)$ 。

提示：写出它们的半鞅分解。

练习 1.32 (当 $\int_0^\infty (1+t)\mu(dt) = \infty$ 时泛函 X_μ 的渐近分布)。

1°) 设 X 是 $\text{BESQ}^\delta(x)$, 其中 $\delta > 0$ 。对 $\alpha < 2$, 证明当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$t^{\alpha-2} \int_1^t u^{-\alpha} X_u \, du \xrightarrow{d} \int_0^1 u^{-\alpha} Y_u \, du,$$

其中 Y 是 $\text{BESQ}^\delta(0)$ 。

2°) 沿用上述记号, 证明

$$\frac{1}{\log t} \int_1^t u^{-2} X_u \, du \longrightarrow \delta = E[Y_1] \quad \text{几乎必然.}$$

进一步证明

$$(\log t)^{-1/2} \left(\delta \log t - \int_1^t u^{-2} X_u \, du \right) \xrightarrow{d} 2\gamma_\delta,$$

其中 γ 是从零出发的一维布朗运动。

提示：把 $(X_t/t, t \geq 1)$ 展开成半鞅。

练习 1.33 (负维数的 “Bessel 平方” 过程)。

1°) 设 $x, \delta > 0$, β 是一维布朗运动。证明方程

$$Z_t = x + 2 \int_0^t \sqrt{|Z_s|} \, d\beta_s - \delta t$$

存在唯一强解。以 $Q_x^{-\delta}$ 表示这个过程在 $W = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 上的分布。

2°) 证明

$$T_0 = \inf\{t : Z_t = 0\} < \infty \quad \text{几乎必然,}$$

并辨认过程 $\{-Z_{T_0+t} : t \geq 0\}$ 。

3°) 证明过程族

$$\{Q_x^\gamma : \gamma \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$$

不满足定理 1.2 中的可加性。

练习 1.34 (定理 1.7 的补充)。 设 μ 是 $\mathbb{R}_+$ 上正的、无原子的 Radon 测度。除 ϕ_μ 外, 再引入函数

$$\psi_\mu(t) = \phi_\mu(t) \int_0^t \frac{ds}{\phi_\mu(s)^2}.$$

1°) 证明 ψ_μ 也是 Sturm-Liouville 方程 $\phi'' = \mu\phi$ 的解, 并且

$$\psi_\mu(0) = 0, \quad \psi'_\mu(0) = 1.$$

注意 Wronski 行列式关系

$$W(\phi_\mu, \psi_\mu) = \phi_\mu \psi'_\mu - \phi'_\mu \psi_\mu = 1.$$

2°) 证明对每个 $t \geq 0$,

$$Q_x^\delta \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t X_s \mu(ds) \right) \right] = \frac{1}{\psi'_\mu(t)^{\delta/2}} \times \exp \left\{ \frac{x}{2} \left(\phi'_\mu(0) - \frac{\phi'_\mu(t)}{\psi'_\mu(t)} \right) \right\}.$$

3°) 令 $t \rightarrow \infty$, 验证上一公式与定理 1.7 一致。

提示: 若 $\int_0^\infty t \mu(dt) < \infty$, 则

$$\psi'_\mu(t) \rightarrow \frac{1}{\phi_\mu(\infty)} > 0.$$

4°) 设 B 是从零出发的一维布朗运动, ν 是 $\mathbb{R}_+$ 上另一个 Radon 测度。证明

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left\{ \int_0^t B_s \nu(ds) - \frac{1}{2} \int_0^t B_s^2 \mu(ds) \right\} \right] \\ = \frac{1}{\psi'_\mu(t)^{1/2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t du \left(\int_u^t \frac{\phi_\mu(s)}{\phi_\mu(u)} \nu(ds) \right)^2 - \theta(t) \left(\int_0^t \psi_\mu(s) \nu(ds) \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

其中

$$\theta(t) = \frac{\phi'_\mu(t)}{2\psi'_\mu(t)}.$$

提示: 使用下面定理 3.2 证明中所采用的概率测度变换。

2 Ray-Knight 定理

设 B 是标准一维布朗运动, (L_t^a) 是它的局部时族。Ray-Knight 定理源于对 (L_t^a) 关于空间变量 a 的依赖关系作更深入理解的愿望。为此, 先研究过程

$$Z_a = L_{T_1}^{1-a}, \quad 0 \leq a \leq 1,$$

其中

$$T_1 = \inf\{t : B_t = 1\}.$$

我们将证明它是 Markov 过程; 事实上, 它就是限制在时间区间 $[0, 1]$ 上的 BESQ²。以 $(Z_a)_{a \in [0, 1]}$ 表示 Z 生成的完备右连续滤过。对这个滤过, 有一个与第 V 章第 3 节关于布朗滤过的结果相似的结论。

命题 2.1. 任意 $H \in L^2(Z_a)$ ($0 \leq a \leq 1$) 都可写成

$$H = E[H] + \int_0^{T_1} h_s \mathbf{1}_{\{B_s > 1-a\}} dB_s,$$

其中 h 关于 B 的滤过可预测, 并且

$$E \left[\int_0^{T_1} h_s^2 \mathbf{1}_{\{B_s > 1-a\}} ds \right] < \infty.$$

证明。 具有上述表示的随机变量 H 所成的子空间在 $L^2(\mathcal{Z}_a)$ 中闭, 因为

$$E[H^2] = E[H]^2 + E \left[\int_0^{T_1} h_s^2 \mathbf{1}_{\{B_s > 1-a\}} ds \right],$$

并且可以仿照第 V 章第 3 节论证。

现在考虑形如

$$K = \exp \left\{ - \int_0^a g(b) Z_b db \right\}$$

的随机变量, 其中 g 是支集紧含于 $(0, a)$ 的正 C^1 函数。这些随机变量所张成的向量空间是一个有界函数代数; 由 Z 的连续性, 它生成 σ -域 $\mathcal{Z}_a$ 。单调类定理说明, 该向量空间在 $L^2(\mathcal{Z}_a)$ 中稠密。因此只需对 K 证明表示性质。

置

$$U_t = \exp \left\{ - \int_0^t g(1 - B_s) ds \right\}.$$

由于 $g(1 - x)$ 在 $(0, 1 - a)$ 上为零, 占用时间公式给出

$$K = \exp \left\{ - \int_{1-a}^1 g(1 - x) L_{T_1}^x dx \right\} = U_{T_1}.$$

若 $F \in C^2$, 则半鞅 $M_t = F(B_t)U_t$ 可写成

$$\begin{aligned} M_t &= F(0) - \int_0^t F(B_s) U_s g(1 - B_s) ds \\ &\quad + \int_0^t U_s F'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t U_s F''(B_s) ds. \end{aligned}$$

可以选取 F , 使

$$F' \equiv 0 \text{ 于 } (-\infty, 1 - a], \quad F(1) \neq 0, \quad F''(x) = 2g(1 - x)F(x).$$

于是 $F' = F' \mathbf{1}_{(1-a, \infty)}$, 并且

$$M_{T_1} = F(0) + \int_0^{T_1} U_s F'(B_s) \mathbf{1}_{\{B_s > 1-a\}} dB_s.$$

又因 $K = F(1)^{-1} M_{T_1}$, 证明完成。 □

现在陈述所谓第一 Ray-Knight 定理。

定理 2.2 (第一 Ray-Knight 定理)。 过程 $(Z_a, 0 \leq a \leq 1)$ 是限制在时间区间 $[0, 1]$ 上、从零出发的 BESQ²。

证明。 由 Tanaka 公式,

$$(B_t - (1 - a))^+ = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s > 1-a\}} dB_s + \frac{1}{2} L_t^{1-a},$$

从而

$$Z_a - 2a = -2 \int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{B_s > 1-a\}} dB_s.$$

这也说明 Z_a 可积。事实上, 对每个 t ,

$$E[L_{t \wedge T_1}^{1-a}] = 2E[(B_{t \wedge T_1} - (1-a))^+],$$

令 $t \rightarrow \infty$ 得 $E[Z_a] = 2a$ 。

现取 $b < a$, 并令 H 是有界的 $\mathcal{Z}_b$ -可测随机变量。用命题 2.1 的表示, 可写出

$$\begin{aligned} E[(Z_a - 2a)H] &= E\left[-2 \int_0^{T_1} h_s \mathbf{1}_{\{B_s > 1-b\}} \mathbf{1}_{\{B_s > 1-a\}} ds\right] \\ &= E\left[-2 \int_0^{T_1} h_s \mathbf{1}_{\{B_s > 1-b\}} ds\right] \\ &= E[(Z_b - 2b)H]. \end{aligned}$$

因此 $Z_a - 2a$ 是连续鞅。由第 VI 章推论 1.13, 它的递增过程为

$$4 \int_0^a Z_u du.$$

第 V 章命题 3.8 遂说明, 存在布朗运动 β , 使

$$Z_a = 2 \int_0^a \sqrt{Z_u} d\beta_u + 2a.$$

换言之, Z 是 $[0, 1]$ 上的 $\text{BESQ}^2(0)$ 。

□

注。

- 1°) 例如使用第 X 章第 3 节介绍的时间替换方法, 可以把这一结果推广到某些扩散过程的局部时; 见练习 2.5。
- 2°) Z_a 是正下鞅, 这与直觉相符: L_t^a 往往随 a 增大而减小。
- 3°) 证明中需要说明 Z_a 可积。事实上, Z_a 具有任意阶矩, 而且是指数随机变量; 第 VI 章第 4 节已经证明了这一点。
- 4°) 利用布朗运动与 BESQ^2 的尺度性质, 可把结论推广到任意区间 $[0, c]$ 。

现在转向第二 Ray-Knight 定理。对 $x > 0$, 令

$$\tau_x = \inf\{t : L_t^0 > x\}.$$

定理 2.3 (第二 Ray-Knight 定理)。 过程 $(L_{\tau_x}^a, a \geq 0)$ 是 $\text{BESQ}^0(x)$ 。

证明。 设 g 是支集紧含于 $(0, \infty)$ 的正 C^1 函数, F_g 是方程

$$F'' = gF$$

满足 $F_g(0) = 1$ 的唯一正递减解 (见定理 1.7 前的讨论与附录 8)。定义

$$f(\lambda, y) = \exp\left(-\frac{\lambda}{2} F_g'(0)\right) F_g(y),$$

并简记 $L = L^0$ 。Itô 公式给出

$$\begin{aligned} f(L_t, B_t^+) &= 1 + \int_0^t \partial_y f(L_s, B_s^+) \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_y f(L_s, B_s^+) dL_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{yy} f(L_s, B_s^+) \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} ds \\ &\quad + \int_0^t \partial_\lambda f(L_s, B_s^+) dL_s. \end{aligned}$$

在关于 dL_s 的积分中可以把 B_s^+ 换成零；而

$$\frac{1}{2} \partial_y f(\lambda, 0) + \partial_\lambda f(\lambda, 0) = 0,$$

所以相应各项抵消。再利用分部积分公式及 F_g 的选取，容易看出

$$f(L_t, B_t^+) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t g(B_s) ds \right)$$

是局部鞅。它在 $[0, \tau_x]$ 上有界，故由可选停止定理，

$$E \left[e^{-F'_g(0)L_{\tau_x}/2} F_g(B_{\tau_x}^+) e^{-\frac{1}{2} \int_0^{\tau_x} g(B_s) ds} \right] = 1.$$

由于 τ_x 是 L 的增加时刻，几乎必然有 $B_{\tau_x} = 0$ (见第 VI 章第 2 节)；当然还有 $L_{\tau_x} = x$ 。因此

$$E \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^{\tau_x} g(B_s) ds \right) \right] = \exp \left(\frac{x}{2} F'_g(0) \right).$$

由占用时间公式，也可写成

$$E \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^\infty g(u) L_{\tau_x}^u du \right) \right] = \exp \left(\frac{x}{2} F'_g(0) \right).$$

把它与定理 1.7 比较；由于 g 任意，证明完成。 $\square$

注。

- 1°) 第二 Ray-Knight 定理也可按第一定理的证明模式来证明 (见练习 2.8)；反之亦然 (见练习 2.7)。
- 2°) 第 VI 章练习 4.14 也计算了随机变量 $L_{\tau_x}^a$ 的分布。这里的结论强得多，因为它给出整个过程的分布。

下面利用第一 Ray-Knight 定理，证明一个对局部时很有用的 BDG 型不等式；第 X 章练习 1.14 已提示过它的一种证明。

定理 2.4. 对每个 $p \in (0, \infty)$ ，存在常数 $0 < c_p < C_p < \infty$ ，使任意从零出发的连续局部鞅都满足

$$c_p E[(M_\infty^*)^p] \leq E[(L_\infty^*)^p] \leq C_p E[(M_\infty^*)^p],$$

其中 (L^a) 是 M 的局部时族, 并且

$$L_t^* = \sup_{a \in \mathbb{R}} L_t^a.$$

证明。由 BDG 不等式, 在定理陈述或证明中都可以用 $\langle M, M \rangle_\infty^{1/2}$ 代替 M_∞^* 。占用时间公式给出

$$\begin{aligned} \langle M, M \rangle_\infty &= \int_{-\infty}^{+\infty} L_\infty^a \, da = \int_{-M_\infty^*}^{M_\infty^*} L_\infty^a \, da \\ &\leq 2M_\infty^* L_\infty^*. \end{aligned}$$

因此存在常数 d_p , 使

$$E[(M_\infty^*)^p] \leq d_p E[(M_\infty^*)^p]^{1/2} E[(L_\infty^*)^p]^{1/2}.$$

若左侧期望有限 (总可先停止来保证), 除以其平方根便得到左边的不等式。

下面证明右边的不等式。设 T_t 是与 $\langle M, M \rangle$ 相伴的时间变换。由第 V 章第 1 节,

$$B_t = M_{T_t}$$

是一个可能停在 $S = \langle M, M \rangle_\infty$ 的布朗运动。简单应用占用时间公式可知, $(L_{T_t}^a)$ 是 $B_{t \wedge S}$ 的局部时族, 记为 (l_t^a) , 从而 $L_\infty^* = l_S^*$ 。因此只需在 M 是被停止布朗运动时证明右边不等式。令

$$\xi_n = \inf\{t : |B_t| = 2^n\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

当 $n = 0$ 时, $\xi_0 = T_1 \wedge T_{-1}$, 所以

$$E[L_{\xi_0}^*] \leq E \left[\sup_{0 \leq a \leq 1} L_{T_1}^a \right] + E \left[\sup_{-1 \leq a \leq 0} L_{T_{-1}}^a \right].$$

由第一 Ray-Knight 定理, $L_{T_1}^{1-a} - 2a$ 是具有任意阶矩的鞅; 因此由第 II 章定理 1.7, 上式有限。换言之, 存在常数 K , 使

$$E[L_{\xi_0}^*] = K.$$

再利用 (B_t, L_t) 的尺度不变性 (第 VI 章练习 2.11), 得到

$$E[L_{\xi_n}^*] = 2^n K.$$

先证明 $p = 1$ 的情形。考虑停时

$$T = \inf\{\xi_n : \xi_n \geq S\}.$$

它满足

$$B_S^* \leq B_T^* \leq 2B_S^* + 1;$$

右端的 1 在 $T = \xi_0$ 时是必要的。显然 $E[L_S^*] \leq E[L_T^*]$ 。固定整数 m , 将基项单独保留并作望远镜求和:

$$\begin{aligned} E[L_{T \wedge \xi_m}^*] &= E[L_{T \wedge \xi_0}^*] \\ &\quad + E \left[\sum_{n=0}^{m-1} (L_{T \wedge \xi_{n+1}}^* - L_{T \wedge \xi_n}^*) \right]. \end{aligned}$$

显然

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \xi_{n+1} \circ \theta_{\xi_n}.$$

由局部时的强可加性 (第 X 章命题 1.2),

$$L_{\xi_{n+1}}^* \leq L_{\xi_n}^* + L_{\xi_{n+1}}^* \circ \theta_{\xi_n}.$$

因此

$$\begin{aligned} E[L_{T \wedge \xi_m}^*] &\leq K + E \left[\sum_{n=0}^{m-1} \mathbf{1}_{\{T > \xi_n\}} L_{\xi_{n+1}}^* \text{circ} \theta_{\xi_n} \right] \\ &= K + E \left[\sum_{n=0}^{m-1} \mathbf{1}_{\{T > \xi_n\}} E_{B_{\xi_n}} [L_{\xi_{n+1}}^*] \right]. \end{aligned}$$

若 $|a| = 2^n$, 则在 P_a 下

$$\xi_{n+1}(B) = \xi_{n+2}(B - a), \quad L_t^*(B - a) = L_t^*(B).$$

故

$$\begin{aligned} E[L_{T \wedge \xi_m}^*] &\leq K + E \left[\sum_{n=0}^{m-1} \mathbf{1}_{\{T > \xi_n\}} E_0 [L_{\xi_{n+2}}^*] \right] \\ &= K + E \left[\sum_{n=0}^{m-1} 2^{n+2} K \mathbf{1}_{\{T > \xi_n\}} \right] \\ &\leq K + 4KE[B_{T \wedge \xi_m}^*]. \end{aligned}$$

令 $m \rightarrow \infty$, 得到

$$E[L_S^*] \leq E[L_T^*] \leq K + 4KE[B_T^*] \leq 5K + 8KE[B_S^*].$$

把这一不等式应用于布朗运动 $c^{-1}B_{c^2t}$ 及时间 $c^{-2}S$, 可得

$$E[L_S^*] \leq 5Kc + 8KE[B_S^*].$$

令 $c \downarrow 0$, 便证明了 $p = 1$ 时的结论。回到 M , 即

$$E[L_\infty^*(M)] \leq 8KE[M_\infty^*]. \quad (*)$$

为完成证明, 对任意停时 S , 把 (*) 应用于局部鞅 $(M_{S+t} - M_S, t \geq 0)$, 得到相应的条件估计

$$E[L_\infty^*(M) - L_S^*(M) \mid \mathcal{F}_S] \leq 8KE[M_{S,\infty}^* \mid \mathcal{F}_S],$$

其中 $M_{S,\infty}^* = \sup_{t \geq S} |M_t - M_S|$ 。在第 IV 章练习 4.29 的 Garsia-Neveu 引理中取

$$A_t = L_t^*, \quad X = 8KM_\infty^*, \quad F(A) = A^p,$$

便得到任意 $p > 0$ 的结论。 □

²⁰**校订注:** 原书在定理 2.4 的证明中把 $E[L_{T \wedge \xi_m}^*]$ 直接写成从 $n = 0$ 开始的望远镜差之和, 漏掉了基项 $E[L_{T \wedge \xi_0}^*]$ 。该项不超过 K ; 上文补入后先得到带常数的估计, 再通过原证明已有的尺度变换令 $c \downarrow 0$ 消去该常数, 定理结论不变。原书同一尺度换算还把应为一的 c 误印成 c^2 ; 这同样不影响令 $c \downarrow 0$ 后的结论, 上文已按正确尺度改写。

练习 2.5 (*; BES^d 的局部时)。

1°) 设 $(l^a, a \geq 0)$ 是 $\text{BES}^3(0)$ 的局部时族。证明过程

$$(l_\infty^a, a \geq 0)$$

是 $\text{BESQ}^2(0)$ 。

提示：使用第 VII 章推论 4.6 的时间反演结果。

2°) 对 $p > 0$, 设 (λ^a) 是 $\text{BES}^{2p+3}(0)$ 的局部时族。证明过程

$$(\lambda_\infty^a, a \geq 0)$$

与 $(|V_p(a)|^2, a \geq 0)$ 同分布, 其中

$$V_p(a) = a^{-p} \int_0^a s^p d\beta_s,$$

β 是二维布朗运动。

提示：使用本章练习 1.19 和第 VI 章练习 1.23。

3°) 第 2° 问也可表述如下：若 (l^a) 是 $\text{BES}^d(0)$ ($d \geq 3$) 的局部时族, 则

$$(l_\infty^a, a \geq 0) \stackrel{d}{=} ((d-2)^{-1} a^{d-1} U(a^{2-d}), a \geq 0),$$

其中 U 是 $\text{BESQ}^2(0)$ 。

提示：使用第 I 章命题 1.10(iv)。

4°) 设 f 是 $(0, \infty)$ 上的正 Borel 函数；对某个 $b > 0$, 它在 $[b, \infty)$ 上为零, 并且对每个 $c > 0$, 它在 $[c, \infty)$ 上有界。若 X 是 $d \geq 3$ 时的 $\text{BES}^d(0)$, 证明

$$\int_0^1 f(X_s) ds < \infty \quad \text{几乎必然} \iff \int_0^b r f(r) dr < \infty.$$

提示：使用下述引理。设 μ 是 $(0, 1]$ 上的正 Radon 测度, $(V_r, r \in (0, 1])$ 是可测且严格为正的过程。若存在有界 Borel 函数 $\varphi: (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$, 使 $\varphi(r)^{-1} V_r$ 的分布与 r 无关, 并具有一阶矩, 则

$$\int_0^1 V_r \mu(dr) < \infty \quad \text{几乎必然} \iff \int_0^1 \varphi(r) \mu(dr) < \infty.$$

说明：维数 2 的情形见下一练习。

练习 2.6 (*).

1°) 设 X 是 $\text{BES}^2(0)$, (λ^a) 是它的局部时族, 并令

$$T_1 = \inf\{t : X_t = 1\}.$$

证明过程 $(\lambda_{T_1}^a, 0 < a < 1)$ 与

$$(aU_{-\log a}, 0 < a < 1)$$

同分布, 其中 U 是 $\text{BESQ}^2(0)$ 。

提示：使用上一练习第 1° 问和第 VII 章练习 4.12。

2°) 在同样的假设下, 仿照上一练习第 4° 问证明

$$\int_0^1 f(X_s) ds < \infty \quad \text{几乎必然} \iff \int_0^1 r |\log r| f(r) dr < \infty.$$

推出: 对二维布朗运动, 存在关于二维 Lebesgue 测度可积的函数 f , 却对每个 $t > 0$ 都有

$$\int_0^t f(B_s) ds = +\infty \quad P_0\text{-几乎必然}.$$

第 X 章定理 3.12 后注 4 已说明这一事实的重要性。

练习 2.7 (*; 第一 Ray-Knight 定理的另一证明)。

1°) 设 Z 是随机微分方程

$$Z_t = 2 \int_0^t \sqrt{Z_s} d\beta_s + 2 \int_0^t \mathbf{1}_{\{0 \leq s \leq 1\}} ds, \quad Z_0 = 0,$$

的唯一正解。证明停时

$$\sigma = \inf\{t : Z_t = 0\}$$

几乎必然有限且大于 1。

2°) 设 g 是 $\mathbb{R}$ 上具有紧支集的正连续函数, f 是方程

$$f'' = 2fg$$

满足 $f'(-\infty) = 0$, $f(0) = 1$ 的严格正递增解。沿用定理 2.2 的记号, 证明

$$E \left[\exp \left(- \int_{-\infty}^1 g(a) L_{T_1}^a da \right) \right] = f(1)^{-1}.$$

3°) 对 $x \geq 0$ 置 $v(x) = f(1-x)$ 。验证

$$v(a \wedge 1)^{-1} \exp \left\{ Z_a \frac{v'(a)}{2v(a)} - \int_0^a g(1-b) Z_b db \right\}$$

是局部鞅, 并推出

$$E \left[\exp \left(- \int_0^\infty g(1-b) Z_b db \right) \right] = f(1)^{-1}.$$

4°) 证明 $(L_{T_1}^{1-a}, a \geq 0)$ 与 $(Z_a, a \geq 0)$ 同分布; 这特别蕴含定理 2.2。

练习 2.8 (*; 第二 Ray-Knight 定理的另一证明)。

1°) 在定理 2.3 的情形中, 以 (Z'_a) 表示过程 $(L_{\tau_x}^a, a \geq 0)$ 的完备右连续滤过。证明任意 $H \in L^2(\mathcal{Z}'_a)$ 都可写成

$$H = E[H] + \int_0^{\tau_x} h_s \mathbf{1}_{\{0 < B_s < a\}} dB_s$$

的形式, 其中 h 适当。

2°) 证明 $L_{\tau_x}^a - x$ 是 (Z'_a) -鞅, 并由此给出定理 2.3 的另一证明。

练习 2.9 (*; 利用游程滤过的证明)。 设 B 是标准一维布朗运动。对 $x \in \mathbb{R}$, 以 τ_t^x 表示

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s \leq x\}} \, ds$$

的时间变换逆, 并令

$$\mathcal{E}_x = \sigma(B_{\tau_t^x} : t \geq 0).$$

1°) 当 $x \leq y$ 时, 证明 $\mathcal{E}_x \subset \mathcal{E}_y$ 。

2°) 证明对 $H \in L^2(\mathcal{E}_x)$, 存在 $(\mathcal{F}_t)$ -可预测过程 h , 满足

$$E \left[\int_0^\infty h_s^2 \mathbf{1}_{\{B_s \leq x\}} \, ds \right] < \infty$$

且

$$H = E[H] + \int_0^\infty h_s \mathbf{1}_{\{B_s \leq x\}} \, dB_s.$$

3°) 对 $x \in \mathbb{R}$, 定义

$$\mathcal{G}_t^x = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma(\mathcal{F}_{t+\varepsilon}, \mathcal{E}_x).$$

证明若 Y 是 $(\mathcal{F}_t)$ -局部鞅, 则

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s < x\}} \, dY_s$$

关于滤过 $(\mathcal{G}_t^x)$ 是局部鞅。

4°) 设 $a \in \mathbb{R}$, T 是 $(\mathcal{G}_t^a)$ -停时, 满足 $B_T \leq a$ 几乎必然, 且 L_T^a 是 $\mathcal{E}_a$ -可测的。对 $a \leq x < y$, 置

$$V_t = \frac{1}{2}(L_t^y - L_t^x) + y^- - x^- - (B_t - y)^+ + (B_t - x)^+.$$

证明

$$E[\langle V, V \rangle_T \mid \mathcal{G}_0^x] < \infty.$$

提示: 对 $p > 0$, 令

$$F(z) = \cosh\left(\sqrt{2p}(y - \sup(z, x))^+\right), \quad 2c = \sqrt{2p} \tanh\left(\sqrt{2p}(y - x)\right).$$

过程

$$U_t = F(B_{t \wedge T}) \exp\{-c(L_T^x - L_{t \wedge T}^x)\} \\ \times \exp\left\{-p \int_0^{t \wedge T} \mathbf{1}_{\{x < B_s \leq y\}} \, ds\right\}$$

是有界的 $(\mathcal{G}_t^x)$ -鞅。

5°) 证明

$$(L_T^y + 2y^-, y \geq a)$$

是关于 $(\mathcal{E}_y)_{y \geq a}$ 的连续鞅, 其递增过程为

$$4 \int_a^y L_T^z \, dz.$$

由此给出 Ray-Knight 定理的另一证明。

练习 2.10 (*; 布朗运动的增加点)。 设 B 是标准一维布朗运动。

1°) 设 $r > 0$, Γ 是由下述路径 ω 组成的集合: 存在 $U(\omega) < r$, 使

$$\begin{aligned} B_t(\omega) &< B_{U(\omega)}(\omega), \quad 0 \leq t < U(\omega), \\ B_t(\omega) &> B_{U(\omega)}(\omega), \quad U(\omega) < t \leq r. \end{aligned}$$

取有理数 x , 令 $S_r = \sup_{s \leq r} B_s$ 。证明在

$$\Gamma \cap \{B_U < x < S_r\}$$

上几乎必然有

$$L_{T_x}^{B_U} = L_U^{B_U} > 0,$$

并由此证明 Γ 是零测集。

2°) 若 f 是 $\mathbb{R}_+$ 上连续函数, 称 t_0 是 f 的一个增加点, 若存在 $\varepsilon > 0$, 使

$$\begin{aligned} f(t) &\leq f(t_0), \quad t_0 - \varepsilon \leq t < t_0, \\ f(t) &\geq f(t_0), \quad t_0 < t \leq t_0 + \varepsilon. \end{aligned}$$

证明几乎所有布朗路径都没有增加点。这也给出布朗路径不可微性的另一证明。

提示: 对布朗路径使用第 VI 章练习 2.15, 把上述不等式替换成严格不等式。

3°) 证明: 对任意 $T > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$, 集合

$$\Lambda_T = \{t \leq T : B_t = x\}$$

几乎必然属于下列四类之一: 空集、单点集、完全集、一个完全集与一个孤立单点的并。

练习 2.11 (*).

1°) 通过验证相应 Laplace 变换相等, 从第 VI 章练习 4.17 的结果推出第一 Ray-Knight 定理。

2°) 类似地, 证明过程 $(L_{T_1}^a, a \leq 0)$ 与

$$\left((1-a)^2 X \left(((1-a)^{-1} - (1-m)^{-1})^+ \right), a \leq 0 \right)$$

同分布, 其中 X 是 BESQ⁴, m 是取值于 $(-\infty, 0)$ 、与 X 独立且密度为 $(1-x)^{-2}$ 的随机变量。

提示: 关于 m 的分布, 见第 VI 章命题 3.13(i)。

练习 2.12 (*). 设 B 是标准一维布朗运动, (L^a) 是它的局部时族, 并置

$$Y_t = L_t^{B_t}.$$

1°) 若

$$\mathcal{G}_s^{(t)} = \mathcal{F}_s^B \vee \sigma(B_t),$$

证明对每个 t ,

$$\frac{1}{2} Y_t = B_t \wedge 0 - \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s > B_t\}} dB_s,$$

其中随机积分在滤过 $(\mathcal{G}_s^{(t)})$ 中取 (见第 IV 章练习 1.39)。

2°) 证明对每个 t ,

$$\sup_{\pi} E \left[\sum_{\pi} (Y_{s_{i+1}} - Y_{s_i})^4 \right] < \infty,$$

其中 $\pi = (s_i)$ 遍历 $[0, t]$ 的所有有限分割。

提示：使用 B 在滤过 $(\mathcal{G}_s^{(t)})$ 中的分解，以及分别用于局部鞅和局部时的 BDG 不等式。

练习 2.13。 沿用上一练习的记号。设 S 是 $(\mathcal{F}_t^B)$ -停时，并且映射 $x \mapsto L_S^x$ 是半鞅。证明：若 ϕ 连续，则沿用第 VI 章练习 1.35 的记号，有

$$P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\Delta_n} \left(\int_0^S \phi(Y_u) dL_u^{a_{i+1}} - \int_0^S \phi(Y_u) dL_u^{a_i} \right)^2 = 4 \int_a^b L_S^x \phi(L_S^x)^2 dx.$$

与第 VI 章练习 1.35 的结果比较，证明 Y 不是 $(\mathcal{F}_t^B)$ -半鞅。

提示：使用第 IV 章练习 1.33 第 3° 问的结果。

练习 2.14 (由空间渐近推出时间渐近；练习 1.32 的续题)。 通过考察

$$\frac{1}{\log \sqrt{u}} \int_0^\infty |B_s|^{-2} \mathbf{1}_{\{1 \leq |B_s| \leq \sqrt{u}\}} ds,$$

证明第 X 章练习 3.20 在 $d = 3$ 时的结论。

提示：使用练习 2.5 所述的 $\text{BES}^3(0)$ 局部时的 Ray-Knight 定理。

3 Bessel 桥

除少数定义外，本节内容在后文中不再使用。我们将把第 1 节的若干结果推广到所谓的 Bessel 桥。以下始终假设 $\delta > 0$ 。

对任意 $a > 0$ ，赋予一致收敛拓扑的空间

$$W_a = C([0, a], \mathbb{R})$$

是 Polish 空间，而且由坐标过程 X 生成的 σ -代数正是其 Borel σ -代数（见第 XIII 章第 1 节）。因此， $P_x^\delta[\cdot | X_a]$ 存在正则条件分布；也就是说，存在 W_a 上的一族概率测度 $P_{x,y}^{\delta,a}$ ，使得对每个 Borel 集 Γ ，

$$P_x^\delta[\Gamma] = \int P_{x,y}^{\delta,a}[\Gamma] \mu_a(dy),$$

其中 μ_a 是 P_x^δ 下 X_a 的分布。非严格地说，

$$P_{x,y}^{\delta,a}[\Gamma] = P_x^\delta[\Gamma | X_a = y].$$

当 x, δ, a 固定时，这些条件概率关于 y 只在零测集之外被确定；利用第 1 节所得半群密度 p_t^δ 的显式表达式，可以选取一个规范版本。对 $y > 0$ ，规定在 $0 < t_1 < \cdots < t_n < a$ 时， $P_{x,y}^{\delta,a}$ 下 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ 关于 $dx_1 \cdots dx_n$ 的密度为

$$\frac{p_{t_1}^\delta(x, x_1) p_{t_2-t_1}^\delta(x_1, x_2) \cdots p_{a-t_n}^\delta(x_n, y)}{p_a^\delta(x, y)}.$$

该密度在 $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ 上是 y 的连续函数。又因 z 很小时 $I_\nu(z) \sim c_\nu z^\nu$, 不难看出上述密度在 $y \rightarrow 0$ 时存在极限, 而且这些极限本身组成一族相容的有限维密度, 从而确定一个概率测度, 仍记为 $P_{x,0}^{\delta,a}$ 。下文的 $P_{x,y}^{\delta,a}$ 总指这一规范条件分布族。映射

$$(x, y) \mapsto P_{x,y}^{\delta,a}$$

关于第 XIII 章将引入的概率测度弱拓扑是连续的。

把上述分析中的 P_x^δ 换成 Q_x^δ , 同样得到概率测度族 $Q_{x,y}^{\delta,a}$ 。于是作如下定义。

定义 3.1. 分布为 $P_{x,y}^{\delta,a}$ (分别为 $Q_{x,y}^{\delta,a}$) 的连续过程, 称为区间 $[0, a]$ 上从 x 到 y 的 *Bessel 桥* (分别为 *Bessel 平方桥*), 记作

$$\text{BES}_a^\delta(x, y) \quad (\text{分别为 } \text{BESQ}_a^\delta(x, y)).$$

这些过程都是非齐次 Markov 过程。还可注意到, $\text{BES}_a^\delta(x, y)$ 的平方就是 $\text{BESQ}_a^\delta(x^2, y^2)$ 。

下一章特别需要 $\text{BES}_a^3(0, 0)$ 。在这种情形下, 第 VI 章第 3 节已经给出 BES^3 密度的显式表达式, 因此无须借助 Bessel 函数的性质即可计算桥的有限维密度。令

$$l_t(y) = (2\pi t^3)^{-1/2} y \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{\{y>0\}},$$

并记 q_t 为在零点杀死的布朗运动的半群密度。若 $0 < t_1 < \cdots < t_n < a$, 则 $P_{0,z}^{3,a}$ 下 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ 的密度为

$$\frac{l_{t_1}(y_1)q_{t_2-t_1}(y_1, y_2) \cdots q_{a-t_n}(y_n, z)}{l_a(z)}.$$

令 $z \downarrow 0$, 得到 $P_{0,0}^{3,a}$ 的相应密度

$$2(2\pi a^3)^{1/2} l_{t_1}(y_1)q_{t_2-t_1}(y_1, y_2) \cdots q_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1}, y_n)l_{a-t_n}(y_n).$$

现在把定理 1.7 推广到 $\text{BESQ}_a^\delta(x, y)$ 。仍用 $X_\mu = \int X_s \mu(ds)$ 表示相应的线性泛函。

定理 3.2. 设 μ 是支集包含于 $[0, 1]$ 的测度。则存在只依赖于 μ 的三个常数 $A, \hat{A}, B$, 使

$$Q_{x,y}^{\delta,1} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}X_\mu\right) \right] = A^x \hat{A}^y B^2 \frac{I_\nu(\sqrt{xy} B^2)}{I_\nu(\sqrt{xy})}.$$

证明. 沿用定理 1.7 证明中的记号, 在 $\mathcal{F}_1 = \sigma(X_s : s \leq 1)$ 上定义概率测度

$$R_x^{\delta,\mu} = Z_1^\mu \cdot Q_x^\delta.$$

记 $R_x^{\delta,\mu}$ 下 X_t 的密度为 $r_t^{\delta,\mu}(x, \cdot)$ 。由 Girsanov 定理, 在 $R_x^{\delta,\mu}$ 下, 坐标过程 X 满足

$$X_t = x + 2 \int_0^t \sqrt{X_s} d\beta_s + 2 \int_0^t F_\mu(s) X_s ds + \delta t. \quad (3.1)$$

若 H 满足线性方程

$$H_t = u + B_t + \int_0^t F_\mu(s) H_s ds, \quad (3.2)$$

则 H^2 满足方程 (3.1), 其中 $x = u^2$, 并且

$$\beta_t = \int_0^t \text{sgn}(H_s) dB_s.$$

方程 (3.2) 的解由第 IX 章命题 2.3 给出。因此 H_t 是均值为 $um(t)$ 、方差为 $\sigma^2(t)$ 的高斯随机变量，其中

$$m(t) = \phi_\mu(t), \quad \sigma^2(t) = \phi_\mu(t)^2 \int_0^t \phi_\mu(s)^{-2} ds.$$

回忆 $q_t^1(x, \cdot)$ 是均值为 $\sqrt{x}$ 、方差为 t 的高斯随机变量平方的密度，故

$$r_t^{1,\mu}(x, \cdot) = q_{\sigma^2(t)}^1(xm(t)^2, \cdot).$$

定理 1.2 还给出

$$R_x^{\delta,\mu} * R_{x'}^{\delta',\mu} = R_{x+x'}^{\delta+\delta',\mu},$$

因而

$$r_t^{\delta,\mu}(x, \cdot) = q_{\sigma^2(t)}^\delta(xm(t)^2, \cdot).$$

现在对任意非负 Borel 函数 f ，有

$$\begin{aligned} & \int Q_{x,y}^{\delta,1} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} X_\mu \right) \right] f(y) q_1^\delta(x, y) dy \\ &= R_x^{\delta,\mu} \left[(Z_1^\mu)^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2} X_\mu \right) f(X_1) \right] \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} (F_\mu(0)x + \delta \log \phi_\mu(1)) \right\} R_x^{\delta,\mu} [f(X_1)], \end{aligned}$$

这里用到了 $\phi'_{\mu,+}(1) = 0$ 。所以对 Lebesgue 几乎处处的 y ,

$$\begin{aligned} Q_{x,y}^{\delta,1} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} X_\mu \right) \right] &= \exp \left\{ \frac{1}{2} (F_\mu(0)x + \delta \log \phi_\mu(1)) \right\} \frac{r_1^{\delta,\mu}(x, y)}{q_1^\delta(x, y)} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} (F_\mu(0)x + \delta \log \phi_\mu(1)) \right\} \frac{q_{\sigma^2(1)}^\delta(xm(1)^2, y)}{q_1^\delta(x, y)}. \end{aligned}$$

把 $\sigma^2(1)$ 、 $m(1)^2$ 的显式表达式以及第 1 节的 q_1^δ 代入，便得到所需形式；再由关于 y 的连续性，结论对每个 y 都成立。 $\square$

在某些情形下可以明确算出上述常数，由此得到下述结果。

推论 3.3. 对每个 $b \geq 0$,

$$\begin{aligned} & Q_{x,y}^{\delta,1} \left[\exp \left(-\frac{b^2}{2} \int_0^1 X_s ds \right) \right] \\ &= \frac{b}{\sinh b} \exp \left\{ \frac{x+y}{2} (1 - b \coth b) \right\} \frac{I_\nu(b\sqrt{xy}/\sinh b)}{I_\nu(\sqrt{xy})}. \end{aligned}$$

特别地，

$$\begin{aligned} Q_{x,0}^{\delta,1} \left[\exp \left(-\frac{b^2}{2} \int_0^1 X_s ds \right) \right] &= Q_{0,x}^{\delta,1} \left[\exp \left(-\frac{b^2}{2} \int_0^1 X_s ds \right) \right] \\ &= \left(\frac{b}{\sinh b} \right)^{\delta/2} \exp \left\{ \frac{x}{2} (1 - b \coth b) \right\}. \end{aligned}$$

证明. 仿照推论 1.8 的证明计算即可，细节留给读者。 $\square$

下面把推论 1.12 推广到 Bessel 桥。先证明一个时间变换引理。

引理 3.4。 设 X 是实值 Markov 过程, g 是正 Borel 函数, 并且

$$\int_0^\infty g(X_s)^{-1} ds = \infty.$$

令

$$C_t = \int_0^t g(X_s)^{-1} ds, \quad \hat{X}_t = X_{\hat{C}_t},$$

其中 $\hat{C}$ 是与 C 相伴的时间变换。则

$$d\hat{C}_t = g(\hat{X}_t) dt.$$

进一步, 假设存在下列密度:

$$\begin{aligned} p_t(x, y) &= P_x[X_t \in dy] / dy, & \hat{p}_t(x, y) &= P_x[\hat{X}_t \in dy] / dy, \\ h_{x,y}(t, u) &= P_x[C_t \in du \mid X_t = y] / du, & \hat{h}_{x,y}(t, u) &= P_x[\hat{C}_t \in du \mid \hat{X}_t = y] / du. \end{aligned}$$

那么对 $dt du dy$ -几乎处处,

$$\hat{p}_u(x, y)g(y)\hat{h}_{x,y}(u, t) = p_t(x, y)h_{x,y}(t, u).$$

证明。 第一项结论在前文已经多次证明。为证第二项, 任取正 Borel 函数 $\phi, \hat{\phi}, f$ 。一方面,

$$E_x \left[\int_0^\infty \hat{\phi}(t) f(X_t) \phi(C_t) dt \right] = \int_0^\infty \hat{\phi}(t) dt \int p_t(x, y) f(y) dy \int \phi(u) h_{x,y}(t, u) du.$$

另一方面, 利用时间变换公式, 同一表达式等于

$$E_x \left[\int_0^\infty \hat{\phi}(\hat{C}_t) f(\hat{X}_t) g(\hat{X}_t) \phi(t) dt \right] = \int_0^\infty \phi(t) dt \int \hat{p}_t(x, y) g(y) f(y) dy \int \hat{\phi}(u) \hat{h}_{x,y}(t, u) du.$$

在最后一个表达式中交换 t, u 的角色, 再与前式比较即得结论。□

定理 3.5。 设 $\nu > 0$, $p, q > 1$ 是共轭指数, 并令 $(\rho_\nu(t), 0 \leq t \leq 1)$ 为 $\text{BES}_1^{(\nu)}(0, 0)$ 。置

$$x_{\nu,p} = \int_0^1 \rho_\nu(s)^{-2/p} ds, \quad y_{\nu,p} = q^{2/p} \left(\int_0^1 \rho_{\nu q}(s)^{2q/p} ds \right)^{-1/q}.$$

再令

$$\lambda_\nu = (2^\nu \Gamma(\nu + 1))^{-1}.$$

则对每个正 Borel 函数 f ,

$$\lambda_\nu E[f(x_{\nu,p})(q^{-2}x_{\nu,p})^{\nu q}] = \lambda_{\nu q} E[f(y_{\nu,p})].$$

证明。 在引理 3.4 中取 $g(x) = x^{2/p}$, 并令 X 为从零点出发的 $\text{BES}^{(\nu)}$ 。由命题 1.11,

$$\hat{X}_t = X_{\hat{C}_t} = (q^{-1}R_{\nu q}(t))^q,$$

其中 $R_{\nu q}$ 是 $\text{BES}^{(\nu q)}$ 。引理 3.4 的第一项结论给出

$$\widehat{C}_t = \int_0^t g(\widehat{X}_s) \, ds = q^{-2q/p} \int_0^t R_{\nu q}(s)^{2q/p} \, ds.$$

由 $p_t^{(\nu q)}(0, y)$ 作直接变量替换, 可知 $\widehat{X}_t$ 的密度 $\widehat{p}_t(0, y)$ 为

$$\lambda_{\nu q} t^{-(\nu q+1)} q^{2\nu q+1} y^{2\nu+(2/q)-1} \exp\left(-\frac{(qy^{1/q})^2}{2t}\right).$$

在引理 3.4 的等式中取 $u = 1, x = 0$, 约去 y 的幂, 得到

$$\begin{aligned} \lambda_{\nu q} q^{2\nu q+1} \exp\left(-\frac{(qy^{1/q})^2}{2t}\right) \widehat{h}_{0,y}(1, t) \\ = \lambda_{\nu} t^{-(\nu+1)} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) h_{0,y}(t, 1). \end{aligned}$$

再令 $y = 0$, 有

$$\lambda_{\nu q} q^{2\nu q+1} \widehat{h}_{0,0}(1, t) = \lambda_{\nu} t^{-(\nu+1)} h_{0,0}(t, 1).$$

由 $h_{x,y}$ 的定义和命题 1.10 中 X 的尺度性质可证

$$h_{0,0}(t, 1) = t^{-1/q} h_{0,0}(1, t^{-1/q});$$

这一验证留给读者。因此

$$\lambda_{\nu q} q^{2\nu q+1} \widehat{h}_{0,0}(1, t) = \lambda_{\nu} t^{-(\nu+1+1/q)} h_{0,0}(1, t^{-1/q}).$$

现在, $\widehat{h}_{0,0}(t, 1)$ 是 $y_{\nu,p}^{-q}$ 的密度, 而 $h_{0,0}(1, t)$ 是 $x_{\nu,p}$ 的密度。因此, 对正 Borel 函数 f ,

$$\begin{aligned} \lambda_{\nu q} E[f(y_{\nu,p})] &= \lambda_{\nu q} \int f(t^{-1/q}) \widehat{h}_{0,0}(1, t) \, dt \\ &= \lambda_{\nu} q^{-(2\nu q+1)} \int f(t^{-1/q}) t^{-(\nu+1+1/q)} h_{0,0}(1, t^{-1/q}) \, dt. \end{aligned}$$

作变量替换 $t = u^{-q}$, 上式等于

$$\begin{aligned} \lambda_{\nu} q^{-2\nu q} \int f(u) u^{\nu q} h_{0,0}(1, u) \, du &= \lambda_{\nu} \int f(u) (u/q^2)^{\nu q} h_{0,0}(1, u) \, du \\ &= \lambda_{\nu} E[f(x_{\nu,p})(x_{\nu,p}/q^2)^{\nu q}], \end{aligned}$$

即为所证。 □

练习 3.6。

²¹校订注: 原书在定理 3.5 的证明中, 对 $\widehat{X}_t = (q^{-1} R_{\nu q}(t))^q$ 作变量替换时, 把密度前的 $q^{2\nu q+1}$ 误印成 $q^{2\nu+1}$, 后续数行沿用了这一误排。由 $r = qy^{1/q}$ 及 $p_t^{(\nu q)}(0, r) \propto r^{2\nu q+1}$ 可直接核验正确指数; 修正后变量替换 $t = u^{-q}$ 正好给出定理陈述中的 $(u/q^2)^{\nu q}$ 。

1°) 证明: 在 Q_x^δ 下, 过程

$$(1-u)^2 X_{u/(1-u)}, \quad 0 \leq u < 1,$$

的分布为 $Q_{x,0}^{\delta,1}$ 。

2°) 证明

$$Q_{x,0}^{\delta,1} * Q_{x',0}^{\delta',1} = Q_{x+x',0}^{\delta+\delta',1}.$$

练习 3.7. 若 X 的分布为 P , 记 $\tilde{P}$ 为过程 $(X_{1-t}, 0 \leq t \leq 1)$ 的分布。证明

$$Q_{x,y}^{\delta,1} = \tilde{Q}_{y,x}^{\delta,1}.$$

练习 3.8 (*)。陈述并证明整数维 Bessel 桥与布朗桥模长之间的关系。由此推出, 相应的 Bessel 桥是半鞅。

练习 3.9. 若 ρ 是 $\text{BES}_1^3(0,0)$, 证明

$$E \left[\int_0^1 \rho_s^{-1} ds \right] = \sqrt{2\pi}.$$

练习 3.10. 固定 $a > 0$ 。对任意满足 $t > a$ 的 x, y, δ, t , 证明 $P_{x,y}^{\delta,t}$ 在 $\mathcal{F}_a = \sigma(X_s : s \leq a)$ 上关于 P_x^δ 有密度 $Z_a^{(t)}$ 。证明当 $t \rightarrow \infty$ 时, $Z_a^{(t)}$ 逐点并在 $L^1(P_x^\delta)$ 中收敛到 1。这一事实有显然的直观解释; 布朗桥也有同样的结论。

提示: 使用密度的显式表达式。

练习 3.11 (*, Bessel 桥所满足的随机微分方程)。

1°) 证明: 当 $t < 1$ 时, 在 $\mathcal{F}_t$ 上有

$$P_{0,0}^{\delta,1} = h(t, X_t) P_0^\delta,$$

其中

$$h(t, x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{p_{1-t}^\delta(x, y)}{p_1^\delta(0, y)} = (1-t)^{-\delta/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2(1-t)}\right).$$

提示: 分别关于 $\sigma(X_1)$ 与 $\mathcal{F}_t$ 作条件期望, 计算

$$E_{P_0^\delta}[F(X_u, u \leq t) \phi(X_1)].$$

2°) 证明: 当 $\delta \geq 2$ 时, 区间 $[0, 1]$ 上从零到零的 Bessel 桥是随机微分方程

$$X_t = B_t + \int_0^t \left(\frac{\delta-1}{2X_s} - \frac{X_s}{1-s} \right) ds, \quad X_0 = 0,$$

的唯一解。

提示: 使用 Girsanov 定理。

3°) 证明 Bessel 平方桥是随机微分方程

$$X_t = 2 \int_0^t \sqrt{X_s} dB_s + \int_0^t \left(\delta - \frac{2X_s}{1-s} \right) ds$$

的唯一解。

练习 3.12。

1°) 证明 Bessel 过程满足第 X 章练习 1.12 的假设。

2°) 证明：当 $\delta > 2$ 时，

$$P_{x,y}^{\delta,a} = (P_x^\delta)^{L_y}[\cdot | L_y = a],$$

其中

$$L_y = \sup\{t : X_t = y\},$$

而记号 P^{L_y} 定义于第 XII 章第 4 节。

提示：使用第 VII 章练习 4.16。

注释与评述

第 1 节。 Bessel 过程的系统研究始于 McKean [1]。除了在布朗运动研究中的意义（见第 VI、VII 章）以外，它们还提供了扩散过程的基本例子，很适合用来检验一般猜想。定理 1.2 来自 Shiga-Watanabe [1]；事实上，这两位作者刻画了所有具有定理 1.2 可加性的扩散过程族（另见练习 1.13）。推论 1.3 与 1.4 来自 Molchanov [1]。 Q_x^δ 的一个显式 Lévy-Khintchine 公式见第 XII 章练习 4.21。练习 1.14 给出了 $W = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 上无穷可分分布的更多例子。由此自然产生下述问题。

问题 1。 连续高斯过程 $(X_t, t \geq 0)$ 的协方差 $\delta(s, t)$ 应满足什么条件，才能使 $(X_t^2, t \geq 0)$ 的分布无穷可分？

Eisenbaum [4] 给出了若干答案。

定理 1.7 取自 Pitman-Yor [3]，推论 1.8 见 Lévy [3]。命题 1.11 见 Biane-Yor [1]；该文还从 Itô 游程的层面讨论这些结果，并由此计算若干与布朗局部时 Hilbert 变换有关的分布；该变换的定义见第 VI 章练习 1.29。

练习 1.17 来自 Calais-Génin [1]。练习 1.22 来自 Yor [10] 与 Pitman-Yor [1]；Gruet [3] 对第 VIII 章第 3 节情形 3 提到的双曲 Bessel 过程族建立了类似结果。

该练习所描述的关系以及相关的 Hartman-Watson 分布（见 Yor [10]）已经用于若干问题：随机三角形的形状（Kendall [1]）、Bessel 过程的流（Hirsch-Song [1]），以及 SLE 过程的研究（Werner [1]）。

关于练习 1.25，见 Molchanov-Ostrovski [1]；他们把 $0 < \delta < 2$ 时 BES^δ 在零点的局部时分布识别为 Mittag-Leffler 分布。他们的结果也可从该题第 2° 问的结论恢复。

练习 1.26 可以作为深入研究 $0 < \delta < 1$ 时 BES^δ 的起点。Bertoin [6] 证明二维过程 (ρ, k) 的点 $(0, 0)$ 是正则点，并建立相应的游程理论。

练习 1.28 是 Lamperti ([1], [2]) 所研究的 Lévy 过程指数泛函与半稳定过程之间关系的一个特例；Lamperti 证明，Bessel 过程的幂是仅有的半稳定一维扩散。Lamperti 结果在布朗运动指数泛函方面的多种应用见 Yor ([27], [28])；关于 Cauchy 主值的其他应用见 Bertoin [9]。

练习 1.29 的结果，是 Saisho-Tanemura [1] 所得 Pitman 定理对暂留扩散推广的一个格外醒目的特例；另见 Rauscher [1]、Takaoka [1] 与 Yor [23]。

练习 1.33 取自 A. Göing 的学位论文 [1]；练习 1.34 一部分取自 Pitman-Yor [3]，另一部分取自 Föllmer-Wu-Yor [1]。

Bessel 过程及其平方后得到一系列推广，特别是推广到矩阵值扩散，从而产生例如 Wishart 过程 (Bru [1]–[3], Donati-Martin 等 [1])。Pitman 定理也已在这一框架内得到推广 (Bougerol-Jeulin [1], O’Connell-Yor [1]), 并被证明与表示论中 Littelmann 的若干重要结果紧密相关 (Biane-Bougerol-O’Connell [1])。

第 2 节。 Ray-Knight 定理由 Ray [1] 与 Knight [2] 独立证明。本书给出的第一 Ray-Knight 定理证明来自 Jeulin-Yor [1], 练习 2.8 中的第二个证明也是如此。练习 2.7 的证明来自 McGill [1], 并为正文中第二 Ray-Knight 定理的证明提供了范式。练习 2.9 给出另一个证明, 其基础来自 Walsh [2] (另见 Jeulin [3])。练习 2.11 来自 Ray [1]。

定理 2.4 的证明是 Barlow-Yor [1] 的原始证明。其困难在于按该方法必须处理 L_1^* 的可积性。Bass [2] 与 Davis [5] 后来证明所需条件可以大幅减弱, 并给出一个更短的证明; 该证明见第 X 章练习 1.14。关于分析学中的相关发展, 见 Gundy [1]。

练习 2.5 与 2.6 分别来自 Williams [3] 与 Le Gall [3]; 练习 2.5 第 4° 问提示中的引理来自 Jeulin ([2], [4]), 练习 2.6 的最终结论来自 Pitman-Yor [5]。练习 2.10 的结果来自 Dvoretzky 等 [1], 练习 2.12 来自 Yor [12]。

本书没有讨论 Ray-Knight 定理的另一种途径, 即所谓 Dynkin 同构定理 (Dynkin [3]; 另见 Sheppard [1], Eisenbaum [2], [3], [5])。Marcus 与 Rosen ([1], [2]) 已由此导出关于 Lévy 过程局部时的许多结论。

练习 2.13 源于与 B. Toth、W. Werner 的讨论。Barlow [1] 还给出了另一个与练习 2.12 讨论相关的证明, 说明 $L_t^{B_t}$ 不是半鞅。研究这一问题的动机, 是希望把 Ray-Knight 定理推广到更一般的过程类 (例如扩散过程), 并可能在空间变量中得到不同于 Bessel 过程或 Ornstein-Uhlenbeck 过程平方的过程。

第 3 节。 本节结果见 Pitman-Yor ([1], [2]) 与 Biane-Yor [1]。

第 XII 章 游程

1 Poisson 点过程预备知识

本节始终考虑一个可测空间 $(U, \mathcal{U})$ 。另添一点 δ ，并置

$$U_\delta = U \cup \{\delta\}, \quad \mathcal{U}_\delta = \sigma(\mathcal{U}, \{\delta\}).$$

定义 1.1. 设 $e = (e_t, t > 0)$ 定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上，取值于 $(U_\delta, \mathcal{U}_\delta)$ 。若

- i) 映射 $(t, \omega) \mapsto e_t(\omega)$ 关于 $\mathcal{B}((0, \infty)) \otimes \mathcal{F}$ 可测；
- ii) 集合

$$D_\omega = \{t : e_t(\omega) \neq \delta\}$$

几乎必然可数，
则称 e 为一个点过程。

条件 ii) 的准确含义是：集合 $\{\omega : D_\omega \text{ 不可数}\}$ 包含于某个 P -零测的 $\mathcal{F}$ -可测集。

给定点过程后，对每个 $\Gamma \in \mathcal{U}$ ，可定义新点过程 e^Γ ：当 $e_t(\omega) \in \Gamma$ 时令 $e_t^\Gamma(\omega) = e_t(\omega)$ ，否则令 $e_t^\Gamma(\omega) = \delta$ 。称 e^Γ 为 e 在 Γ 上的迹。对 $A \in \mathcal{B}((0, \infty)) \otimes \mathcal{U}$ ，还置

$$N^A(\omega) = \sum_{t>0} \mathbf{1}_A(t, e_t(\omega)).$$

特别地，当 $A = (0, t] \times \Gamma$ 时，把 N^A 记为 N_t^Γ ；并记

$$N_t = \sum_{0 < s \leq t} \mathbf{1}_U(e_s).$$

定义 1.2. 若对每个 t ，几乎必然有 $N_t < \infty$ ，则称点过程 e 是离散的。若存在集合序列 (U_n) ，其并集为 U ，且每个 e^{U_n} 都离散，则称 e 是 σ -离散的。

若过程是 σ -离散的，则可以证明所有 N^A 都是随机变量；下文直接使用这一事实。

第 II 章练习 1.14 中定义的 Poisson 过程，可以看成如下点过程所对应的 N ：取 $U = \mathbb{R}_+$ ，若存在 n 使 $S_n(\omega) = t$ ，则令 $e_t(\omega) = t$ ，否则令 $e_t(\omega) = \delta$ 。更一般地，作如下定义。

定义 1.3. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 是滤过概率空间。若右连续适应过程 N 满足 $N_0 = 0$ ，而且存在常数 $c > 0$ ，使对每个 $s < t$ 与 $k \in \mathbb{N}$ ，

$$P[N_t - N_s = k \mid \mathcal{F}_s] = e^{-c(t-s)} \frac{[c(t-s)]^k}{k!},$$

则称 N 为参数为 c 的 $(\mathcal{F}_t)$ -Poisson 过程。记

$$\Delta N_t = N_t - N_{t-}.$$

第 II 章练习 1.14 中的 Poisson 过程，对其自然滤过 $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s : s \leq t)$ 而言就是上述意义下的 Poisson 过程。

命题 1.4. 一个右连续适应过程是 $(\mathcal{F}_t)$ -Poisson 过程, 当且仅当它是一个 Lévy 过程, 并且只通过大小几乎必然等于 1 的跳而递增。

证明. 设 N 是 $(\mathcal{F}_t)$ -Poisson 过程。从定义立即看出, 它是取整数值的 Lévy 过程, 且路径递增。因此, 对任意固定 T , $[0, T]$ 上的跳几乎必然只有有限个, 从而

$$\sup_{0 < t \leq T} (N_t - N_{t-}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n} (N_{kT/n} - N_{(k-1)T/n}) \quad \text{几乎必然.}$$

而

$$\begin{aligned} P \left[\max_{1 \leq k \leq n} (N_{kT/n} - N_{(k-1)T/n}) \leq 1 \right] \\ = P[N_{T/n} \leq 1]^n = \left(e^{-cT/n} (1 + cT/n) \right)^n \rightarrow 1. \end{aligned}$$

故 N 的每个跳几乎必然都等于 1。

反过来, 若 N 是只以大小 1 的跳递增的 Lévy 过程, 则路径右连续性说明每个整数状态都有一段停留时间; 再由空间齐次性, 各次跳之间的等待时间相互独立, 并具有同一参数的指数分布。因此 $N_t - N_s$ 服从 Poisson 分布, 结论成立。□

下面列出 Poisson 过程的若干性质。其证明留给读者。先回忆第 II 章练习 1.14: 若

$$M_t = N_t - ct,$$

则 M 与 $M_t^2 - ct$ 都是 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅。更一般地, 由于 N 的路径递增且右连续, 逐路径的 Stieltjes 积分 $\int Z \, dN$ 有意义。若 Z 可预测, 并且对每个 t ,

$$E \left[\int_0^t |Z_s| \, ds \right] < \infty,$$

则

$$\int_0^t Z_s \, dN_s - c \int_0^t Z_s \, ds = \int_0^t Z_s \, dM_s$$

是鞅。可先对初等过程证明, 再取极限。这个性质不能推广到任意可选过程, 见练习 1.14。

与布朗运动一样, Poisson 过程也有指数鞅。若 $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, 则

$$L_t^f = \exp \left\{ i \int_0^t f(s) \, dN_s - c \int_0^t (e^{if(s)} - 1) \, ds \right\}$$

是 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅。仍可从阶梯函数出发取极限, 也可直接应用第 0 章第 4 节的 Stieltjes 积分链式法则。

最后, 由于跳时刻的分布无原子, 对任意 Poisson 过程和每个固定时刻 t , 几乎必然有 $\Delta N_t = 0$ 。这也可由第 III 章定理 2.7 之后的一般说明推出。

命题 1.5. 若 N^1, N^2 是两个相互独立的 Poisson 过程, 则

$$\sum_{s>0} (\Delta N_s^1)(\Delta N_s^2) = 0 \quad \text{几乎必然.}$$

换言之, 这两个过程几乎必然不会同时跳。

证明。 令 T_n ($n \geq 1$) 为 N^1 的相继跳时刻。则

$$\sum_{s>0} (\Delta N_s^1)(\Delta N_s^2) = \sum_{n \geq 1} \Delta N_{T_n}^2 \quad \text{几乎必然.}$$

对每个固定 t , $\Delta N_t^2 = 0$ 几乎必然; 再利用 N^2 与各 T_n 的独立性, 得到对每个 n , $\Delta N_{T_n}^2 = 0$ 几乎必然。结论得证。□

现在把 Poisson 过程推广到高维。

定义 1.6。 若 $N = (N^1, \dots, N^d)$ 的每个分量都是右连续适应过程, $N_0^i = 0$, 并且存在常数 $c_i > 0$, 使对每个 $t > s \geq 0$ 与 $k_i \in \mathbb{N}$,

$$P[N_t^i - N_s^i = k_i, 1 \leq i \leq d | \mathcal{F}_s] = \prod_{i=1}^d e^{-c_i(t-s)} \frac{[c_i(t-s)]^{k_i}}{k_i!},$$

则称 N 是 d 维 $(\mathcal{F}_t)$ -Poisson 过程。

由命题 1.5, 任意两个分量 N^i, N^j 都不会同时跳。反过来也有:

命题 1.7。 适应过程 $N = (N^1, \dots, N^d)$ 是 d 维 $(\mathcal{F}_t)$ -Poisson 过程, 当且仅当

- i) 每个 N^i 都是 $(\mathcal{F}_t)$ -Poisson 过程;
- ii) 任意两个 N^i 几乎必然不同时跳。

证明。 只须证明充分性, 即随机变量 $N_t^i - N_s^i$ ($1 \leq i \leq d$) 相互独立。为清楚起见, 只写 $d = 2$ 的情形。对 $\mathbb{R}_+$ 上任意两个简单函数 f_1, f_2 , 令

$$X_t = \exp \left\{ i \int_0^t f_1(s) dN_s^1 + i \int_0^t f_2(s) dN_s^2 \right\}.$$

X 只通过跳而变化, 故

$$\begin{aligned} X_t &= 1 + \sum_{0 < s \leq t} (X_s - X_{s-}) \\ &= 1 + \sum_{0 < s \leq t} X_{s-} \{ \exp(i f_1(s) \Delta N_s^1 + i f_2(s) \Delta N_s^2) - 1 \}. \end{aligned}$$

由条件 ii), 当 $\Delta N_s^1 = 1$ 时必有 $\Delta N_s^2 = 0$, 反之亦然。因此

$$X_t = 1 + \sum_{0 < s \leq t} X_{s-} \left\{ (e^{i f_1(s)} - 1) \Delta N_s^1 + (e^{i f_2(s)} - 1) \Delta N_s^2 \right\}.$$

过程 X_{s-} 可预测。对鞅 $M_s^j = N_s^j - c_j s$ 积分, 得到

$$E[X_t] = 1 + E \int_0^t X_{s-} \left\{ c_1(e^{i f_1(s)} - 1) + c_2(e^{i f_2(s)} - 1) \right\} ds.$$

集合 $\{s : X_s \neq X_{s-}\}$ 几乎必然可数, 因而 Lebesgue 零测; 所以可把 X_{s-} 换成 X_s 。于是

$$\begin{aligned} E[X_t] &= \exp \left\{ \int_0^t c_1(e^{i f_1(s)} - 1) ds \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_0^t c_2(e^{i f_2(s)} - 1) ds \right\}. \end{aligned}$$

联合特征函数因式分解, 故两个分量独立。一般 d 的情形完全相同。□

下面给出本节最重要的定义。

定义 1.8. 称一个 σ -离散点过程 $e = (e_t)$ 为 $(\mathcal{F}_t)$ -Poisson 点过程, 简称 $(\mathcal{F}_t)$ -PPP, 若

- i) e 是 $(\mathcal{F}_t)$ -适应的, 即对每个 $\Gamma \in \mathcal{U}$, 过程 N^Γ 都适应;
- ii) 对任意 $s \geq 0, t > 0$ 与 $\Gamma \in \mathcal{U}$, 在给定 $\mathcal{F}_s$ 的条件下, $N_{s+t}^\Gamma - N_s^\Gamma$ 的分布与 N_t^Γ 的分布相同。

条件 ii) 表示过程在时间上齐次, 且增量独立于过去。由命题 1.4 与 1.7, 只要 $N_t^\Gamma < \infty$ 对每个 t 几乎必然成立, N^Γ 就是 Poisson 过程; 若 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_d$ 两两不交, 且各 $N_t^{\Gamma_i} < \infty$, 则 $(N^{\Gamma_1}, \dots, N^{\Gamma_d})$ 是 d 维 Poisson 过程。此外, 这时 $E[N_t^\Gamma] < \infty$, 且映射 $t \mapsto E[N_t^\Gamma]$ 可加, 所以 $t^{-1}E[N_t^\Gamma]$ 与 $t > 0$ 无关。

定义 1.9. 由

$$n(\Gamma) = \frac{1}{t} E[N_t^\Gamma], \quad t > 0,$$

定义的 $\mathcal{U}$ 上 σ -有限测度 n , 称为 e 的特征测度。把它延拓到 U_δ , 规定

$$n(\{\delta\}) = 0.$$

若 $n(\Gamma) < \infty$, 则 $n(\Gamma)$ 就是 Poisson 过程 N^Γ 的参数。若 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{U}$, 单调类定理容易给出

$$E[N^A] = \int_0^\infty dt \int_U \mathbf{1}_A(t, u) n(du).$$

还要注意: 若 $n(\Gamma) < \infty$, 则 $N_t^\Gamma - tn(\Gamma)$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅。更一般地, 有下述主公式。

命题 1.10 (主公式). 设 H 是定义在 $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times U_\delta$ 上的非负过程, 关于 $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{U}_\delta$ 可测, 并且在 δ 处为零。则

$$E \left[\sum_{s>0} H(s, \omega, e_s(\omega)) \right] = E \left[\int_0^\infty ds \int_{U_\delta} H(s, \omega, u) n(du) \right].$$

证明. 满足该等式的非负过程 H 构成一个对单调递增极限稳定的锥。由单调类定理, 只须验证

$$H(s, \omega, u) = K(s, \omega) \mathbf{1}_\Gamma(u),$$

其中 K 是有界非负可预测过程, $\Gamma \in \mathcal{U}$ 且 $n(\Gamma) < \infty$ 。此时左端为

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{s>0} K(s, \omega) \mathbf{1}_\Gamma(e_s(\omega)) \right] &= E \left[\int_0^\infty K(s, \omega) dN_s^\Gamma \right] \\ &= n(\Gamma) E \left[\int_0^\infty K(s, \omega) ds \right], \end{aligned}$$

因为 $N_t^\Gamma - tn(\Gamma)$ 是鞅。这正是右端。 □

推论 1.11. 若进一步对每个 t ,

$$E \left[\int_0^t ds \int_{U_\delta} |H(s, \omega, u)| n(du) \right] < \infty,$$

则过程

$$\sum_{0 < s \leq t} H(s, \omega, e_s(\omega)) - \int_0^t ds \int_{U_\delta} H(s, \omega, u) n(du)$$

是鞅。

证明。 直接由主公式和条件期望得到。 □

下一个结果说明：特征测度 n 刻画了 Poisson 点过程；也就是说，具有相同特征测度的两个 PPP 具有相同分布。

命题 1.12 (指数公式)。 设 f 关于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{U}_\delta$ 可测，并且

$$\int_0^t ds \int |f(s, u)| n(du) < \infty.$$

则对每个 $t < \infty$,

$$E \left[\exp \left(i \sum_{0 < s \leq t} f(s, e_s) \right) \right] = \exp \left\{ \int_0^t ds \int (e^{if(s, u)} - 1) n(du) \right\}.$$

若 $f \geq 0$, 还成立

$$E \left[\exp \left(- \sum_{0 < s \leq t} f(s, e_s) \right) \right] = \exp \left\{ - \int_0^t ds \int (1 - e^{-f(s, u)}) n(du) \right\}.$$

证明。 有限变差过程

$$X_t = \sum_{0 < s \leq t} f(s, e_s)$$

纯不连续。因此，对 $g \in C^1(\mathbb{R})$,

$$g(X_t) - g(X_0) = \sum_{s \leq t} (g(X_s) - g(X_{s-})).$$

令 $\varphi(t) = E[e^{iX_t}]$, 便有

$$\varphi(t) = 1 + E \left[\sum_{0 < s \leq t} \exp \left(i \sum_{0 < s' < s} f(s', e_{s'}) \right) (e^{if(s, e_s)} - 1) \right].$$

由主公式，右端等于

$$1 + E \int_0^t \exp \left(i \sum_{0 < s' < s} f(s', e_{s'}) \right) ds \int (e^{if(s, u)} - 1) n(du).$$

记

$$v(s) = \int (e^{if(s, u)} - 1) n(du).$$

由假设 $v \in L^1(\mathbb{R}_+)$, 并且

$$\varphi(t) = 1 + \int_0^t \varphi(s-) v(s) ds.$$

因此 φ 连续, 从而

$$\varphi(t) = \exp \left(\int_0^t v(s) \, ds \right),$$

即第一式。第二式同理。 $\square$

注。 在命题 1.12 中, 不能把确定性函数 f 换成命题 1.10 那样的随机过程 H , 见练习 1.22。命题 1.12 还有一个与推论 1.11 平行的鞅版本: 当 $a = i$ 或 $a = -1$ 时,

$$\exp \left\{ a \sum_{0 \leq s \leq t} f(s, e_s) + \int_0^t ds \int (1 - e^{af(s,u)}) n(du) \right\}$$

是鞅。

本节最后给出后文要用的一个引理。令

$$S = \inf\{t : N_t > 0\}.$$

引理 1.13。 若 $0 < n(U) < \infty$, 则 S 与 e_S 相互独立, 而且对每个 $\Gamma \in \mathcal{U}$,

$$P[e_S \in \Gamma] = \frac{n(\Gamma)}{n(U)}.$$

证明。 因为 Γ 与 Γ^c 不交, Poisson 过程 N^Γ, N^{Γ^c} 相互独立。令 T, T^c 分别为它们的首次跳时刻。对每个 t ,

$$\{S > t, e_S \in \Gamma\} = \{t < T < T^c\}.$$

T, T^c 是相互独立的指数随机变量, 参数分别为 $n(\Gamma), n(\Gamma^c)$ 。所以

$$\begin{aligned} P[S > t, e_S \in \Gamma] &= \int_t^\infty n(\Gamma) e^{-n(\Gamma)s} \, ds \int_s^\infty n(\Gamma^c) e^{-n(\Gamma^c)r} \, dr \\ &= \frac{n(\Gamma)}{n(U)} e^{-n(U)t}. \end{aligned}$$

这同时证明了 S, e_S 的独立性和所需分布公式, 并再次说明 S 服从参数为 $n(U)$ 的指数分布。 $\square$

练习 1.14。

1°) 设 N 是 $\mathbb{R}_+$ 上参数为 c 的 Poisson 过程, $M_t = N_t - ct$ 。证明

$$\int_0^t N_{s-} \, dM_s$$

是鞅, 而 $\int_0^t N_s \, dM_s$ 不是鞅。推出 N 对其自然滤过不是可预测过程。

2°) 若 Z 可预测, 则在适当可积条件下,

$$\left(\int_0^t Z_s \, dM_s \right)^2 - c \int_0^t Z_s^2 \, ds$$

是鞅。这推广了第 II 章练习 1.14 第 3° 问。

练习 1.15。

- 1°) 设 $(\mathcal{F}_t)$ 是 Poisson 过程 N 的自然滤过, $M_t = N_t - ct$ 。证明每个 $(\mathcal{F}_t)$ -局部鞅 X 都可写成

$$X_t = X_0 + \int_0^t Z_s \, dM_s,$$

其中 Z 是 $(\mathcal{F}_t)$ -可预测过程。

提示: 仿照第 V 章定理 3.4 的证明。

- 2°) 设 B 是与 N 独立的布朗运动, $(\mathcal{G}_t)$ 是使 B, N 适应的最小右连续完备滤过。给出 $(\mathcal{G}_t)$ -局部鞅的随机积分表示。

- 3°) 设 N' 是另一个 $(\mathcal{F}_t)$ -Poisson 过程。由第 1° 问推出 $N' = N$ 几乎必然。注意这与布朗滤过截然不同: 后者含有许多 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。

提示: 使用练习 1.14 第 2° 问。

- 4°) 当 $(\mathcal{F}_t)$ 是一个 d 维 Poisson 过程的自然滤过时, 描述所有 $(\mathcal{F}_t)$ -Poisson 过程。

提示: 需要区分各分量参数相等与不相等的情形。

练习 1.16。

- 1°) 设 N 是 Poisson 过程, $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 。随机变量

$$N(f) = \int_0^\infty f(u) \, dN_u$$

服从 Poisson 分布的充要条件是什么?

- 2°) 若 $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$, 求 $N(f)$ 与 $N(g)$ 相互独立的充要条件; 这里不要求二者本身服从 Poisson 分布。

练习 1.17。 设 N 是 $(\mathcal{F}_t)$ -Poisson 过程, T 是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。证明

$$N'_t = N_{T+t} - N_T$$

是 Poisson 过程。对 N 的自然滤过, 这可由第 III 章第 3 节的强 Markov 性推出; 本题要求用本节的方法证明。再把这一性质推广到取值于 $(U, \mathcal{U})$ 的 $(\mathcal{F}_t)$ -Poisson 点过程。

练习 1.18。 设 $(E, \mathcal{E})$ 是可测空间, $\mathcal{M}$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上取非负整数值、允许取 $+\infty$ 的测度所成的空间。赋予 $\mathcal{M}$ 最小的 σ -代数, 使对每个 $A \in \mathcal{E}$, 映射 $\mu \mapsto \mu(A)$ 可测。若 $\mathcal{M}$ -值随机变量 N 满足

- i) 对每个 $A \in \mathcal{E}$, $N(A)$ 是 Poisson 随机变量 (恒等于 $+\infty$ 的映射也视为 Poisson 随机变量);

- ii) 若 $A_1, \dots, A_n$ 两两不交, 则随机变量 $N(A_1), \dots, N(A_n)$ 相互独立,

则称 N 为 Poisson 随机测度。

- 1°) 证明: 若 N 是 Poisson 随机测度, 并令 $\lambda(A) = E[N(A)]$, 则 λ 是 $\mathcal{E}$ 上的测度。反过来, 给定 $(E, \mathcal{E})$ 上任意 σ -有限测度 λ , 证明存在某个概率空间及其上的 Poisson 随机测度 N , 使

$$E[N(A)] = \lambda(A), \quad A \in \mathcal{E}.$$

称 λ 为 N 的强度。

- 2°) 证明: $\mathcal{M}$ -值随机变量 N 是强度为 λ 的 Poisson 随机测度, 当且仅当对每个非负可测

函数 f ,

$$E \left[\exp \left(- \int f(x) N(dx) \right) \right] = \exp \left\{ - \int (1 - e^{-f(x)}) \lambda(dx) \right\}.$$

3°) 设 n 是 $(U, \mathcal{U})$ 上的 σ -有限测度。证明存在特征测度为 n 的 U -值 PPP。

提示：在 $\mathbb{R}_+ \times U$ 上取 $d\lambda = dt dn$ ，并使用第 1° 问。

练习 1.19 (*)。设 N 是 $(E, \mathcal{E})$ 上强度为 λ 的 Poisson 随机测度， f 是 $(0, \infty) \times E$ 上一致有界的正函数，且对每个 $s > 0$ ， $f_s \lambda$ 是概率测度。假设存在参数为 1 的指数随机变量 S 和 E -值随机变量 X ，使得在给定 $S = s$ 的条件下：

i) N 是强度为 $g_s \lambda$ 的 Poisson 随机测度，其中

$$g_s(x) = \int_s^\infty f_t(x) dt;$$

ii) X 的分布为 $f_s \lambda$;

iii) X 与 N 相互独立。

证明

$$N^* = N + \varepsilon_X$$

是强度为 $g_0 \lambda$ 的 Poisson 随机测度。

提示：使用练习 1.18 第 2° 问。

练习 1.20 (*, Poisson 过程的混沌表示)。

1°) 沿用练习 1.15 的记号，设 f 是 $\mathbb{R}_+$ 上非负局部有界函数。证明

$$\mathcal{E}_t^f = \exp \left\{ - \int_0^t f(s) dN_s + c \int_0^t (1 - e^{-f(s)}) ds \right\}$$

是 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅，而且练习 1.15 中的过程 Z 为

$$Z_s = \mathcal{E}_{s-}^f (e^{-f(s)} - 1).$$

2°) 证明每个 $Y \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ 都可写成

$$Y = E[Y] + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty dM_{s_1} \int_{[0, s_1)} dM_{s_2} \cdots \int_{[0, s_{n-1})} dM_{s_n} f_n(s_1, \dots, s_n),$$

其中函数序列 (f_n) 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^n \int_{0 < s_n < \cdots < s_1 < \infty} f_n(s_1, \dots, s_n)^2 ds_1 \cdots ds_n < \infty.$$

²²校订注：原书在练习 1.20 第 2° 问的平方可积条件中漏写了权重 c^n 。由于补偿 Poisson 鞅满足 $d\langle M \rangle_t = c dt$ ， n 重迭代随机积分的等距公式带有因子 c^n ；上文已补入。

练习 1.21. 设 e 是 PPP, f 是关于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{U}_\delta$ 可测的非负函数, 并假设对每个 t ,

$$N_t^f = \sum_{0 < s \leq t} f(s, e_s)$$

几乎必然有限。

1°) 证明下列两条件等价:

i) 对每个 t , N_t^f 是 Poisson 随机变量;

ii) 存在 $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{U}_\delta$, 使 $f = \mathbf{1}_\Gamma$ 对 $ds \otimes dn$ -几乎处处成立。

提示: 见练习 1.16。

2°) 证明过程 $(N_t^\Gamma, t \geq 0)$ 满足

$$N_t^\Gamma = \hat{N}_{a(t)},$$

其中

$$a(t) = \int_0^t n(\Gamma(s, \cdot)) ds,$$

而 $\hat{N}$ 是参数为 1 的 Poisson 过程。因此, N^Γ 是 Poisson 过程, 当且仅当 $n(\Gamma(s, \cdot))$ 关于 s 几乎处处为常数。

练习 1.22.

1°) 设 N 是参数为 c 的 Poisson 过程, T_1 为首次跳时刻。证明当 $T = T_1, \lambda > 0$, 并取

$$f(s, \omega) = \lambda \mathbf{1}_{\{0 \leq s \leq T(\omega)\}}$$

时, 等式

$$E \left[\exp \left(- \int f(s, \omega) dN_s(\omega) \right) \right] = E \left[\exp \left(-c \int (1 - e^{-f(s, \omega)}) ds \right) \right]$$

不成立。

2°) 证明: 若 g 不是 $ds \otimes dP$ -零测的, 则当 T 遍历所有有界 $(\mathcal{F}_t)$ -停时, 上述等式不可能对所有

$$f(s, \omega) = g(s, \omega) \mathbf{1}_{\{0 \leq s \leq T(\omega)\}}$$

都成立。

2 布朗运动的游程过程

以下使用布朗运动的规范实现。以 W 表示 Wiener 空间, 以 P 表示 Wiener 测度, 并以 $\mathcal{F}$ 表示 W 的 Borel σ -代数关于 P 的完备化。沿用第 VI 章第 2 节的记号。

现在把上一节的结果应用于如下定义的 $(U_\delta, \mathcal{U}_\delta)$ 。对 $w \in W$, 令

$$R(w) = \inf\{t > 0 : w(t) = 0\}.$$

空间 U 由满足 $0 < R(w) < \infty$ 且对每个 $t \geq R(w)$ 都有 $w(t) = 0$ 的函数组成。这类函数的图像完全位于时间轴上方或下方, 分别记相应的子集为 U_+ 与 U_- 。点 δ 是恒等于零的函数。最后, $\mathcal{U}$ 是由坐标映射生成的 σ -代数。注意 $U_\delta \subset W$, 而 $\mathcal{U}_\delta$ 正是 W 的 Borel σ -代数在 U_δ 上的迹。

因此, W 上任意 Borel 函数, 例如上面定义的 R , 都可视为 U 上的函数; 下文常常不再特别说明。但应强调: U_δ 关于 P 是零测的, 而我们将定义并研究一个集中在 U_δ 上的测度 n , 所以它

与 P 奇异。

定义 2.1. 游程过程是定义在 $(W, \mathcal{F}, P)$ 上、取值于 $(U_\delta, \mathcal{U}_\delta)$ 的过程 $e = (e_s, s > 0)$, 规定如下:

i) 若 $\tau_s(\omega) - \tau_{s-}(\omega) > 0$, 则 $e_s(\omega)$ 是映射

$$r \mapsto \mathbf{1}_{\{r \leq \tau_s(\omega) - \tau_{s-}(\omega)\}} B_{\tau_{s-}(\omega) + r}(\omega);$$

ii) 若 $\tau_s(\omega) - \tau_{s-}(\omega) = 0$, 则 $e_s(\omega) = \delta$ 。

有时把函数 $e_s(\omega)$ 在时刻 r 的值写成 $e_s(r, \omega)$ 或简写为 $e_s(r)$ 。

过程 e 的确是点过程。定义 1.1 的条件 i) 只须对固定的坐标映射 X_r 检查

$$(s, \omega) \mapsto X_r(e_s(\omega))$$

的可测性, 而这很容易验证。另一方面, $e_s \neq \delta$ 当且仅当局部时 L 在水平 s 上有一段常值区间; 此时 e_s 就是布朗路径在两个零点时刻 τ_{s-}, τ_s 之间的部分。第 VI 章第 2 节已经指出, 这样的 s 几乎必然只有可数多个, 所以定义 1.1 的条件 ii) 成立。

命题 2.2. 游程过程 e 是 σ -离散的。

证明. 集合

$$U_n = \{u \in U : R(u) > 1/n\}$$

属于 $\mathcal{U}$, 且其并集为 U 。函数

$$N_t^{U_n}(\omega) = \sum_{s \leq t} \mathbf{1}_{\{e_s(\omega) \in U_n\}}$$

是可测的。事实上, 过程 $t \mapsto \tau_t$ 递增且右连续。固定 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$T_1 = \inf\{t > 0 : \tau_t - \tau_{t-} > 1/n\};$$

则 $P[T_1 > 0] = 1$ 。递归定义

$$T_k = \inf\{t > T_{k-1} : \tau_t - \tau_{t-} > 1/n\}.$$

各 T_k 都是随机变量, 而且

$$N_t^{U_n} = \sum_k \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}}.$$

此外, 显然 $N_t^{U_n} < n\tau_t$, 故 e^{U_n} 离散, 命题得证。□

还需要下述引理。

引理 2.3. 对每个 $r > 0$, 几乎必然对所有 s 都有

$$e_{s+r}(\omega) = e_s(\theta_{\tau_r}(\omega)).$$

证明. 这是第 X 章命题 1.3 的直接推论。□

定理 2.4 (Itô)。 游程过程 (e_s) 是一个 $(\mathcal{F}_{\tau_s})$ -Poisson 点过程。

证明。 随机变量 N_t^Γ 显然关于 $\mathcal{F}_{\tau_t}$ 可测。再由上面的引理与第 III 章第 3 节的强 Markov 性, 沿用定义 1.8 的记号, 有

$$\begin{aligned} P[N_{(r,r+t]}^\Gamma \in A \mid \mathcal{F}_{\tau_r}] &= P[N_t^\Gamma \circ \theta_{\tau_r} \in A \mid \mathcal{F}_{\tau_r}] \\ &= P_{B_{\tau_r}}[N_t^\Gamma \in A] = P[N_t^\Gamma \in A] \quad \text{几乎必然,} \end{aligned}$$

因为 $B_{\tau_r} = 0$ 几乎必然。这正是所需的独立齐次增量性质。 $\square$

我们从 B 出发构造了游程过程。反过来, 知道游程过程后也能恢复 B 。

命题 2.5。 有

$$\tau_t(\omega) = \sum_{s \leq t} R(e_s(\omega)), \quad \tau_{t-}(\omega) = \sum_{s < t} R(e_s(\omega)),$$

并且

$$B_t(\omega) = \sum_{s \leq L_t(\omega)} e_s(t - \tau_{s-}(\omega), \omega),$$

其中 L_t 可由 τ_t 的逆恢复。

证明。 前两式来自

$$\tau_t = \sum_{s \leq t} (\tau_s - \tau_{s-}).$$

对第三式, 若某个 s 满足 $\tau_{s-} < t < \tau_s$, 则 $L_t = s$, 而当 $u < L_t$ 时, $e_u(t - \tau_{u-}) = 0$ 。否则 t 是 L 的增长点, 此时 $e_{L_t}(t - \tau_{L_t-}) = 0$, 所以右端仍按应有方式等于 $B_t = 0$ 。 $\square$

注。 当 $\tau_{L_t-} < t < \tau_{L_t}$ 时, 恢复公式也可写成

$$B_t = e_{L_t}(t - \tau_{L_t-}).$$

游程过程的特征测度称为 Itô 测度, 记为 n ; 它在 U_+ 与 U_- 上的限制分别记为 n_+ 与 n_- 。 n 集中在满足 $u(0) = 0$ 的函数上。下面描述 n , 并考察上一节公式所导出的结论。先引入若干记号。

对 $w \in W$, 以 $i_0(w)$ 表示如下 $u \in U$:

$$u(t) = w(t) \quad (t < R(w)), \quad u(t) = 0 \quad (t \geq R(w)).$$

对 $s \in \mathbb{R}_+$, 令

$$i_s(w) = i_0(\theta_s(w)).$$

注意 $R(\theta_s(w)) = R(i_s(w))$ 。

再令 $G_-(w)$ 为布朗零点集 $Z(w)$ 的相邻区间中严格为正的左端点集合; 也就是各游程的起始时刻集合:

$$\begin{aligned} G_-(w) &= \{\tau_{s-}(w) : \tau_{s-}(w) \neq \tau_s(w)\} \\ &= \{\tau_{s-}(w) : R(\theta_{\tau_{s-}(w)}(w)) > 0\}. \end{aligned}$$

设 H 是关于 $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{U}_\delta$ 可测、在 δ 处为零的非负过程。容易验证

$$(s, w, u) \longmapsto H(\tau_{s-}(w), w; u)$$

关于 $\mathcal{P}((\mathcal{F}_{\tau_s})) \otimes \mathcal{U}_\delta$ 可测。把第 1 节的主公式应用于这一过程, 得到

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{s>0} H(\tau_{s-}(w), w; e_s(w)) \right] \\ = E \left[\int_0^\infty ds \int H(\tau_{s-}(w), w; u) n(du) \right]. \end{aligned}$$

左端也可写成

$$E \left[\sum_{y \in G_-} H(y, w; i_y(w)) \right].$$

右端中, 因 $\{s : \tau_{s-} \neq \tau_s\}$ 可数, 而积分关于 Lebesgue 测度, 故可把 τ_{s-} 换成 τ_s 。于是得到:

命题 2.6. 若 H 如上, 则

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{y \in G_-} H(y, w; i_y(w)) \right] &= E \left[\int_0^\infty ds \int H(\tau_s(w), w; u) n(du) \right] \\ &= E \left[\int_0^\infty dL_t(w) \int H(t, w; u) n(du) \right]. \end{aligned}$$

证明. 只须证明第二个等号; 它直接来自 Stieltjes 积分的变量替换公式。 □

命题 2.6 也有鞅版本。在满足所需可积条件时,

$$\sum_{s \leq t} H(\tau_{s-}(w), w; e_s(w)) - \int_0^t ds \int H(\tau_s(w), w; u) n(du)$$

是 $(\mathcal{F}_{\tau_t})$ -鞅, 而

$$\sum_{y \in G_- \cap [0, t]} H(y, w; i_y(w)) - \int_0^t dL_s(w) \int H(s, w; u) n(du)$$

是 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅。证明留给读者。

指数公式也给出若干有趣结论。以下考虑满足 $\nu_A(\{0\}) = 0$ 的加性泛函 A ; 等价地,

$$\int \mathbf{1}_Z dA = 0.$$

命题 2.7. 随机变量 A_{τ_t} 是无穷可分的, 其分布的 Laplace 变换为

$$\varphi_t^A(\lambda) = \exp \left\{ t \int_0^\infty (e^{-\lambda x} - 1) m_A(dx) \right\},$$

其中 m_A 是 n 在随机变量 A_R 下的像测度; 这里 A_R 是把 W 上的随机变量限制到 U 所得的函数。

证明. 因为 dA 不对零点集 Z 赋质量,

$$A_t = \int_0^t \mathbf{1}_{Z^c}(s) dA_s.$$

再由 A 的强可加性,

$$A_{\tau_t} = \sum_{s \leq t} (A_{\tau_s} - A_{\tau_{s-}}) = \sum_{s \leq t} A_R(e_s).$$

应用第 1 节命题 1.12 的指数公式,

$$\begin{aligned} \varphi_t^A(\lambda) &= E[e^{-\lambda A_{\tau_t}}] = E \left[\exp \left(-\lambda \sum_{s \leq t} A_R(e_s) \right) \right] \\ &= \exp \left\{ t \int (e^{-\lambda A_R(u)} - 1) n(\mathrm{d}u) \right\}, \end{aligned}$$

这就是所述结果。 □

注。 过程 A_{τ_t} 是 Lévy 过程 (第 X 章练习 2.19), 而 m_A 是它的 Lévy 测度; 也可从这一观察出发证明命题。Lévy 过程理论中, Lévy 测度就是跳过程这一 PPP 的特征测度。在这里, 由于对 ν_A 的假设, 跳过程就是过程本身, 即

$$A_{\tau_t} = \sum_{s \leq t} A_R(e_s).$$

相应地,

$$m_A(C) = E \left[\sum_{s \leq 1} \mathbf{1}_C(A_R(e_s)) \right] = n(A_R \in C).$$

下述结果给出 R 在 n 下的“分布”。

命题 2.8. 对每个 $x > 0$,

$$n(R > x) = \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{1/2}.$$

证明。 加性泛函 $A_t = t$ 显然满足上一命题的假设, 于是

$$E[e^{-\lambda \tau_t}] = \exp \left\{ t \int_0^\infty (e^{-\lambda x} - 1) m_A(\mathrm{d}x) \right\}.$$

由第 VI 章第 2 节, τ_t 与第 II 章第 3 节研究过的首次到达时刻 T_t 同分布。因此

$$\int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) m_A(\mathrm{d}x) = \sqrt{2\lambda}.$$

对 Stieltjes 积分作分部积分, 进一步得到

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} m_A((x, \infty)) \mathrm{d}x = \sqrt{2\lambda}.$$

又容易核验

$$\sqrt{2\lambda} = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \mathrm{d}x.$$

由 Laplace 变换的唯一性,

$$m_A((x, \infty)) = \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{1/2}.$$

根据 m_A 的定义, 结论成立。 □

注。

- 1°) 练习 4.13 暗示了另一种证明。
 2°) 已知 R 在 n 下的分布后, 只要再识别给定 R 的取值时, $(u(t), t < R)$ 的条件分布, 就能完整描述 n 。这将在第 4 节完成。

命题 2.8 表明 $(R(e_s))$ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的 PPP, 其特征测度 $\tilde{n}$ 满足

$$\tilde{n}((x, \infty)) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}.$$

下面用它证明一个局部时逼近结果, 以补充第 VI 章的结果。对 $\varepsilon > 0$, 令 $\eta_t(\varepsilon)$ 为在时刻 $s \leq t$ 之前结束、长度大于 ε 的游程数。若 N 是与 PPP $(R(e_s))$ 对应的计数测度, 则

$$\eta_t(\varepsilon) = N_{L_t}^\varepsilon, \quad N_r^\varepsilon = N_r^{[\varepsilon, \infty)}.$$

命题 2.9。

$$P \left[\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sqrt{\frac{\pi \varepsilon}{2}} \eta_t(\varepsilon) = L_t, \text{ 对每个 } t \right] = 1.$$

证明。 令

$$\varepsilon_k = \frac{2}{\pi k^2}.$$

则 $\tilde{n}([\varepsilon_k, \infty)) = k$, 而 $\{N_r^{\varepsilon_{k+1}} - N_r^{\varepsilon_k}\}_{k \geq 1}$ 是一列参数为 r 的相互独立 Poisson 随机变量。故对固定 r , 大数定律给出几乎必然

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} N_r^{\varepsilon_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi \varepsilon_k}{2}} N_r^{\varepsilon_k} = r.$$

当 $\varepsilon_{k+1} \leq \varepsilon < \varepsilon_k$ 时,

$$\sqrt{\frac{\pi \varepsilon_{k+1}}{2}} N_r^{\varepsilon_k} \leq \sqrt{\frac{\pi \varepsilon}{2}} N_r^\varepsilon \leq \sqrt{\frac{\pi \varepsilon_k}{2}} N_r^{\varepsilon_{k+1}}.$$

所以

$$P \left[\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sqrt{\frac{\pi \varepsilon}{2}} N_r^\varepsilon = r \right] = 1.$$

可取一个概率为 1 的集合 Σ , 使对其中每条路径, 上述收敛对所有有理 r 同时成立。因 N_r^ε 关于 r 递增, 收敛事实上对所有 r 成立。最后取 $r = L_t(\omega)$, 即得结论。□

注。

- 1°) 上述结果的一个显著特点是: $\eta_t(\varepsilon)$ 只依赖布朗运动截至 t 的零点集。因此, 这给出了一个只依赖零点集 Z 的局部时逼近方法。该方法可推广到再生集的局部时, 见本章“注释与评述”。
 2°) 同类证明还能给出第 VI 章的下穿逼近, 见练习 2.10。

练习 2.10。

1°) 证明

$$n \left(\sup_{t < R} |u(t)| \geq x \right) = \frac{1}{x}.$$

提示：若

$$A_x = \left\{ u : \sup_{t < R} u(t) \geq x \right\},$$

注意 L_{T_x} 是 Poisson 过程 N^{A_x} 的首次跳时刻，并使用第 VI 章第 4 节求得的 L_{T_x} 的分布。

2°) 利用第 1° 问和命题 2.9 的方法，在布朗运动情形证明第 VI 章定理 1.10 的逼近结果几乎必然收敛。

3°) 设 $a > 0$ ，并令

$$M_a(\omega) = \sup_{t \leq g_{T_a}} w(t),$$

其中 g_{T_a} 是布朗路径首次到达 a 的时刻 T_a 之前的最后一个零点。证明 M_a 在 $[0, a]$ 上均匀分布。这是 Williams 分解定理的一部分（见第 VII 章第 4 节）。

提示：若 J_a （分别 J_y ）是 Poisson 过程 N^{A_a} （分别 N^{A_y} ）的首次跳时刻，则

$$P[M_a < y] = P[J_y = J_a].$$

使用引理 1.13。

练习 2.11。 沿用命题 2.5 的记号。当 $\tau_{s-}(\omega) \leq t \leq \tau_s(\omega)$ 时，定义

$$X_t(\omega) = |e_s(t - \tau_{s-}(\omega), \omega)| - s.$$

证明 X 就是布朗运动

$$\beta_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s.$$

再证明，当 $\tau_{s-}(\omega) \leq t \leq \tau_s(\omega)$ 时定义

$$Y_t(\omega) = s + |e_s(t - \tau_{s-}(\omega), \omega)|,$$

所得过程 Y 是 $\operatorname{BES}^3(0)$ 。

练习 2.12。

1°) 设 $A \in \mathcal{U}_\delta$ 且 $n(A) < \infty$ 。令 $C_{d_t}^A$ 为区间 $[0, d_t]$ 中属于 A 的游程数，即两个端点都位于 $0, d_t$ 之间的游程数。说明这个数定义无歧义，并证明

$$E[C_{d_t}^A] = n(A)E[L_t].$$

2°) 证明在 $\{d_s < t\}$ 上，

$$C_{d_t}^A - C_{d_s}^A = C_{d_t-d_s}^A \circ \theta_{d_s},$$

$$L_{d_t} - L_{d_s} = L_{d_t-d_s} \circ \theta_{d_s}.$$

从而证明

$$C_{d_t}^A - n(A)L_t$$

是 $(\mathcal{F}_{d_t})$ -鞅。

提示：使用布朗运动的强 Markov 性。

练习 2.13 (*, 尺度性质)。

1°) 对 $c > 0$, 在 W 或 U_δ 上定义

$$s_c(w)(t) = \frac{w(ct)}{\sqrt{c}}.$$

证明

$$e_t(s_c(w)) = s_c(e_{t\sqrt{c}}(w)),$$

并且对 $A \in \mathcal{U}_\delta$,

$$n(s_c^{-1}(A)) = \frac{n(A)}{\sqrt{c}}.$$

提示: 见第 VI 章练习 2.11。

2°) **规范化游程**。若 $u \in U$ 满足 $R(u) = 1$, 称 u 是规范化的。令 U^1 为规范化游程的集合, 并定义

$$v: U \longrightarrow U^1, \quad v(u) = s_{R(u)}(u).$$

证明: 对 $\Gamma \subset U^1$,

$$\gamma(\Gamma) = \frac{n_+(v^{-1}(\Gamma) \cap \{R \geq c\})}{n_+(R \geq c)}$$

与 $c > 0$ 无关。概率测度 γ 可称为规范化布朗游程的分布。

3°) 证明对每个 $\mathbb{R}_+$ 的 Borel 子集 S ,

$$n_+(v^{-1}(\Gamma) \cap \{R \in S\}) = \gamma(\Gamma)n_+(R \in S).$$

这可以理解为游程长度与游程形状的独立性。

4°) 令 e^c 为第一个满足 $R(e) \geq c$ 的正游程。证明

$$\gamma(\Gamma) = P[v(e^c) \in \Gamma].$$

提示: 使用引理 1.13。

练习 2.14 (*). 令 $\Lambda_t(\varepsilon)$ 为严格包含于 $[0, t]$ 中、长度小于 ε 的所有游程的总长度。证明

$$P \left[\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}} \Lambda_t(\varepsilon) = L_t, \text{ 对每个 } t \right] = 1.$$

提示:

$$\Lambda_t(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon x \eta_t(dx),$$

其中 η_t 定义于命题 2.9。

练习 2.15 (*). 令

$$S_t = \sup_{s \leq t} B_s,$$

并令 $n_t(\varepsilon)$ 为 S 在 $[0, t]$ 中长度至少为 ε 的常值区间数。证明

$$P \left[\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}} n_t(\varepsilon) = S_t, \text{ 对每个 } t \right] = 1.$$

练习 2.16 (斜布朗运动)。 设 (Y_n) 是一列相互独立、并与 B 独立的随机变量, 且

$$P(Y_n = 1) = \alpha, \quad P(Y_n = -1) = 1 - \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

对每条定义了 B 的路径 w , 游程集合 $\{e_s(w)\}$ 可数, 故可按 $\mathbb{N}$ 编号。仿照命题 2.5, 若 $\tau_{s-}(w) \leq t < \tau_s(w)$, 且 e_s 在上述编号中是第 n 个游程, 令

$$X_t^\alpha = Y_n |e_s(t - \tau_{s-}(w), w)|.$$

证明所得过程是 Markov 过程; 再证明其转移函数正是第 I 章练习 1.16 中的转移函数, 从而它是斜布朗运动。可见, 斜布朗运动可以从反射布朗运动出发, 以概率 $1 - \alpha$ 独立改变每段游程的符号而得到。因此, 一个 Markov 过程 X 是斜布朗运动, 当且仅当 $|X|$ 是反射布朗运动。

练习 2.17 (*)。 令

$$A_t^+ = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} ds, \quad A_t^- = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s < 0\}} ds.$$

1°) 证明二元随机变量

$$L_t^{-2}(A_t^+, A_t^-)$$

的分布与 t 无关, 并证明 $A_{\tau_t}^+$ 与 $A_{\tau_t}^-$ 是相互独立的、指标为 $1/2$ 的稳定随机变量。

提示:

$$A_{\tau_t}^+ + A_{\tau_t}^- = \tau_t,$$

而 τ_t 是指标为 $1/2$ 的稳定随机变量。

2°) 设 $a^+, a^- > 0$, S 是与 B 独立、参数为 1 的指数随机变量。证明

$$E[\exp\{-L_S^{-2}(a^+ A_S^+ + a^- A_S^-)\}] = \int_0^\infty e^{-\phi(s)} \phi'(s) ds,$$

其中

$$\phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((s^2 + a^+)^{1/2} + (s^2 + a^-)^{1/2} \right).$$

进而证明

$$L_t^{-2}(A_t^+, A_t^-) \stackrel{d}{=} \frac{1}{4}(T^+, T^-),$$

其中 T^+, T^- 相互独立, 且都与 τ_1 同分布。由此推出第 VI 章第 2 节的反正弦律 (另见下面练习 4.20)。读者可把这一方法与第 VI 章练习 2.33 的方法比较。

练习 2.18。 证明: 几乎必然可以用 $\mathbb{Q}_+$ 给布朗游程编号, 使 $q < q'$ 蕴含游程 e_q 先于 $e_{q'}$ 出现。

提示: 先把跨越时刻 1 的游程记为 e_1 , 再把跨越 $g_1/2$ 的游程记为 $e_{1/2}$, 如此继续。

3 跨越给定时刻的游程

回忆第 VI 章第 4 节的记号:

$$g_t = \sup\{s < t : B_s = 0\}, \quad d_t = \inf\{s > t : B_s = 0\},$$

并令

$$A_t = t - g_t, \quad \Lambda_t = d_t - g_t.$$

若 $g_t < t < d_t$, 则称有一段游程跨越时刻 t 。这时 A_t 是该游程在时刻 t 的年龄, Λ_t 是它的长度, 并且

$$\Lambda_t = R(i_{g_t}).$$

引理 3.1。 映射 $t \mapsto g_t$ 右连续。

证明。 设 $t_n \downarrow t$ 。若存在 n 使 $g_{t_n} < t$, 则对所有 $m \geq n$ 都有 $g_{t_m} = g_t$ 。若对每个 n 都有 $g_{t_n} \geq t$, 则

$$t \leq g_{t_n} \leq t_n.$$

因此 t 本身是 B 的零点, 且

$$g_t = t = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{t_n}.$$

□

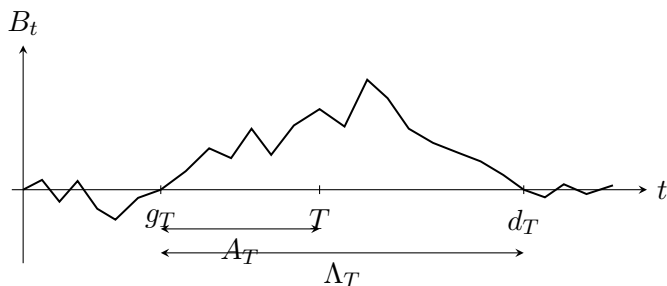


图 8 跨越时刻 T 的游程、年龄 A_T 与长度 Λ_T

对正随机变量 S , 用 $\mathcal{F}_S$ 表示由所有 H_S 生成的 σ -代数, 其中 H 遍历可选过程。若 S 是停时, 这就是通常的 $\mathcal{F}_S$ 。应注意: 当 S, S' 不是停时时, $S \leq S'$ 一般并不推出 $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S'}$; 例如, 可以找到 $S \leq 1$ 使 $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_\infty$ 。

在继续之前还要回忆: 由第 V 章推论 3.3, 我们工作在布朗滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 中, 所以可选过程与可预测过程没有区别。

引理 3.2。 族

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{g_t}$$

是 $(\mathcal{F}_t)$ 的一个子滤过。若 T 是 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -停时, 则

$$\mathcal{F}_{g_T} \subset \tilde{\mathcal{F}}_T \subset \mathcal{F}_T.$$

证明。 因 g_t 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测, 仿照第 I 章命题 4.9 的论证可知: 对每个可预测过程 Z , 随机变量 Z_{g_t} 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测。因此

$$\mathcal{F}_{g_t} \subset \mathcal{F}_t.$$

固定 $u \geq 0$, 并令

$$Z'_t = Z_{g_{u \wedge t}}.$$

由引理 3.1 和刚才的结论, Z' 是 $(\mathcal{F}_t)$ -可选过程, 因而可预测。取 $v > u$ 。若 $g_v < u$, 则 $g_v = g_u$,

从而

$$Z_{g_u} = Z_{g_v} = Z'_{g_v}.$$

若 $g_v \geq u$, 则同样有 $Z_{g_u} = Z'_{g_v}$. 因此, 生成 $\mathcal{F}_{g_u}$ 的每个随机变量都属于 $\mathcal{F}_{g_v}$, 所以

$$\mathcal{F}_{g_u} \subset \mathcal{F}_{g_v}.$$

这证明 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 是滤过。

现在设 T 是 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -停时。按定义, $\mathcal{F}_{g_T}$ 由 Z_{g_T} 生成, 其中 Z 遍历可选过程; 而

$$Z_{g_T} = (Z_g)_{g_T}.$$

由引理 3.1, Z_g 是 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -可选过程, 故 $\mathcal{F}_{g_T} \subset \tilde{\mathcal{F}}_T$. 另一方面, 因为 $\tilde{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{F}_t$, T 也是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时, 容易得到 $\tilde{\mathcal{F}}_T \subset \mathcal{F}_T$. $\square$

下面给出本节的主要结果之一。已知 n 后, 它使我们能够计算若干特殊游程的分布。若 F 是 U 上非负 $\mathcal{U}$ -可测函数, 对 $s > 0$ 置

$$q(s, F) = \frac{n(\mathbf{1}_{\{R>s\}}F)}{n(R>s)} = n(F \mid R > s).$$

回忆: 对每个 $s > 0$, 都有

$$0 < n(R > s) < \infty.$$

命题 3.3. 对每个固定的 $t > 0$,

$$E[F(i_{g_t}) \mid \mathcal{F}_{g_t}] = q(A_t, F) \quad \text{几乎必然.}$$

若 T 是 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -停时, 则在 $\{0 < g_T < T\}$ 上,

$$E[F(i_{g_T}) \mid \tilde{\mathcal{F}}_T] = q(A_T, F) \quad \text{几乎必然.}$$

证明. 几乎必然 t 不是 B 的零点, 故 $0 < g_t < t$, 并且 $q(A_t, F)$ 有定义。若 $s \in G_-$ 且 $s < t$, 则 $s = g_t$ 当且仅当

$$s + R(i_s) > t.$$

所以 g_t 是唯一满足 $s \in G_-, s < t, s + R(i_s) > t$ 的 s 。若 Z 是非负 $(\mathcal{F}_t)$ -可预测过程, 则

$$E[Z_{g_t} F(i_{g_t})] = E \left[\sum_{s \in G_-} Z_s F(i_s) \mathbf{1}_{\{s < t, s + R(i_s) > t\}} \right].$$

把 $R(i_s)$ 换成 $R(\theta_s)$, 再对右端应用主公式, 得到

$$E[Z_{g_t} F(i_{g_t})] = E \left[\int_0^t ds Z_s \int F(u) \mathbf{1}_{\{R(u) > t-s\}} n(du) \right].$$

由 $n(R > x) > 0$, 右端可写成

$$E \left[\int_0^t ds Z_s n(R > t-s) q(t-s, F) \right].$$

反向使用主公式, 它又等于

$$E \left[\sum_{s \in G_-} Z_s q(t-s, F) \mathbf{1}_{\{s < t, s + R(i_s) > t\}} \right] = E[Z_{g_t} q(t-g_t, F)].$$

这证明第一式。

为证第二式，取一列取值可数的 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -停时 $T_n \downarrow T$ 。因第一式对常时刻成立，它也对 T_n 成立。在 $\{0 < g_T < T\}$ 上，从某项起 $g_{T_n} = g_T$ ，且 $\mathbf{1}_{\{0 < g_{T_n} < T_n\}} \rightarrow 1$ 。因此对有界 F ，

$$\begin{aligned} E[F(i_{g_T}) | \tilde{\mathcal{F}}_T] &= \lim_n E[F(i_{g_{T_n}}) \mathbf{1}_{\{0 < g_{T_n} < T_n\}} | \tilde{\mathcal{F}}_T] \\ &= \lim_n E[q(A_{T_n}, F) \mathbf{1}_{\{0 < g_{T_n} < T_n\}} | \tilde{\mathcal{F}}_T] \\ &= q(A_T, F). \end{aligned}$$

这里使用了 $A_{T_n} \rightarrow A_T$ 、 $q(\cdot, F)$ 的连续性以及 A_T 的 $\tilde{\mathcal{F}}_T$ -可测性。对一般非负 F 再作单调逼近即可。□

上述命题给出了跨越 t 的游程在其起始时刻所见布朗过去下的条件期望。若再对游程长度作条件化，可以得到更精确的结论。以下把

$$E[\cdot | \mathcal{F}_{g_t}, \Lambda_t]$$

作为 $E[\cdot | \mathcal{F}_{g_t} \vee \sigma(\Lambda_t)]$ 的简写。再以 $v(\cdot; F)$ 表示某个函数，使

$$v(R; F)$$

是 $n(F | R)$ 的一个版本。由于 n 在 $\sigma(R)$ 上 σ -有限，而且由命题 2.8， $r \mapsto v(r; F)$ 在 Lebesgue 等价意义下唯一。

命题 3.4。 在命题 3.3 的假设和记号下，

$$E[F(i_{g_t}) | \mathcal{F}_{g_t}, \Lambda_t] = v(\Lambda_t; F),$$

并且在 $\{0 < g_T < T\}$ 上，

$$E[F(i_{g_T}) | \tilde{\mathcal{F}}_T, \Lambda_T] = v(\Lambda_T; F).$$

证明。 设 ϕ 是 $\mathbb{R}_+$ 上非负 Borel 函数。利用命题 3.3，

$$\begin{aligned} E[Z_{g_t} \phi(\Lambda_t) F(i_{g_t})] &= E[Z_{g_t} \phi(R(i_{g_t})) F(i_{g_t})] \\ &= E[Z_{g_t} q(A_t, \phi(R) F)]. \end{aligned}$$

由条件分布 v 的定义，

$$q(\cdot, \phi(R) F) = q(\cdot, \phi(R) v(R; F)).$$

再反向应用命题 3.3，得到

$$E[Z_{g_t} \phi(\Lambda_t) F(i_{g_t})] = E[Z_{g_t} \phi(\Lambda_t) v(\Lambda_t; F)],$$

这正是第一式。对停时的推广仿照上一命题的证明。□

下面证明某些特殊游程与其开始时刻之前布朗过去之间的独立性。称 $(\mathcal{F}_t^0)$ -停时 T 为终端时刻，若对每个 r ，在 $\{T > r\}$ 上几乎必然有

$$T = r + T \circ \theta_r.$$

例如，到达时刻都是终端时刻。对这样的 T ，在 $\{g_T < T\}$ 上有

$$T = g_T + T \circ \theta_{g_T}$$

几乎必然。

还可把 T 视为定义在 U 上: 对 $u = i_{g_T}(w)$, 若 $R(w) > T(w)$, 令 $T(u) = T(w)$; 否则令 $T(u) = +\infty$ 。由第 I 章练习 4.21 的 Galmarino 判别法, 该定义没有歧义。若 $T(u) < \infty$, 跨越 T 的游程长度 Λ_T 也可视为 U 上的函数。于是下面的表达式都有明确意义。

命题 3.5. 若 T 是终端的 $(\mathcal{F}_t^0)$ -停时, 则在 $\{0 < g_T < T\}$ 上,

$$E[F(i_{g_T}) | \mathcal{F}_{g_T}] = \frac{n(F\mathbf{1}_{\{R>T\}})}{n(R > T)} = n(F | R > T),$$

并且

$$E[F(i_{g_T}) | \mathcal{F}_{g_T}, \Lambda_T] = \frac{v(\Lambda_T; F\mathbf{1}_{\{R>T\}})}{v(\Lambda_T; \mathbf{1}_{\{R>T\}})}.$$

证明. 对非负可预测过程 Z , 仿照命题 3.3 的论证,

$$\begin{aligned} & E[Z_{g_T} F(i_{g_T}) \mathbf{1}_{\{0 < g_T < T\}}] \\ &= E \left[\sum_{s \in G_-} Z_s F(i_s) \mathbf{1}_{\{s < T, R(i_s) > T \circ \theta_s\}} \right] \\ &= E \left[\int_0^\infty ds Z_s \mathbf{1}_{\{s < T\}} \int F(u) \mathbf{1}_{\{R(u) > T(u)\}} n(du) \right] \\ &= E \left[\int_0^\infty ds Z_s \mathbf{1}_{\{s < T\}} n(R > T) \frac{n(F\mathbf{1}_{\{R>T\}})}{n(R > T)} \right] \\ &= E \left[Z_{g_T} \mathbf{1}_{\{0 < g_T < T\}} \frac{n(F\mathbf{1}_{\{R>T\}})}{n(R > T)} \right]. \end{aligned}$$

这证明第一式。第二式由第一式仿照命题 3.4 的证明得到。 $\square$

注. 命题第一式右端是常数, 所以跨越终端时刻 T 的游程与布朗运动截至 g_T 的过去相互独立。这就是刚才预告的独立性。由命题 3.3, 若把终端时刻 T 换成固定时刻 t , 一般不再有这种独立性; 但见练习 3.11。

本节最后给出一个有趣应用, 下一节将用到它。照例令

$$T_\varepsilon(w) = \inf\{t > 0 : w(t) > \varepsilon\}.$$

在 U 上,

$$\{T_\varepsilon < \infty\} = \{T_\varepsilon < R\}.$$

命题 3.6.

$$n \left(\sup_{s < R(u)} u(s) > \varepsilon \right) = n(T_\varepsilon < \infty) = \frac{1}{2\varepsilon}.$$

证明. 设 $0 < x < y$ 。时刻 T_x 是终端时刻。对它应用命题 3.5, 并取 $F = \mathbf{1}_{\{T_y < \infty\}}$, 得到

$$P[T_y(\theta_{g_{T_x}}) < \infty] = \frac{n(T_y < \infty)}{n(T_x < \infty)}.$$

左端也等于

$$P_x[T_y < T_0] = \frac{x}{y}.$$

所以存在常数 c , 使

$$n(T_\varepsilon < \infty) = \frac{c}{\varepsilon}.$$

在命题 2.6 中取

$$H(s, \cdot; u) = \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon < \infty\}}(u) \mathbf{1}_{\{s < L_t\}},$$

得到

$$E \left[\sum_{s \in G_- \cap [0, t]} \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon < \infty\}}(i_s) \right] = \frac{c}{\varepsilon} E[L_t].$$

用第 VI 章第 1 节的记号改写, 即

$$cE[L_t] = E[\varepsilon(d_\varepsilon(t) + 1)].$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 由第 VI 章定理 1.10 得 $c = 1/2$. □

注。 练习 2.10 已经证明过同一结论。

练习 3.7。 利用本节及上一节的结果, 给出 d_t 在给定 g_t 时的条件分布。由此给出第 III 章练习 3.20 第 4°、5° 问的另一种证明。

练习 3.8。

1°) 证明: 在给定 $g_1 = u$ 的条件下, 过程 $(B_t, t \leq u)$ 是区间 $[0, u]$ 上的布朗桥。由此推出

$$\left(\frac{B_{tg_1}}{\sqrt{g_1}}, 0 \leq t \leq 1 \right)$$

是区间 $[0, 1]$ 上的布朗桥, 并且与 g_1 以及过程 $(B_{g_1+u}, u \geq 0)$ 相互独立; 还要推出 g_1 服从反正弦分布。另见第 VI 章练习 2.30。

2°) 区间 $[0, 1]$ 上的布朗桥是半鞅。设 (l^a) 是它截至时刻 1 的局部时族。证明

$$(L_{g_1}^a, a \in \mathbb{R}) \stackrel{d}{=} \left(\sqrt{g_1} l^{a/\sqrt{g_1}}, a \in \mathbb{R} \right),$$

其中右端的 g_1 与布朗桥独立。特别地,

$$L_1^0 \stackrel{d}{=} \sqrt{g_1} l^0.$$

由此推出

$$l^0 \stackrel{d}{=} \sqrt{2e},$$

其中 e 是参数为 1 的指数随机变量。

提示: 见第 0 章第 6 节。

3°) 证明过程

$$M_u = \frac{|B_{g_1+u(1-g_1)}|}{\sqrt{1-g_1}}, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

与 $\tilde{\mathcal{F}}_1$ 独立。称 M 为长度为 1 的 布朗 *meander*。证明

$$M_1 \stackrel{d}{=} \sqrt{2e},$$

与上一问的 l^0 同分布。

提示：使用练习 2.13 中 n 的尺度性质。

4°) 证明对 $t > 0$, (g_t, L_t, B_t) 的联合分布为

$$\mathbf{1}_{\{l \geq 0, 0 < s < t\}} \frac{l}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{l^2}{2s}\right) \frac{|x|}{\sqrt{2\pi(t-s)^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) ds dl dx.$$

提示：

$$(g_1, L_1, B_1) \stackrel{d}{=} (g_1, \sqrt{g_1} l^0, \sqrt{1-g_1} M_1),$$

其中 g_1, l^0, M_1 相互独立。

练习 3.9 (*)。沿用上一练习的记号，并置

$$A_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} ds, \quad U = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{\beta_s > 0\}} ds,$$

其中 β 是布朗桥。第 VI 章第 2 节说明 A_1 服从反正弦分布；本题要证明 U 在 $[0, 1]$ 上均匀分布。

1°) 设 T 是与 B 独立、参数为 1 的指数随机变量。证明 A_{g_T} 与 $A_T - A_{g_T}$ 相互独立。由此，

$$A_T \stackrel{d}{=} T A_1 \stackrel{d}{=} T g_1 U + T \varepsilon (1 - g_1),$$

其中 ε 是参数为 1/2 的 Bernoulli 随机变量，且 T, g_1, U, ε 相互独立。

2°) 用 Laplace 变换从上一结果推出

$$\frac{1}{2} N^2 U \stackrel{d}{=} \frac{1}{2} N^2 V,$$

其中 N 是均值为零、方差为 1 的高斯随机变量；在左端它与 U 独立，在右端它与 V 独立，而 V 在 $[0, 1]$ 上均匀分布。证明这蕴含所需结论。

练习 3.10。证明过程 g 的自然滤过 $(\mathcal{F}_t^g)$ 严格粗于 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ ，并且

$$(\mathcal{F}_t^g) = (\mathcal{F}_t^L).$$

练习 3.11。对 $a > 0$ ，令

$$T = \inf\{t : t - g_t = a\}.$$

证明：跨越 T 的游程与布朗运动截至 g_T 的过去相互独立。

4 Itô 测度的刻画及其应用

第 2、3 节定义了 Itô 测度 n ，并说明它可用于陈述或证明许多结果。本节给出 n 的若干精确刻画，并由此导出更多应用。

先注意：当一个函数空间上给定 σ -有限测度时 (n 与 U 正是如此)，该测度的性质就是在它支配下坐标过程“分布”的性质。这个测度由其在可测矩形半代数上的限制唯一延拓；换言之，只要知道坐标过程的有限维分布，就知道整个测度。

当时间集是 $(0, \infty)$ 而不是第 III 章的 $[0, \infty)$ 时，齐次 Markov 过程的概念仍完全有意义。差别只在于此时不能再谈“初始测度”。给定转移半群 P_t ，若要写出 $0 < t_1 < \cdots < t_k$ 时的有限维分布，还须知道测度

$$\mu_t = X_t(P).$$

相应分布为

$$\int_{A_1} \mu_{t_1}(dx_1) \int_{A_2} P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \cdots \int_{A_k} P_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k).$$

称测度族 (μ_t) 为入口律。它必须满足

$$\mu_t P_s = \mu_{t+s}, \quad s, t > 0.$$

反过来，给定满足该式的入口律与转移函数，可以在规范空间上构造一个测度，使坐标过程具有上述有限维分布，因而成为 Markov 过程。这里 μ_t 可以是 σ -有限测度。如果 μ 是 P_t 的不变测度，则恒等族 $\mu_t = \mu$ 是入口律；在第 III 章的通常情形中，若过程由 P_ν 支配，则入口律为 (νP_t) 。在这一框架下，半群只须对 $t > 0$ 定义。

回忆第 III 章的记号： Q_t 表示在到达零点时杀死的布朗运动的半群（见该章练习 1.15 与 3.29），其密度为

$$q_t(x, y) = (2\pi t)^{-1/2} \left[\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(y+x)^2}{2t}\right) \right] \mathbf{1}_{\{xy > 0\}}.$$

以 $\lambda_t(dy)$ 表示 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上密度为

$$m_t(y) = (2\pi t^3)^{-1/2} |y| \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)$$

的测度。固定 y 后，它也是首次到达时刻 T_y 关于 t 的密度，见第 III 章第 3 节。若

$$g_t(y) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-y^2/(2t)},$$

则在 $(0, \infty)$ 上

$$m_t = -\frac{\partial g_t}{\partial y} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{2x} q_t(x, \cdot).$$

下面首先只考察坐标过程 w 在 $(0, R)$ 上的限制。为了使用第 III 章的框架，在本定理中约定 $w(t) = \delta$ ($t \geq R$)。

定理 4.1. 在 n 下，坐标过程 $(w(t), t > 0)$ 是齐次强 Markov 过程，其转移半群为 Q_t ，入口律为 $(\lambda_t, t > 0)$ 。

证明. 由于关于零点对称，只须对 n_+ 或 n_- 证明。以下取 n_+ ，但为简化仍写 n 。
 $(U_\delta, \mathcal{U}_\delta)$ 可以作为与 Q_t 对应的齐次 Markov 过程的规范空间，即在首次到达零点时杀死的布朗运动。以 (Q_x) 表示该空间上的相应概率测度，以 θ_t 表示移位算子。
 先证明：对 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ 、 $\Gamma \in \mathcal{U}_\delta$ 与 $r > 0$,

$$n(\{u(r) \in A\} \cap \theta_r^{-1}(\Gamma)) = n(\mathbf{1}_A(u(r)) Q_{u(r)}(\Gamma)). \quad (4.1)$$

若 $n(u(r) \in A) = 0$ ，等式显然。否则 $\{u(r) \in A\} \subset \{r < R\}$ ，故该集合具有有限 n -测度。对

点过程在集合 $\{u : u(r) \in A\}$ 上的迹应用引理 1.13, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{n(\mathbf{1}_A(u(r))\mathbf{1}_\Gamma(\theta_r u))}{n(u(r) \in A)} \\ &= P(B_r \in A, B^\circ \circ \theta_r \in \Gamma \mid B_r \in A), \end{aligned}$$

其中 B° 表示在到达零点时杀死的布朗运动。所用迹过程的首次跳时刻 S 是 $(\mathcal{F}_{\tau_t})$ -停时, 所以 τ_{S-}, τ_S 都是 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。对 $T = \tau_{S-} + r$ 使用强 Markov 性, 右端等于

$$E[\mathbf{1}_A(B_r)Q_{B_r}(\Gamma) \mid B_r \in A].$$

这就证明了 (4.1)。

现在取 $0 < t_1 < \dots < t_k < t$, 并令 $f_1, \dots, f_k, f$ 是非负 Borel 函数。杀死布朗运动的 Markov 性给出

$$Q_x \left[\prod_{i=1}^k f_i(u(t_i))f(u(t)) \right] = Q_x \left[\prod_{i=1}^k f_i(u(t_i))Q_{u(t_k)}f(u(t - t_k)) \right]. \quad (4.2)$$

对 (4.1)、(4.2) 反复应用, 便得到

$$n \left[\prod_{i=1}^k f_i(u(t_i))f(u(t)) \right] = n \left[\prod_{i=1}^k f_i(u(t_i))Q_{u(t_k)}f(u(t - t_k)) \right].$$

所以 u 在 n 下是转移半群为 Q_t 的齐次 Markov 过程。把 (4.2) 中的通常 Markov 性换成强 Markov 性, 即得 n 下的强 Markov 性。

入口律由

$$\lambda_t(A) = n(u(t) \in A)$$

给出。只须对 $y > 0$ 计算 $\lambda_t([y, \infty))$ 。取 $0 < \varepsilon < y$, 令

$$T_\varepsilon = \inf\{s > 0 : u(s) > \varepsilon\}.$$

则

$$\lambda_t([y, \infty)) = n(u(t) \geq y; T_\varepsilon < t).$$

由刚刚证明的强 Markov 性,

$$\lambda_t([y, \infty)) = n(T_\varepsilon < t; Q_{t-T_\varepsilon}(\varepsilon, [y, \infty))).$$

再把命题 3.5 应用于

$$F(u) = \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon(u) < t\}} Q_{t-T_\varepsilon(u)}(\varepsilon, [y, \infty)),$$

结合命题 3.6, 得到

$$\lambda_t([y, \infty)) = E \left[\mathbf{1}_{\{T_\varepsilon < t\}} \frac{\Phi_{t-T_\varepsilon}(y + \varepsilon) - \Phi_{t-T_\varepsilon}(y - \varepsilon)}{2\varepsilon} \right],$$

其中

$$\Phi_r(z) = \int_{-\infty}^z g_r(v) dv.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$ 。此时 $T_\varepsilon \rightarrow 0$ 几乎必然, 故

$$\lambda_t([y, \infty)) = g_t(y).$$

对 y 求导, 得到 λ_t 的密度正是 m_t , 证明完成。 □

注。

1°) (λ_t) 是 Q_t 的入口律, 也可通过初等计算直接核验; 当然, 这已经包含在上述证明中。

2°) 练习 4.8 给出 (λ_t) 显式值的另一种推导。

定理 4.1 给出了命题 2.8 后所预告的 Itô 描述。由命题 2.8, R 在 n_+ 下的密度为

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi r^3}}.$$

以下用 π_r 简记区间 $[0, r]$ 上的三维 Bessel 桥分布 $P_{0,0}^{3,r}$ 。

定理 4.2 (Itô 的条件描述)。 在 n_+ 下, 给定 $R = r$ 后, 坐标过程 w 的条件分布为 π_r 。换言之, 对每个 $\Gamma \in \mathcal{U}_\delta$,

$$n_+(\Gamma) = \int_0^\infty \frac{\pi_r(\Gamma)}{2\sqrt{2\pi r^3}} dr.$$

证明。 定理 4.1 可改述如下。设 $0 < t_1 < \cdots < t_n$, $A_i \subset (0, \infty)$ 为 Borel 集, 并令

$$\Gamma = \bigcap_{i=1}^n \{u(t_i) \in A_i\}.$$

则

$$\begin{aligned} n_+(\Gamma \cap \{R \in dr\}) &= \int_{A_1} m_{t_1}(x_1) dx_1 \int_{A_2} q_{t_2-t_1}(x_1, x_2) dx_2 \cdots \\ &\quad \times \int_{A_n} q_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n) m_{r-t_n}(x_n) dx_n dr. \end{aligned}$$

另一方面, 把第 XI 章第 3 节给出的 π_r 显式有限维密度代入定理陈述右端, 得到同一个表达式。这里使用了恒等式

$$\int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{2\pi r^3}} 2\sqrt{2\pi r^3} m_{r-t_n}(x_n) dr = 1$$

在相应条件密度中的抵消形式。两边在生成 $\mathcal{U}_\delta$ 的柱集上一致, 由单调类定理即得结论。□

推论 4.3。 测度 n 在时间反演下不变。即若

$$\hat{u}(t) = u(R(u) - t) \mathbf{1}_{\{t \leq R(u)\}},$$

则映射 $u \mapsto \hat{u}$ 保持 n 不变。

证明。 由第 XI 章练习 3.7, Bessel 桥在时间反演下交换两个端点; 对从零到零的桥, 它的分布不变。结合定理 4.2 即得结论。□

这可用于重新证明第 VII 章推论 4.6 的时间反演结果。

推论 4.4。 设 B 是从零出发的布朗运动, 对 $a > 0$ 令

$$T_a = \inf\{t : B_t = a\}.$$

若 Z 是 $\text{BES}^3(0)$, 并令

$$\sigma_a = \sup\{t : Z_t = a\},$$

则过程

$$(a - B_{T_a-t}, 0 < t < T_a)$$

与

$$(Z_t, 0 < t < \sigma_a)$$

同分布。

证明。沿用命题 2.5 的记号, 令

$$\beta_t = L_t - |B_t| = s - |e_s(t - \tau_{s-})| \quad (\tau_{s-} < t < \tau_s).$$

第 VI 章第 2 节说明 β 是标准布朗运动。再令

$$Z_t = L_t + |B_t| = s + |e_s(t - \tau_{s-})| \quad (\tau_{s-} < t < \tau_s).$$

由 Pitman 定理 (第 VI 章推论 3.8), Z 是 $\text{BES}^3(0)$ 。

容易看出

$$\tau_a = \inf\{t : L_t = a\} = \inf\{t : \beta_t = a\},$$

而且

$$\tau_a = \sup\{t : Z_t = a\},$$

因为 $Z_{\tau_a} = a$, 且 $t > \tau_a$ 时 $L_t > a$ 。

现在定义另一个 U -值点过程 $\tilde{e}$: 当 $s > a$ 时 $\tilde{e}_s = e_s$; 当 $s < a$ 时, 令

$$\tilde{e}_s(t) = e_{a-s}(R(e_{a-s}) - t), \quad 0 \leq t \leq R(e_{a-s}).$$

也就是说, 把局部时指标 $0 < s < a$ 的游程次序反转, 同时逐段作时间反演。由推论 4.3 与主公式, $\tilde{e}$ 具有与 e 相同的特征测度, 因而同分布。用 $\tilde{e}$ 按命题 2.5 的方式拼成过程

$$\tilde{Z}_t = s + |\tilde{e}_s(t - \tilde{\tau}_{s-})|$$

后, $\tilde{Z}$ 与 Z 同分布。直接观察拼接顺序可得

$$\tilde{Z}_t = a - \beta_{\tau_a-t}, \quad 0 < t < \tau_a.$$

因此结论成立。 □

第 X 章第 4 节曾由上述推论 (以及第 VII 章命题 4.8 的反演结果) 推出 Williams 路径分解定理。现在反过来用该分解定理给出 n 的另一种描述, 并导出布朗运动的若干应用。对正游程定义最大值

$$M(u) = \sup_{s < R(u)} u(s).$$

练习 2.10 与命题 3.6 已经给出

$$n_+(M > x) = \frac{1}{2x}.$$

取两个相互独立的 $\text{BES}^3(0)$ 过程 $\rho, \hat{\rho}$, 分别以 $T_c, \hat{T}_c$ 表示它们首次到达 $c > 0$ 的时刻。定义

$$Z_t^c = \begin{cases} \rho_t, & 0 < t < T_c, \\ c - \hat{\rho}_{t-T_c}, & T_c \leq t < T_c + \hat{T}_c, \\ 0, & t \geq T_c + \hat{T}_c. \end{cases}$$

对 $\Gamma \in \mathcal{U}_\delta$, 置

$$N(c, \Gamma) = P[Z^c \in \Gamma].$$

映射 N 是一个核。事实上, 由 BES^3 的尺度性质, (Z_t^c) 与 (cZ_{t/c^2}^1) 同分布, 所以 N 把连续函数映为 $c > 0$ 上的连续函数, 再用单调类定理即可。由第 VII 章命题 4.8, Z^c 的第二段也可以用 $\hat{\rho}$ 的反向路径来表示。

定理 4.5 (Williams 的描述)。对每个 $\Gamma \in \mathcal{U}_\delta$,

$$n_+(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_0^\infty N(x, \Gamma) x^{-2} dx.$$

换言之, 给定正布朗游程的高度等于 c 后, 该游程的条件分布为 Z^c 的分布。

证明。 令

$$U_c = \{u : M(u) > c\}.$$

由引理 1.13, 对 $\Gamma \in \mathcal{U}_\delta$,

$$n_+(\Gamma \cap U_c) = n_+(U_c)P[e^c \in \Gamma] = \frac{1}{2c}P[e^c \in \Gamma],$$

其中 e^c 是第一段高度超过 c 的正游程。它的分布就是跨越 T_c 的游程的分布, 即

$$Y_t = B_{g_{T_c}+t}, \quad 0 \leq t < d_{T_c} - g_{T_c}.$$

在 T_c 使用布朗运动的强 Markov 性, Y 可分成相互独立的前后两段

$$Y_t^1 = B_{g_{T_c}+t}, \quad 0 \leq t < T_c - g_{T_c},$$

以及

$$Y_t^2 = B_{T_c+t}, \quad 0 \leq t < d_{T_c} - T_c.$$

第二段具有从 c 出发的布朗运动在到达零点前的分布。由第 VI 章命题 3.13, 在给定最大值 M 后, 它又可分成两个独立部分: 一段从 c 上升到 M , 另一段具有 $M - \hat{\rho}$ 的分布, 其中 $\hat{\rho}$ 是从零出发、运行到首次到达 M 的 BES^3 。

另一方面, 由 Williams 分解定理 (第 VII 章定理 4.9), Y^1 是从零出发、运行到首次到达 c 的 BES^3 。再利用 BES^3 的强 Markov 性, 把 Y^1 与从 c 到 M 的那一段拼接, 得到从零出发、运行到首次到达 M 的 BES^3 。

因此, 在给定最大值 M 后, e^c 的条件分布正是 Z^M 的分布。由第 VI 章命题 3.13, 在条件 $\{M > c\}$ 下, M 在 $[c, \infty)$ 上的密度为

$$\frac{c}{x^2}.$$

所以

$$P[e^c \in \Gamma] = c \int_c^\infty x^{-2} N(x, \Gamma) dx.$$

代回首式, 再令 $c \downarrow 0$, 即得结论。 $\square$

为陈述并证明下一个结果, 引入若干新记号. 令 $\mathcal{W}^*$ 为所有定义在某个有限区间 $[0, \zeta(w)] \subset [0, \infty)$ 上的实值连续函数所成的空间, 赋予由坐标映射生成的通常 σ -代数. Itô 测度 n 以及布朗运动在紧区间上的路径分布, 都可视为 $\mathcal{W}^*$ 上的测度.

若 μ, μ' 是 $\mathcal{W}^*$ 上的两个测度, 定义 $\mu \circ \mu'$ 为 $\mu \otimes \mu'$ 在路径拼接 $(w, w') \mapsto w \circ w'$ 下的像测度, 其中

$$\begin{aligned}\zeta(w \circ w') &= \zeta(w) + \zeta(w'), \\ (w \circ w')(s) &= w(s), \quad 0 \leq s < \zeta(w), \\ (w \circ w')(s) &= w(\zeta(w)) + w'(s - \zeta(w)) - w'(0), \\ &\quad \zeta(w) \leq s < \zeta(w) + \zeta(w').\end{aligned}$$

以 $\hat{\mu}$ 表示 μ 在时间反演

$$\hat{w}(s) = w(\zeta(w) - s), \quad 0 \leq s \leq \zeta(w)$$

下的像测度. 若 $T: \mathcal{W}^* \rightarrow [0, \infty]$ 可测, 以 μ^T 表示 μ 在截断映射 $w \mapsto k_T(w)$ 下的像测度, 其中

$$\begin{aligned}\zeta(k_T(w)) &= \zeta(w) \wedge T(w), \\ k_T(w)(s) &= w(s), \quad 0 \leq s \leq \zeta(w) \wedge T(w).\end{aligned}$$

还照例定义

$$T_a(w) = \inf\{t: w(t) = a\}, \quad L_a(w) = \sup\{t: w(t) = a\}.$$

虽然从 a 出发的布朗运动分布 P_a 不能直接视为 $\mathcal{W}^*$ 上的测度, 但可用 $P_a^{T_0}$ 表示它在零点杀死后的分布. 若 S_3 是 $\text{BES}^3(0)$ 的分布, 同样可考虑 $S_3^{L_a}$. 第 VII 章推论 4.6 的时间反演结果写成

$$\widehat{(P_a^{T_0})} = S_3^{L_a}.$$

定理 4.5 也可写成

$$n_+ = \frac{1}{2} \int_0^\infty a^{-2} \left(S_3^{T_a} \circ \widehat{(S_3^{T_a})} \right) da.$$

游程空间 $U \subset \mathcal{W}^*$ 承载 n . 在 U 上仍以 R 表示 ζ .

命题 4.6。

$$\int_0^\infty n^r(\cdot \cap \{r < R\}) dr = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{(P_a^{T_0})} da.$$

证明。 令 (θ_t) 为通常的平移算子, 并置

$$\begin{aligned}g_t(w) &= \sup\{s < t: w(s) = 0\}, \\ d_t(w) &= \inf\{s > t: w(s) = 0\}, \\ G_w &= \{g_t(w): t \geq 0\}.\end{aligned}$$

以 E_0 表示 Wiener 测度下的期望. 取非负 $\mathcal{F}^0$ -可测函数 Y 及 $\lambda > 0$, 并令

$$P_m = \int_{-\infty}^{+\infty} P_a da.$$

比较下式的两种计算:

$$J = E_m \left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{T_0 < t\}} e^{-\lambda g_t} Y \circ k_{t-g_t} \circ \theta_{g_t} dt \right].$$

由命题 2.6,

$$E_0 \left[\int_0^\infty e^{-\lambda g_t} Y \circ k_{t-g_t} \circ \theta_{g_t} dt \right] = E_0 \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} dL_s \right] n \left(\int_0^R Y \circ k_r dr \right).$$

对 P_a 使用强 Markov 性,

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} da E_a[e^{-\lambda T_0}] E_0 \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} dL_s \right] n \left(\int_0^R Y \circ k_r dr \right).$$

而

$$E_a[e^{-\lambda T_0}] = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}},$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_a[e^{-\lambda T_0}] da = \sqrt{\frac{2}{\lambda}},$$

且第 X 章第 2 节给出

$$E_0 \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} dL_s \right] = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}.$$

所以

$$J = \lambda^{-1} n \left(\int_0^R Y \circ k_r dr \right). \quad (*)$$

另一方面, 因为 $\zeta(k_{t-g_t} \circ \theta_{g_t}) = t - g_t$, 并利用 $\widehat{(P_m^t)} = P_m^t$, 可将 J 写成

$$J = \int_0^\infty E_m^t [\mathbf{1}_{\{T_0 < t\}} Y \circ k_{t-g_t} \circ \theta_{g_t}] dt.$$

被积函数只依赖时刻 t 之前的路径, 故可把 E_m^t 换成 E_m 。于是

$$J = E_m \left[Y \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \right] = \lambda^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{(P_a^{T_0})}(Y) da.$$

与 (*) 比较, 即得命题。 □

注。 当然也有单边版本

$$\int_0^\infty n_+^r(\cdot \cap \{r < R\}) dr = \int_0^\infty \widehat{(P_a^{T_0})} da.$$

现在转向 Bismut 对 n 的描述。

定理 4.7 (Bismut 的描述)。 在 $\mathbb{R}_+ \times U_\delta$ 上定义测度

$$\widehat{n}(dt, du) = \mathbf{1}_{\{0 < t < R(u)\}} dt n_+(du).$$

在 $\widehat{n}$ 下, 随机变量 $(t, u) \mapsto u(t)$ 的分布为 $\mathbb{R}_+$ 上的 Lebesgue 测度 da 。给定 $u(t) = a$ 后, 游程在 t 之前的路径 $(u(s), 0 \leq s \leq t)$ 与把 t 之后的路径从寿命终点反向读取所得的路径, 相互独立, 且二者都是运行至最后一次到达 a 为止的 $\text{BES}^3(0)$ 。

证明。把 U_δ 视为 $\mathcal{W}^*$ 的子集, 定理可看成 $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{W}^*$ 上两个测度相等。由单调类定理, 只须对 $f(t)H(w)$ 验证, 其中 H 取自一个对逐点乘法稳定并生成 $\mathcal{W}^*$ 上 σ -代数的函数类。可取

$$H(w) = \prod_{i=1}^n \exp \left\{ -\lambda_i \int_0^{\zeta(w)} f_i(w(s)) \, ds \right\},$$

其中 $\lambda_i > 0$, f_i 有界 Borel。对每个 t , 这类随机变量都可写成

$$Z_t Y_t \circ \theta_t,$$

其中 Z_t 关于 $\mathcal{F}_t^0$ 可测。

由定理 4.1 的 Markov 描述,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+ \times U_\delta} f(u(t)) Z_t(u) Y_t(\theta_t u) \hat{n}(dt, du) \\ &= \int_0^\infty dt \int_{U_\delta} f(u(t)) Z_t(u) E_{u(t)}^{T_0} [Y_t] n_+(du) \\ &= \int_0^\infty dt \int_{U_\delta} f(u(t)) Z_t(u) E_{u(t)}^{T_0} [Y_t] n_+^t(du; t < R). \end{aligned}$$

使用命题 4.6 的单边版本, 上式等于

$$\int_0^\infty da E_{S_3^{L_a}} [f(X_{L_a}) Z_{L_a}] E_a^{T_0} [Y].$$

在 $S_3^{L_a}$ 下, $\zeta = L_a$ 且终点为 a ; 在 $P_a^{T_0}$ 下, $\zeta = T_0$ 。所以最后得到

$$\int_0^\infty da E_{S_3^{L_a}} [f(a) Z_{L_a}] E_a^{T_0} [Y].$$

再用推论 4.4 的时间反演关系 $\widehat{(P_a^{T_0})} = S_3^{L_a}$, 这正是定理所述的条件独立分解。□

练习 4.8 (定理 4.1 中入口律显式表达式的另一种证明)。 设 f 是 $\mathbb{R}_+$ 上的非负 Borel 函数, U_p 是布朗运动的预解算子。利用命题 2.6 的公式证明

$$U_p f(0) = E \left[\int_0^\infty e^{-p\tau_s} \, ds \right] \int_0^\infty e^{-pu} \lambda_u(f) \, du.$$

再由 U_p 的显式表达式和 τ_s 的分布计算 $\lambda_u(f)$ 。

练习 4.9。 在条件 $R = r$ 下, 证明布朗游程在区间 $[0, r]$ 上是半鞅, 因而存在一族截至时刻 r 的局部时 $(l^a, a > 0)$, 并且这族局部时满足占用时间公式。

练习 4.10。 对 $x \in \mathbb{R}_+$, 令 s_x 为使 e_{s_x} 成为第一个满足 $R(e_{s_x}) > x$ 的游程的指标。令 L 为所有 $u < s_x$ 的游程 e_u 中最长者的长度。证明

$$P[L < y] = \left(\frac{y}{x} \right)^{1/2}, \quad y \leq x.$$

练习 4.11 (Watanabe 过程与 Knight 恒等式)。

1°) 沿用通常的记号。证明第 X 章练习 1.9 已研究过的过程

$$Y_t = S_{\tau_t}$$

是状态空间 $[0, \infty[$ 上的齐次 Markov 过程, 其半群为

$$T_0 = I, \quad T_t f(x) = e^{-t/(2x)} f(x) + \int_x^\infty e^{-t/(2y)} \frac{t}{2y^2} f(y) dy.$$

提示: 使用命题 2.5 中借助游程过程描述布朗运动的方法。特别地,

$$P[S_{\tau_t} \leq a] = e^{-t/(2a)}.$$

核对第 VII 章练习 1.27 中给出的答案。

2°) 更一般地, 证明

$$E \left[e^{-\lambda^2 \tau_t^+ / 2} \mathbf{1}_{\{S_{\tau_t} \leq a\}} \right] = \exp \left\{ -\frac{\lambda t}{2} \coth(a\lambda) \right\},$$

其中

$$\tau_t^+ = \int_0^{\tau_t} \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} ds.$$

3°) 由此推出 Knight 恒等式

$$E \left[\exp \left\{ -\frac{\lambda^2 \tau_t^+}{2 S_{\tau_t}^2} \right\} \right] = \frac{2\lambda}{\sinh(2\lambda)}.$$

并证明

$$\frac{\tau_t^+}{S_{\tau_t}^2} \stackrel{d}{=} \inf\{s : U_s = 2\},$$

其中 U 是从 0 出发的 BES³。

提示: 证明并使用公式

$$\int (1 - e^{-R/2}) \mathbf{1}_{\{M \leq x\}} dn^+ = \frac{\coth x}{2}, \quad M = \sup_{t < R} w(t).$$

4°) 利用时间反演再给出一个证明。

练习 4.12 (练习 2.13: 归一化游程, 续)。 设 p 是 M 在 γ 下之分布的密度 (见练习 4.13)。证明

$$\int_0^\infty xp(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

换言之, 归一化游程的平均高度为 $\sqrt{\pi/2}$ 。

提示: 利用练习 2.13 的第 3° 问, 把 n 下 (R, M) 的联合分布写成 p 的函数, 再把 R 的边缘分布与命题 2.8 给出的分布比较。

练习 4.13。

1°) 令

$$M(w) = \sup_{t < R} w(t).$$

利用定理 4.1 对 n 的描述, 证明

$$n_+(M \geq x) = \lim_{s \downarrow 0} \left(\int_0^x \lambda_s(dy) Q_y[T_x < T_0] + \int_x^\infty \lambda_s(dy) \right),$$

并由此再次求出 M 在 n_+ 下的分布; 这个分布已在练习 2.10 和命题 3.6 中得到。

2°) 证明

$$M_x = \sup\{B_t : t < g_{T_x}\}$$

在 $[0, x]$ 上均匀分布。这是 Williams 分解定理的一部分。

提示: 若 $y \leq x$ 且 $M_x < y$, 则第一个越过 x 的游程也正是第一个越过 y 的游程。

3°) 仿照第 1° 问的方法, 再给出命题 2.8 的一个证明。

练习 4.14 (用游程方法处理 Skorokhod 问题)。 沿用第 VI 章第 5 节的记号。假设 ψ_μ 连续且严格递增, 并以 ϕ 表示其反函数。

1°) 证明停时

$$T = \inf\{t : S_t \geq \psi_\mu(B_t)\}, \quad T' = \inf\{t : |B_t| \geq L_t - \phi(L_t)\}$$

具有相同的分布。

2°) 证明按本章记号, 点过程 $\{(s, e_s)\}$ 是取值于 $\mathbb{R}_+ \times U_\delta$ 的 Poisson 点过程, 其特征测度为 $ds \, dn(u)$ 。

3°) 令

$$\Gamma_x = \{(s, u) \in \mathbb{R}_+ \times U_\delta : 0 \leq s \leq x, M(u) \geq s - \phi(s)\}, \quad N_x = \sum_s \mathbf{1}_{\Gamma_x}(s, e_s).$$

证明

$$P[L_{T'} \geq x] = P[N_x = 0],$$

并由此推出 $\phi(S_T) = B_T$ 的分布为 μ 。

4°) 把这一方法推广到 ψ_μ 仅为右连续函数的情形。

练习 4.15。 若 $A = L^z$, 其中 $z > 0$, 证明命题 2.7 中定义的 A_{τ_t} 的 Lévy 测度 m_A 满足

$$m_A(]x, \infty[) = \frac{1}{2z} e^{-x/(2z)}, \quad x > 0.$$

练习 4.16 (Azéma 鞅)。

1°) 利用命题 3.3 证明: 沿用该命题的记号, 若 $f(|B_t|)$ 可积, 则

$$E[f(|B_t|) | \mathcal{F}_{g_t}] = \frac{1}{A_t} \int_0^\infty e^{-y^2/(2A_t)} y f(y) \, dy.$$

提示: 写成

$$B_t = B_{g_t+t-g_t} = B_{A_t}(i_{g_t}).$$

2°) 在第 1° 问中分别取 $f(y) = y^2$ 和 $f(y) = |y|$, 证明

$$t - 2g_t, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}(t - g_t)} - L_t$$

都是 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -鞅。

3°) 若 f 有界且其一阶导数 f' 也有界, 证明

$$f(L_t) - \sqrt{\frac{\pi}{2}(t - g_t)} f'(L_t)$$

是 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -鞅。

练习 4.17. 令

$$\tau_a = \inf\{t : L_t = a\}.$$

证明过程

$$(B_t, t \leq \tau_a) \quad \text{与} \quad (B_{\tau_a - t}, t \leq \tau_a)$$

等价。

提示: 使用命题 2.5 和推论 4.3。

练习 4.18. 沿用命题 4.6 和定理 4.7 的记号。对 P_0 -几乎每条路径, 都可定义其在 0 点的局部时及其逆 τ_t ; 因此 $P_0^{\tau_s}$ 有意义, 并且是 $\mathcal{W}^*$ 上的概率测度。

1°) 证明

$$\int_0^\infty P_0^t dt = \left(\int_0^\infty P_0^{\tau_s} ds \right) \circ \left(\int_0^\infty n^r(\cdot \cap \{r < R\}) dr \right).$$

这个公式换一种形式也可不借助游程理论推出, 见练习 4.26。回忆第 VI 章练习 2.29 已证明

$$\int_0^\infty P_0^{\tau_s} ds = \int_0^\infty Q_t \frac{dt}{\sqrt{2\pi t}},$$

其中 Q_t 是区间 $[0, t]$ 上布朗桥的分布。

2°) 以 M^t 表示把长度为 1 的 Brownian meander (练习 3.8) 按尺度变换得到的长度为 t 的 Brownian meander 之分布。证明

$$n^t(\cdot \cap \{t < R\}) = \frac{M^t}{\sqrt{2\pi t}}.$$

从而

$$\int_0^\infty M^t \frac{dt}{\sqrt{2\pi t}} = \int_0^\infty S_3^{L_a} da. \quad (*)$$

3°) 由 (*) 推出 Imhof 关系: 对每个 $t > 0$,

$$M^t = \left(\frac{\pi t}{2} \right)^{1/2} X_t^{-1} S_3^t, \quad (+)$$

其中 $X_t(\omega) = \omega(t)$ 是坐标过程。

提示: 在 (*) 左端按 $L_a = t$ 作条件化, 再使用第 XI 章练习 3.12 的结论。分别写出 (*) 两端在 (ζ, X_ζ) 上诱导的分布, 还可再次得到练习 3.8 给出的 X_t 在 M^t 下的分布。

4°) 证明 (+) 等价于下述性质: 对 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上任意有界连续泛函 F ,

$$M^1(F) = \lim_{r \downarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{E_r[F \mathbf{1}_{\{T_0 > 1\}}]}{r},$$

其中 P_r 是从 r 出发的布朗运动的分布, T_0 是其首次到达 0 的时刻。本问不用于后文。
提示: 使用第 XI 章练习 1.22。

5°) 在 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上令 $\mathcal{B}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$ 。证明对 $0 \leq t \leq 1$,

$$S_3^1 \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} X_1^{-1} \mid \mathcal{B}_t \right] = X_t^{-1} \phi \left(\frac{X_t}{\sqrt{1-t}} \right),$$

其中

$$\phi(a) = \int_0^a e^{-y^2/2} dy.$$

注意, 这说明在第 V 章练习 2.13 的基本反例中, $1/X_t$ 偏离鞅的程度究竟有多大。
提示: 使用 BES^3 的 Markov 性。

6°) 证明在 M^1 下存在布朗运动 β , 使得

$$X_t = \beta_t + \int_0^t \left(\frac{\phi'}{\phi} \right) \left(\frac{X_s}{\sqrt{1-s}} \right) \frac{ds}{\sqrt{1-s}}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

这说明 Brownian meander 是半鞅, 并给出了它在自然滤过下的分解。
提示: 对第 5° 问中的鞅应用 Girsanov 定理。

练习 4.19 (最长游程)。 若 $B_s = 0$, 以 $D(s)$ 表示时刻 s 以前出现过的最长游程之长度。本题的目标是求固定 t 下 $D(g_t)$ 的分布。对 $\beta > 0$, 置

$$c_\beta = \int_0^\infty (1 - e^{-\beta t}) (2\pi t^3)^{-1/2} dt, \quad d_\beta(x) = \int_x^\infty e^{-\beta t} (2\pi t^3)^{-1/2} dt,$$

并令

$$\phi_s(x, \beta) = E \left[\mathbf{1}_{\{D(\tau_s) > x\}} e^{-\beta \tau_s} \right].$$

1°) 若

$$L_\beta(x) = E \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} \mathbf{1}_{\{D(g_t) > x\}} dt \right],$$

证明

$$\beta L_\beta(x) = c_\beta \int_0^\infty \phi_s(x, \beta) ds.$$

2°) 写成

$$\begin{aligned} \phi_t(x, \beta) = E \left[\sum_{s \leq t} \left\{ \mathbf{1}_{\{D(\tau_s) > x\}} e^{-\beta \tau_s} \right. \right. \\ \left. \left. - \mathbf{1}_{\{D(\tau_{s-}) > x\}} e^{-\beta \tau_{s-}} \right\} \right], \end{aligned}$$

并证明 ϕ 满足方程

$$\phi_t(x, \beta) = -(c_\beta + d_\beta(x)) \int_0^t \phi_s(x, \beta) ds + d_\beta(x) \int_0^t e^{-c_\beta s} ds.$$

3°) 证明

$$\beta L_\beta(x) = \frac{d_\beta(x)}{c_\beta + d_\beta(x)}.$$

提示:

$$\{D(\tau_s) > x\} = \{D(\tau_{s-}) > x\} \cup \{\tau_s - \tau_{s-} > x\}.$$

4°) 把 $D(g_t)$ 换成 $D(d_t)$, 求解同一问题。

5°) 利用布朗运动的尺度性质, 计算 $(D(g_1))^{-1}$ 和 $(D(d_1))^{-1}$ 的 Laplace 变换。

练习 4.20。 设 A 是布朗运动的加性泛函, 其相伴测度为 μ ; 令 S_θ 是参数为 $\theta^2/2$ 且与布朗运动独立的指数随机变量。

1°) 利用练习 4.18 的第 1° 问证明: 对 $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} E_0[e^{-\lambda A_{S_\theta}}] &= \frac{\theta^2}{2} \int_0^\infty E_0 \left[\exp \left\{ -\lambda A_{\tau_s} - \frac{\theta^2}{2} \tau_s \right\} \right] ds \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} E_a \left[\exp \left\{ -\lambda A_{T_0} - \frac{\theta^2}{2} T_0 \right\} \right] da. \end{aligned}$$

2°) 若 ϕ 和 ψ 是 Sturm–Liouville 方程

$$\phi'' = 2 \left(\lambda \mu + \frac{\theta^2}{2} \right) \phi$$

的适当解, 证明

$$E[e^{-\lambda A_{S_\theta}}] = \frac{\theta^2}{2\phi'(0+)} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(a) da.$$

3°) 沿用第 VI 章定理 2.7 的记号, 在 $A_t = A_t^+$ 时求出第 1° 问各表达式的显式值, 并由此再证明一次反正弦律。本问与第 2° 问相互独立。

提示: 利用 $A_{\tau_s}^+$ 与 $A_{\tau_s}^-$ 的独立性、 $\tau_s = A_{\tau_s}^+ + A_{\tau_s}^-$, 以及命题 2.7、2.8 的结论。

练习 4.21 (BESQ $^\delta$ 的 Lévy–Khintchine 公式)。 若 $(l^a, a > 0)$ 是布朗游程的一族局部时 (见练习 4.9), 令 M 为 n^+ 在映射

$$u \mapsto (a \mapsto l_{R(u)}^a(u))$$

下的像测度。于是 M 是 $W_+ = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ 上的测度。若 $f \in W_+$, 对任意过程 X 置

$$X_f = \int_0^\infty f(t) X_t dt.$$

1°) 沿用第 XI 章第 1 节的记号, 证明对 $x \geq 0$,

$$Q_x^0[e^{-X_f}] = \exp \left\{ -x \int (1 - e^{-\langle f, \varphi \rangle}) M(d\varphi) \right\},$$

其中

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(t) \varphi(t) dt.$$

提示: 使用第二 Ray–Knight 定理和命题 1.12。

2°) 对 $\varphi \in W_+$, 令

$$\varphi^s(t) = \varphi((t-s)^+),$$

并令

$$N = \int_0^\infty M_s \, ds,$$

其中 M_s 是 M 在映射 $\varphi \mapsto \varphi^s$ 下的像测度。证明

$$Q_0^2[e^{-X_f}] = \exp \left\{ -2 \int (1 - e^{-\langle f, \varphi \rangle}) N(d\varphi) \right\}.$$

提示：使用第 XI 章练习 2.7 的第 1° 问，以及对布朗运动而言 $|B| + L$ 是从 0 出发的 BES³ 这一事实。

注意，此处的 M_s 与练习 4.18 中 Brownian meander 的分布 M^s 毫无关系。

3°) 推出

$$Q_x^\delta[e^{-X_f}] = \exp \left\{ - \int (1 - e^{-\langle f, \varphi \rangle}) (xM + \delta N)(d\varphi) \right\}.$$

4°) 对终点为 0 的 Bessel 平方桥分布 $Q_{x,0}^{\delta,t}$, 证明类似的 Lévy–Khintchine 表示。以 M_0, N_0 表示相应的测度；此时它们定义在 $C([0,1], \mathbb{R}_+)$ 上。

5°) 设 I 是 $\mathbb{R}_+$ 的一个子区间，且 $x, y \in I, x < y$ 。以 $P_{x,y}$ 表示 $C(I, \mathbb{R}_+)$ 上如下过程 $X_{x,y}$ 的分布：过程在 (x, y) 以外为零，而在 (x, y) 上为从 0 到 0 的 BESQ⁴ _{$y-x$} , 即

$$X_{x,y}(v) = (y-x)Z\left(\frac{v-x}{y-x}\right)\mathbf{1}_{\{x \leq v \leq y\}}, \quad v \in I,$$

其中 Z 的分布为 $Q_{0,0}^{4,1}$ 。证明上述 Lévy 测度可写成

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{-2} P_{0,y} \, dy, & N &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \int_x^\infty (y-x)^{-2} P_{x,y} \, dy, \\ M_0 &= \frac{1}{2} \int_0^1 y^{-2} P_{0,y} \, dy, & N_0 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_x^1 (y-x)^{-2} P_{x,y} \, dy. \end{aligned}$$

练习 4.22。 设 ϕ 和 f 是相应空间上的非负 Borel 函数。证明

$$\int n_+(de) \int_0^{R(e)} \phi(s) f(e_s) \, ds = 2 \int n_+(de) \phi(R(e)) \int_0^{R(e)} f(2e_s) \, ds.$$

提示：利用练习 4.17 的第 2° 问计算左端，利用定理 4.1 计算右端。

练习 4.23。 证明定理 4.7 等价于下述结论。令 ξ 为 $\mathbb{R}_+ \times W \times W$ 上的测度

$$\xi(dt, dw, dw') = \mathbf{1}_{\{t>0\}} dt S_3(dw) S_3(dw'),$$

并令

$$L(t, w) = \sup\{s : w(s) = t\}.$$

定义取值于 U_δ 的变量 e :

$$e_s(t, w, w') = \begin{cases} w(s), & 0 \leq s \leq L(t, w), \\ w'(L(t, w) + L(t, w') - s), & L(t, w) \leq s \leq L(t, w) + L(t, w'), \\ 0, & s \geq L(t, w) + L(t, w'). \end{cases}$$

证明 (L, e) 在 ξ 下的分布等于 $\hat{n}_+$ 。

练习 4.24 (Chung–Jacobi–Riemann 恒等式)。 设 B 是标准布朗运动, T 是参数为 $1/2$ 、与 B 独立的指数随机变量。

1°) 证明对每个非负可测泛函 F ,

$$E[F(B_u; u \leq g_T) \mid L_T = s] = e^s E[F(B_u; u \leq \tau_s) e^{-\tau_s/2}],$$

从而

$$E[F(B_u; u \leq g_T)] = \int_0^\infty E[F(B_u; u \leq \tau_s) e^{-\tau_s/2}] ds.$$

2°) 以 S^0, I^0, l^0 分别表示标准布朗桥 $(b(t), t \leq 1)$ 的上确界、下确界的相反数以及在 0 点的局部时。给定一个与 b 独立的标准正态随机变量 N , 证明三变量公式

$$P[|N|S^0 \leq x; |N|I^0 \leq y; |N|l^0 \in dl] = \exp\left\{-\frac{l}{2}(\coth x + \coth y)\right\} dl.$$

3°) 由此证明

$$P[|N|S^0 \leq x; |N|I^0 \leq y] = \frac{2}{\coth x + \coth y},$$

并且, 若

$$M^0 = \sup\{|b(s)| : s \leq 1\},$$

则

$$P[|N|M^0 \leq x] = \tanh x.$$

再证明 Csáki 公式

$$P\left[\frac{S^0}{S^0 + I^0} \leq v\right] = (1 - v)(1 - \pi v \cot(\pi v)), \quad 0 < v < 1.$$

提示: 使用恒等式

$$2v^2 \int_0^\infty \left(\frac{\sinh(v\lambda)}{v \sinh \lambda}\right)^2 d\lambda = 1 - \pi v \cot(\pi v).$$

4°) 证明 Chung–Jacobi–Riemann 恒等式

$$(S^0 + I^0)^2 \stackrel{d}{=} (M^0)^2 + (\widetilde{M}^0)^2,$$

其中 $\widetilde{M}^0$ 是 M^0 的一个独立副本。

5°) 刻画满足下列条件的正随机变量对 (S, I) :

i) 对某个函数 h ,

$$P[|N|S \leq x; |N|I \leq y] = \frac{2}{h(x) + h(y)};$$

ii)

$$(S + I)^2 \stackrel{d}{=} M^2 + \widetilde{M}^2,$$

其中 M 和 $\widetilde{M}$ 是 $S \vee I$ 的两个独立副本。

练习 4.25 (Brownian meander 与布朗桥)。设 $a \in \mathbb{R}$, 并令 Π_a 为布朗桥 $(B_t, t \leq 1)$ 的分布, 其中 $B_0 = 0, B_1 = a$ 。证明在 Π_a 下, 两个过程

$$(2S_t - B_t, t \leq 1), \quad (|B_t| + L_t, t \leq 1)$$

都与 Brownian meander $(m_t, t \leq 1)$ 在条件 $m_1 \geq |a|$ 下具有相同分布。

提示: 结合练习 4.18 中的关系 (+) 与第 VI 章练习 3.20。

特别地, 在 $a = 0$ 时, 若 $(b_t, t \leq 1)$ 是标准布朗桥, $\sigma_t = \sup_{s \leq t} b_s$, 而 $(l_t, t \leq 1)$ 是其在 0 点的局部时, 则上述描述给出

$$(m_t, t \leq 1) \stackrel{d}{=} (2\sigma_t - b_t, t \leq 1) \stackrel{d}{=} (|b_t| + l_t, t \leq 1).$$

证明: 在概率测度 $(\sigma_1/c) \cdot \Pi_0$ 下, 过程 $(2\sigma_t - b_t, t \leq 1)$ 是 BES^3 ; 相应地, 在 $(l_1/c) \cdot \Pi_0$ 下, 过程 $(|b_t| + l_t, t \leq 1)$ 也是 BES^3 。这里 c 是归一化常数。

练习 4.26。

1°) 沿用本节记号, 置

$$J = \int_0^\infty P_0^t dt.$$

证明

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^\infty da \int_0^\infty P_0^{\tau_s^a} ds \\ &= \int_{-\infty}^\infty da \int_0^\infty (P_0^{T_a} \circ P_0^{\tau_s^0}) ds, \end{aligned}$$

其中

$$\tau_s^a = \inf\{t : L_t^a > s\}.$$

提示: 使用第 VI 章练习 1.13 的广义占用时间公式。

2°) 在 $\mathcal{W}^*$ 上定义映射 $\omega \mapsto \tilde{\omega}$:

$$\zeta(\tilde{\omega}) = \zeta(\omega), \quad \tilde{\omega}(t) = \omega(0) + \omega(\zeta(\omega)) - \omega(\zeta(\omega) - t).$$

以 $\tilde{\mu}$ 表示测度 μ 在此映射下的像。证明

$$\tilde{J} = J, \quad \widetilde{(\mu \circ \mu')} = \tilde{\mu}' \circ \tilde{\mu}$$

对 $\mathcal{W}^*$ 上任意一对测度 (μ, μ') 都成立。

3°) 证明

$$P_0^{\tau_s^0} = \widetilde{(P_0^{\tau_s^0})},$$

并推出

$$J = \left(\int_0^\infty P_0^{\tau_s^0} ds \right) \circ \left(\int_{-\infty}^\infty \widetilde{(P_0^{T_a})} da \right).$$

提示: 参见第 VI 章练习 2.29。

注释与评述

第 1 节。 本节主要取材于 Itô [5] 和 Meyer [4]。练习 1.19 来自 Pitman–Yor [8]。

第 2 节。用游程与 Poisson 点过程描述布朗运动的第一次突破，是 Itô [5] 的论文。Lévy 的工作虽已在直观层面包含若干想法，但把这一主题置于严格数学基础之上、从而为概率论再添一块基石的，是 Itô。诚然，一旦知道了特征测度，各种计算便都能进行；我们希望后面几节的练习已经清楚地说明了这一点。关于本节的结果，还可参阅 Maisonneuve [6] 和 Pitman [4]。

命题 2.9、练习 2.14 以及第 VI 章已经给出的同类逼近结果，均由 Lévy 证明或提出猜想。相应证明先后见于 Itô–McKean [1]、Williams [6]、Chung–Durrett [1] 和 Maisonneuve [4]，并在这些工作中逐步得到简化。

练习 2.17 可以推广，用来计算 Walsh 布朗运动在不同射线上的多维占用时间分布；见 Barlow 等 [1] (1989)。

第 3 节。本节说明如何运用第 2 节给出的整体游程理论来描述单个游程的分布，即跨越给定随机时刻 T 的游程。这里的讨论只针对两类 T ：一类是相对于滤过

$$(\tilde{\mathcal{F}}_t) = (\mathcal{F}_{g_t})$$

的停时；另一类是终端的 $(\mathcal{F}_t)$ -停时。一般讨论见 Maisonneuve [7]。本节的基本框架来自 Gettoor–Sharpe [5]，该文实际上在远为一般的背景下展开。亦可参阅 Chung [1]。滤过 $(\mathcal{F}_{g_t})$ 由 Maisonneuve [6] 引入并研究。

练习 3.8 的 Brownian meander 近来受到广泛研究；见 Imhof [1, 2]、Durrett 等 [1]、Denisov [1] 以及 Biane–Yor [3]。它在 Azéma 鞅的研究中有许多应用；练习 4.16 即取自 Azéma–Yor [3]。

第 4 节。定理 4.1 和 4.2 是 Itô [5] 的基本结果。推论 4.4 的证明取自 Ikeda–Watanabe [2]。

Williams 对 Itô 测度的描述见 Williams [7] 和 Rogers–Williams [1] (另见 Rogers [1])；Bismut 的描述发表于 Bismut [3]。后一描述的证明以及练习 4.18 所用的形式体系，最早见于 Biane–Yor [1]。Bismut 的论文还包含更多信息；Biane [1] 利用这些信息研究布朗桥与布朗游程之间的关系，并补充 Vervaat [1] 的结果。

练习 4.8 来自 Rogers [3]。练习 4.11 推导的 Knight 恒等式 (Knight [8])，在 Biane [2] 和 Vallois [3] 中又通过伪布朗桥的逐路径分解得到说明（比较第 VI 章练习 2.29）。Pitman–Yor [9, 23] 分别把它推广到 Bessel 过程和受扰布朗运动。Watanabe 过程见 Watanabe [2]。练习 4.14 来自 Rogers [1]；练习 4.16 源于 Azéma [2]，练习 4.17 源于 Biane 等 [1]。练习 4.18 一部分取自 Azéma–Yor [3]，另一部分取自 Biane–Yor [1, 3]；练习 4.19 来自 Knight [6]。练习 4.20 见 Biane–Yor [4]，练习 4.21 见 Pitman–Yor [2]。Bertoin–Pitman [1] 和 Bertoin 等 [1] 还给出了连接布朗桥、布朗游程与 Brownian meander 的进一步结果。

借助练习 4.21 得到的 Q_x^δ 的显式 Lévy–Khintchine 表示，Le Gall–Yor [5] 推广了关于布朗局部时的 Ray–Knight 定理：他们证明，对任意 $\delta > 0$ ， Q_0^δ 都是某个以空间为变量的局部时过程的分布。练习 4.21 中把 M, N, M_0, N_0 表示为 BES⁴ 平方桥积分的公式，取自 Pitman [5]。练习 4.22 见 Azéma–Yor [3]；练习 4.23 源于 Bismut [3]。

练习 4.24 刻画了布朗桥的上确界、下确界与局部时的联合分布；该题取自 Pitman 与 Yor 当时尚在进行的工作。题中引入独立高斯随机变量的表达方式，不同于文献中用 theta 函数写成的经典公式（例如见 Borodin–Salminen [1]）。第 3° 问的 Csáki 公式来自 Csáki [1]，并在 Pitman–Yor [13] 中得到进一步讨论。第 4° 问的 Chung 恒等式仍颇为神秘，不过 Biane–Yor [1] 和 Williams [9] 已部分说明它与 Riemann zeta 函数泛函方程之间的联系。关于该泛函方程的随机游走方法，亦见 Smith–Diaconis [1]；进一步的发展见 Biane–Pitman–Yor [1]。

练习 4.25 是对 Biane–Yor [3] 中 $a = 0$ 时相应结论以及 Bertoin–Pitman [1] 中定理 4.3 后评注的推广与改进。练习 4.26 的简洁证明取自 Leuridan [1]。

第 XIII 章 分布极限定理

1 依分布收敛

本节把第 0 章第 5 节的概念具体化到 Wiener 空间 W^d 。在 $\mathbb{R}_+$ 的紧子集上一致收敛的拓扑下， W^d 是 Polish 空间。这个拓扑可由度量

$$d(\omega, \omega') = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\sup_{t \leq n} |\omega(t) - \omega'(t)|}{1 + \sup_{t \leq n} |\omega(t) - \omega'(t)|}$$

诱导。Ascoli 定理刻画了该拓扑中的相对紧子集。令

$$V^N(\omega, \delta) = \sup\{|\omega(t) - \omega(t')| : |t - t'| \leq \delta, t, t' \leq N\}.$$

于是有下述结论。

命题 1.1。 W^d 的子集 Γ 相对紧，当且仅当：

- i) 集合 $\{\omega(0) : \omega \in \Gamma\}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中有界；
- ii) 对每个 N ,

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \sup_{\omega \in \Gamma} V^N(\omega, \delta) = 0.$$

第 0 章第 5 节已经定义了 W^d 的 Borel σ -代数上概率测度的弱收敛。下面刻画这个 σ -代数。

命题 1.2。 W^d 上的 Borel σ -代数等于由坐标映射生成的 σ -代数 $\mathcal{F}$ 。

证明。 坐标映射显然连续，故 $\mathcal{F}$ 包含于 Borel σ -代数。反过来，由 d 的定义，对每个固定的 ω' ，映射 $\omega \mapsto d(\omega, \omega')$ 都是 $\mathcal{F}$ -可测的。因此每个开球、进而每个 Borel 集都属于 $\mathcal{F}$ 。 $\square$

如果把时间范围缩小到紧区间，上述概念会呈现得更简单；但通常我们仍在整个半直线上工作。

定义 1.3。 设 X^n 是分别定义在概率空间 $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$ 上、取值于 $\mathbb{R}^d$ 的连续过程。若其分布 $X^n(P^n)$ 在 W^d 上弱收敛于过程 X 的分布，则称 (X^n) 依分布收敛于 X ，记作

$$X^n \xrightarrow{d} X.$$

这个定义把过程整体看成取值于 W^d 的随机变量。若只考察过程在有限多个固定时刻的值，就得到一个较弱的收敛概念。

定义 1.4。 设 (X^n) 是取值于 $\mathbb{R}^d$ 的过程列，它们不必连续。若对任意有限时刻族 $(t_1, \dots, t_k)$ ， $\mathbb{R}^{dk}$ -值随机变量

$$(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n)$$

依分布收敛于 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ ，则称 X^n 依有限维分布收敛于 X ，记作

$$X^n \xrightarrow{\text{f.d.}} X.$$

映射 $\omega \mapsto (\omega(t_1), \dots, \omega(t_k))$ 在 W^d 上连续, 故

$$X^n \xrightarrow{d} X \implies X^n \xrightarrow{\text{f.d.}} X.$$

逆命题不成立; 连续过程甚至可以依有限维分布收敛到不连续过程, 这一点已在第 X 章第 4 节见过, 并将在第 3 节再次出现。

这些概念同样适用于多参数过程, 即以 $C((\mathbb{R}_+)^k, \mathbb{R}^d)$ 代替 Wiener 空间。相应推广留给读者写出, 见练习 1.12。

W^d 上概率测度列的弱收敛, 通常分两步证明:

- i) 先证明测度列弱相对紧;
- ii) 再证明所有极限点具有同一族有限维分布。

许多情形下, 第二步可由直接证明有限维分布收敛得到。第一步通常要使用 Prokhorov 准则; 下面把它改写为适用于当前情形的形式。先注意 $V^N(\cdot, \delta)$ 是 W^d 上的随机变量。

命题 1.5. W^d 上的概率测度列 (P_n) 弱相对紧, 当且仅当下列两个条件成立:

- i) 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 A 和整数 n_0 , 使得

$$P_n[|\omega(0)| > A] \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0;$$

- ii) 对任意 $\eta, \varepsilon > 0$ 及 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $\delta > 0$ 和整数 n_0 , 使得

$$P_n[V^N(\cdot, \delta) > \eta] \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

注. 证明会说明, 事实上可以取 $n_0 = 0$ 。

证明. 由命题 1.1 和第 0 章第 5 节的 Prokhorov 准则, 取 $n_0 = 0$ 时必要性立即成立。

下面证明充分性。设条件 i)、ii) 成立。对每个 n_0 , 有限族 $(P_n)_{n < n_0}$ 是紧的, 因而也以某些常数 A', δ' 满足 i)、ii)。把 A 换成 $A \vee A'$, 把 δ 换成 $\delta \wedge \delta'$, 即可假设 i)、ii) 对 $n_0 = 0$ 成立。给定 $\varepsilon > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$, 选取 $A_{N,\varepsilon}$ 以及 $\delta_{N,k,\varepsilon}$, 使

$$\begin{aligned} \sup_n P_n[|\omega(0)| > A_{N,\varepsilon}] &\leq 2^{-N-1}\varepsilon, \\ \sup_n P_n[V^N(\cdot, \delta_{N,k,\varepsilon}) > 1/k] &\leq 2^{-N-k-1}\varepsilon. \end{aligned}$$

令

$$K_{N,\varepsilon} = \{\omega : |\omega(0)| \leq A_{N,\varepsilon}, V^N(\omega, \delta_{N,k,\varepsilon}) \leq 1/k \text{ 对每个 } k \geq 1\},$$

并令 $K_\varepsilon = \bigcap_N K_{N,\varepsilon}$ 。由命题 1.1, K_ε 在 W^d 中相对紧, 且

$$P_n(K_\varepsilon^c) \leq \sum_N P_n(K_{N,\varepsilon}^c) \leq \varepsilon.$$

因此 (P_n) 弱相对紧。 □

推论 1.6. 若

$$X^n = (X_1^n, \dots, X_d^n)$$

是一列 d 维连续过程, 则其分布族 $\{X^n(P^n)\}$ 弱相对紧, 当且仅当对每个 j , $\{X_j^n(P^n)\}$ 弱相对紧。

后面需要一个比命题 1.5(ii) 稍强、但更便于验证的条件。

引理 1.7。 命题 1.5(ii) 可由下列条件推出：对任意 N 和 $\varepsilon, \eta > 0$ ，存在 $\delta \in (0, 1)$ 及整数 n_0 ，使得对所有 $n \geq n_0$ 和 $t \leq N$ ，

$$\delta^{-1} P_n \left[\sup_{t \leq s \leq t+\delta} |\omega(s) - \omega(t)| \geq \eta \right] \leq \varepsilon.$$

证明。 固定 N ，取 $\varepsilon, \eta > 0$ ，并按引理条件选取 n_0, δ 。对每个满足 $0 \leq i < N\delta^{-1}$ 的整数 i ，令

$$A_i = \left\{ \sup_{i\delta \leq s \leq (i+1)\delta \wedge N} |\omega(i\delta) - \omega(s)| \geq \eta \right\}.$$

容易看出

$$\{V^N(\cdot, \delta) < 3\eta\} \supset \bigcap_i A_i^c.$$

所以对每个 $n \geq n_0$ ，

$$P_n[V^N(\cdot, \delta) \geq 3\eta] \leq P_n \left[\bigcup_i A_i \right] \leq (1 + [N\delta^{-1}])\delta\varepsilon < (N+1)\varepsilon.$$

这就证明了结论。 $\square$

定理 1.8 (Kolmogorov 弱紧性准则)。 设 (X^n) 是一列取值于 $\mathbb{R}^d$ 的连续过程，满足：

- i) 初始分布族 $\{X_0^n(P^n)\}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中紧；
- ii) 存在三个严格正的常数 α, β, γ ，使得对所有 $s, t \in \mathbb{R}_+$ 及每个 n ，

$$E_n[|X_s^n - X_t^n|^\alpha] \leq \beta|s - t|^{\gamma+1}.$$

则 X^n 的分布族 $\{X^n(P^n)\}$ 弱相对紧。

证明。 条件 i) 推出命题 1.5(i)。由 Markov 不等式以及第 I 章定理 2.1 (或练习 2.10 的推广)，条件 ii) 立即推出命题 1.5(ii)。 $\square$

现在给出布朗运动的第一个应用。我们将看到，适当插值后的随机游走之分布以 Wiener 测度为弱极限。顺便指出，上述思想也可简单地用于证明 Wiener 测度本身的存在性。

以下设 (ξ_k) 是独立同分布、中心化的随机变量列，并且

$$E[\xi_k^2] = \sigma^2 < \infty.$$

令

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

以 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分，并定义连续过程

$$X_t^n = (\sigma\sqrt{n})^{-1}(S_{[nt]} + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}).$$

定理 1.9 (Donsker). 过程 X^n 依分布收敛于标准一维布朗运动。

证明. 先证明有限维分布收敛。设 $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ 。由经典中心极限定理以及 $[nt]/n \rightarrow t$ ，容易得到

$$(X_{t_1}^n, X_{t_2}^n - X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n - X_{t_{k-1}}^n)$$

依分布收敛于

$$(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}),$$

其中 B 是标准一维布朗运动。有限维分布的收敛随即成立。

因此只须证明 X^n 的分布族弱相对紧。命题 1.5(i) 显然成立，再验证引理 1.7 的条件即可。先假设 ξ_k 有界。因为 $(|S_k|^4)$ 是下鞅，对固定的 n ，

$$P \left[\max_{i \leq n} |S_i| > \lambda \sigma \sqrt{n} \right] \leq E[|S_n|^4] (\lambda \sigma \sqrt{n})^{-4}.$$

容易算得

$$E[S_n^4] = nE[\xi_1^4] + 3n(n-1)\sigma^4.$$

所以存在一个与 ξ_k 的分布无关的常数 K ，使

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P \left[\max_{i \leq n} |S_i| > \lambda \sigma \sqrt{n} \right] \leq K \lambda^{-4}.$$

通过截断再取极限，去掉 ξ_k 有界这一假设后，该结论仍成立。对每个 $k \geq 1$ ，序列 $(S_{n+k} - S_k)_{n \geq 0}$ 与 $(S_n)_{n \geq 0}$ 同分布。因此存在整数 n_1 ，使得对所有 $k \geq 1, n \geq n_1$ ，

$$P \left[\max_{i \leq n} |S_{i+k} - S_k| > \lambda \sigma \sqrt{n} \right] \leq K \lambda^{-4}.$$

取 $0 < \varepsilon, \eta < 1$ ，再选 λ 使

$$K \lambda^{-2} < \eta \varepsilon^2.$$

令 $\delta = \varepsilon^2 \lambda^{-2}$ ，并取 $n_0 > n_1 \delta^{-1}$ 。若 $n \geq n_0$ ，则 $[n\delta] \geq n_1$ ，上式可改写为

$$P \left[\max_{i \leq [n\delta]} |S_{i+k} - S_k| \geq \lambda \sigma \sqrt{[n\delta]} \right] \leq \eta \varepsilon^2 \lambda^{-2}.$$

又因

$$\lambda \sqrt{[n\delta]} \leq \varepsilon \sqrt{n},$$

故对所有 $k \geq 1, n \geq n_0$ ，

$$\delta^{-1} P \left[\max_{i \leq [n\delta]} |S_{i+k} - S_k| \geq \varepsilon \sigma \sqrt{n} \right] \leq \eta.$$

X^n 是随机游走 (S_n) 的线性插值，由此容易看出，对每个 N ，引理 1.7 的条件均成立。证明完毕。 $\square$

为了说明如何把弱收敛用作证明存在性的工具，本节最后讨论鞅问题的解。我们直接在 Itô 过程（第 VII 章定义 2.5）的框架中叙述。

设 a, b 定义在 $\mathbb{R}_+ \times W^d$ 上，分别取值于非负对称 $d \times d$ 矩阵集与 $\mathbb{R}^d$ 。假设它们对坐标映射 $\omega(t)$ 生成的滤过 $(\mathcal{F}_t^0)$ 逐步可测。相关概念见第 IX 章第 1 节开头。沿用第 VII 章第 2 节的记号，

有下述结论。

定理 1.10。 若 a, b 在 $\mathbb{R}_+ \times W^d$ 上有界且连续, 则对 $\mathbb{R}^d$ 上任意概率测度 μ , 存在 W^d 上的概率测度 P , 使得:

i)

$$P[\omega(0) \in A] = \mu(A);$$

ii) 对任意 $f \in C_K^2$, 过程

$$f(\omega(t)) - f(\omega(0)) - \int_0^t L_s f(\omega(s)) \, ds$$

是 $(\mathcal{F}_t^0, P)$ -鞅, 其中

$$L_s f(\omega(s)) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(s, \omega) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\omega(s)) + \sum_i b_i(s, \omega) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\omega(s)).$$

23

证明。 对每个整数 n , 定义

$$a_n(t, \omega) = a([nt]/n, \omega), \quad b_n(t, \omega) = b([nt]/n, \omega),$$

并以 L_s^n 表示相应的微分算子。

取概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 使其上定义了一个分布为 μ 的随机变量 X_0 , 以及一个与 X_0 独立、从 0 出发的 d 维布朗运动 B 。令 σ_n 是 a_n 的一个平方根。递归定义过程 X^n : 令 $X_0^n = X_0$; 若 X^n 已定义到时刻 k/n , 则对 $k/n < t \leq (k+1)/n$ 置

$$X_t^n = X_{k/n}^n + \sigma_n(k/n, X^n)(B_t - B_{k/n}) + b_n(k/n, X^n)(t - k/n).$$

显然, X^n 满足随机微分方程

$$X_t^n = X_0 + \int_0^t \sigma_n(s, X^n) \, dB_s + \int_0^t b_n(s, X^n) \, ds.$$

a

若以 P^n 表示 X^n 在 W^d 上的分布, 则

$$P^n[\omega(0) \in A] = \mu(A),$$

而且对每个 $f \in C_K^2$,

$$f(\omega(t)) - f(\omega(0)) - \int_0^t L_s^n f(\omega(s)) \, ds$$

是 P^n -鞅。

(P^n) 弱相对紧: 定理 1.8(i) 显然成立; 由于 a, b 有界, 在原概率空间 Ω 上应用 Burkholder–Davis–Gundy 不等式即可得到定理 1.8(ii)。

令 P 是 (P^n) 的一个极限点, 并取子列 $(P^{n'})$ 弱收敛于 P 。对固定 t , 函数

$$\omega \mapsto \int_0^t L_s^n f(\omega(s)) \, ds$$

²³**校订注:** 原书定理陈述只写“连续”, 证明却明确使用 a, b 的有界性; 而仅连续时即使确定性方程也可能有限时爆炸。这里补入证明所需的“有界”假设。

在 W^d 上等度连续, 并收敛于 $\int_0^t L_s f(\omega(s)) \, ds$. 因此, 对每个有界连续函数 ϕ ,

$$E_P \left[\left(f(\omega(t)) - \int_0^t L_s f(\omega(s)) \, ds \right) \phi \right] = \lim_{n' \rightarrow \infty} E_{P^{n'}} \left[\left(f(\omega(t)) - \int_0^t L_s^{n'} f(\omega(s)) \, ds \right) \phi \right].$$

若 $t_1 < t_2$, 且 ϕ 为 $\mathcal{F}_{t_1}^0$ -可测的有界连续函数, 便有

$$E_P \left[\left(f(\omega(t_2)) - f(\omega(t_1)) - \int_{t_1}^{t_2} L_s f(\omega(s)) \, ds \right) \phi \right] = 0,$$

因为相应等式对 $P^{n'}$ 与 $L^{n'}$ 成立. 由单调类定理, 当 ϕ 仅有界且 $\mathcal{F}_{t_1}^0$ -可测时等式仍成立. 所以

$$f(\omega(t)) - f(\omega(0)) - \int_0^t L_s f(\omega(s)) \, ds$$

是 P -鞅. □

^a校订注: 原书这一式漏印初值 X_0 ; 由上一行构造 $X_0^n = X_0$, 故必须补上.

评注. 与第 IX 章第 2 节的结果相比, 这里去掉了 Lipschitz 条件. 事实上, 还可把假设削弱为: 对每个固定 t , a, b 只须关于 ω 连续. 另一方面, 若没有唯一性结论, 刚刚证明的存在性结果用途有限; 而唯一性是一个深得多的定理.

练习 1.11.

1°) 若 X^n 依分布收敛于 X , 证明 $(X^n)^*$ 依分布收敛于 X^* , 其中

$$X_t^* = \sup_{s \leq t} |X_s|.$$

2°) 利用随机游走的反射原理证明布朗运动的反射原理 (第 III 章第 3 节). 随机游走的反射原理在简单随机游走情形容易证明; 沿用定理 1.9 的记号, 此时

$$P[\xi_k = 1] = P[\xi_k = -1] = \frac{1}{2}.$$

练习 1.12. 证明: 若存在常数 $\alpha, \beta, \gamma, p > 0$, 使得

$$\sup_{\lambda} E_{\lambda}[|X_0|^p] < \infty,$$

并且对 $(\mathbb{R}_+)^k$ 中任意 s, t ,

$$\sup_{\lambda} E_{\lambda}[|X_s - X_t|^{\alpha}] \leq \beta |s - t|^{k+\gamma},$$

则 $C((\mathbb{R}_+)^k, \mathbb{R})$ 上的概率测度族 (P_{λ}) 弱相对紧. 这里 X 是坐标过程.

练习 1.13. 设

$$(\beta_s^n, 0 \leq s \leq 1), \quad (\gamma_t^n, 0 \leq t \leq 1)$$

是两列彼此独立的独立标准布朗运动。证明二参数过程

$$X_{(s,t)}^n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \beta_s^i \gamma_t^i$$

依分布收敛于 Brownian sheet。这显然是一个无穷维中心极限定理。

练习 1.14。 在 Donsker 定理的设定下，证明过程

$$(\sigma\sqrt{n})^{-1}(S_{[nt]} + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1} - tS_n), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

依分布收敛于布朗桥。

练习 1.15。 设 (M^n) 是定义在同一个带滤过概率空间上的 (上) 鞅列，并满足：

- i) M^n 依分布收敛于过程 M ；
- ii) 对每个 t ，随机变量列 (M_t^n) 一致可积。

证明 M 关于其自然滤过是 (上) 鞅。

练习 1.16。 设 (M^n) 是一列从 0 出发的连续局部鞅，并且 $\langle M^n, M^n \rangle$ 依分布收敛于确定性函数 a 。以 P_n 表示 M^n 的分布。

1°) 证明 (P_n) 弱相对紧。

提示：可使用第 IV 章引理 4.6。

2°) 再假设 M^n 定义在同一个带滤过空间上，而且对每个 t 存在常数 $\alpha(t)$ ，使

$$\langle M^n, M^n \rangle_t \leq \alpha(t)$$

对每个 n 成立。证明 (P_n) 弱收敛于以 $a(t)$ 为增长过程的高斯鞅之分布 W_a (见第 V 章练习 1.14)。

提示：使用上一题以及第 IV 章命题 1.23 的思想。

3°) 设

$$M^n = (M_i^n, i = 1, \dots, k)$$

是一列多维局部鞅；对每个 i ， (M_i^n) 满足上面的全部假设，并且对 $i \neq j$ ，过程 $\langle M_i^n, M_j^n \rangle$ 依分布收敛于 0。证明

$$\mathcal{L}(M^n) \implies W_{a_1} \otimes \cdots \otimes W_{a_k}.$$

提示：考虑线性组合 $\sum_i u_i M_i^n$ 。

下面两道练习只需使用布朗运动的初等性质即可解决。沿用下一节的尺度记号

$$X_t^{(c)} = c^{-1} X_{c^2 t}.$$

练习 1.17 (尺度变换与渐近独立性)。

1°) 若 β 是布朗运动，证明当 $c \downarrow 0$ 时， β 与 $\beta^{(c)}$ 渐近独立。

提示：对每个 $A > 0$ ，过程

$$(\beta_{c^2 t}, t \leq A) \quad \text{与} \quad (\beta_{c^2 A+u} - \beta_{c^2 A}, u \geq 0)$$

相互独立。

2°) 由第 1° 问推出: 当 $c \rightarrow \infty$ 时仍有同样性质 (另见练习 2.9)。证明当 $c \neq 1$ 时, 保持 Wiener 测度不变的变换 $x \mapsto X^{(c)}$ 是遍历的。这个遍历性是第 X 章练习 3.20 第 1° 问证明中的关键。

3°) 设 $(\gamma_t, t \leq 1)$ 的分布 P^γ 满足: 对每个 $t < 1$,

$$P^\gamma|_{\mathcal{F}_t} \ll W|_{\mathcal{F}_t}.$$

证明当 $c \downarrow 0$ 时, 二维过程

$$V_t^{(c)} = (\gamma_t^{(c)}, \gamma_t), \quad t \leq 1,$$

依分布收敛于

$$(\beta_t, \gamma_t), \quad t \leq 1,$$

其中 β 是与 γ 独立的布朗运动。

提示: 使用第 0 章引理 5.7。

4°) 证明 $\gamma^{(c)}$ 的分布在全变差意义下收敛于 β 的分布, 即 Wiener 测度。第 3° 问中的收敛能否加强为全变差收敛?

5°) 当 γ 分别为布朗桥、Bessel 桥或 Brownian meander 时, 证明 $c \downarrow 0$ 时 $V^{(c)}$ 依分布收敛, 并分别辨认其极限。

练习 1.18 (Bessel 过程最终看起来像布朗运动)。设 R 是从 $r \geq 0$ 出发的 BES^δ , 其中 $\delta \geq 1$ 。证明当 $t \rightarrow \infty$ 时, 过程

$$(R_{t+s} - R_t, s \geq 0)$$

依分布收敛于标准一维布朗运动。

提示: 使用 R 作为半鞅的典范分解。对不同维数, 可能需要分别证明。

2 布朗运动加性泛函的渐近行为

本节证明布朗运动随机积分的一个极限定理。作为推论, 我们将得到布朗运动占用时间的增长阶 (粗略地说)。

以下 B 是标准一维布朗运动, (L^a) 是它的一族局部时; 照例把 L^0 简记为 L 。Lebesgue 测度记为 m 。

命题 2.1。 若 f 可积, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^\cdot f(nB_s) \, ds = m(f)L \quad \text{几乎必然.}$$

并且对每个 t , 对所有 $p \geq 1$,

$$n \int_0^t f(nB_s) \, ds \longrightarrow m(f)L_t$$

在 L^p 中成立。上述两种收敛关于 t 在紧区间上一致。

证明。由占用时间公式，

$$n \int_0^t f(nB_s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) L_t^{a/n} da.$$

固定 t 后，映射 $a \mapsto L_t^a$ 几乎必然连续且有紧支集，故随机变量 $\sup_a L_t^a$ 几乎必然有限。由 L_t^a 的连续性及其控制收敛定理，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^t f(nB_s) ds = m(f) L_t \quad \text{几乎必然.}$$

所以该式对所有有理 t 同时成立。又只须对 $f \geq 0$ 证明；此时涉及的过程都是递增的，第一项断言容易由此完成。

对第二项断言，注意

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) L_t^{a/n} da \right| \leq \|f\|_1 \sup_a L_t^a.$$

第 XI 章定理 2.4 说明 $\sup_a L_t^a$ 对每个 p 都属于 L^p ，故结论再次由控制收敛定理得到。关于 t 的局部一致性容易从 L_t^a 关于两个变量的连续性推出。□

下面的结论描述加性泛函、尤其是占用时间的渐近行为。这里的依分布收敛是第 1 节中过程层面的收敛，而不只是单个随机变量的收敛。

命题 2.2。若 A 是可积连续加性泛函，则

$$\frac{1}{\sqrt{n}} A_{n\cdot} \xrightarrow{d} \nu_A(1) L.$$

证明。由第 VI 章练习 2.11，

$$L_{n\cdot}^a \stackrel{d}{=} \sqrt{n} L^{a/\sqrt{n}}.$$

因此

$$\frac{1}{\sqrt{n}} A_{n\cdot} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int L_{n\cdot}^a \nu_A(da) \stackrel{d}{=} \int L^{a/\sqrt{n}} \nu_A(da).$$

与命题 2.1 同理，最后一个表达式几乎必然收敛于 $\nu_A(1) L$ 。□

当 $\nu_A(1) \neq 0$ 时，这个结论令人满意：正的可积加性泛函大致按 $\nu_A(1)\sqrt{t}$ 增长。若 $\nu_A(1) = 0$ ，则需要更细致的研究，并会导出一个具有有趣推论的中心极限定理型结果。此外，在为二维布朗运动建立势理论时，总质量为零的测度也很重要。

第 X 章推论 2.12 表明，我们不妨研究随机积分。为此需要一个在下一节同样十分有用的结果，即 Knight 定理的渐近版本（见第 V 章第 1 节）。

以下 $(M_j^n, 1 \leq j \leq k)$ 是一列 k 元连续局部鞅，均从 0 出发，并满足

$$\langle M_j^n, M_j^n \rangle_\infty = \infty$$

对每个 n, j 成立。以 $\tau_j^n(t)$ 表示 $\langle M_j^n, M_j^n \rangle$ 的相伴时间变换，以 β_j^n 表示 M_j^n 的 DDS 布朗运动。

定理 2.3。若对每个 t 以及每一对 $i \neq j$ ，

$$\begin{aligned} \langle M_i^n, M_j^n \rangle_{\tau_i^n(t)} &\longrightarrow 0, \\ \langle M_i^n, M_j^n \rangle_{\tau_j^n(t)} &\longrightarrow 0 \end{aligned} \quad \text{依概率,}$$

则 k 维过程

$$\beta^n = (\beta_j^n, 1 \leq j \leq k)$$

依分布收敛于 k 维布朗运动。

证明。 每个 β_j^n 的分布都是一维 Wiener 测度。所以 $\{\beta^n\}$ 弱相对紧。只须证明任一极限过程的各分量相互独立；这些分量显然都是一维布朗运动。

一般情形与 $k = 2$ 并无本质区别。为便于记号，考虑两列连续局部鞅 $(M^n), (N^n)$ 。以 $\mu^n(t), \eta^n(t)$ 分别表示 $\langle M^n, M^n \rangle, \langle N^n, N^n \rangle$ 的相伴时间变换，以 β^n, γ^n 表示相应的 DDS 布朗运动。

给定

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t$$

和标量 $f_0, \dots, f_{p-1}, g_0, \dots, g_{p-1}$ ，令

$$\begin{aligned} f &= \sum_j f_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1}]}, & \beta^n(f) &= \sum_j f_j (\beta_{t_{j+1}}^n - \beta_{t_j}^n), \\ g &= \sum_j g_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1}]}, & \gamma^n(g) &= \sum_j g_j (\gamma_{t_{j+1}}^n - \gamma_{t_j}^n). \end{aligned}$$

若

$$U_s^n = \int_0^s f(\langle M^n, M^n \rangle_u) dM_u^n, \quad V_s^n = \int_0^s g(\langle N^n, N^n \rangle_u) dN_u^n,$$

则

$$\beta^n(f) = U_\infty^n, \quad \gamma^n(g) = V_\infty^n.$$

把

$$E[\mathcal{E}(i(U^n + V^n))_\infty] = 1$$

展开，得到

$$E\left[e^{i(\beta^n(f) + \gamma^n(g))} H^n\right] = \exp\left\{-\frac{1}{2} \int (f^2 + g^2)(t) dt\right\},$$

其中

$$\begin{aligned} H^n &= \exp\left\{\int_0^\infty f(\langle M^n, M^n \rangle_s) g(\langle N^n, N^n \rangle_s) d\langle M^n, N^n \rangle_s\right\} \\ &= \exp\left\{\sum_{i,j} f_i g_j \int \mathbf{1}_{[\mu^n(t_i), \mu^n(t_{i+1})]}(s) \mathbf{1}_{[\eta^n(t_j), \eta^n(t_{j+1})]}(s) d\langle M^n, N^n \rangle_s\right\}. \end{aligned}$$

定理假设显然推出 H^n 依概率收敛于 1。只要能使用控制收敛定理，证明便告完成。由 Kunita–Watanabe 不等式（第 IV 章命题 1.15）和时间变换公式，

$$H^n \leq \exp(\|f\|_2 \|g\|_2).$$

故确可应用控制收敛定理。 □

下面介绍定理 2.3 的一个常用推论。对任意过程 X 及固定 $h > 0$ ，定义尺度变换

$$X_t^{(h)} = h^{-1} X(h^2 t).$$

尺度变换对布朗运动的重要性已经见过。若 M 是连续局部鞅， β 是其 DDS 布朗运动，则第 V 章练习 1.17 表明， $\beta^{(h)}$ 是 $h^{-1}M$ 的 DDS 布朗运动。

现在考虑连续局部鞅 M_i ($i = 1, \dots, k$)，满足 $\langle M_i, M_i \rangle_\infty = \infty$ ，并以 β_i 表示其 DDS 布朗运

动。令

$$M_i^n = \frac{M_i}{\sqrt{n}},$$

并以 β_i^n 表示 M_i^n 的 DDS 布朗运动。于是

$$\beta_i^n(t) = \frac{\beta_i(nt)}{\sqrt{n}}.$$

推论 2.4. 只要对每个 $i \neq j$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M_i, M_j \rangle_t}{\langle M_i, M_i \rangle_t} = 0 \quad \text{几乎必然,}$$

k 维过程

$$\beta^n = (\beta_i^n, i = 1, \dots, k)$$

就依分布收敛于 k 维布朗运动。

证明. 以 $\tau_i(t)$ (相应地 $\tau_i^n(t)$) 表示 $\langle M_i, M_i \rangle$ (相应地 $\langle M_i^n, M_i^n \rangle$) 的时间变换。则

$$\tau_i^n(t) = \tau_i(nt),$$

并且

$$\langle M_i^n, M_j^n \rangle_{\tau_i^n(t)} = n^{-1} \langle M_i, M_j \rangle_{\tau_i(nt)}.$$

定理假设推出

$$t^{-1} \langle M_i, M_j \rangle_{\tau_i(t)} \longrightarrow 0 \quad \text{几乎必然,}$$

所以结论由定理 2.3 得到。 □

上面的推论还有一个经常有用的变体。

推论 2.5. 若存在 $\mathbb{R}_+$ 上正的连续严格递增函数 ϕ , 使:

i)

$$\phi(t)^{-1} \langle M_i, M_i \rangle_t \xrightarrow{d} U_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

其中 U_i 是严格正随机变量;

ii) 对每个 $i \neq j$,

$$\phi(t)^{-1} \sup_{s \leq t} |\langle M_i, M_j \rangle_s| \longrightarrow 0 \quad \text{依概率,}$$

则推论 2.4 的结论仍成立。

证明. 仍只须证明: 对 $i \neq j$,

$$t^{-1} \langle M_i, M_j \rangle_{\tau_i(t)} \longrightarrow 0 \quad \text{依概率.}$$

事实上我们证明

$$t^{-1} X_t \longrightarrow 0 \quad \text{依概率,} \quad X_t = \sup\{|\langle M_i, M_j \rangle_s| : s \leq t\}.$$

假设 i) 推出

$$t^{-1} \phi(\tau_i(t)) \xrightarrow{d} U_i^{-1}.$$

对 $\lambda, x > 0$, 利用 X 的递增性,

$$\begin{aligned} P[X_{\tau_i(t)} > \lambda t] &\leq P[\phi(\tau_i(t)) \geq tx] + P[X_{\tau_i(t)} > \lambda t; \tau_i(t) < \phi^{-1}(tx)] \\ &\leq P[\phi(\tau_i(t)) \geq tx] + P[X_{\phi^{-1}(tx)} > \lambda t]. \end{aligned}$$

给定 $\varepsilon > 0$. 因 $U_i > 0$, 可先取充分大的 x , 再取 $T > 0$, 使对所有 $t \geq T$,

$$P[\phi(\tau_i(t)) \geq tx] \leq \varepsilon.$$

由假设 ii), 存在 $T' \geq T$, 使对所有 $t \geq T'$,

$$P[X_{\phi^{-1}(tx)} > \lambda t] \leq \varepsilon.$$

所以

$$P[X_{\tau_i(t)} > \lambda t] \leq 2\varepsilon, \quad t \geq T',$$

即得所需结论. □

回到命题 2.2 后提出的问题。取

$$f_i \in L^1(m) \cap L^2(m), \quad i = 1, \dots, k,$$

并假设它们在 L^2 中两两正交, 即

$$\int f_i f_j \, dm = 0, \quad i \neq j.$$

置

$$M_i^n = \sqrt{n} \int_0^\cdot f_i(nB_s) \, dB_s.$$

定理 2.6 (Papanicolaou–Stroock–Varadhan). $(k+1)$ 维过程

$$(B, M_1^n, \dots, M_k^n)$$

依分布收敛于

$$(\beta, \|f_i\|_2 \gamma_l^i, \quad i = 1, \dots, k),$$

其中 $(\beta, \gamma^1, \dots, \gamma^k)$ 是 $(k+1)$ 维布朗运动, 而 l 是 β 在 0 点的局部时。

证明。 有

$$\langle M_i^n, M_j^n \rangle_t = n \int_0^t (f_i f_j)(nB_s) \, ds.$$

所以由命题 2.1, 关于 t 在紧区间上一致地、几乎必然有

$$\begin{aligned} \langle M_i^n, M_i^n \rangle_t &\longrightarrow \|f_i\|_2^2 L_t, \\ \langle M_i^n, M_j^n \rangle_t &\longrightarrow 0, \quad i \neq j, \\ \langle M_i^n, B \rangle_t &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

不难看出定理 2.3 的假设成立。若以 B_i^n 表示 M_i^n 的 DDS 布朗运动, 则

$$(B, B_1^n, \dots, B_k^n) \xrightarrow{d} (\beta, \gamma^1, \dots, \gamma^k).$$

而

$$(B, M_1^n, \dots, M_k^n) = (B, B_i^n(\langle M_i^n, M_i^n \rangle), i = 1, \dots, k).$$

显然,

$$(B, \langle M_i^n, M_i^n \rangle, B_i^n, i = 1, \dots, k)$$

依分布收敛于

$$(\beta, \|f_i\|_2^2, \gamma^i, i = 1, \dots, k).$$

结论随即成立。 □

注。 可把 n 换成任何趋于 $+\infty$ 的序列 (a_n) , 甚至可直接考虑实参数族

$$M_i^\lambda = \sqrt{\lambda} \int_0^\cdot f_i(\lambda B_s) dB_s,$$

并令 $\lambda \rightarrow +\infty$. 证明完全相同。

现在考虑连续加性泛函 A : 它是两个正的可积连续加性泛函之差 (见第 X 章练习 2.22), 并满足 $\nu_A(1) = 0$. 为应用第 X 章定理 2.9 的表示结果, 再假设

$$\int |x| |\nu_A|(dx) < \infty.$$

仿照附录第 3 节, 令

$$F(x) = \int |x - y| \nu_A(dy).$$

F 是两个凸函数之差, 其分布意义下的二阶导数为 $2\nu_A$. 以 F'_- 表示其左导数。

引理 2.7。 函数 F 有界, 并且

$$F'_- \in L^1(m) \cap L^2(m).$$

此外,

$$\|F'_-\|_2^2 = 4I(\nu_A),$$

其中

$$I(\nu_A) = -\frac{1}{2} \iint |x - y| \nu_A(dx) \nu_A(dy)$$

称为 ν_A 的能量。

24

证明。 因为

$$\int |x - y| |\nu_A|(dy) \leq |x| \|\nu_A\| + \int |y| |\nu_A|(dy),$$

²⁴**校订注:** 原书在这里漏掉了由 $\nu_A(1) = 0$ 产生的因子 2: 正确的左导数是 $F'_-(x) = 2\nu_A(]-\infty, x])$, 因而其平方范数是 $4I(\nu_A)$, 不是 $I(\nu_A)$ 。相应地, 命题 2.8 的极限系数也须乘 2。练习 2.11、2.14 与 2.15 中的归一化与这一修正一致。

$I(\nu_A)$ 有限, 故可应用 Fubini 定理:

$$\begin{aligned} I(\nu_A) &= - \iint_{\{x>y\}} (x-y) \nu_A(dx) \nu_A(dy) \\ &= - \iiint_{\{x>z>y\}} \nu_A(dx) \nu_A(dy) dz \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left(\int_z^{\infty} \nu_A(dx) \right) \left(\int_{-\infty}^z \nu_A(dy) \right). \end{aligned}$$

满足 $\nu_A(\{z\}) \neq 0$ 的 z 至多可数; 对其他 z , 由 $\nu_A(1) = 0$ 得

$$\nu_A([-\infty, z]) = -\nu_A([z, \infty]).$$

所以

$$I(\nu_A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu_A([-\infty, z])^2 dz.$$

另一方面,

$$F'_-(x) = 2\nu_A([-\infty, x]),$$

从而

$$\|F'_-\|_2^2 = 4I(\nu_A).$$

同样地,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |F'_-(x)| dx &\leq 2 \int_0^{\infty} |\nu_A|([x, \infty]) dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} x |\nu_A|(dx) < \infty, \end{aligned}$$

并且

$$\int_{-\infty}^0 |F'_-(x)| dx \leq 2 \int_{-\infty}^0 |x| |\nu_A|(dx) < \infty.$$

故 $F'_- \in L^1$, 进而 F 有界。 □

现在可证明: 满足上述假设的加性泛函在 $t \rightarrow \infty$ 时大致是 $t^{1/4}$ 阶。

命题 2.8. 若

$$\nu_A(1) = 0, \quad \int |x| |\nu_A|(dx) < \infty,$$

则二维过程

$$(n^{-1/2}B_{n\cdot}, n^{-1/4}A_{n\cdot})$$

依分布收敛于

$$(\beta, 2I(\nu_A)^{1/2}\gamma_l),$$

其中 (β, γ) 是二维布朗运动, l 是 β 在 0 点的局部时。

证明. 由第 X 章定理 2.9 的表示结果和 Tanaka 公式,

$$n^{-1/4}A_{n\cdot} = n^{-1/4}[F(B_{n\cdot}) - F(0)] - n^{-1/4} \int_0^{n\cdot} F'_-(B_s) dB_s.$$

F 有界, 故右端第一项随 $n \rightarrow \infty$ 趋于 0。只须研究随机积分项。令 $s = nu$, 等价地研究

$$\left(n^{-1/2} B_n, n^{-1/4} \int_0^\cdot F'_-(B_{nu}) dB_{nu} \right).$$

因

$$B_n \stackrel{d}{=} \sqrt{n} B,$$

该过程与

$$\left(B, n^{1/4} \int_0^\cdot F'_-(\sqrt{n} B_u) dB_u \right)$$

同分布。由引理 2.7, $F'_- \in L^1(m) \cap L^2(m)$, 应用定理 2.6 后的注即可。负号不改变独立布朗运动 γ 的分布。 $\square$

评注。 命题 2.2 和 2.8 描述一维布朗运动的加性泛函趋于无穷的速度。当 $d > 2$ 时, 可积加性泛函在无穷远是有限的, 不存在同样问题; 对平面布朗运动, 这个问题仍会出现。第 X 章第 4 节已说明, 可积加性泛函是 $\log t$ 阶。不过极限过程不连续, 因此必须采用其他收敛概念。

练习 2.9。

1°) 在定理 2.3 的情形, 若存在正随机变量列 L_n , 使:

i) 对每个 i ,

$$\langle M_i^n, M_i^n \rangle_{L_n} \longrightarrow +\infty \quad \text{依概率};$$

ii) 对每个 $i \neq j$,

$$\sup_{s \leq L_n} |\langle M_i^n, M_j^n \rangle_s| \longrightarrow 0 \quad \text{依概率},$$

证明定理结论仍成立。

2°) 现在只取两个指标, 分别把 M_1^n, M_2^n 记为 M^n, N^n 。证明: 若存在正随机变量列 L_n , 使

$$\begin{aligned} \langle M^n, M^n \rangle_{L_n} &\longrightarrow \infty \quad \text{依概率}, \\ \sup_{s \leq L_n} |\langle M^n, N^n \rangle_s| &\longrightarrow 0 \quad \text{依概率}, \end{aligned}$$

则定理结论成立。

3°) 由上一问推出: 若 β 是布朗运动, 当 $c \rightarrow +\infty$ 时, β 与 $\beta^{(c)}$ 渐近独立。

不过要注意, 对 $(M, c^{-1}M)$ 且 $c \rightarrow \infty$ 的特殊情形, 推论 2.4 的准则并不适用。请再直接证明 β 与 $\beta^{(c)}$ 的渐近独立性。

练习 2.10。 对 $f \in L^2 \cap L^1$, 证明对固定 t , 当 $n \rightarrow \infty$ 时随机变量

$$\sqrt{n} \int_0^t f(nB_s) dB_s$$

在 L^2 中弱收敛于 0。因此定理 2.6 的收敛不能加强为依概率收敛。

练习 2.11。 设

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k < \infty.$$

证明 $(k+1)$ 维过程

$$\left(B_t, \frac{\sqrt{n}}{2} (L_t^{a_i/n} - L_t^{a_{i-1}/n}), i = 1, \dots, k \right)$$

依分布收敛于

$$(\beta, \sqrt{a_i - a_{i-1}} \gamma_l^i, i = 1, \dots, k),$$

其中 $(\gamma^i, i = 1, \dots, k)$ 是与 β 独立的 k 维布朗运动, l 是 β 在 0 点的局部时。

练习 2.12。

1°) 令

$$X(t, a) = \int_0^t \mathbf{1}_{[0, a]}(B_s) dB_s.$$

证明: 对 $p \geq 2$, 存在常数 C_p , 使当 $0 \leq s \leq t \leq 1, 0 \leq a \leq b \leq 1$ 时,

$$E[|X(t, b) - X(s, a)|^p] \leq C_p((t-s)^{p/2} + (b-a)^{p/2}).$$

2°) 证明二参数过程

$$\left(B_t, \lambda^{1/2} \int_0^t \mathbf{1}_{[0, a]}(\lambda B_s) dB_s \right)$$

的分布族 P_λ 弱相对紧。

提示: 使用练习 1.12。

3°) 证明当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 二参数过程

$$\left(B_t, \frac{\lambda^{1/2}}{2} (L_t^{a/\lambda} - L_t^0) \right)$$

依分布收敛于

$$(B_t, \mathbb{B}(L_t^0, a)),$$

其中 $\mathbb{B}$ 是与 B 独立的 Brownian sheet。

提示: 使用练习 2.11。

4°) 对 $\nu > 0$, 证明

$$\varepsilon^\nu \int_\varepsilon^\infty a^{-(3/2+\nu)} (L_t^a - L_t^0) da \xrightarrow{d} 2 \int_0^\infty e^{-(\nu+1/2)u} \mathbb{B}(L_t^0, e^u) du$$

当 $\varepsilon \downarrow 0$ 。

5°) 令

$$\tau_x = \inf\{u : L_u^0 > x\}.$$

证明当 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时, 过程

$$\frac{\lambda^{1/2}}{2} (L_{\tau_x}^{a/\lambda} - x)$$

依分布收敛于 $\sqrt{x} \gamma_a$, 其中 γ 是标准布朗运动。这可由第 3° 问推出, 也可作为第二 Ray-Knight 定理 (第 XI 章第 2 节) 的推论直接证明。

练习 2.13. 沿用第 VI 章定理 1.10 的记号, 证明

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\varepsilon d_\varepsilon(\cdot) - \frac{1}{2} L \right) \xrightarrow{\text{f.d.}} \gamma_l \quad (\varepsilon \downarrow 0),$$

其中照例 l 是与 γ 独立的布朗运动在 0 点的局部时。

提示: 若

$$M_t^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t A_s^\varepsilon dB_s,$$

而 P^ε 是 $(B_t, L_t, M_t^\varepsilon)$ 的分布, 证明 $\{P^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ 相对紧。

练习 2.14. 沿用本节记号。若 $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, 证明

$$\left(B, \varepsilon^{-1/2} (L^{x_i+\varepsilon} - L^{x_i}), i = 1, \dots, k \right)$$

当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时依分布收敛于

$$(B, 2\beta_{L^{x_i}}^i, i = 1, \dots, k),$$

其中 $(B, \beta^1, \dots, \beta^k)$ 是 $(k+1)$ 维布朗运动。

练习 2.15. 证明: 按本节记号, 对任意 $x \in \mathbb{R}$,

$$\varepsilon^{-1/2} \left[\varepsilon^{-1} \int_0^\cdot \mathbf{1}_{[x, x+\varepsilon]}(B_s) ds - L^x \right]$$

当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时依分布收敛于

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \beta_{L^x}.$$

读者会注意到, 这是与第 VI 章推论 1.9 的几乎必然结论相伴的“中心极限定理”。

提示: 把上一题的结论推广到 $(L^{x_i+\varepsilon z} - L^{x_i})$, 并得到一个二参数极限过程。

练习 2.16 (单位球面上布朗运动的极限定理). 设 Z 是从 $a \neq 0$ 出发的 d 维布朗运动, 其中 $d \geq 2$, 并令 $\rho = |Z|$ 。定义取值于 $\mathbb{R}^d$ 单位球面的过程 V :

$$Z_t = \rho_t V_{C_t}, \quad C_t = \int_0^t \rho_s^{-2} ds.$$

这是 d 维布朗运动的 skew-product 分解。

1°) 证明存在一个与 ρ 独立的 d 维布朗运动 B , 使

$$V_t = V_0 + \int_0^t \sigma(V_s) dB_s - \frac{d-1}{2} \int_0^t V_s ds,$$

其中矩阵场 σ 为

$$\sigma_{ij}(x) = \delta_{ij} - x_i x_j.$$

2°) 若

$$X_t = \int_0^t \sigma(V_s) dB_s,$$

证明

$$\langle X^i, X^j \rangle_t = \langle X^i, B^j \rangle_t.$$

提示: 注意 $\sigma(x)x = 0$; 若 $\langle x, y \rangle = 0$, 则 $\sigma(x)y = y$, 所以 $\sigma^2(x) = \sigma(x)$ 。

3°) 证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \langle X^i, B^j \rangle_t = \delta_{ij}(1 - d^{-1}) \quad \text{几乎必然.}$$

4°) 证明当 $c \rightarrow \infty$ 时, $2d$ 维过程

$$\left(c^{-1} B_{c^2 t}, \frac{1}{2c} \int_0^{c^2 t} V_s \, ds \right)$$

依分布收敛于

$$\left(B_t, d^{-1} (B_t + (d-1)^{-1/2} B'_t) \right),$$

其中 (B, B') 是 $2d$ 维布朗运动。

3 平面布朗运动的渐近性质

本节继续研究第 X 章第 4 节中已经开始讨论的复布朗运动的若干渐近性质。上一节给出的 Knight 定理的渐近版本, 为两列局部鞅的 DDS 布朗运动渐近独立提供了充分条件。下面还会遇到相反的情形, 即这些布朗运动渐近相同。因此先给出保证这一现象发生的充分条件。

定理 3.1. 设 $(M_i^n)_{n \geq 1}$, $i = 1, 2$, 是两列连续局部鞅, β_i^n 是各自相伴的 DDS 布朗运动。设 $R_n(t)$ 是一列时间变换过程, 并且对每个 $t \geq 0$, 下列极限均依概率成立:

i)

$$\langle M_1^n, M_1^n \rangle_{R_n(t)} \longrightarrow t, \quad \langle M_2^n, M_2^n \rangle_{R_n(t)} \longrightarrow t;$$

ii)

$$\langle M_1^n - M_2^n, M_1^n - M_2^n \rangle_{R_n(t)} \longrightarrow 0.$$

那么对每个 $t \geq 0$,

$$\sup_{s \leq t} |\beta_1^n(s) - \beta_2^n(s)| \longrightarrow 0$$

依概率成立。

证明. 记 T_i^n 为与 $\langle M_i^n, M_i^n \rangle$ 相伴的时间变换。对每个固定的 t ,

$$\begin{aligned} |\beta_1^n(t) - \beta_2^n(t)| &\leq |M_1^n(T_1^n(t)) - M_1^n(R_n(t))| \\ &\quad + |M_1^n(R_n(t)) - M_2^n(R_n(t))| \\ &\quad + |M_2^n(R_n(t)) - M_2^n(T_2^n(t))|. \end{aligned}$$

由第 IV 章练习 4.14, 只要下列三个量依概率趋于 0, 上式右端也依概率趋于 0:

$$|\langle M_1^n, M_1^n \rangle_{R_n(t)} - t|, \quad \langle M_1^n - M_2^n, M_1^n - M_2^n \rangle_{R_n(t)}, \quad |\langle M_2^n, M_2^n \rangle_{R_n(t)} - t|.$$

这正是定理的假设, 因而 $\beta_1^n(t) - \beta_2^n(t) \rightarrow 0$ 依概率成立。

另一方面, Kolmogorov 判别准则 (定理 1.8) 说明过程 $\beta_1^n - \beta_2^n$ 的分布族弱相对紧。因此 $\beta_1^n - \beta_2^n$ 在路径空间中依分布收敛到零过程。再由练习 1.11, 连续映射 $x \mapsto \sup_{s \leq t} |x(s)|$ 给出所需结论; 极限为常数, 故这里的依分布收敛也就是依概率收敛。

下面的结果应与推论 2.4 对照阅读。现在要寻找的是使 DDS 布朗运动渐近相同的条件。

推论 3.2. 设 $M_i, i = 1, 2$, 为连续局部鞅, R 为一个时间变换过程。若当 $u \rightarrow \infty$ 时, 下列极限依概率成立:

i)

$$\frac{1}{u} \langle M_i, M_i \rangle_{R(u)} \longrightarrow 1, \quad i = 1, 2;$$

ii)

$$\frac{1}{u} \langle M_1 - M_2, M_1 - M_2 \rangle_{R(u)} \longrightarrow 0,$$

则当 $u \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{u}} (\beta_1(u \cdot) - \beta_2(u \cdot))$$

依分布收敛到零过程。

证明。 由第 0 章第 5 节的说明, 只需证明在每个有界时间区间上一致依概率收敛。又由第 V 章练习 1.17 (亦见推论 2.4 前的说明), $u^{-1/2} \beta_i(u \cdot)$ 是 $u^{-1/2} M_i$ 的 DDS 布朗运动。对

$$\left(\frac{1}{\sqrt{u}} M_1, \frac{1}{\sqrt{u}} M_2 \right)$$

应用定理 3.1 即得结论。

在上述推论中, R 最自然的候选是与 $\langle M^i, M^i \rangle$ 相伴的逆时间变换 μ^i 的组合。事实上, 下面的命题说明 $\mu^1 \vee \mu^2$ 就可以使用。

命题 3.3. 记 μ^i 为与 $\langle M_i, M_i \rangle$ 相伴的逆时间变换。下列两个断言等价:

(i)

$$\frac{1}{t} \langle M_1 - M_2, M_1 - M_2 \rangle_{\mu_t^1 \vee \mu_t^2} \longrightarrow 0$$

依概率成立;

(ii)

$$\frac{1}{t} \langle M_1, M_1 \rangle_{\mu_t^2} \longrightarrow 1, \quad \frac{1}{t} \langle M_2, M_2 \rangle_{\mu_t^1} \longrightarrow 1$$

依概率成立, 并且

$$\frac{1}{t} \langle M_1 - M_2, M_1 - M_2 \rangle_{\mu_t^1 \wedge \mu_t^2} \longrightarrow 0$$

依概率成立。

在这些条件下, 推论 3.2 的收敛结论成立。

证明。 由第 IV 章练习 1.47 的 “Minkowski 不等式”,

$$\left| \left(\frac{1}{t} \langle M_1, M_1 \rangle_{\mu_t^2} \right)^{1/2} - 1 \right| \leq \left(\frac{1}{t} \langle M_1 - M_2, M_1 - M_2 \rangle_{\mu_t^2} \right)^{1/2}.$$

交换 1, 2 后还有同样的不等式。因此 (i) 推出 (ii)。

反过来, 设 (ii) 成立。把二次变差在 $\mu_t^1 \wedge \mu_t^2$ 与 $\mu_t^1 \vee \mu_t^2$ 之间的增量展开, 可得

$$\langle M_1 - M_2, M_1 - M_2 \rangle_{\mu_t^1 \vee \mu_t^2} - \langle M_1 - M_2, M_1 - M_2 \rangle_{\mu_t^1 \wedge \mu_t^2}$$

$$\leq |\langle M_1, M_1 \rangle_{\mu_t^2} - \langle M_2, M_2 \rangle_{\mu_t^1}| + 2|\langle M_1, M_2 \rangle_{\mu_t^1} - \langle M_1, M_2 \rangle_{\mu_t^2}|.$$

而 Kunita-Watanabe 不等式给出

$$|\langle M_1, M_2 \rangle_{\mu_t^1} - \langle M_1, M_2 \rangle_{\mu_t^2}| \leq |t - \langle M_1, M_1 \rangle_{\mu_t^1}|^{1/2} |t - \langle M_2, M_2 \rangle_{\mu_t^1}|^{1/2}.$$

除以 t , 再用 (ii), 即可得到 (i). 最后在推论 3.2 中取 $R(t) = \mu_t^1 \vee \mu_t^2$, 便得到所述收敛。

推论 3.4. 若

$$\langle M_1, M_1 \rangle_\infty = \langle M_2, M_2 \rangle_\infty = \infty$$

并且对 $i = 1, 2$,

$$\frac{\langle M_1 - M_2, M_1 - M_2 \rangle_t}{\langle M_i, M_i \rangle_t} \rightarrow 0 \quad \text{几乎必然,}$$

则命题 3.3 的结论成立。

证明. 假设保证 $\mu_t^i < \infty$, 且当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\mu_t^i \uparrow \infty$. 此外,

$$\frac{\langle M_1 - M_2, M_1 - M_2 \rangle_{\mu_t^i}}{\langle M_i, M_i \rangle_{\mu_t^i}} = \frac{1}{t} \langle M_1 - M_2, M_1 - M_2 \rangle_{\mu_t^i}.$$

因此命题 3.3 的条件 (i) 立即成立。

从现在起, 设 Z 是满足 $Z_0 = z_0$ (几乎必然) 的复布朗运动, 并取不同于 z_0 的点 $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{C}$. 对每个 j , 令

$$\chi_t^j = \int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s - z_j} = \log \left| \frac{Z_t - z_j}{z_0 - z_j} \right| + i\theta_t^j,$$

其中 θ^j 是 $\arg((Z_t - z_j)/(z_0 - z_j))$ 从 0 开始的连续分支. 过程 $(2\pi)^{-1}\theta_t^j$ 就是截至时刻 t , Z 绕点 z_j 的绕数. 我们的目标是进一步研究 θ^j , $j = 1, \dots, p$, 的联合渐近性质.

置

$$C_t^j = \int_0^t |Z_s - z_j|^{-2} ds,$$

并记 T^j 为 C^j 的逆时间变换. 第 V 章第 2 节已经说明, 对每个 j , 存在复布朗运动 $\zeta^j = \beta^j + i\gamma^j$, 使

$$\chi_t^j = \zeta_{C_t^j}^j, \quad \zeta_t^j = \chi_{T_t^j}^j.$$

注意: 在时间变换下, 当 Z 位于圆盘

$$D_j = D(z_j, |z_0 - z_j|)$$

内时 $\beta^j < 0$, 位于 D_j 外时 $\beta^j > 0$.

下面回顾第 VI 章定理 2.7 前引入的记号. 设 β 是标准一维布朗运动, l 是它在 0 点的局部时. 令

$$M_t^+ = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s > 0\}} d\beta_s, \quad M_t^- = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s < 0\}} d\beta_s,$$

并以 $\alpha^\pm$ 表示与 $\langle M^\pm, M^\pm \rangle$ 相伴的逆时间变换. 再记 $\beta^\pm$ 为 β 的正部与负部, 并置

$$\rho_t^\pm = \beta_{\alpha_t^\pm}^\pm.$$

第 VI 章的结果表明,

$$(\delta^+, \delta^-) := (M_{\alpha^+}^+, M_{\alpha^-}^-)$$

是平面布朗运动, 且

$$\rho_t^\pm = \pm \delta_t^\pm + \frac{1}{2} l_{\alpha_t^\pm}.$$

过程 $\delta^\pm$ 是 $M^\pm$ 的 DDS 布朗运动; 过程 $\rho^\pm$ 是反射布朗运动, $(\rho^\pm, l_{\alpha^\pm})$ 与 $(|\beta|, l)$ 同分布, 而且

$$\frac{1}{2} l_{\alpha_t^+} = \sup_{s \leq t} (-\delta_s^+), \quad \frac{1}{2} l_{\alpha_t^-} = \sup_{s \leq t} \delta_s^-.$$

过程 $l_{\alpha^\pm}$ 是 $\rho^\pm$ 在 0 点的局部时 (第 VI 章练习 2.14)。

命题 3.5. 过程 ρ^+ 与 ρ^- 相互独立。此外, 存在从 $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ 到 $\mathcal{W}$ 的可测映射 f, g , 使

$$\beta = f(\rho^+, \rho^-) = g(\delta^+, \delta^-).$$

证明. 第一部分来自 δ^+ 与 δ^- 的独立性。为证明第二部分, 注意

$$\beta_t = \rho_{\langle M^+, M^+ \rangle_t}^+ + \rho_{\langle M^-, M^- \rangle_t}^-.$$

因此只需证明 $\langle M^+, M^+ \rangle$ 是 (ρ^+, ρ^-) 的可测函数。记 $L^\pm$ 为 $\rho^\pm$ 在 0 点的局部时, 则

$$l_t = L_{\langle M^+, M^+ \rangle_t}^+ = L_{\langle M^-, M^- \rangle_t}^-.$$

又因为

$$\langle M^+, M^+ \rangle_t + \langle M^-, M^- \rangle_t = t,$$

所以

$$\langle M^+, M^+ \rangle_t = \inf\{s : L_s^+ > L_{t-s}^-\};$$

直接核对即可验证该式。最后, $\rho^\pm$ 本身又是 $\delta^\pm$ 的可测函数, 证明完成。

注. 从某种意义上说, 这也再次证明了布朗运动可以从其游程过程中恢复出来 (第 XII 章命题 2.5): ρ^+ 与 ρ^- 可分别看作记录了正游程与负游程。

下文要同时对若干布朗运动使用上面的 $\pm$ 记号。用于区分布朗运动的上标写在符号 $\pm$ 之前。例如, 对上面复布朗运动 ζ^j 的实部 β^j , 写作

$$\rho^{j\pm} = \rho^\pm(\beta^{j+}, \beta^{j-}).$$

引理 3.6. 过程 δ^{j+} 是连续局部鞅

$$N_t^{j+} = \operatorname{Re} \int_0^t \mathbf{1}_{D_j^c}(Z_s) \frac{dZ_s}{Z_s - z_j}$$

的 DDS 布朗运动。把 D_j^c 换成 D_j 后同样成立, 相应的局部鞅记为 N^{j-} 。

证明. 容易看出

$$N_{T_t^j}^{j+} = M_t^{j+}.$$

由于 δ^{j+} 是 M^{j+} 的 DDS 布朗运动, 第 V 章练习 1.17 说明它也是 N^{j+} 的 DDS 布朗运动。负号情形完全相同。

还需为 ζ^j 的虚部 γ^j 引入相应记号。令 γ^{j+} 与 γ^{j-} 分别为局部鞅

$$\theta_t^{j+} = \int_0^t \mathbf{1}_{D_j^c}(Z_s) d\theta_s^j, \quad \theta_t^{j-} = \int_0^t \mathbf{1}_{D_j}(Z_s) d\theta_s^j$$

的 DDS 布朗运动。与上面的证明相同,

$$\langle \theta^{j+}, \theta^{j+} \rangle_t = \int_0^{C_t^j} \mathbf{1}_{\{\beta_s^j \geq 0\}} ds,$$

并且 γ^{j+} 也是 $\int_0^\cdot \mathbf{1}_{\{\beta_s^j \geq 0\}} d\gamma_s^j$ 的 DDS 布朗运动; 具体地,

$$\gamma_t^{j+} = \int_0^{\alpha_t^{j+}} \mathbf{1}_{\{\beta_s^j \geq 0\}} d\gamma_s^j.$$

负号情形作相应替换即可。此外,

$$\gamma^j = \gamma^{j+}(\langle M^{j+}, M^{j+} \rangle) + \gamma^{j-}(\langle M^{j-}, M^{j-} \rangle).$$

因此, 由命题 3.5, 知道四个过程 $(\rho^{j+}, \rho^{j-}, \gamma^{j+}, \gamma^{j-})$ 与知道 (β^j, γ^j) 是等价的。

下一个结果将实质性地使用尺度变换。强调一下, 对 $h > 0$, 定义

$$X^{(h)}(t) = h^{-1}X(h^2t).$$

特别地,

$$\zeta^{j(h)}(t) = h^{-1}\zeta^j(h^2t).$$

按照上述方案由平面布朗运动 $\zeta^{j(h)}$ 构造出的过程族, 恰好就是对 $(\beta^{j\pm}, M^{j\pm}, \delta^{j\pm}, \rho^{j\pm})$ 逐项施行同一尺度变换所得的过程族。对 $\beta^{j\pm}$ 这是显然的; 而

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s^{j(h)} > 0\}} d\beta_s^{j(h)} = \frac{1}{h} \int_0^{h^2t} \mathbf{1}_{\{\beta_s^j > 0\}} d\beta_s^j$$

给出 $M^{j\pm}$ 的结论。再由第 V 章练习 1.17 得到 $\delta^{j\pm}$ 的结论, 最后 $\rho^{j\pm}$ 是 $\delta^{j\pm}$ 的函数, 故尺度关系也对它成立。

定理 3.7. 当 $h \rightarrow \infty$ 时, $2p$ 维过程

$$(\zeta^{1(h)}, \dots, \zeta^{p(h)})$$

依分布收敛到过程 $(\zeta^{1\infty}, \dots, \zeta^{p\infty})$; 其分布由下列三条性质刻画:

- i) 每个 $\zeta^{j\infty}$ 都是复布朗运动;
- ii) 沿用上面的记号, 则所有过程

$$\rho^{j+\infty} + i\gamma^{j+\infty}, \quad j = 1, \dots, p,$$

都彼此相同;

- iii) 把上述共同过程记为 $\rho^{+\infty} + i\gamma^{+\infty}$, 则

$$\rho^{+\infty} + i\gamma^{+\infty}, \quad \rho^{1-\infty} + i\gamma^{1-\infty}, \dots, \rho^{p-\infty} + i\gamma^{p-\infty}$$

相互独立。

证明。 由推论 1.6, 所考察的分布族弱相对紧。因此只需证明每个极限分布都满足 (i)–(iii)。性质 (i) 是显然的。为证明所有 $\rho^{j+\infty}$ 相同, 只需证明所有 $\delta^{j+\infty}$ 相同。由第 0 章推论 5.8, $\delta^{j+\infty}$ 是 $\delta^{j+(h)}$ 的分布极限; 而由引理 3.6, $\delta^{j+(h)}$ 是局部鞅 N^{j+} 经尺度变换后所得的 DDS 布朗运动。因此只需验证推论 3.4 可用于这些局部鞅。由第 V 章第 2 节,

$$\langle N^{j+}, N^{j+} \rangle_t = \int_0^t f^j(Z_s) \, ds, \quad f^j(z) = |z - z_j|^{-2} \mathbf{1}_{D_j^c}(z),$$

并且

$$\langle N^{j+} - N^{k+}, N^{j+} - N^{k+} \rangle_t = \int_0^t f^{jk}(Z_s) \, ds,$$

其中

$$f^{jk}(z) = \left| \frac{\mathbf{1}_{D_j^c}(z)}{z - z_j} - \frac{\mathbf{1}_{D_k^c}(z)}{z - z_k} \right|^2.$$

函数 f^{jk} 对平面 Lebesgue 测度可积, 而 f^j 不可积。第 X 章第 3 节的遍历定理 (见第 X 章练习 3.15) 于是说明推论 3.4 的假设成立, 故所有 $\rho^{j+\infty}$ 相同。对 $\gamma^{j+\infty}$ 作完全相同的论证, 便得到 (ii)。

下面证明 (iii)。由同样的理由, 只需证明

$$(\delta^{1+}, \gamma^{1+}, \delta^{1-}, \gamma^{1-}, \dots, \delta^{p-}, \gamma^{p-})^{(h)}$$

依分布收敛到 $2p+2$ 维布朗运动。由引理 3.6 和第 V 章练习 1.17, δ^{1+} (分别地, δ^{j-}) 是 N^{1+} (分别地, N^{j-}) 的 DDS 布朗运动; γ^{1+} 与 γ^{j-} 则分别是 θ^{1+} 与 θ^{j-} 的 DDS 布朗运动。因此只需把推论 2.4 用于局部鞅族

$$(N^{1+}, \theta^{1+}, N^{1-}, \theta^{1-}, \dots, N^{p-}, \theta^{p-}).$$

若 M 是其中任意一个局部鞅, 则

$$\langle M, M \rangle_t = \int_0^t f(Z_s) \, ds,$$

其中 f 对平面 Lebesgue 测度不可积。另一方面, 若 M, N 是表中两个不同的局部鞅, 则

$$\langle M, N \rangle_t = \int_0^t \varphi(Z_s) \, ds,$$

此时 φ 可积。例如, 对 N^{j-} 与 N^{k-} ,

$$\varphi(z) = \frac{\langle z - z_j, z - z_k \rangle}{|z - z_j|^2 |z - z_k|^2} \mathbf{1}_{D_j \cap D_k}(z),$$

且

$$|\varphi(z)| \leq |z - z_j|^{-1} |z - z_k|^{-1} \mathbf{1}_{D_j \cap D_k}(z),$$

右端可积; 其他情形或更直接, 或可作同样处理。再次利用第 X 章练习 3.15 的遍历结论, 即知推论 2.4 的假设满足, 证明完成。

上一条定理使我们能够把第 X 章推论 4.5 推广到多个点。沿用该处记号, 令 A 为一个加性泛函, 并假设 $\|\nu_A\| = 2\pi$ 。

定理 3.8. 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{2}{\log t} \left((\theta_t^{j+}, \theta_t^{j-}), j = 1, \dots, p, A_t \right)$$

依分布收敛到

$$((W^+, W^{j-}), j = 1, \dots, p, \Lambda).$$

对每个 j , 三元组 (W^+, W^{j-}, Λ) 具有第 X 章推论 4.4 所描述的分布; 并且在给定 Λ 的条件下,

$$W^+, W^{1-}, \dots, W^{p-}$$

相互独立。

证明. 第 X 章定理 4.2 已经说明, 对每个 j ,

$$\frac{2}{\log t} (\theta_t^{j+}, \theta_t^{j-}, A_t)$$

依分布收敛到 $(W^{j+}, W^{j-}, \Lambda)$. 因此只需说明当 j 改变时, 这些极限三元组之间的关系。在第 X 章定理 4.2 后的注中已经指出, 若

$$T_a^j = \inf\{s : \beta_s^j = a\},$$

则

$$\frac{2}{\log t} (\theta_t^{j+}, \theta_t^{j-}) - \left(\int_0^{T_{\frac{1}{2}}^j} \mathbf{1}_{\{\beta_s^j \geq 0\}} d\gamma_s^j, \int_0^{T_{\frac{1}{2}}^j} \mathbf{1}_{\{\beta_s^j \leq 0\}} d\gamma_s^j \right)$$

依概率趋于 0。

对平面布朗运动 $U = X + iY$, 定义二维随机变量

$$\mathcal{W}(U) = \left(\int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{X_s \geq 0\}} dY_s, \int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{X_s \leq 0\}} dY_s \right), \quad T_1 = \inf\{s : X_s = 1\}.$$

由尺度性质, 若 $h = \frac{1}{2} \log t$, 则

$$\frac{2}{\log t} \left(\int_0^{T_{\frac{1}{2}}^j} \mathbf{1}_{\{\beta_s^j \geq 0\}} d\gamma_s^j, \int_0^{T_{\frac{1}{2}}^j} \mathbf{1}_{\{\beta_s^j \leq 0\}} d\gamma_s^j \right) = \mathcal{W}(\zeta^{j(h)}).$$

再用第 0 章推论 5.8, 便知

$$(\mathcal{W}(\zeta^{j(h)}), j = 1, \dots, p)$$

依分布收敛到 $(\mathcal{W}(\zeta^{j\infty}), j = 1, \dots, p)$ 。

于是, 只依赖于 $\rho^{j+\infty} + i\gamma^{j+\infty}$ 的随机变量 W^{j+} 对所有 j 都相同, 记为 W^+ ; 相应首次到达时间也与 j 无关。另一方面, 在给定 Λ 的条件下, W^{j-} 只依赖于 $\rho^{j-\infty} + i\gamma^{j-\infty}$, 并与 W^+ 独立。所需的条件独立性因而由定理 3.7 得出。

推论 3.9. 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\left(\frac{2}{\log t} \theta_t^j, j = 1, \dots, p \right)$$

的极限分布是

$$(W_j, j = 1, \dots, p), \quad W_j = W^+ + W^{j-}.$$

该分布可描述如下:

- i) $W^{j-} = HY_j$;
- ii) $Y_1, \dots, Y_p$ 是相互独立、参数为 1 的 Cauchy 随机变量, 并且与 (W^+, H) 独立;
- iii) (W^+, H) 的 Laplace–Fourier 变换为

$$\mathbb{E}[\exp(-aH + ivW^+)] = \left[\cosh v + \frac{a}{v} \sinh v \right]^{-1}.$$

证明。 这只是把第 X 章推论 4.4 取 $H = \Lambda/2$ 后重新表述。

第 X 章定理 4.2 已经说明, 用来区分“大绕行”与“小绕行”的圆盘半径不影响结论。本节为方便起见使用半径 $|z_0 - z_j|$ 的圆盘 D_j , 但这同样不是本质的。下面的命题既蕴含这一点, 也将用于本节最后一个定理的证明。

命题 3.10。 若 f 局部有界, 并且关于二维 Lebesgue 测度平方可积, 则

$$\frac{1}{\log t} M_t = \frac{1}{\log t} \int_0^t f(Z_s) dZ_s \longrightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

依概率成立。

证明。 由于 M 是共形局部鞅,

$$\langle \operatorname{Re} M, \operatorname{Re} M \rangle_t = \langle \operatorname{Im} M, \operatorname{Im} M \rangle_t = \int_0^t |f|^2(Z_s) ds.$$

我们已经知道

$$\frac{1}{\log t} \int_0^t |f|^2(Z_s) ds$$

依分布收敛到一个有限随机变量。因此

$$\frac{\langle \operatorname{Re} M, \operatorname{Re} M \rangle_t}{(\log t)^2} \longrightarrow 0$$

依概率成立。由第 IV 章练习 4.14, $\operatorname{Re} M_t / \log t$ 和 $\operatorname{Im} M_t / \log t$ 都依概率趋于 0。

注。 假设 f 局部有界, 只是为了保证对每个 $t > 0$,

$$\int_0^t |f|^2(Z_s) ds < \infty$$

在 $\mathbb{P}_{z_0}$ 下几乎必然成立。

前面的讨论还蕴含下列渐近结论。继续沿用同样的背景和记号, 并以 $\operatorname{Res}(f, a)$ 表示 f 在 a 点的留数。

定理 3.11. 设 f 在 $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$ 上全纯, 并设 Γ 是包含 $\{z_1, \dots, z_p\}$ 的相对紧开集。则

$$\frac{2}{\log t} \int_0^t f(Z_s) \mathbf{1}_\Gamma(Z_s) dZ_s \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}(f, z_j) \left\{ \frac{\Lambda}{2} + iW^{j-} \right\}.$$

若进一步 f 在无穷远处全纯并满足 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 则

$$\frac{2}{\log t} \int_0^t f(Z_s) dZ_s \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}(f, z_j) \left\{ \frac{\Lambda}{2} + iW^{j-} \right\} \operatorname{Res}(f, \infty) \left\{ \frac{\Lambda}{2} - 1 - iW^+ \right\}.$$

证明. 由命题 3.10, 可不失一般性地设

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^p \Gamma_j, \quad \Gamma_j = D(z_j, \varepsilon_j),$$

其中这些圆盘两两不交且半径充分小。令

$$F_t^j = \frac{2}{\log t} \int_0^t f(Z_s) \mathbf{1}_{\Gamma_j}(Z_s) dZ_s.$$

在 Γ_j 内可写成

$$f(z) = h_j(z) + g_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right),$$

其中 h_j 在 Γ_j 的一个邻域内全纯, 而

$$g_j(w) = \operatorname{Res}(f, z_j)w + \tilde{g}_j(w)w^2$$

且 $\tilde{g}_j$ 为整函数。置

$$H_t^j = \frac{2}{\log t} \int_0^t \mathbf{1}_{\Gamma_j}(Z_s) \tilde{g}_j\left(\frac{1}{Z_s - z_j}\right) \frac{dZ_s}{(Z_s - z_j)^2}.$$

命题 3.10 给出

$$F_t^j - \operatorname{Res}(f, z_j) \left\{ \frac{2}{\log t} \int_0^t \mathbf{1}_{\Gamma_j}(Z_s) \frac{dZ_s}{Z_s - z_j} \right\} - H_t^j \rightarrow 0$$

依概率成立。下面证明 $H_t^j \rightarrow 0$ 依概率成立。

令 $\tilde{G}_j$ 为 $\tilde{g}_j$ 在 0 处取值为 0 的一个原函数。对共形局部鞅应用 Itô 公式, 得到

$$\tilde{G}_j\left(\frac{1}{Z_t - z_j}\right) = \tilde{G}_j\left(\frac{1}{z_0 - z_j}\right) - \int_0^t \tilde{g}_j\left(\frac{1}{Z_s - z_j}\right) \frac{dZ_s}{(Z_s - z_j)^2}.$$

由于 Z_t 依概率趋于无穷远, 左端依概率趋于 $\tilde{G}_j(0) = 0$ 。所以

$$\frac{2}{\log t} \int_0^t \tilde{g}_j\left(\frac{1}{Z_s - z_j}\right) \frac{dZ_s}{(Z_s - z_j)^2} \rightarrow 0$$

依概率成立。另一方面, 共形局部鞅

$$\int_0^t \tilde{g}_j\left(\frac{1}{Z_s - z_j}\right) \mathbf{1}_{\Gamma_j^c}(Z_s) \frac{dZ_s}{(Z_s - z_j)^2}$$

的实部具有二次变差 $\int_0^t \phi(Z_s) ds$, 其中

$$\phi(z) = |\tilde{g}_j((z - z_j)^{-1})|^2 |z - z_j|^{-4} \mathbf{1}_{\Gamma_j^c}(z)$$

可积。重复命题 3.10 的论证, 即得 $H_t^j \rightarrow 0$ 。结合定理 3.8 和第 X 章命题 4.6, 便得到第一条结论。

为证明第二条结论, 取充分大的 η , 使得当 $|z| \geq \eta$ 时

$$f(z) = -\frac{\text{Res}(f, \infty)}{z} + \frac{1}{z^2} g\left(\frac{1}{z}\right),$$

其中 g 在 $\{|z| \leq 1/\eta\}$ 的一个邻域内全纯。于是还需在第一条极限上加上

$$\frac{2}{\log t} \left\{ -\text{Res}(f, \infty) \int_0^t \mathbf{1}_{\{|Z_s| \geq \eta\}} \frac{dZ_s}{Z_s} + \int_0^t \mathbf{1}_{\{|Z_s| \geq \eta\}} g\left(\frac{1}{Z_s}\right) \frac{dZ_s}{Z_s^2} \right\}.$$

由定理 3.8 和第 X 章命题 4.6, 第一项依分布收敛到

$$\text{Res}(f, \infty) \left\{ \frac{\Lambda}{2} - 1 - iW^+ \right\};$$

第二项由上面对 $\tilde{g}_j$ 的同一论证依概率趋于 0。

25

练习 3.12。 设 n 为整数, τ_t 是过程

$$\int_0^\cdot |nZ_s|^{2((1/n)-1)} ds$$

的逆时间变换。证明: 沿用本节记号,

$$\frac{2}{\log t} (\theta_{\tau_t}^1, \dots, \theta_{\tau_t}^p) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} n(W^{1-} + W^+, \dots, W^{p-} + W^+).$$

提示: 使用定理 3.7。

练习 3.13 (相互绕行)。 设 $B^1, \dots, B^p$ 是同一带滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ 上的 p 个复布朗运动, 并具有如下相关结构: 对每个 $k \neq l$, 存在矩阵 $A_{k,l}$, 使对任意 $u, v \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$,

$$\langle u, B_t^k \rangle \langle v, B_t^l \rangle - \langle u, A_{k,l} v \rangle t, \quad t \geq 0,$$

是鞅。

1°) 若对每个 $k \neq l$, 矩阵 $A_{k,l}$ 都不是正交矩阵, 并且对每个 i , $B_0^i \neq 0$ 几乎必然成立, 证明

$$\frac{2}{\log t} (\theta_t^i, i = 1, \dots, p) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} (C_i, i = 1, \dots, p),$$

其中 C_i 是相互独立、参数为 1 的 Cauchy 随机变量。

²⁵校订注: 原书定理陈述把无穷远留数项写成 $\text{Res}(f, \infty)\{\Lambda/2 - 1 + iW^+\}$, 证明末句又给出了另一个不相容的符号。由 $f(z) = -\text{Res}(f, \infty)z^{-1} + O(z^{-2})$ 及第 X 章命题 4.6, 正确项应为 $\text{Res}(f, \infty)\{\Lambda/2 - 1 - iW^+\}$ 。取 $f(z) = 1/z$ 还可直接检验: 整体虚部的极限必须是 $i(W^+ + W^-)$ 。

提示：对 $i \neq j$ ，证明下列三个量当 $t \rightarrow \infty$ 时依概率有界：

$$\frac{1}{\log t} \int_0^t |\mathrm{d}\langle \theta^i, \theta^j \rangle_s|, \quad \frac{1}{\log t} \int_0^t |\mathrm{d}\langle \log |B^i|, \theta^j \rangle_s|, \quad \frac{1}{\log t} \int_0^t |\mathrm{d}\langle \log |B^i|, \log |B^j| \rangle_s|.$$

2°) 设 B 为三维布朗运动， $D^1, \dots, D^p$ 是经过原点的 p 条互不相同的直线，并假设对每个 i ， $B_0 \notin D^i$ 几乎必然成立。定义 B 绕直线 D^i 的绕数 θ^i 。由上一问推出这里也有同样的分布收敛。

3°) 设 $B^1, \dots, B^n$ 是相互独立的平面布朗运动，且 $B_0^i \neq B_0^j$ 几乎必然成立。记 θ^{ij} 为 $B^i - B^j$ 绕原点的绕数。证明

$$\frac{2}{\log t} (\theta_t^{ij}, 1 \leq i < j \leq n) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} (C^{ij}, 1 \leq i < j \leq n),$$

其中 C^{ij} 是相互独立、参数为 1 的 Cauchy 随机变量。

注释与评述

第 1 节。关于基本定义和结果，以及第 0 章第 5 节的相关内容，可参阅 Billingsley [1] 与 Parthasarathy [1]；Jacod–Shiryaev [1] 给出了较新的论述。本书对 Donsker 定理 (Donsker [1]) 的证明及练习 1.14 均取自前者。Donsker 定理常被用来把先在随机游走骨架上观察到的性质转移到布朗运动。本书有意没有采用这一方法；使用这一方法的例子见 Pitman [1] 和 Le Gall [5]。值得注意的是，反过来，有些关于随机游走的新极限定律只有借助布朗运动才能真正理解；Le Gall [7] 在 Jain 与 Pruitt 早期工作的基础上完成的研究便说明了这一点。

命题 1.10 取自 Stroock–Varadhan [1]。它在本书的论述中虽然只占次要地位，却是该书体系中的基本结果；更一般地说，鞅问题已经被推广到许多情形。

练习 1.13 见 Nualart [1] 与 Yor [14]。练习 1.15 来自 Pagès [1]；练习 1.16 受 Rebolledo [1, 2] 启发。练习 1.17 与 1.18 分别由 J. Pitman 和 L. Dubins 建议。练习 1.17 可以简化 Gettoor–Sharpe [4] 中若干极限定理的证明；亦见 Jeulin [2]，第 128 页。

第 2 节。本节的主要结果由 Papanicolaou 等 [1] 得到，不过他们采用了不同的证明。Knight 定理的渐近版本来自 Pitman–Yor [5]；另一种证明见 Le Gall–Yor [2]，练习 2.9 则是同一主题的一个变形。

Kasahara–Kotani [1] 在二维布朗运动的情形研究了与 Papanicolaou 等 [1] 相同的问题。练习 2.13 来自 Kasahara [4]。Biane [3] 统一处理了 $\mathbb{R}^d$ 中若干布朗运动的（多重）加性泛函的渐近极限定理。

近年来，Berman、Borodin [1]，尤其是 Rosen，在稳定 Lévy 过程的背景下得到了练习 2.11–2.15 的许多推广。

练习 2.16 中球面布朗运动的随机微分方程表示，是 Lewis [1] 和 Van den Berg–Lewis [1] 所给一般表示的一个非常特殊的情形。关于曲面上布朗运动的构造，更一般地可参阅 Rogers–Williams [1] 和 Elworthy [1]。

第 3 节。本节全部取自 Pitman 与 Yor 的工作 [4, 5, 7]。练习 3.13 取自 Yor [22]，它回答了 Mitchell Berger 提出的一个问题。该练习第 2° 问的结果最初由 Le Gall–Yor [3] 用另一种方法得到。Le Gall–Yor [4] 还对 $\mathbb{R}^3$ 中布朗运动绕曲线的绕数进行了更一般的渐近研究。为了计算极限分布的特征函数，作者发展了布朗局部时 Ray–Knight 定理的若干推广，这些结果发表于 Le Gall–Yor [5]；亦见第 XII 章第 4 节的注释与评述。

Knight [11] 与 Yamazaki [1] 给出了有限维分布意义下的收敛结果，它们同所谓“对数尺度律”密切相关，即 Pitman–Yor [7] 中形如

$$\frac{\theta(e^{au})}{u} \xrightarrow[u \rightarrow \infty]{(d)} F(a)$$

的极限定理。

Watanabe [5] 提供了另一类推广：研究 Riemann 曲面上沿布朗路径积分 Abel 微分所得量的渐近性质。

除这些多维分布极限外，关于多重绕行的逐路径行为也有深刻研究，例如由 Lyons–McKean [1] 开始、并由 Gruet [1]、Gruet–Mountford [1] 和 Mountford [1] 延续的暂留速度研究。

还应提到，Hu–Shi–Yor [1] 为包括 Jacobi 过程（例如见 Warren–Yor [1]）在内的一大类扩散过程建立了极限定理。这些定理与随机环境中扩散过程的渐近性质密切相关；见 Kawazu–Tanaka [1] 与 Tanaka [4]。

关于平面布朗曲线几何的近期研究，Le Gall [9] 与 Duplantier 等 [1] 给出了深入讨论。

附录 A 附录

1 Gronwall 引理

定理。 设 φ 是 $\mathbb{R}_+$ 上非负、局部有界的 Borel 函数，并且对每个 $t \geq 0$,

$$\varphi(t) \leq a + b \int_0^t \varphi(s) \, ds,$$

其中 a, b 为常数且 $b \geq 0$ 。则

$$\varphi(t) \leq ae^{bt}.$$

特别地，若 $a = 0$ ，则 $\varphi = 0$ 。

证明。 显然，

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq a + b \int_0^t \left(a + b \int_0^s \varphi(u) \, du \right) ds \\ &= a + abt + b^2 \int_0^t (t-u) \varphi(u) \, du \\ &\leq a + abt + b^2 t \int_0^t \varphi(u) \, du. \end{aligned}$$

如此归纳可得

$$\varphi(t) \leq a + abt + \cdots + \frac{ab^n t^n}{n!} + \frac{b^{n+1} t^n}{n!} \int_0^t \varphi(u) \, du.$$

由于 φ 局部有界，当 $n \rightarrow \infty$ 时右端最后一项趋于 0，其余各项之和趋于 ae^{bt} ，结论随即成立。

2 广义函数

设 U 是 $\mathbb{R}^d$ 中一个固定开集。以 $C_c^\infty(U)$ 表示所有支集紧含于 U 的无穷次可微函数组成的空间。

定义 2.1。 称 $C_c^\infty(U)$ 中的序列 (φ_n) 收敛于 $\varphi \in C_c^\infty(U)$ ，如果所有 φ_n 的支集均包含在 U 的某个固定紧子集中，并且对每个 $k \geq 0$ ， $\varphi_n - \varphi$ 的所有 k 阶偏导数都一致收敛于 0。

定义 2.2。 U 上的一个广义函数 T ，是 $C_c^\infty(U)$ 上的线性泛函，并满足：每当 $\varphi_n \rightarrow 0$ 时， $T(\varphi_n) \rightarrow 0$ 。

也用 $\langle T, \varphi \rangle$ 表示广义函数 T 在试验函数 φ 上的取值。对 U 上每个 Radon 测度 μ ，定义与之相伴的广义函数 T_μ ：

$$\langle T_\mu, \varphi \rangle = \int_U \varphi \, d\mu.$$

同样，若 f 是局部可积的 Borel 函数，则以 T_f 表示测度 $\mu(dx) = f(x) \, dx$ 所确定的广义函数；换

言之，

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_U f(x) \varphi(x) \, dx.$$

定义 2.3. 设 T 为广义函数，

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

为偏微分算子，其中 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ 。相应的 T 的偏导数定义为

$$\left\langle \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} \right\rangle, \quad \varphi \in C_c^\infty(U).$$

这显然又定义了一个广义函数。对上面的 T_f ，若 f 有 $|\alpha|$ 阶连续偏导数，则

$$\frac{\partial^{|\alpha|} T_f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} = T_g, \quad g = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

3 凸函数

回顾：定义在 $\mathbb{R}$ 的开区间 I 上的实函数 f ，若对每个 $0 \leq t \leq 1$ 及 $x, y \in I$ ，

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

则称 f 为凸函数。由定义可知，固定 x 后， $(f(y) - f(x))/(y - x)$ 随 y 递增。因此 f 在每个点 x 都有左导数 $f'_-(x)$ 和右导数 $f'_+(x)$ ，并且当 $y > x$ 时，

$$f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y).$$

命题 3.1. 函数 f'_- 与 f'_+ 都递增，且分别左连续与右连续；集合

$$\{x : f'_-(x) \neq f'_+(x)\}$$

至多可数。

证明。 由于 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ ，递增性立即由上面的不等式推出。为证明 f'_+ 右连续，设 $a_n \downarrow 0$ 、 $b_m \downarrow 0$ ，交换两个递增极限可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_+(x + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(x + a_n + b_m) - f(x + a_n)}{b_m} = f'_+(x).$$

左导数的左连续性同理。最后，单调函数至多只有可数个不连续点；在 f'_- 连续之处，上述不等式给出 $f'_- = f'_+$ ，结论成立。

下面研究凸函数的二阶导数。若 $f \in C^2$ ，显然 $f'' \geq 0$ 。一般情形如下。

命题 3.2. 凸函数 f 在广义函数意义下的二阶导数 f'' 是正 Radon 测度。反过来，对 $\mathbb{R}$ 上任意 Radon 测度 μ ，存在凸函数 f 使 $f'' = \mu$ 。对每个紧区间 $I \subset \mathbb{R}$ 和 $x \in I$ ，可写成

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_I |x - a| \mu(da) + \alpha_I x + \beta_I,$$

$$f'_-(x) = \frac{1}{2} \int_I \operatorname{sgn}_-(x-a) \mu(da) + \alpha_I,$$

其中 α_I, β_I 为常数, 并约定 $\operatorname{sgn}_-(x) = 1$ ($x > 0$) 以及 $\operatorname{sgn}_-(x) = -1$ ($x \leq 0$)。

证明。 设 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 。在广义函数意义下,

$$\begin{aligned} \langle Df, \varphi \rangle &= - \int f(x) \varphi'(x) dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int \varphi(x) \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} dx \\ &= - \int \varphi(x) f'_-(x) dx. \end{aligned}$$

对 Stieltjes 积分作分部积分, 便知 f'' 是递增函数 f'_- 所确定的测度; 改用 f'_+ 也得到同一测度。

反过来, 若 $I_1 \subset I_2$, 则

$$\frac{1}{2} \int_{I_1} |x-a| \mu(da) \quad \text{与} \quad \frac{1}{2} \int_{I_2} |x-a| \mu(da)$$

在 I_1 上均为凸函数, 且两者之差是仿射函数。因此可以在整条实线上定义凸函数 f , 使其在每个紧区间 I 上都有题述表示。Lebesgue 控制收敛定理给出左导数公式。若 φ 的支集包含在 I 中, 则

$$\int f(x) \varphi''(x) dx = \int_I \mu(da) \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi''(x) |x-a| dx \right) = \int_I \varphi(a) \mu(da),$$

从而 $f'' = \mu$ 。

由 μ 决定的凸函数当然只确定到一个仿射函数。若对每个 x , $\int |x-a| \mu(da) < \infty$ (特别地, 当 μ 具有紧支集时成立), 则可在整条实线上统一写成

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |x-a| \mu(da) + \alpha x + \beta.$$

指定 f 在两个不同点的值便可确定 α, β 。

下面在稍一般的背景下给出端点值为零时更紧凑的表示。设 s 是区间 $J = [a, b]$ 上连续严格递增的函数。若对 $a < c_1 < x < c_2 < b$,

$$(s(c_2) - s(c_1))f(x) \leq (s(c_2) - s(x))f(c_1) + (s(x) - s(c_1))f(c_2),$$

则称 f 为 s -凸函数。仿照上面的做法, 对差商 $(f(y) - f(x))/(s(y) - s(x))$ 取相应的单侧极限, 可以定义左右 s -导数 $df_{\pm}/ds$ 。两者相等时称 f 在该点有 s -导数。这些导数递增, 并像上面一样确定一个测度 μ 。

对 $x \leq y$, 令

$$G(x, y) = G(y, x) = \frac{(s(x) - s(a))(s(b) - s(y))}{s(b) - s(a)}.$$

若 f 为 s -凸函数且 $f(a) = f(b) = 0$, 则

$$f(x) = - \int_a^b G(x, y) \mu(dy).$$

事实上, 对 Stieltjes 积分作分部积分, 可得

$$\begin{aligned}\int_a^b G(x, y) \mu(dy) &= \frac{s(b) - s(x)}{s(b) - s(a)} \int_{[a, x]} (s(y) - s(a)) \mu(dy) \\ &\quad + \frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)} \int_{[x, b]} (s(b) - s(y)) \mu(dy) \\ &= -f(x).\end{aligned}$$

上述结论经过显然的符号修改后, 也全部适用于凹函数。

4 Hausdorff 测度与维数

设 h 是 $\mathbb{R}_+$ 上严格递增的连续函数, 并满足 $h(0) = 0$ 、 $h(\infty) = \infty$ 。若 B 是度量空间 E 的 Borel 子集, 则 B 的 Hausdorff h -测度定义为

$$\mathcal{H}^h(B) = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \sum_n h(|U_n|) : B \subset \bigcup_n U_n, U_n \text{ 为闭集}, |U_n| < \varepsilon \right\},$$

其中 $|U_n|$ 表示 U_n 的直径。特别重要的是 $h(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$; 此时记为 $\mathcal{H}^\alpha$, 并称为 α -维测度。若 $E = \mathbb{R}^d$, 则 $\mathcal{H}^d$ 与通常的 Lebesgue 测度只相差归一化常数; 原书采用使两者相同的归一化约定。

引理 4.1. 若

$$h(t) = v(t)k(t), \quad \lim_{t \downarrow 0} v(t) = 0,$$

则 $\mathcal{H}^h(F) > 0$ 蕴含 $\mathcal{H}^k(F) = \infty$ 。

证明。 固定 $\varepsilon > 0$ 。存在 $\eta > 0$, 使 $u < \eta$ 时 $v(u) < \varepsilon$ 。若 (U_n) 是 F 的一个覆盖且 $|U_n| < \eta$, 则

$$\sum_n k(|U_n|) = \sum_n \frac{h(|U_n|)}{v(|U_n|)} \geq \frac{1}{\varepsilon} \sum_n h(|U_n|).$$

先对覆盖取下确界, 再令覆盖直径趋于 0, 得到

$$\mathcal{H}^k(F) \geq \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{H}^h(F).$$

由于 ε 任意, 结论成立。

该引理说明存在一个数 α_0 , 使当 $\alpha < \alpha_0$ 时 $\mathcal{H}^\alpha(F) = \infty$, 而当 $\alpha > \alpha_0$ 时 $\mathcal{H}^\alpha(F) = 0$ 。 $\mathcal{H}^{\alpha_0}(F)$ 本身可以为 0、有限正数或 ∞ 。数 α_0 称为 F 的 Hausdorff 维数。例如, 中间三分 Cantor 集的维数是 $\log 2 / \log 3$ 。

5 遍历理论

设 $(E, \mathcal{E}, m)$ 为 σ -有限测度空间。 $L^1(m)$ 的一个正压缩算子, 是范数不超过 1 且把非负函数类映为非负函数类的线性算子。基本例子是

$$f \mapsto f \circ \theta,$$

其中 θ 是保持 m 不变的 $(E, \mathcal{E})$ 上可测变换。

定理 5.1 (Hopf 分解定理)。 存在一个在 m -几乎处处意义下唯一的分割

$$E = C \cup D,$$

使对任意 $f \in L_+^1(m)$,

- i) 在 C 上, $\sum_{k \geq 0} T^k f$ 只取 0 或 ∞ ;
- ii) 在 D 上, $\sum_{k \geq 0} T^k f < \infty$ 。

若 $D = \emptyset$, 则称压缩算子 T 是保守的。这时对 $f \in L_+^1(m)$, 和 $\sum_{k \geq 0} T^k f$ 只取 0 与 ∞ 。当 f 遍历 $L_+^1(m)$ 时, 集合

$$\left\{ \sum_{k \geq 0} T^k f = \infty \right\}$$

生成一个 σ -代数, 记为 $\mathcal{I}$, 称为不变 σ -代数。若其中每个集合在模 m -零集意义下非空即为全空间, 换言之 $\mathcal{I}$ 在 m -几乎处处意义下平凡, 则称 T 是遍历的。

定理 5.2 (Chacon–Ornstein 定理)。 若 T 保守, 且 $g \in L_+^1(m)$ 满足 $m(g) > 0$, 则对每个 $f \in L^1(m)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n T^k f}{\sum_{k=0}^n T^k g} = \frac{\mathbb{E}_m[f | \mathcal{I}]}{\mathbb{E}_m[g | \mathcal{I}]} \quad m\text{-几乎处处}.$$

右端的条件期望相对于 m 而言。若 m 不是有限测度, 则取严格正的 $h \in L^1(m)$, 在有限测度 $h \cdot m$ 下把右端理解为

$$\frac{\mathbb{E}_{h \cdot m}[f/h | \mathcal{I}]}{\mathbb{E}_{h \cdot m}[g/h | \mathcal{I}]},$$

可以证明结果与 h 的选择无关。若 T 遍历, 则右端就是 $m(f)/m(g)$ 。这些结果的证明可参阅 Revuz [3]。

6 函数空间上的概率

设 E 是 Polish 空间, 并令

$$\Omega = C(\mathbb{R}_+, E).$$

以 X 表示典范过程, 并置

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t), \quad \mathcal{F}_\infty = \sigma(X_s : s \geq 0).$$

定理 6.1。 若对每个 $t > 0$, 在 $\mathcal{F}_t$ 上都给定概率测度 $\mathbb{P}^t$, 并且对每个 $s \leq t$, $\mathbb{P}^t$ 在 $\mathcal{F}_s$ 上与 $\mathbb{P}^s$ 一致, 则在 $\mathcal{F}_\infty$ 上存在概率测度 $\mathbb{P}$, 其在每个 $\mathcal{F}_t$ 上的限制均为 $\mathbb{P}^t$ 。

该结果的证明见 Stroock–Varadhan [1] 第 34 页; 亦见 Azéma–Jeulin [1]。

7 Bessel 函数

对 $\nu \geq -1$, $x > 0$, 修正 Bessel 函数 I_ν 定义为

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}.$$

当 $\nu = -1, k = 0$ 时, $\Gamma(\nu + k + 1) = \infty$, 故上式首项为 0. 利用 $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ 可得

$$I_1 = I_{-1}.$$

关于这些函数的更多细节, 见 Lebedev [1] 第 108–111 页。

这一函数族频繁出现在概率分布的计算中。设 K 服从参数 $x > 0$ 的 Poisson 分布; 在给定 $K = k$ 时, 随机变量服从 Gamma 分布 $\gamma_{\nu+k+1}$, 其中 $\nu > -1$. 记其无条件密度为 $d_x^{(\nu)}$, 则

$$\begin{aligned} d_x^{(\nu)}(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-x} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{\nu+k} e^{-y}}{\Gamma(\nu+k+1)} \\ &= e^{-(x+y)} \left(\frac{y}{x}\right)^{\nu/2} I_{\nu}(2\sqrt{xy}). \end{aligned}$$

把 x, y 分别换成 $x/(2t), y/(2t)$, 可知对 $\nu > -1$,

$$q_t^{(\nu)}(x, y) = \frac{1}{2t} \exp\left(-\frac{x+y}{2t}\right) \left(\frac{y}{x}\right)^{\nu/2} I_{\nu}\left(\frac{\sqrt{xy}}{t}\right),$$

其中 $t, x, y > 0$. 这仍是概率密度; 事实上, 它就是第 IX 章第 1 节出现的 $\text{BESQ}^{2(\nu+1)}$ 的转移密度。

Gamma 分布 γ_k 的 Laplace 变换为 $(\lambda + 1)^{-k}$, 所以 $d_x^{(\nu)}$ 的 Laplace 变换是

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-x} \frac{x^k}{k!} (\lambda + 1)^{-(\nu+k+1)} = (\lambda + 1)^{-(\nu+1)} \exp\left(-\frac{\lambda x}{\lambda + 1}\right).$$

再次使用前面的变量替换, 得到

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda y} q_t^{(\nu)}(x, y) dy = (2\lambda t + 1)^{-(\nu+1)} \exp\left(-\frac{\lambda x}{2\lambda t + 1}\right).$$

第 VIII 章第 3 节还用到了另一个含 Bessel 函数的公式。对 $x \in \mathbb{R}^d$, 记 $\xi(x)$ 为射线 Ox 与一条固定坐标轴的夹角; 以 μ^d 表示单位球面 S^{d-1} 上的均匀概率测度。若 $\nu = d/2 - 1$, 则

$$\int_{S^{d-1}} \exp(\rho \cos \xi(x)) \mu^d(dx) = \left(\frac{2}{\rho}\right)^{\nu} \Gamma(\nu + 1) I_{\nu}(\rho).$$

从 I_{ν} 的定义出发, 把指数函数展开成级数并计算 $\int_{S^{d-1}} \cos^k \xi(x) \mu^d(dx)$, 即可直接证明该式。计算中可使用倍增公式

$$\Gamma(2z) = (2\pi)^{-1/2} 2^{2z-1/2} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

1

8 Sturm–Liouville 方程

设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的正 Radon 测度。存在唯一的正递减函数 ϕ_{μ} , 使

$$\phi_{\mu}(0) = 1, \quad \phi_{\mu}'' = \phi_{\mu} \mu, \quad (*)$$

¹校订注: 原书在球面积分公式的右端误印为 $I_{\nu}(\rho/2)$ 。按本节对 I_{ν} 的定义, 正确参数应为 ρ ; 例如 $d = 2$ 时, 左端正是标准恒等式 $(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{\rho \cos \theta} d\theta = I_0(\rho)$ 。

其中 ϕ''_μ 是广义函数意义下的二阶导数 (见附录第 2 节)。由 (*) 可见, ϕ_μ 为正, 故它是凸函数, 而且 $\phi''_\mu = d\phi'_{\mu,+}$, 其中 $\phi'_{\mu,+}$ 是 ϕ_μ 的右导数 (见附录第 3 节)。

为证明这一存在唯一性结论, 把 (*) 化为 Riccati 方程

$$g(x) = 1 + \mu([a, x]) - \int_a^x g^2(y) \, dy, \quad (+)$$

其中 $a \in \mathbb{R}$ 。先证明: 该方程在 $[a, \infty[$ 上有唯一解, 并且对 $x \geq a$,

$$g(x) \geq \frac{1}{1+x-a}.$$

事实上, 由于 $x \mapsto x^2$ 局部 Lipschitz, 方程 (+) 在某个区间 $[a, \alpha[$ 上有唯一极大解, 其中 $\alpha > a$ 。显然 g 在每个有界区间上均为有限变差函数。先证 $g > 0$ 。反设某个 $x \in [a, \alpha[$ 满足 $g(x-) \leq 0$, 并置

$$\gamma = \inf\{x \in [a, \alpha[: g(x-) \leq 0\}.$$

当 $a \leq x < \gamma$ 时,

$$g(x) = g(x-) + \mu(\{x\}) > 0. \quad (\ddagger)$$

另一方面, 由第 0 章命题 4.6 的有限变差函数换元公式,

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} &= 1 - \int_{[a,x]} \frac{1}{g(y)g(y-)} \, dg(y) \\ &= 1 + (x-a) - \int_{[a,x]} \frac{1}{g(y)g(y-)} \mu(dy) \\ &\leq 1 + x - a. \end{aligned}$$

因此

$$g(\gamma) \geq \frac{1}{1+\gamma-a} + \mu(\{\gamma\}) > 0.$$

这与 g 的右连续性和 γ 的定义矛盾; 再由 $(\ddagger)$ 即知 $g > 0$ 。

若 $\alpha < \infty$, 则把 (+) 改写为

$$g(x) + \int_a^x g^2(y) \, dy = 1 + \mu([a, x]),$$

可知 g 在 $]a, \alpha[$ 上有界。令 $x \uparrow \alpha$, 得到

$$g(\alpha-) + \int_a^\alpha g^2(y) \, dy = 1 + \mu([a, \alpha]).$$

令 $g(\alpha) = g(\alpha-) + \mu(\{\alpha\})$, 再从 α 之后继续求解 (+), 便与 α 的极大性矛盾。因此 $\alpha = \infty$, 上述断言得证。

设 g 是 (+) 的解, 并对 $x \geq a$ 定义

$$\psi(x) = \exp\left(\int_a^x g(y) \, dy\right).$$

由 $g(x) \geq (1+x-a)^{-1}$, 很快可得

$$\psi(x) \geq 1 + x - a,$$

并且在广义函数意义下

$$\psi'' = \psi\mu.$$

再置

$$\phi(x) = \psi(x) \int_x^\infty \psi(y)^{-2} dy.$$

函数 $\phi > 0$ ，并且也是方程 $\phi'' = \phi\mu$ 的解。又因为 ψ' 递增，

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \psi'(x) \int_x^\infty \psi(y)^{-2} dy - \psi(x)^{-1} \\ &\leq \int_x^\infty \frac{\psi'(y)}{\psi(y)^2} dy - \psi(x)^{-1} = 0. \end{aligned}$$

所以 ϕ 递减。

方程 $u'' = u\mu$ 的解空间由

$$u\psi + v\phi, \quad u, v \in \mathbb{R},$$

组成。由于 $\psi(x) \rightarrow \infty$ ，正的有界解只能是 $v\phi$ ，其中 $v > 0$ 。对任意 $a < 0$ ，令

$$\phi_\mu = \frac{\phi}{\phi(0)},$$

并利用解在重叠区间上的唯一性拼接，即得到 (*) 所要求的唯一解。

参考文献

编排说明。为便于检索，书名、论文名和期刊名保留原文；条目顺序及作者分组依照英文第三版。以下全部文字均以原生字符排印。

Airault, H. and Föllmer, H.

- [1] Relative densities of semimartingales. *Invent. Math.* 27 (1974) 299-327.

Albeverio, S., Fenstad, J.E., Hoegh-Krohn, R., and Lindstrom, T.

- [1] Non standard methods in stochastic analysis and mathematical physics. Academic Press, New York 1986.

Aldous, D.

- [1] The continuous random tree II: an overview. In: M.T. Barlow and N.H. Bingham (eds.) *Stochastic analysis*. Camb. Univ. Press 1991.

Alili, L.

- [1] Fonctionnelles exponentielles et certaines valeurs principales des temps locaux browniens. Thèse de doctorat de l' université de Paris VI. 1995.

Alili, L., Dufresne, D., and Yor, M.

- [1] Sur l' identité de Bougerol pour les fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien avec drift. In: *Exponential functionals and principal values related to Brownian motion*. Biblioteca de la Revista Matematica Iberoamericana, 1997, pp. 3-14.

Aronszajn, N.

- [1] Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.* 68 (1950) 337-404.

Atsuji, A.

- [1] Some inequalities for some increasing additive functionals of planar Brownian motion and an application to Nevanlinna theory. *J.F. Sci. Univ. Tokyo Sect. I-A*, 37 (1990) 171-187.
[2] Nevanlinna theory via stochastic calculus. *J. Funct. Anal.* 132, 2 (1995) 437-510.
[3] On the growth of meromorphic functions on the unit disc and conformal martingales. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 3 (1996) 45-56.

Attal, S., Burdzy, K., Emery, M., and Hu, Y.

- [1] Sur quelques filtrations et transformations browniennes. *Sem. Prob., XXIX. Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1613. Springer, Berlin Heidelberg New York 1995, 56-69.

Auerhan, J. and Lépingle, D.

- [1] Les filtrations de certaines martingales du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ (II). *Sém. Prob. XV. Lect. Notes in Mathematics*, vol. 850. Springer, Berlin Heidelberg New York 1981, pp. 643-668.

Azema, J.

- [1] Quelques applications de la théorie générale des processus I. *Invent. Math.* 18 (1972) 293-336.
[2] Représentation multiplicative d' une surmartingale bornée. *Z.W.* 45 (1978) 191-212.
[3] Sur les fermés aléatoires. *Sém. Prob. XIX. Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1123. Springer, Berlin Heidelberg New York 1985, pp. 397-495.

Azéma, J., Duflo, M., and Revuz, D.

- [1] Mesure invariante sur les classes récurrentes des processus de Markov. Z.W. 8 (1967) 157-181.

Azéma, J., Gundy, R.F., and Yor, M.

- [1] Sur l' intégrabilité uniforme des martingales continues. Sémin. Prob. XIV. Lect. Notes in Mathematics, vol. 784. Springer, Berlin Heidelberg New York 1980, pp. 53-61.

Azéma, J., and Jeulin, T.

- [1] Précisions sur la mesure de Föllmer. Ann. I.H.P. 22 (3) (1976) 257-283.

Azéma, J., and Rainer, C.

- [1] Sur l' équation de structure $d[X, X]_t = dt - X_{t-} dX_t$. Sémin. Prob. XXVIII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1583. Springer, Berlin Heidelberg New York 1994, pp. 236-255.

Azéma, J., and Yor, M.

- [1] En guise d' introduction. Astérisque 52-53, Temps Locaux (1978) 3-16
- [2] Une solution simple au problème de Skorokhod. Sémin. Prob. XIII. Lect. Notes in Mathematics, vol. 721. Springer, Berlin Heidelberg New York 1979, pp. 90-115 and 625-633
- [3] Etude d' une martingale remarquable. Sémin. Prob. XXIII. Lect. Notes in Mathematics, vol. 1372. Springer, Berlin Heidelberg New York 1989, pp. 88-130.
- [4] Sur les zeros des martingales continues. Sémin. Prob. XXVI. Lect. Notes in Mathematics, vol. 1526. Springer, Berlin Heidelberg New York 1992, pp. 248-306.

Azencott, R.

- [1] Grandes déviations et applications. École d' Été de Probabilités de Saint-Flour VIII. Lect. Notes in Mathematics, vol. 774. Springer, Berlin Heidelberg New York 1980, pp. 1-176.

Barlow, M.T.

- [1] $L(B, t)$ is not a semi-martingale. Sémin. Prob. XVI. Lect. Notes in Mathematics, vol. 920. Springer, Berlin Heidelberg New York 1982, pp. 209-211.
- [2] One-dimensional stochastic differential equation with no strong solution. J. London Math. Soc. 26 (1982) 335-345.
- [3] Continuity of local times for Lévy processes. Z.W. 69 (1985) 23-35,
- [4] Skew Brownian motion and a one dimensional stochastic differential equation. Stochastics 25 (1988) 1-2.
- [5] Necessary and sufficient conditions for the continuity of local times of Lévy processes. Ann. Prob. 16 (1988) 1389-1427.
- [6] Study of a filtration expanded to include an honest time. Z. für Wahr. 44 (1978) 307-323.
- [7] Construction of a martingale with given absolute value. Ann. Prob. 9 (1981) 314-320.

Barlow, M.T., Emery, M., Knight, F.B., Song, S., Yor, M.

- [1] Autour d' un théorème de Tsirel'son sur des filtrations browniennes et non-browniennes. Sémin. Probab. XXXII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1686. Springer, Berlin Heidelberg New York 1998, pp. 264-305.

Barlow, M.T., Jacka, S.D., and Yor, M.

- [1] Inequalities for a pair of processes stopped at a random time. Proc. London Math. Soc. 52 (1986) 142-172.

Barlow, M.T., and Perkins, E.

- [1] One-dimensional stochastic differential equations involving a singular increasing process. Stochastics 12 (1984) 229-249.
- [2] Strong existence and non-uniqueness in an equation involving local time. Sémin. Prob. XVII. Lect. Notes in Mathematics, vol. 986. Springer, Berlin Heidelberg New York 1986, pp. 32-66.

Barlow, M.T., Pitman, J.W., and Yor, M.

- [1] Une extension multidimensionnelle de la loi de l' arc sinus. Sémin. Prob. XXIII. Lect. Notes in Mathematics, vol. 1372. Springer, Berlin Heidelberg New York 1989, pp. 294-314.
- [2] On Walsh' s Brownian motions. Sémin. Prob. XXIII. Lect. Notes in Mathematics, vol. 1372. Springer, Berlin Heidelberg New York 1989, pp. 275-293.

Barlow, M.T. and Yor, M.

- [1] (Semi-)martingale inequalities and local times. Z.W. 55 (1981) 237-254.
- [2] Semi-martingale inequalities via the Garsia-Rodemich-Rumsey lemma and applications to local times. J. Funct. Anal. 49 (1982) 198-229.
- [3] Sur la construction d' une martingale continue de valeur absolue donnée. Sémin. Prob. XIV, Lect. Notes in Mathematics 704, p. 62-75, Springer (1980).

Bass, R.F.

- [1] Joint continuity and representation of additive functionals of d-dimensional Brownian motion. Stoch. Proc. Appl. 17 (1984) 211-228.
- [2] L^p -inequalities for functionals of Brownian motion. Sémin. Prob. XXI. Lect. Notes in Mathematics, vol. 1247. Springer, Berlin Heidelberg New York 1987, pp. 206-217.
- [3] Probabilistic techniques in Analysis. Prob. and its App. Springer, Berlin Heidelberg New York 1995.
- [4] Diffusions and Elliptic Operators. Springer, Berlin Heidelberg New York 1997.
- [5] Skorokhod embedding via stochastic integrals. Sémin. Prob. XVII, Lect. Notes in Mathematics 986, p. 221-224, Springer (1983).

Bass, R.F., and Burdzy, K.

- [1] Stochastic Bifurcation Models. Ann. Prob. 27 (1999) 50-108.

Bass, R.F., and Griffin, P.S.

- [1] The most visited site of Brownian motion and simple random walk. Z.W. 70 (1985) 417-436.

Beghdadi-Sakrani, S.

- [1] Une martingale non-pure, dont la filtration est brownienne. Sémin. Prob. XXXVI, Lect. Notes in Mathematics 1801, p. 348-359, Springer (2003).
- [2] Some remarkable pure martingales. Ann. Inst. H. Poincaré 39 (2003) 287-299.
- [3] The uniqueness class of continuous local martingales. Bernoulli 8 (2002) 207-217.
- [4] Calcul stochastique pour des mesures signées. Sémin. Prob. XXXVI, Lect. Notes in Mathematics 1801, p. 366-382, Springer (2003).
- [5] On pathwise uniqueness of stochastic differential equations without drift. Jour. Th. Prob., Vol. 6, n° 4, p. 789-812 (2003).

Beghdadi-Sakrani, S. and Emery, M.

- [1] On certain probabilities equivalent to coin-tossing, d' après Schachermayer. Sémin. Prob. XXXIII, p. 240-256, Lect. Notes in Mathematics 1709, Springer (1999).

Benés, V.

- [1] Non existence of strong non-anticipating solutions to SDE' s; Implications for functional DE' s, filtering and control. Stoch. Proc. Appl. 5 (1977) 243-263.
- [2] Realizing a weak solution on a Probability space. Stoch. Proc. Appl. 7 (1978) 205-225.

Bertoin, J.

- [1] Sur une intégrale pour les processus à a-variation bornée. Ann. Prob. 17 (1989) 1521-1535.
- [2] Applications de la théorie spectrale des cordes vibrantes aux fonctionnelles additives principales d'un brownien réfléchi. Ann. I.H.P. 25, 3 (1989) 307-323.
- [3] Complements on the Hilbert transform and the fractional derivatives of Brownian local times. J. Math. Kyoto Univ. 30 (4) (1990) 651-670.

- [4] On the Hilbert transform of the local times of a Lévy process. *Bull. Sci. Math.* 119 (2) (1995) 147-156.
- [5] An extension of Pitman's theorem for spectrally positive Lévy processes. *Ann. Prob.* 20 (3) (1993) 1464-1483.
- [6] Excursions of a $BES_0(d)$ and its drift term ($0 < d < 1$). *Prob. Th. Rel. F.* 84 (1990) 231-250.
- [7] Lévy processes. Cambridge Univ. Press 1996.
- [8] Subordinators: examples and applications. XXVII* École d' Été de St. Flour; Summer 1997. *Lect. Notes in Mathematics*. Springer, Berlin Heidelberg New York 1998.
- [9] Cauchy's principal value of local times of Lévy processes with no negative jumps via continuous branching processes. *Elec. J. of Prob.* 2 1997, Paper 6.

Bertoin, J., Chaumont, L., and Pitman, J.

- [1] Path transformation of first passage bridges. *Elec. Comm. in Prob.* 8 (2003) 155-166.

Bertoin, J., and Le Jan, Y.

- [1] Representation of measures by balayage from a regular recurrent point. *Ann. Prob.* 20 (1992) 538-548.

Bertoin, J. and Pitman, J.

- [1] Path transformations connecting Brownian bridge, excursion and meander. *Bull. Sci. Math.* 118 (1994) 147-166.

Bertoin, J. and Werner, W.

- [1] Comportement asymptotique du nombre de tours effectués par la trajectoire brownienne plane. *Sém. Prob.* XXVIII, *Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1583. Springer, Berlin Heidelberg New York 1994, pp. 164-171.
- [2] Asymptotic windings of planar Brownian motion revisited via the Ornstein-Uhlenbeck process. *Sém. Prob.* XXVIII, *Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1583. Springer, Berlin Heidelberg New York 1994, pp. 138-152.
- [3] Stable windings. *Ann. Prob.* 24, 3, July 1996, pp. 1269-1279.

Bernard, A. and Maisonneuve, B.

- [1] Décomposition atomique de martingales de la classe H^1 . *Sém. Prob.* XI. *Lect. Notes in Mathematics*, vol. 581. Springer, Berlin Heidelberg New York 1977, pp. 303-323.

Besicovitch, A.S., and Taylor, S.J.

- [1] On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesgue measure. *J. London Math. Soc.* (1954) 449-459.

Biane, P.

- [1] Relations entre pont brownien et excursion normalisée du mouvement brownien. *Ann. L.H.P.* 22, 1 (1986) 1-7.
- [2] Sur un calcul de F. Knight. *Sém. Prob.* XXII, *Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1321. Springer, Berlin Heidelberg New York 1988, pp. 190-196.
- [3] Comportement asymptotique de certaines fonctionnelles additives de plusieurs mouvements browniens. *Sém. Prob.* XXIII, *Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1372. Springer, Berlin Heidelberg New York 1989, pp. 198-233.
- [4] Decomposition of Brownian trajectories and some applications. In: A. Badrikian, P.A. Meyer, J.A. Yan (eds.) *Prob. and Statistics; rencontres franco-chinoises en Probabilités et Statistiques*. Proceedings of WuHan meeting, pp. 51-76. World Scientific, 1993.

Biane, P., Bougerol, P., and O'Connell, N.

- [1] Littleman paths and Brownian paths. Preprint, March 2004.

Biane, P., Le Gall, J.F., and Yor, M.

- [1] Un processus qui ressemble au pont brownien. *Sém. Prob.* XXI, *Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1247. Springer, Berlin Heidelberg New York 1987, pp. 270-275.

Biane, P., Pitman, J., and Yor, M.

- [1] Probabilistic interpretation of the Jacobi and the Riemann zeta functions via Brownian excursions. *Bull. AMS* 38 (2001) 435-465.

Biane, P., and Yor, M.

- [1] Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. *Bull. Sci. Math.* 111 (1987) 23-101.
 [2] Variations sur une formule de P. Lévy. *Ann. I.H.P.* 23 (1987) 359-377.
 [3] Quelques précisions sur le méandre brownien. *Bull. Sci. Math.* 112 (1988) 101-109.
 [4] Sur la loi des temps locaux browniens pris en un temps exponentiel. *Sém. Prob. XXII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1321. Springer, Berlin Heidelberg New York 1988, pp. 454-466.

Billingsley, P.

- [1] Convergence of probability measures. Wiley and Sons, New York 1979. Second edition (1999).

Bingham, N.H.

- [1] Limit theorem for occupation times of Markov processes. *Z.W.* 17 (1971) 1-22.
 [2] The strong arc sine law in higher dimensions. In: Bergelson, March, Rosenblatt (eds.) *Convergence in Ergodic Theory and Probability*. de Gruyter 1996, pp. 111-116.

Bismut, J.M.

- [1] Martingales, the Malliavin calculus and Hypocoellipticity under general Hörmander's conditions. *Z.W.* 56 (1981) 469-506.
 [2] On the set of zeros of certain semi-martingales. *Proc. London Math. Soc.* (3) 49 (1984) 73-86.
 [3] Last exit decomposition and regularity at the boundary of transition probabilities. *Z.W.* 69 (1985) 65-98.
 [4] The Atiyah-Singer theorems. *J. Funct. Anal.* 57 (1984) 56-99 and 329-348.
 [5] Formules de localisation et formules de Paul Lévy. *Astérisque* 157-158, Colloque Paul Lévy sur les processus stochastiques (1988) 37-58.

Blumenthal, R.M.

- [1] Excursions of Markov processes. *Probability and its applications*. Birkhäuser 1992.

Blumenthal, R.M., and Gettoor, R.K.

- [1] Markov processes and potential theory. Academic Press, New York 1968.

Borodin, A.N.

- [1] On the character of convergence to Brownian local time I and II. *Z.W.* 72 (1986) 231-250 and 251-277.

Borodin, A.N., and Salminen, P.

- [1] Handbook of Brownian motion —Facts and formulae. Birkhauser 2002 (second edn.).

Bougerol, P.

- [1] Exemples de théorèmes locaux sur les groupes résolubles. *Ann. IHP* 29 (4) (1983) 369-391.

Bougerol, P. and Jeulin, Th.

- [1] Paths in Weyl chambers and random matrices. *Prob. Theory Rel. Fields* 124 (2002) 517-543.

Bouleau, N.

- [1] Sur la variation quadratique de certaines mesures vectorielles. *Zeit. für Wahr.* 61 (1982) 261-270.

Bouleau, N., and Yor, M.

- [1] Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semimartingales. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I* 292 (1981) 491-494.

Boylan, E.S.

- [1] Local times of a class of Markov processes. *Ill. J. Math.* 8 (1964) 19-39.

Brassesso, S.

- [1] A note on planar Brownian motion. *Ann. Prob.* 20 (3) (1992) 1498-1503.

Breiman, L.

- [1] *Probability*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass. 1968.

Brosamler, G.

- [1] Quadratic variation of potentials and harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 149 (1970) 243-257.

Brossard, I., and Chevalier, L.

- [1] Classe L log L et temps local. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A Math.* 305 (1987) 135-137.

Brown, T.C., and Nair, M.G.

- [1] A simple proof of the multivariate random time change theorem for point processes. *J. Appl. Prob.* 25 (1988) 210-214.

Bru, M.F.

- [1] Processus de Wishart. *CRAS, Série I* 308 (1989) 29-32.
- [2] Diffusions of perturbed principal component analysis. *J. Multi. Anal.* 29 (1989) 127-136.
- [3] Wishart processes. *J. Th. Prob.* 4 (1999) 725-751.

Burdzy, K.

- [1] Brownian paths and cones. *Ann. Prob.* 13 (1985) 1006-1010.
- [2] Cut points and Brownian paths. *Ann. Prob.* 17 (1989) 1012-1036.
- [3] Geometric properties of two-dimensional Brownian paths. *Prob. Th. Rel. F.* 81 (1989) 485-505.

Burkholder, D.L.

- [1] Martingale transforms. *Ann. Math. Stat.* 37 (1966) 1494-1504.
- [2] Distribution function inequalities for martingales. *Ann. Prob.* 1 (1973) 19-42.
- [3] Exit times of Brownian motion, harmonic majorization and Hardy spaces. *Adv. Math.* 26 (1977) 182-205.

Burkholder, D.L., and Gundy, R.F.

- [1] Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales. *Acta. Math.* 124 (1970) 249-304.

Calais, J.Y., and Génin, M.

- [1] Sur les martingales locales continues indexées par $]0, \infty[$. *Sém. Proba. XXII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 986. Springer, Berlin Heidelberg New York 1988, pp. 454-466.

Cameron, R.H., and Martin, W.T.

- [1] Transformation of Wiener integrals under translations. *Ann. Math.* 45 (1944) 386-396.
- [2] Evaluations of various Wiener integrals by use of certain Sturm-Liouville differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 51 (1945) 73-90.
- [3] Transformation of Wiener integrals under a general class of linear transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 18 (1945) 184-219.

Carlen, E.

- [1] The pathwise description of quantum scattering in stochastic mechanics. In: S. Al-beverio et al. (eds.) *Stochastic processes in quantum physics, Lect. Notes in Physics*, vol. 262. Springer, Berlin Heidelberg New York 1986, pp. 139-147.

Carlen, E., and Elworthy, D.

- [1] Stochastic and quantum mechanical scattering on hyperbolic spaces. In: D. Elworthy and N. Ikeda (eds.) Asymptotic problems in probability theory: stochastic models and diffusions on fractals. Pitman Research Notes (1993) vol. 283.

Carlen, E., and Krée, P.

- [1] Sharp L^p -estimates on multiple stochastic integrals. Ann. Prob. 19 (1) (1991) 354-368.

Carmona, P., Petit, F., and Yor, M.

- [1] Some extensions of the Arcsine law as partial consequences of the scaling property of Brownian motion. Prob. Th. Rel. Fields 100 (1994) 1-29.
- [2] Beta variables as times spent in $[0, \infty)$ by certain perturbed Brownian motions. J. London Math. Soc. (2) 58 (1998) 239-256.
- [3] An identity in law involving reflecting Brownian motion, derived from generalized arc-sine laws for perturbed Brownian motions. Stoch. Proc. and their App. (1999) 323-334.
- [4] Beta-gamma random variables and intertwining relations between certain Markov processes. Revista Ibero Americana 14 (2) (1998) 311-367.
- [5] A trivariate law for certain processes related to perturbed Brownian motions. Ann. IHP (2004).

Carne, T.K.

- [1] The algebra of bounded holomorphic functions. J. Funct. Anal. 45 (1982) 95-108.
- [2] Brownian motion and Nevanlinna Theory. Proc. London Math. Soc. (3) 52 (1986) 349-368.
- [3] Brownian motion and stereographic projection. Ann. I.H.P. 21 (1985) 187-196.

Centsov, N.V.

- [1] Limit theorems for some classes of random functions. Selected Translations in Mathematics. Statistics and Probability 9 (1971) 37-42.

Chacon, R., and Walsh, J.B.

- [1] One-dimensional potential embedding. Sémin. Prob. X, Lect. Notes in Mathematics, vol. 511. Springer, Berlin Heidelberg New York 1976, pp. 19-23.

Chaleyat-Maurel, M., and Yor, M.

- [1] Les filtrations de X et X^* , lorsque X est une semimartingale continue. Astérisque 52-53 (1978) 193-196.

Chan, J., Dean, D.S., Jansons, K.M., and Rogers, L.C.G.

- [1] On polymer conformations in elongational flows. Comm. Math. Phys. 160 (2) (1994) 239-257.

Chaumont, L. and Yor, M.

- [1] Exercises in Probability: from measure theory to random processes via conditioning. Camb. Univ. Press 2003.

Chen, L.H.Y.

- [1] Poincaré-type inequalities via stochastic integrals. Z.W. 69 (1985) 251-277.

Chevalier, L.

- [1] Un nouveau type d' inégalités pour les martingales discrètes. Z.W. 49 (1979) 249-256.

Chitashvili, R., and Mania, M.

- [1] On functions transforming a Wiener process into a semimartingale. Prob. Th. Rel. Fields 109 (1997) 57-76.

Chitashvili, R.J., and Toronjadze, T.A.

- [1] On one dimensional stochastic differential equations with unit diffusion coefficient; structure of solutions. Stochastics 4 (1981) 281-315.

Chou, S.

- [1] Sur certaines généralisations de l' inégalité de Fefferman. Sémin. Prob. XVIII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1059. Springer, Berlin Heidelberg New York 1984, pp. 219-222.

Chover, J.

- [1] On Strassen's version of the log log law. Z.W. 8 (1967) 83-90.

Chung, K.L.

- [1] Excursions in Brownian motion. Ark. für Math. 14 (1976) 155-177.
 [2] Lectures from Markov processes to Brownian motion. Springer, Berlin Heidelberg New York 1982.
 [3] Green, Brown and Probability. World Scientific, Singapore (1995).

Chung, K.L., and Durrett, R.

- [1] Downcrossings and local time. Z.W. 35 (1976) 147-149.

Chung, K.L., and Williams, R.T.

- [1] Introduction to stochastic integration. Second edition. Birkhauser, Boston 1989.

Chung, K.L., and Zhao, Z.

- [1] From Schrödinger's equation to Brownian motion. Grundlehren 312. Springer, Berlin Heidelberg New York 1995.

Cinlar, E., Jacod, J., Protter, P., and Sharpe, M.J.

- [1] Semi-martingales and Markov processes. Z.W. 54 (1980) 161-219.

Clark, J.M.C.

- [1] The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. Ann. Math. Stat. 41 (1970) 1282-1295; 42 (1971) 1778.

Cocozza, C. and Yor, M.

- [1] Démonstration d' un théorème de Knight à l' aide de martingales exponentielles. Sémin. Prob. XIV, Lect. Notes in Mathematics, vol. 784. Springer, Berlin Heidelberg New York 1980, pp. 496-499.

Csaki, E.

- [1] On some distributions concerning maximum and minimum of a Wiener process. In B. Gyires, editor, Analytic Function Methods in Probability Theory, number 21 in Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, p. 43—52. North-Holland, 1980 (1977, Debrecen, Hungary).

Csaki, E., Shi, Z., and Yor, M.

- [1] Fractional Brownian motions as “higher order” fractional derivatives of Brownian local times. J. Bolyai Society (eds. I. Berkes, E. Csaki, M. Csôrgô). Proceedings of a Conference on Limit Theorems (July 1999, Balatonlelle), vol. I, p. 365-388, 2002, Budapest.

Dambis, K.E.

- [1] On the decomposition of continuous submartingales. Theor. Prob. Appl. 10 (1965) 401-410.

Darling, D.A., and Kac, M.

- [1] Occupation times for Markov processes. Trans. Amer. Math. Soc. 84 (1957) 444-458.

Davis, B.

- [1] Picard's theorem and Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975) 353-362.
 [2] On Kolmogorov's inequality $\|f\|_p \leq c_p \|f\|_1$, $0 < p < 1$. Trans. Amer. Math. Soc. 222 (1976) 179-192.
 [3] Brownian motion and analytic functions. Ann. Prob. 7 (1979) 913-932.
 [4] On Brownian slow points. Z.W. 64 (1983) 359-367.
 [5] On the Barlow-Yor inequalities for local time. Sémin. Prob. XXI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1247. Springer, Berlin Heidelberg New York 1987, pp. 218-220.

[6] Weak limits of perturbed random walks and the equation $Y_t = B_t + \alpha \sup_{s \leq t} Y_s + \beta \inf_{s \leq t} Y_s$. Ann. Prob. 24 (1996) 2007-2017.

[7] Brownian motion and random walk perturbed at extrema. Prob. Th. Rel. F. 113 (1999) 501-518.

Davis, M.H.A., and Varaiya, P.

[1] The multiplicity of an increasing family of o-fields. Ann. Prob. 2 (1974) 958-963.

Dean, D.S., and Jansons, K.M.

[1] A note on the integral of the Brownian Bridge. Proc. R. Soc. London A 437 (1992) 792-730.

De Blassie, R.D.

[1] Exit times from cones in $\mathbb{R}^n$ of Brownian motion. Prob. Th. Rel. F. 74 (1989) 1-29.

[2] Remark on: Exit times from cones in $\mathbb{R}^n$ of Brownian motion. Prob. Th. Rel. F. 79 (1989) 95-97.

Deheuvels, P.

[1] Invariance of Wiener processes and Brownian Bridges by integral transforms and applications. Stoch. Proc. Appl. 13, 3, (1982) 311-318.

Delbaen, F., and Schachermayer, W.

[1] Arbitrage possibilities in Bessel processes and their relations to local martingales. Prob. Th. Rel. F. 102 (3) (1995) 357-366.

Dellacherie, C.

[1] Intégrales stochastiques par rapport aux processus de Wiener et de Poisson. Sémin. Prob. VIII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 381. Springer, Berlin Heidelberg New York 1974, pp. 25-26.

Dellacherie, C., Maisonneuve, B., and Meyer, P.A.

[1] Probabilités et Potentiel. Hermann, Paris, vol. V. Processus de Markov (fin). Complements de Calcul stochastique. 1992.

Dellacherie, C., and Meyer, P.A.

[1] Probabilités et potentiel. Hermann, Paris, vol. I 1976, vol. II 1980, vol. III 1983, vol. IV 1987.

Dellacherie, C., Meyer, P.A., and Yor, M.

[1] Sur certaines propriétés des espaces H' et BMO. Sémin. Prob. XII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 649. Springer, Berlin Heidelberg New York 1978, pp. 98-113.

De Meyer, B.

[1] Une simplification de l'argument de Tsirel'son sur le caractère non-brownien des processus de Walsh. Sémin. Prob. XXXIII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1709. Springer, Berlin Heidelberg New York (1999), pp. 217-220.

Denisov, I.V.

[1] A random walk and a Wiener process near a maximum. Theor. Prob. Appl. 28 (1984) 821-824.

Deuschel, J.D., and Stroock, D.W.

[1] An introduction to the theory of large deviations. Academic Press, New York 1988.

Doléans-Dade, C.

[1] Quelques applications de la formule du changement de variables pour les semi-martingales. Z.W. 16 (1970) 181-194.

[2] On the existence and unicity of solutions of stochastic integral equations. Z.W. 36 (1976) 93-101.

Doléans-Dade, C., and Meyer, P.A.

[1] Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Sémin. Prob. IV, Lect. Notes in Mathematics, vol. 124. Springer, Berlin Heidelberg New York 1970, pp. 77-107.

Donati-Martin, C.

- [1] Transformation de Fourier et temps d'occupation browniens. C.R. Acad. Sci. Paris, Série I 308 (1989) 515-517.

Donati-Martin, C., and Yor, M.

- [1] Mouvement brownien et inégalité de Hardy dans L^2 . Sémin. Prob. XXIII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1372. Springer, Berlin Heidelberg New York 1989, pp. 315-323.
- [2] Fubini's theorem for double Wiener integrals and the variance of the Brownian path. Ann. I.H.P. 27 (1991) 181-200.
- [3] Some Brownian Functionals and their laws. Ann. Prob. 25, 3 (1997) 1011-1058.

Donati-Martin, C., Doumerc, Y., Matsumoto, H., and Yor, M.

- [1] Some properties of the Wishart processes and a Matrix extension of the Hartman-Watson laws. Publ. RIMS Kyoto 2004.

Donsker, M.D.

- [1] An invariance principle for certain probability limit theorems. Mem. Amer. Math. Soc. 6 (1951) 1-12.

Donsker, M.D., and Varadhan, S.R.S.

- [1] Asymptotic evaluation of certain Markov processes expectations for large time I, II and III. Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975) 1-47; 29 (1976) 279-301 and 389-461.

Doob, J.L.

- [1] Stochastic processes. Wiley, New York 1953.
- [2] Classical potential Theory and its probabilistic counterpart. Springer, New York Berlin 1984.

Doss, H.

- [1] Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 233 (1976) 939-942 et Ann. I.H.P. 13 (1977) 99-125.

Doss, H., and Lenglart, E.

- [1] Sur l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles stochastiques. Ann. I.H.P. 14 (1978) 189-214.

Douglas, R.

- [1] On extremal measures and subspace density. Michigan Math. J. 11 (1964) 644-652.

Dubins, L.

- [1] Rises and upcrossings of non-negative martingales, III. J. Math. 6 (1962) 226-241.
- [2] A note on upcrossings of martingales. Ann. Math. Stat. 37 (1966) 728.
- [3] On a theorem of Skorokhod. Ann. Math. Stat. 39 (1968) 2094-2097.

Dubins, L., Emery, M., and Yor, M.

- [1] On the Lévy transformation of Brownian motions and continuous martingales. Sémin. Prob. XXVII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1577. Springer, Berlin Heidelberg New York 1993, pp. 122-132.

Dubins, L., Feldman, J., Smorodinsky, M., and Tsirel'son, B.

- [1] Decreasing sequences of o-fields and a measure change for Brownian motion. Ann. Prob. 24 (1996) 882-904.

Dubins, L., and Gilat, D.

- [1] On the distribution of maxima of martingales. Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978) 337-338.

Dubins, L., and Schwarz, G.

- [1] On continuous martingales. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 53 (1965) 913-916.
- [2] On extremal martingales distributions. *Proc. Fifth Berkeley Symp.* 2 (1) (1967) 295-297.
- [3] A sharp inequality for sub-martingales and stopping times. *Astérisque* 157-158 (1988) 129-145. *Colloque Paul Lévy sur les processus stochastiques.* (Palaiseau, 1987).

Dubins, L., and Smorodinsky, M.

- [1] The modified discrete Lévy transformation is Bernoulli. *Sém. Prob. XX VI, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1528. Springer, Berlin Heidelberg New York 1992, pp. 157—161.

Dudley, R.M.

- [1] Wiener functionals as Itô integrals. *Ann. Prob.* 5 (1) (1977) 140-141.

Duplantier, B.

- [1] Areas of planar Brownian curves. *J. Phys. A. Math. Gen.* 22 (13) (1989) 3033-3048.

Duplantier, B., Lawler, G.F., LeGall, J.F., and Lyons, T.J.

- [1] The geometry of the Brownian curve. *Bull. Sci. Math.* 117 (1993) 91-106.

Durbin, J.

- [1] The first passage density of the Brownian motion process to a curved boundary (with an appendix by D. Williams). *J. Appl. Prob.* 29 (2) (1992) 291-304.
- [2] A reconciliation of two different expressions for the first passage density of Brownian motion to a curved boundary. *J. Appl. Prob.* 25 (1988) 829-832.

Durrett, R.

- [1] A new proof of Spitzer' s result on the winding of 2-dimensional Brownian motion. *Ann. Prob.* 10 (1982) 244-246.
- [2] *Brownian motion and martingales in analysis.* Wadsworth, Belmont, Calif. 1984.
- [3] *Probability: Theory and examples.* Duxbury Press, Wadsworth, Pacific Grove, Cal. 2TM ed. 1996.

Durrett, R., and Iglehart, D.L.

- [1] Functionals of Brownian meander and Brownian excursion. *Ann. Prob.* 5 (1977) 130-135.

Durrett, R.T., Iglehart, D.L., and Miller, DR.

- [1] Weak convergence to Brownian meander and Brownian excursion. *Ann. Prob.* 5 (1977) 117-129,

Dvoretzky, A., Erdős, P., and Kakutani, S.

- [1] Non increase everywhere of the Brownian motion process. *Proc. Fourth Berkeley Symposium* 2 (1961) 103-116.

Dwass, H.

- [1] On extremal processes I and II. *Ann. Math. Stat.* 35 (1964) 1718-1725 and II. *J. Math.* 10 (1966) 381-391.

Dynkin, E.B.

- [1] *Markov processes.* Springer, Berlin Heidelberg New York 1965.
- [2] Self-intersection gauge for random walks and Brownian motion. *Ann, Prob.* 16 (1988) 1-57.
- [3] Local times and random fields. *Seminar on Stoch. Proc.* 1983. Birkhäuser 1984, pp. 69-84.

Eisenbaum, N.

- [1] Un théorème de Ray-Knight lié au supremum des temps locaux browniens. *PTRF* 87 (1) (1990) 79-95.
- [2] Dynkin' s isomorphism theorem and the Ray-Knight theorems. *PTRF* 99 (2) (1994) 321-355.
- [3] Une version sans conditionnement du théorème d' isomorphisme de Dynkin. *Sém. Prob. XXIX, Lect. Notes in Mathematics* 1613, p. 266-289, Springer (1995).

[4] On the infinite divisibility of squared Gaussian processes. PTRF 125 (3) (2003) 381-392.

[5] Isomorphism theorems for Markov chains. Stoch. Proc. App. 110 (2004) 247-258.

Eisenbaum, N., Kaspi, H., Marcus, M.B., Rosen, J., and Shi, Z.

[1] A Ray-Knight theorem for symmetric Markov processes. Ann. Prob. 28 (4) (2000) 1781-1796.

El Karoui, N.

[1] Sur les montées des semi-martingales. Astérisque 52-53, Temps Locaux (1978) 63-88.

EI Karoui, N., and Chaleyat-Maurel, M.

[1] Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur R -cas continu. Astérisque 52-53, Temps Locaux (1978) 117-144.

El Karoui, N., and Weidenfeld, G.

[1] Théorie générale et changement de temps. Sémin. Prob. XI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 581. Springer, Berlin Heidelberg New York 1977, pp. 79-108.

Elworthy, K.D.

[1] Stochastic differential equations on manifolds. London Math. Soc. Lecture Notes Series 70. Cambridge University Press (1982).

Elworthy, K.D., Li, X.M., and Yor, M.

[1] On the tails of the supremum and the quadratic variation of strictly local martingales. Sémin. Prob. XXXI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1655. Springer, Berlin Heidelberg New York 1997, pp. 113-125.

[2] The importance of strictly local martingales: applications to radial Ornstein-Uhlenbeck processes. PTRF 115 (1999) 325-355.

Elworthy, K.D., and Truman, A.

[1] The diffusion equation: an elementary formula. In: S. Albeverio et al. (eds.) Stochastic processes in quantum physics. Lect. Notes in Physics, vol. 173. Springer, Berlin Heidelberg New York 1982, pp. 136-146.

Emery, M.

[1] Une définition faible de BMO. Ann. I.H.P. 21 (1) (1985) 59-71.

[2] On the Azéma martingales. Sémin. Prob. XXIII, XXIV. Lect. Notes in Mathematics, vols. 1372, 1426. Springer, Berlin Heidelberg New York (1989), (1990), pp. 66-87; pp. 442-447.

[3] Quelques cas de représentation chaotique. Sémin. Prob. XXV. Lect. Notes in Mathematics, vol. 1485. Springer, Berlin Heidelberg New York 1991, pp. 10-23.

[4] On certain probabilities equivalent to coin-tossing, d'après Schachermayer. Sémin. Prob. XXXIII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1709. Springer, Berlin Heidelberg New York 1999, pp. 240-256

[5] Espaces probabilisés filtrés: de la théorie de Vershik au mouvement brownien, via des idées de Tsirelson. Séminaire Bourbaki, Novembre 2000, n° 882, 20 p.

[6] Stochastic Calculus in Manifolds, with an Appendix by P.A. Meyer. Universitext, Springer 1989.

[7] Classical probability theory: an outline of stochastic integrals and diffusions. In. Quantum Prob. Comm. XI (2003) 87-121.

Emery, M., and Perkins, E.

[1] La filtration de $B + L$. Z.W. 59 (1982) 383-390.

Emery, M., and Schachermayer, W.

[1] Brownian filtrations are not stable under equivalent time changes. Sémin. Prob. XXXIII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1709. Springer Berlin Heidelberg New York 1999, pp. 267-276.

[2] A remark on Tsirel'son's stochastic differential equation. Sem. Prob, XXXIII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1709. Springer Berlin Heidelberg New York 1999, pp. 291-303.

Emery, M., Stricker, C., and Yan, J.A.

- [1] Valeurs prises par les martingales locales continues a un instant donné. *Ann. Prob.* 11 (1983) 635-641.

Emery, M., and Yor, M.

- [1] Sur un théorème de Tsirel'son relatif à des mouvements browniens corrélés et à la nullité de certains temps locaux. *Sém. Prob. XXXII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1686. Springer, Berlin Heidelberg New York 1998, pp. 306-312.

Engelbert, H.J., and Hess, J.

- [1] Integral representation with respect to stopped continuous local martingales. *Stochastics* 4 (1980) 121-142.

Engelbert, H.J., and Schmidt, W.

- [1] On solutions of stochastic differential equations without drift. *Z.W.* 68 (1985) 287-317.

Ethier, S.N., and Kurtz, T.G.

- [1] Markov processes. Characterization and convergence. Wiley and Sons, New York 1986.

Evans, S.

- [1] On the Hausdorff dimension of Brownian cone points. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 98 (1985) 343-353.

Ezawa, H., Klauder, J.R., and Shepp, L.A.

- [1] Vestigial effects of singular potentials in diffusion theory and quantum mechanics. *J. Math. Phys.* 16, 4 (1975) 783-799.
 [2] A path-space picture for Feynman-Kac averages. *Ann. Phys.* 88, 2 (1974) 588-620.
 [3] On the divergence of certain integrals of the Wiener process. *Ann. Inst. Fourier, XXIV*, 2 (1974) 189-193

Feldman, J., and Smorodinsky, M.

- [1] Simple examples of non-generating Girsanov processes. *Sém. Prob. XXXI, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1655. Springer, Berlin Heidelberg New York 1997, pp. 247-251.

Feldman, J., and Tsirel'son, B.

- [1] Decreasing sequences of σ -fields and a measure change for Brownian motion, II. *Ann. Prob.* 24 (1996) 905-911.

Feller, W.

- [1] Diffusion process in one dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.* 77 (1954) 1-31.
 [2] On second order differential operators. *Ann. Math.* 61 (1955) 90-105.
 [3] Differential operators with the positive maximum property. III. *J. Math.* 3 (1959) 182-186.

Fisk, D.L.

- [1] Sample quadratic variation of sample continuous, second order martingales. *Z.W.* 6 (1966) 273-278.

Fitzsimmons, P.J.

- [1] A converse to a theorem of P. Lévy. *Ann. Prob.* 15 (1987) 1515-1523.

Fitzsimmons, P.J., and Gettoor, R.K.

- [1] Limit theorems and variation properties for fractional derivatives of the local time of a stable process. *Ann. L.H.P.* 28 (1992) 311-333.
 [2] On the distribution of the Hilbert transform of the local time of a symmetric Lévy process. *Ann. Prob.* 20 (1992) 1484-1497.

Fitzsimmons, P.J., Pitman, J.W., and Yor, M.

- [1] Markovian bridges: Construction, Palm interpretation, and splicing. *Seminar on Stochastic Processes* 1992. Birkhauser, pp. 101-134.

Foélimer, H.

- [1] Stochastic holomorphy. *Math. Ann.* 207 (1974) 245-265.
- [2] Calcul d' Itô sans probabilités. *Sém. Prob. XV, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 850. Springer, Berlin Heidelberg New York 1981, pp. 143-150.
- [3] Von der Brownsche Bewegung zum Brownschen Blatt: einige neuere Richtungen in der Théorie der stochastischen Prozesse. In: W. Jager, J. Moser, R. Remmert (eds.) *Perspectives in Mathematics, Anniversary of Oberwolfach, 1984*. Birkhauser, Basel 1984.
- [4] The exit measure of a supermartingale. *Z.W.* 21 (1972) 154-166.
- [5] On the representation of semimartingales. *Ann. Prob.* 1 (4) (1973) 580-589.

Follmer, H., and Imkeller, P.

- [1] Anticipation cancelled by a Girsanov transformation: a paradox on Wiener space. *Ann. LH.P.* 29 (4) (1993) 569-586.

Föllmer, H., and Protter, P.

- [1] On Itô's formula for d-dimensional Brownian motion. *Prob. Th. Rel. Fields* 116 (2000) 1-20.

Follmer, H., Protter, P., and Shiryaev, A.N.

- [1] Quadratic covariation and an extension of Itô's formula. *Bernoulli* 1 (1/2) (1995) 149-169.

Follmer, H., Wu, C.T., and Yor, M.

- [1] Canonical decomposition of linear transformations of two independent Brownian motions. *Stoch. Proc. and their App.* 84 (1) (1999) 137-164.
- [2] Weak Brownian motions of arbitrary order. *Ann. IHP* 36 (4) (2000) 447-487.

Freedman, D.

- [1] *Brownian motion and diffusion*. Holden-Day, San Francisco 1971.

Freidlin, M.I.

- [1] Action functionals for a class of stochastic processes. *Theor. Prob. Appl.* 17 (1972) 511-515.

Friedman, A.

- [1] *Stochastic differential equations and applications I and II*. Academic Press, New York 1975 and 1976.

Fujisaki, M., Kallianpur, G., and Kunita, H.

- [1] Stochastic differential equations for the non-linear filtering problem. *Osaka J. Math.* 9 (1972) 19-40.

Fujita, T., Petit, F., and Yor, M.

- [1] Pricing path dependent options in a Black-Scholes market from the distribution of homogeneous Brownian functionals. *J. App. Prob.* 41 (2004) 1-18.

Fukushima, M. and Takeda, M.

- [1] A transformation of symmetric Markov processes and the Donsker-Varadhan theory. *Osaka J. Math.* 21 (1984) 311-326.

Fukushima, M. and Tanaka, H.

- [1] Poisson point processes attached to symmetric diffusions. To appear. *Sém. Prob. XXXVIII*, Springer 2005.

Galmarino, A.R.

- [1] Representation of an isotropic diffusion as a skew product. *Z.W.* 1 (1963) 359-378.

Galtchouk, L., and Novikov, A.A.

- [1] On Wald's equation. Discrete time case. *Sém. Prob. XXXI, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1655. Springer, Berlin Heidelberg New York 1997, pp. 126-135.

Garsia, A., Rodemich, E., and Rumsey, J., Jr.

- [1] A real variable lemma and the continuity of paths of some Gaussian processes. *Indiana Univ. Math. J.* 20 (1970/1971) 565-578.

Gaveau, B.

- [1] Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents. *Acta. Math.* 139 (1977) 96-153.

Geiger, J., and Kersting, G.

- [1] Winding numbers for 2-dimensional positive recurrent diffusions. *Potential Analysis* 3, 2 (1994) 189-201.

Geman, D., and Horowitz, J.

- [1] Occupation densities. *Ann. Prob.* 8 (1980) 1-67.

Geman, D., Horowitz, J., and Rosen, J.

- [1] A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. *Ann. Prob.* 12 (1985) 86-107.

Gettoor, R.K.

- [1] Another limit theorem for local time. *Z.W.* 34 (1976) 1-10.
 [2] The Brownian escape process. *Ann. Prob.* 7 (1979) 864-867.
 [3] Infinitely divisible probabilities on the hyperbolic plane. *Pacific J. Math.* 11 (1961) 1287-1308.
 [4] Excursions of a Markov process. *Ann. Prob.* 7 (2) (1979) 244-266.

Gettoor, R.K., and Sharpe, M.J.

- [1] Conformal martingales. *Invent. Math.* 16 (1972) 271—308.
 [2] Last exit times and additive functionals. *Ann. Prob.* 1 (1973) 550-569.
 [3] Last exit decompositions and distributions. *Indiana Univ. Math. J.* 23 (1973) 377-404.
 [4] Excursions of Brownian motion and Bessel processes. *Z.W.* 47 (1979) 83-106.
 [5] Excursions of dual processes. *Adv. Math.* 45 (1982) 259-309.
 [6] Naturality, standardness and weak duality for Markov processes. *Z.W.* 67 (1984) 1-62.

Gikhman, I.I., and Skorokhod, A.V.

- [1] Theory of stochastic processes I, II and III. Springer, Berlin Heidelberg New York 1974, 1975, and 1979.

Gilat, D.

- [1] Every non-negative submartingale is the absolute value of a martingale. *Ann. Prob.* 5 (1977) 475-481.

Girsanov, I.V.

- [1] On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous sub-stitution of measures. *Theor. Prob. Appl.* 5 (1960) 285-301.
 [2] An example of non-uniqueness of the solution to the stochastic differential equation of K. Ito. *Theor. Prob. Appl.* 7 (1962) 325-331.

Going, A.

- [1] Some generalizations of Bessel processes. Ph. D. Thesis, ETH Zürich (January 1998).

Going-Jaeschke, A. and Yor, M.

- [1] A survey and some generalizations of Bessel processes. *Bernoulli* 9 (2003) 313-350.
 [2] A clarification about Hitting times densities for Ornstein-Uhlenbeck processes. *Finance and Stochastics* 7/3 (2003) 413-415.

Goswami, A., and Rao, B.V.

- [1] Conditional expectation of odd chaos given even. *Stochastics and Stochastics Reports* 35 (1991) 213-224.

Graversen, S.E.

- [1] “Polar” -functions for Brownian motion. *Z.W.* 61 (1981) 261-270.

Graversen, S.E. and Shyriaev, A.N.

- [1] An extension of P. Lévy's distributional properties to the case of a Brownian motion with drift. *Bernoulli* 6 (4) (2000) 615-620.

Graversen, S.E. and Vuolle-Apiala, J.

- [1] On Paul Lévy's arc sine law and Shiga-Watanabe's time inversion result. *Prob. Math. Stoch.* 20 (1) (2000) 63-73.

Greenwood, P., and Perkins, E.

- [1] A conditional limit theorem for random walks and Brownian local times on square root boundaries. *Ann. Prob.* 11 (1983) 227-261.

Gruet, J.C.

- [1] Sur la transience et la récurrence de certaines martingales locales continues à valeurs dans le plan. *Stochastics* 28 (1989) 189-207.
- [2] Semi-groupe du mouvement brownien hyperbolique. *Stochastics and Stochastic Re-ports* 56 (1996) 53-61.
- [3] Windings of hyperbolic Brownian motion. In: M. Yor (ed.) *Exponential Functionals and Principal Values related to Brownian Motion*. *Bib. Rev. Ibero-Amer.* (1997)
- [4] On the length of the homotopic Brownian word in the thrice punctured sphere. *Prob. Th. Rel. Fields* 111 (4) (1998) 489-516.

Gruet, J.C., and Mountford, T.S.

- [1] The rate of escape for pairs of windings on the Riemann sphere. *J. London Math. Soc.* 48 (2) (1993) 552-564.

Gundy, R.F.

- [1] Some topics in probability and analysis. *Conf. Board of the Math. Sciences. Regional Conf. Series in Maths.* 70 (1989)

Hardin, C.D.

- [1] A spurious Brownian motion. *Proc. Amer. Math. Soc.* 93 (1985) 350.

Harrison, J.M., and Shepp, L.A.

- [1] On skew Brownian motion. *Ann. Prob.* 9 (1981) 309-313.

Hartman, P., and Wintner, A.

- [1] On the law of the iterated logarithm. *Amer. J. Math.* 63 (1941) 169-176.

Hausmann, U.G.

- [1] Functionals of Itô processes as stochastic integrals. *Siam J. Contr. Opt.* 16, 2 (1978) 252-269.

Hawkes, J., and Barlow, M.T.

- [1] Application de l'entropie métrique à la continuité des temps locaux des processus de Lévy. *C.R. Acad. Sci. Paris* 301, Série I, 5 (1985) 237-239.

Hawkes, J., and Truman, A.

- [1] Statistics of local time and excursions for the Ornstein-Uhlenbeck process. In: M.T. Barlow, N. Bingham (eds.) *Stochastic Analysis*. *London Math. Soc. Lect. Notes*, vol. 167, 1991.

Hirsch, F. and Song, S.

- [1] Two parameter Bessel processes. *Stoch. Proc. App.* 83 (1999) 187-209.

Hobson, D.

- [1] The maximum maximum of a martingale. *Sém. Prob. XXXII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1686. Springer, Berlin Heidelberg New York 1998, pp. 250-263.

Hu, Y., Shi, Z., and Yor, M.

- [1] Rates of convergence of diffusions with drifted Brownian potentials. *Trans. Amer. Math. Soc.* 351 (1999) 3915-3934.

Hu, Y., and Warren, J.

- [1] Ray-Knight theorems related to a stochastic flow. *Stoch. Prob. and their App.* 86 (2) (2000) 287-306.

Hu, Y., and Yor, M.

- [1] Asymptotic studies of Brownian functionals. *Bolyai Society Math. Studies* 9 (1999) 187-217.

Hunt, G.A.

- [1] Markov processes and potentials I, II and III. *Ill. J. of Math.* 1 (19657) 44-93 and 316-369; *Ill. J. Math.* 2 (1958) 151-213.

Ibragimov, I.

- [1] Sur la régularité des trajectoires des fonctions aléatoires. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série A* 289 (1979) 545-547.

Idrissi Khamlichi, A.

- [1] Problèmes de polarité pour des semimartingales bidimensionnelles continues. Thèse de 3^e Cycle, Université de Paris VII, 1986.

Ikeda, N., and Manabe, S.

- [1] Integral of differential forms along the paths of diffusion processes. *Publ. R.I.M.L.S., Kyoto Univ.* 15 (1978) 827-852.

Ikeda, N., and Watanabe, S.

- [1] A comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications. *Osaka J. Math.* 14 (1977) 619-633.
 [2] Stochastic differential equations and diffusion processes. Second edition NorthHolland Publ. Co., Amsterdam Oxford New York; Kodansha Ltd., Tokyo 1989.

Imhof, J.P.

- [1] Density factorizations for Brownian motion and the three-dimensional Bessel Processes and applications. *J. Appl. Prob.* 21 (1984) 500-510.
 [2] On Brownian bridge and excursion. *Studia Scient. Math. Hungaria* 20 (1985) 1-10.
 [3] A simple proof of Pitman's $2M - X$ theorem. *Adv. Appl. Prob.* 24 (1992) 499-501.

Isaacson, D.

- [1] Stochastic integrals and derivatives. *Ann. Math. Sci.* 40 (1969) 1610-1616.

Ito, K.

- [1] Stochastic integral. *Proc. Imp. Acad. Tokyo* 20 (1944) 519-524.
 [2] Stochastic differential equations. *Memoirs A.M.S.* 4, 1951.
 [3] Multiple Wiener integrals. *J. Math. Soc. Japan* 3 (1951) 157-169.
 [4] Lectures on stochastic processes. Tata Institute, Bombay 1961.
 [5] Poisson point processes attached to Markov processes. *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.*, vol. 3. University of California, Berkeley, 1970, pp. 225-239.
 [6] Extension of stochastic integrals. *Proc. Internat. Symp. SDE Kyoto 1976*, pp. 95-109. [Most of K. Ito's papers are reprinted in: D. Stroock, S. Varadhan (eds.) *Kivosi 116 Selected Papers*. Springer (1987)]

Itô, K., and McKean, H.P.

- [1] Diffusion processes and their sample paths. Springer, Berlin Heidelberg New York 1965.

Ito, K., and Watanabe, S.

- [1] Transformation of Markov processes by multiplicative functionals. *Ann. Inst. Fourier* 15 (1965) 15-30.

Jacka, S.D.

- [1] Optimal stopping and best constants for Doob-like inequalities. I. The case $p = 1$. *Ann. Prob.* 19 (4) (1991) 1798-1821.

Jacod, J.

- [1] A general theorem of representation for martingales. *Proc. AMS Prob. Symp. Urbana* 1976, 37-S3.
- [2] Calcul stochastique et problèmes de martingales. *Lect. Notes in Mathematics*, vol. 714. Springer, Berlin Heidelberg New York 1979.
- [3] Equations différentielles linéaires: la méthode de variation des constantes. *Sém. Prob. XVI, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 920. Springer, Berlin Heidelberg New York 1982, pp. 442-446.

Jacod, J. and Mémin, J.

- [1] Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semimartingales. *Z.W.* 35 (1976) 1-37.
- [2] Sur l' intégrabilité uniforme des martingales exponentielles. *Z.W.* 42 (1978) 175-204.

Jacod, J. and Protter, P.

- [1] Time reversal on Lévy processes. *Ann. Prob.* 16 (1988) 620-641.

Jacod, J. and Shiryaev, A.N.

- [1] Limit theorems for stochastic processes. Springer, Berlin Heidelberg New York 1987.

Jacod, J. and Yor, M.

- [1] Etude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales. *Z.W.* 38 (1977) 83-125.

Janson, S.

- [1] On complex hypercontractivity. *J. Funct. Anal.* 151 (1997) 270-280.
- [2] Gaussian Hilbert spaces. Cambridge Univ. Press (1997)

Jeulin, T.

- [1] Un théorème de J. Pitman. *Sém. Prob. XIII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 721. Springer, Berlin Heidelberg New York 1979, pp. 332-359.
- [2] Semi-martingales et grossissement d' une filtration. *Lect. Notes in Mathematics*, vol. 833. Springer, Berlin Heidelberg New York 1980.
- [3] Application de la théorie du grossissement à l' étude des temps locaux browniens. In: Grossissements de filtrations: Exemples et applications. *Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1118. Springer, Berlin Heidelberg New York 1985, pp. 197-304.
- [4] Sur la convergence absolue de certaines intégrales. *Sém. Prob. XVI, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 920. Springer, Berlin Heidelberg New York 1982, pp. 248-256.
- [5] Ray-Knight' s theorems on Brownian local times and Tanaka formula. *Seminar on Stoch. Proc.* 1983, Birkhauser 1984, pp. 131—142.

Jeulin, T., and Yor, M.

- [1] Autour d' un théorème de Ray. *Astérisque* 52-53, Temps locaux (1978) 145-158.
- [2] Inégalité de Hardy, semimartingales et faux-amis. *Sém. Prob. XIII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 721. Springer, Berlin Heidelberg New York 1979, pp. 332-359.
- [3] Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement brownien. *Sém. Prob. XV, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 850. Springer, Berlin Heidelberg New York 1981, pp. 210-226.
- [4] Filtration des ponts browniens et équations différentielles linéaires. *Sém. Prob. XXIV, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1426. Springer, Berlin Heidelberg New York 1990, pp. 227-265.

- [5] Une décomposition non canonique du drap brownien. Sémin. Prob. XXVI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1528. Springer, Berlin Heidelberg New York 1992, pp. 322-347.
- [6] Moyennes mobiles et semimartingales. Sémin. Prob. XXVII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1557. Springer, Berlin Heidelberg New York 1993, pp. 53-77.

Johnson, G., and Helms, L.L.

- [1] Class (D) supermartingales. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963) 59-62.

Kac, M.

- [1] On distribution of certain Wiener functionals. Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949) 1-13
- [2] On some connections between probability theory and differential and integral equations. Proc. Second Berkeley Symp. Math, Stat. Prob. Univ. California Press 1951, pp. 189-251.
- [3] Integration in Function spaces and some of its applications. Lezioni Fermiane. Acc. Nat. dei Lincei. Scuola Normale Sup. Pisa (1980).

Kahane, J.P.

- [1] Some random series of functions. Second edition, Cambridge studies in Advanced Mathematics, 5, 1985.
- [2] Brownian motion and classical analysis. Bull. London Math. Soc. 7 (1976) 145-155.
- [3] Le mouvement brownien. In: Matériaux pour l'histoire des Mathématiques au XX^e siècle. Soc. Math. France (Dec. 1997).

Kallenberg, O.

- [1] Some time change representation of stable integrals, via predictable transformations of local martingales. Stoch. Proc. and their App. 40 (1992) 199-223.
- [2] Onan independence criterion for multiple stochastic integrals. Ann. Prob. 19, 2 (1991) 483-485.
- [3] On the existence of universal Functional Solutions to classical SDE's. Ann. Prob. 24, 1 (1996) 196-205.
- [4] Foundations of Modern Probability. Springer 1997. Second edn. 2002.

Kallianpur, G.

- [1] Stochastic filtering theory. Springer, Berlin Heidelberg New York 1980.
- [2] Some recent developments in nonlinear filtering theory. In: N. Ikeda, S. Watanabe, M. Fukushima, H. Kunita (eds.) Itô's Stochastic Calculus and Probability Theory. Springer, Berlin Heidelberg New York 1996, pp. 157-170.

Kallianpur, G., and Robbins, H.

- [1] Ergodic property of Brownian motion process. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 39 (1953) 525-533.

Kallssen, J.

- [1] An up to indistinguishability unique solution to a stochastic differential equation that is not strong. Sémin. Prob. X XXIII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1709. Springer, Berlin Heidelberg New York 1999, pp. 315-326.

Karandikar, R.L.

- [1] A.s. approximation results for multiplicative stochastic integrals. Sémin. Prob. XVI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 920. Springer, Berlin Heidelberg New York 1982, pp. 384-391.

Karatzas, I. and Shreve, S.E.

- [1] Brownian motion and stochastic calculus. Springer, Berlin Heidelberg New York 1988.

Karlin, S. and Taylor, H.M.

- [1] A second course in stochastic processes. Academic Press 1981.

Kasahara, Y.

- [1] Limit theorems of occupation times for Markov processes. R.I.M.S. 3 (1977) 801-818.
- [2] Limit theorems for occupation times of Markov processes. Japan J. Math. 7 (1981) 291-300.
- [3] A limit theorem for slowly increasing occupation times. Ann. Prob. 10 (1982) 728-736.
- [4] On Lévy's downcrossing theorem. Proc. Japan Acad. 56 A (10) (1980) 455-458.

Kasahara, Y., and Kotani, S.

- [1] On limit processes for a class of additive functionals of recurrent diffusion processes. Z.W. 49 (1979) 133-143.

Kawabata, S., and Yamada, T.

- [1] On some limit theorems for solutions of stochastic differential equations. Sémin. Prob. XVI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 920. Springer, Berlin Heidelberg New York 1982, pp. 412-441.

Kawazu, K., and Tanaka, H.

- [1] A diffusion process in a Brownian environment with drift. J. Math. Soc. Japan 49 (1997) 189-211.

Kazamaki, N.

- [1] Change of time, stochastic integrals and weak martingales. Z.W. 22 (1972) 25-32.
- [2] On a problem of Girsanov. Tohoku Math. J. 29 (1977) 597-600.
- [3] A remark on a problem of Girsanov. Sémin. Prob. XII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 649. Springer, Berlin Heidelberg New York 1978, pp. 47-50.
- [4] Continuous Exponential martingales and BMO. Lect. Notes in Mathematics, vol. 1579. Springer, Berlin Heidelberg New York 1994.

Kazamaki, N. and Sekiguchi, T.

- [1] On the transformation of some classes of martingales by a change of law. Tohoku Math. J. 31 (1979) 261-279.
- [2] Uniform integrability of continuous exponential martingales. Tohoku Math. J. 35 (1983) 289-301.

Kendall, D.G.

- [1] The Mardia-Dryden shape distribution for triangles: a stochastic calculus approach. J. App. Prob. 28 (1991) 225-230.

Kennedy, D.

- [1] Some martingales related to cumulative sum tests and single-server queues. Stoch. Proc. Appl. 4 (1976) 261-269.

Kent, J.

- [1] The infinite divisibility of the Von Mises-Fischer distribution for all values of the parameter in all dimensions. Proc. London Math. Soc. 35 (1977) 359-384.
- [2] Some probabilistic properties of Bessel functions. Ann. Prob. 6 (1978) 760-770.

Kertz, R.P., and Rösler, U.

- [1] Martingales with given maxima and terminal distributions. Israel J. of Maths. 69, 2 (1990) 173-192.

Khintchine, A.Y.

- [1] Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Ergebnisse der Mathematik, Bd. 2). Springer, Berlin Heidelberg 1933, pp. 72-75.

Knight, F.B.

- [1] Brownian local time and taboo processes. Trans. Amer. Math. Soc. 143 (1969) 173-185.
- [2] Random walks and a sojourn density process of Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963) 56-86
- [3] A reduction of continuous square-integrable martingales to Brownian motion. Lect. Notes in Mathematics, vol. 190. Springer, Berlin Heidelberg New York 1970, pp. 19-31.

- [4] An infinitesimal decomposition for a class of Markov processes. *Ann. Math. Stat.* 41 (1970) 1510-1529.
- [5] Essentials of Brownian motion and diffusion. *Math. Surv.* 18 Amer. Math. Soc., Providence, Rhode-Island 1981.
- [6] On the duration of the longest excursion. *Sem. Stoch. Prob.* 1985. Birkhauser, Basel 1986, pp. 117-147.
- [7] On invertibility of Martingale time changes. *Sem. Stoch. Proc.* 1987. Birkhauser, Basel 1988, pp. 193-221.
- [8] Inverse local times, positive sojourns, and maxima for Brownian motion. *Astérisque* 157158 (1988) 233-247.
- [9] Calculating the compensator: methods and examples. *Sem. Stoch. Proc.* 1990. Birkhäuser, Basel 1991, pp. 241-252.
- [10] Foundations of the prediction process. Clarendon Press, Oxford 1992.
- [11] Some remarks on mutual windings. *Sém. Prob. XXVII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1557. Springer, Berlin Heidelberg New York 1993, pp. 36-43.
- [12] A remark about Walsh's Brownian motion. Colloque in honor of J.P. Kahane (Orsay, June 1993), In: *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, Special Issue, 1995, pp. 1600-1606.
- [13] On the upcrossing chains of stopped Brownian motion. *Sém. Prob. XXXII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1686. Springer, Berlin Heidelberg New York 1998, pp. 343-375.

Knight, F.B. and Maisonneuve, B.

- [1] A characterization of stopping times. *Ann. Prob.* 22 (1994) 1600-1606.

Kolmogorov, A.N.

- [1] Über das Gesetz des iterierten Logarithmus. *Math. Ann.* 101 (1929) 126-135.

Koval' chik, I.M.

- [1] The Wiener integral. *Russ. Math. Surv.* 18 (1963) 97-135.

Kono, N.

- [1] Démonstration probabiliste du théorème de d'Alembert. *Sém. Prob. XIX, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1123. Springer, Berlin Heidelberg New York 1985, pp. 207-208.

Khoshnevisan, D.

- [1] Exact rates of convergence to Brownian local time. *Ann. Prob.* 22,3 (1994) 1295-1330.

Krengel, U.

- [1] Ergodic theorems. de Gruyter, Berlin New York 1985.

Kichler, U.

- [1] On sojourn times, excursions and spectral measures connected with quasi-diffusions. *Jour. Math. Kyoto U.* 26, 3 (1986) 403-421.

Kunita, H.

- [1] Absolute continuity of Markov processes and generators. *Nagoya Math. J.* 36 (1969) 1-26.
- [2] Absolute continuity of Markov processes. *Sém. Prob. X, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 511. Springer, Berlin Heidelberg New York 1976, pp. 44-77.
- [3] On backward stochastic differential equations. *Stochastics* 6 (1982) 293-313.
- [4] Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms. *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1097. Springer, Berlin Heidelberg New York 1984, pp. 143-303.
- [5] Some extensions of Itô's formula, *Sém. Prob. XV, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 850. Springer, Berlin Heidelberg New York 1981, pp. 118-141.
- [6] Stochastic flows and stochastic differential equations. Cambridge University Press 1990.

Kunita, H., and Watanabe, S.

- [1] On square-integrable martingales. Nagoya J. Math. 30 (1967) 209-245.

Kurtz, T.G.

- [1] Representations of Markov processes as multiparameter time changes. Ann. Prob. 8 (1980) 682-715.

Lamperti, J.

- [1] Continuous state branching processes. Bull. A.M.S. 73 (1967) 382-386.
- [2] Semi-stable Markov processes I. Z.W. 22 (1972) 205-255.
- [3] Semistable stochastic processes. Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962) 62-78.

Lane, D.A.

- [1] On the fields of some Brownian martingales. Ann. Prob. 6 (1978) 499-508.

Lebedev, N.N.

- [1] Special functions and their applications. Dover Publications, 1972.

Ledoux, M.

- [1] Inégalités isopérimétriques et calcul stochastique. Sémin. Prob. XXII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1321. Springer, Berlin Heidelberg New York 1988, pp. 249-259,

Ledoux, M., and Talagrand, M.

- [1] Probability on Banach spaces. Springer, Berlin Heidelberg New York 1991.

Le Gall, J.F.

- [1] Applications du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles. Sem, Prob. XVII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 986. Springer, Berlin Heidelberg New York 1983, pp. 15-31.
- [2] Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement Brownien. Ann. Prob. 14 (1986) 1219-1244.
- [3] Sur la mesure de Hausdorff de la courbe brownienne. Sémin. Prob. XIX, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1123. Springer, Berlin Heidelberg New York 1985, pp. 297-313.
- [4] Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. Sémin. Prob. XIX, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1123. Springer, Berlin Heidelberg New York 1985, pp. 314-331.
- [5] Une approche élémentaire des théorèmes de décomposition de Williams. Sémin. Prob. XX, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1204. Springer, Berlin Heidelberg New York 1986, pp. 447-464.
- [6] Sur les fonctions polaires pour le mouvement brownien. Sémin. Prob. XXII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1321. Springer, Berlin Heidelberg New York 1988, pp. 186-189.
- [7] Propriétés d'intersection des marches aléatoires, 1. Convergence vers le temps local d'intersection, II. Etude des cas critiques. Comm. Math. Phys. 104 (1986) 471-507 and 509-528.
- [8] Introduction au mouvement brownien. Gazette des Mathématiciens 40, Soc. Math. France (1989) 43-64.
- [9] Some properties of planar Brownian motion. École d'été de Saint-Flour XX, 1990, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1527. Springer, Berlin Heidelberg New York 1992, pp. 112-234.
- [10] The uniform random tree in a Brownian excursion. Prob. Th. Rel. Fields 96 (1993) 369-383.
- [11] Mouvement brownien et calcul stochastique. Cours de troisième cycle. Université Paris VI, 1994.

Le Gall, J.F., and Meyre, T.

- [1] Points cônes du mouvement brownien plan, le cas critique. Prob. Th. Rel. Fields 93 (1992) 231-247.

Le Gall, J.F., and Yor, M.

- [1] Sur l'équation stochastique de Tsirel'son. Sémin. Prob. XVII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 986. Springer, Berlin Heidelberg New York 1983, pp. 81-88.
- [2] Etude asymptotique de certains mouvements browniens complexes avec drift. Z.W. 71 (1986) 183-229.

- [3] Etude asymptotique des enlacements du mouvement brownien autour des droites de l' espace. Prob. Th. Rel. Fields 74 (1987) 617-635.
- [4] Enlacements du mouvement brownien autour des courbes de l' espace. Trans. Amer. Math. Soc. 317 (1990) 687-722.
- [5] Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel. C.R. Acad. Sci. Paris, Série 1 303 (1986) 73-76.

Lehoczky, J.

- [1] Formulas for stopped diffusion processes with stopping times based on the maximum. Ann. Prob. 5 (1977) 601-608.

Le Jan, Y.

- [1] Martingales et changements de temps. Sémin. Prob. XIII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 721. Springer, Berlin Heidelberg New York 1979, pp. 385-389.

Lenglart, E.

- [1] Sur la convergence p. s. des martingales locales. C.R. Acad. Sci. Paris 284 (1977) 1085-1088.
- [2] Relation de domination entre deux processus. Ann. I.H.P. 13 (1977) 171-179.
- [3] Transformation de martingales locales par changement absolument continu de probabilités. Z.W. 39 (1977) 65-70.

Lenglart, E., Lépingle, D., and Pratelli, M.

- [1] Une présentation unifiée des inégalités en théorie des martingales. Sémin. Prob. XIV, Lect. Notes in Mathematics, vol. 784. Springer, Berlin Heidelberg New York 1980, pp. 26-48.

Lépingle, D.

- [1] Sur le comportement asymptotique des martingales locales. Sémin. Prob. XII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 649. Springer, Berlin Heidelberg New York 1978, pp. 148-161.
- [2] Une remarque sur les lois de certains temps d' atteinte. Sémin. Prob. XV, Lect. Notes in Mathematics, vol. 850. Springer, Berlin Heidelberg New York 1981, pp. 669-670.

Lépingle, D. and Mémin, J.

- [1] Sur l' intégrabilité des martingales exponentielles. Z.W. 42 (1978) 175-203.

Leuridan, C.

- [1] Une démonstration élémentaire d' une identité de Biane et Yor. Sémin. Prob. XXX, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1626. Springer, Berlin Heidelberg New York 1996, pp. 255-260.
- [2] Le théorème de Ray-Knight à temps fixe. Sémin. Prob. XXXII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1686. Springer, Berlin Heidelberg New York 1998, pp. 376-406.
- [3] Les théorèmes de Ray-Knight et la mesure d' Itô pour le mouvement brownien sur le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Stochastics and Stochastic Reports 55 (1995) 109-128.

Lévy, P.

- [1] Le mouvement brownien plan. Amer. J. Math. 62 (1940) 487-550.
- [2] Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars, Paris 1948.
- [3] Wiener random functions and other Laplacian random functions. Proc. Second Berkeley Symp., vol. II, 1950, pp. 171-186.
- [4] Sur un problème de M. Marcinkiewicz. C.R. Acad. Sci. Paris 208 (1939) 318-321. Errata p. 776.
- [5] Sur certains processus stochastiques homogènes. Compositio Math. 7 (1939) 283-339.

Lewis, J.T.

- [1] Brownian motion on a submanifold of Euclidean space. Bull. London Math. Soc. (1986) 616-620.

Liptser, R.S., and Shiryaev, A.N.

- [1] Statistics of random processes, I and II. Springer Verlag, Berlin, 1977 and 1978. Second edition (2000).

Lorang, G., and Roynette, B.

- [1] Etude d' une fonctionnelle liée au pont de Bessel. Ann. Inst. H. Poincaré 32 (1996) 107-133.

Lyons, T.J., and McKean, H.P., Jr.

- [1] Windings of the plane Brownian motion. Adv. Math. 51 (1984) 212-225.

Lyons, T.J., and Zhang, T.S.

- [1] Decomposition of Dirichlet processes and its application. Ann. Prob. 22 (1994) 494—524.

McGill, P.

- [1] A direct proof of the Ray-Knight theorem. Sémin. Prob. XV, Lect. Notes in Mathematics, vol. 850. Springer, Berlin Heidelberg New York 1981, pp. 206-209.
- [2] Markov properties of diffusion local time: a martingale approach. Adv. Appl. Prob. 14 (1982) 789-810.
- [3] Integral representation of martingales in the Brownian excursion filtration. Sémin. Prob. XX, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1204. Springer, Berlin Heidelberg New York 1986, pp. 465-502.

McGill, P., Rajeev, B., and Rao, B.V.

- [1] Extending Levy's characterization of Brownian motion. Sémin. Prob. XXII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1321. Springer, Berlin Heidelberg New York 1988, pp. 163-165.

McKean, H.P., Jr.,

- [1] The Bessel motion and a singular integral equation. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, Math. 33 (1960) 317-322.
- [2] Stochastic integrals. Academic Press, New York 1969.
- [3] Brownian local time. Adv. Math. 15 (1975) 91-111.
- [4] Brownian motion and the general diffusion: scale and clock. Proceedings of the First Bachelier Conference (July 2000). eds: H. Geman, D. Madan, S.R. Pliska, T. Vorst. Springer (2002), p. 75-92.

Maisonneuve, B.

- [1] Systemes régénératifs. Astérisque 15. Société Mathématique de France 1974.
- [2] Exit systems. Ann. Prob. 3 (1975) 399-411.
- [3] Une mise au point sur les martingales locales continues définies sur un intervalle stochastique. Sémin. Prob. XI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 528. Springer, Berlin Heidelberg New York 1977, pp. 435-445.
- [4] On Lévy's downcrossing theorem and various extensions. Sémin. Prob. XV, Lect. Notes in Mathematics, vol. 850. Springer, Berlin Heidelberg New York 1981, pp. 191-205.
- [5] Ensembles régénératifs de la droite. Z.W. 63 (1983) 501-510.
- [6] On the structure of certain excursions of a Markov process. Z.W. 47 (1979) 61-67.
- [7] Excursions chevauchant un temps aléatoire quelconque. In: Hommage a P.A. Meyer et J. Neveu. Astérisque 236 (1996) 215-226.
- [8] Martingales de valeur absolue donnée, d' après Protter-Sharpe. Ann. Prob. 5 (1977) 475-481.

Malliavin, P.

- [1] Stochastic Analysis. Springer, Berlin Heidelberg New York 1997.

Malric, M.

- [1] Filtrations browniennes et balayage. Ann. I.H.P. 26 (1990) 507-540.
- [2] Densité des zéros des transformés de Lévy itérés d' un mouvement brownien. C.R. Acad. Sci. Paris; Ser. I 336 (2003) 499-504.

Mandelbrot, B.B., and Van Ness, J.W.

- [1] Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM Rev. 10 (1968) 422-437.

Mandl, P.

- [1] Analytical treatment of one-dimensional Markov process. Springer, Berlin Heidelberg New York 1968.

March, P. and Sznitman, A.S.

- [1] Some connections between excursion theory and the discrete random Schrödinger equation with random potentials, Prob. Th. Rel. Fields 67 (1987) 11-54.

Marcus, M.B. and Rosen, J.

- [1] Sample path properties of the local times of strongly symmetric Markov processes via Gaussian processes. Ann. Prob. 20, 4 (1992) 1603-1684.
- [2] Gaussian chaos and sample path properties of additive functionals of symmetric Markov processes. Ann. Prob. 24, 3 (1996) 1130-1177.
- [3] Gaussian processes and local times of symmetric Lévy processes. In: Lévy Processes, p. 67-88, eds. O. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S. Resnick, Birkhauser (2001).
- [4] New perspectives on Ray's theorem for the local times of diffusions. Ann. Prob. 312 (2003) 882-913.

Maruyama, G.

- [1] On the transition probability functions of Markov processes. Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 5 (1954) 10-20.
- [2] Continuous Markov processes and stochastic equations. Rend. Circ. Palermo 10 (1955) 48-90.

Maruyama, G., and Tanaka, H.

- [1] Ergodic property of n-dimensional Markov processes. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 13 (1959) 157-172.

Meilijson, I.

- [1] There exists no ultimate solution to Skorokhod's problem. Sémin. Prob. XVI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 920. Springer, Berlin Heidelberg New York 1982, pp. 392-399.
- [2] On the Azéma-Yor stopping time. Sémin. Prob. XVII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 986. Springer, Berlin Heidelberg New York 1983, pp. 225-226.

Méléard, S.

- [1] Application du calcul stochastique à l'étude des processus de Markov réguliers sur $[0, 1]$. Stochastics 19 (1986) 41-82.

Messulam, P., and Yor, M.

- [1] On D. Williams' "pinching method" and some applications. J. London Math. Soc. 26 (1982) 348-364.

Métivier, M.

- [1] Semimartingales: a course on stochastic processes. de Gruyter, Berlin New York 1982.

Meyer, P.A.

- [1] Processus de Markov. Lect. Notes in Mathematics, vol. 26. Springer, Berlin Heidelberg New York 1967.
- [2] Processus de Markov: La frontière de Martin. Lect. Notes in Mathematics, vol. 77. Springer, Berlin Heidelberg New York 1979.
- [3] Démonstration simplifiée d'un théorème de Knight. Sémin. Prob. V, Lect. Notes in Mathematics, vol. 191. Springer, Berlin New York 1971, pp. 191-195.
- [4] Processus de Poisson ponctuels, d'après K. Itô. Sémin. Prob. V, Lect. Notes in Mathematics, vol. 191. Springer, Berlin Heidelberg New York 1971, pp. 177-190.
- [5] Un cours sur les intégrales stochastiques. Sémin. Prob. X, Lect. Notes in Mathematics, vol. 511. Springer, Berlin Heidelberg New York 1976, pp. 245-400.
- [6] Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley. Sémin. Prob. XII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 511. Springer, Berlin Heidelberg New York 1976, pp. 125-183.
- [7] La formule d'Itô pour le mouvement brownien, d'après Brosamler. Sémin. Prob. XII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 649. Springer, Berlin Heidelberg New York 1978, pp. 763-769.

- [8] Flot d' une équation différentielle stochastique. Sémin. Prob. XV, Lect. Notes in Mathematics, vol. 850. Springer, Berlin Heidelberg New York 1981, pp. 103-117.
- [9] Sur l' existence de l' opérateur carré du champ. Sémin. Prob. XX, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1204. Springer, Berlin Heidelberg New York 1986, pp. 30-33.
- [10] Formule d' Itô généralisée pour le mouvement Brownien linéaire, d' après Föllmer, Protter, Shiryaev. Sémin. Prob. XXXI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1655. Springer, Berlin Heidelberg New York 1997, pp. 252-255.
- [11] Sur une transformation du mouvement brownien due à Jeulin et Yor. Sémin. Prob. XXVIII, Lect. Notes in Mathematics 1583, p. 98-101, Springer (1994).
- [12] Les processus stochastiques de 1950 à nos jours. In: Developments of Mathematics 1950-2000, ed. J.P. Pier, Birkhauser (2000), p. 815-818.

Meyer, P.A., Smythe, R.T., and Walsh, J.B.

- [1] Birth and death of Markov processes. Proc. Sixth Berkeley Symposium III. University of California Press, 1971, pp. 295-305.

Millar, P.W.

- [1] Martingale integrals. Trans. Amer. Math. Soc. 133 (1968) 145-166.
- [2] Stochastic integrals and processes with stationary independent increments. Proc. Sixth Berkeley Symp. 3 (1972) 307-332.

Mokobodzki, G.

- [1] Opérateur carré du champ: un contre-exemple. Sémin. Prob. XXIII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1372. Springer, Berlin Heidelberg New York 1989, pp. 324-325.

Molchanov, S.

- [1] Martin boundaries for invariant Markov processes on a solvable group. Theor. Prob. Appl. 12 (1967) 310-314.

Molchanov, S.A., and Ostrovski, E.

- [1] Symmetric stable processes as traces of degenerate diffusion processes. Theor. Prob. Appl. 14 (1) (1969) 128-131.

Monroe, I.

- [1] Processes that can be imbedded in Brownian motion. Ann. Prob. 6, 1 (1978) 42-56.
- [2] Embedding right-continuous martingales in Brownian motion, Ann. Math. Stat. 43 (1972) 1293-1311.

Mortimer, T.M. and Williams, D.

- [1] Change of measure up to a random time: theory. J. Appl. Prob. 28 (1991) 914-918.

Mountford, T.S.

- [1] Transience of a pair of local martingales. Proc. A.M.S. 103 (3) (1988) 933-938.
- [2] Limiting behavior of the occupation of wedges by complex Brownian motion. Prob. Th. Rel. Fields 84 (1990) 55-65.
- [3] The asymptotic distribution of the number of crossings between tangential circles by planar Brownian motion. J. London Math. Soc. 44 (1991) 184-192.

Mueller, C.

- [1] A unification of Strassen' s law and Lévy' s modulus of continuity. Z.W. 56 (1981) 163-179.

Nagasawa, M.

- [1] Time reversions of Markov processes. Nagoya Math. J. 24 (1964) 177-204.
- [2] Transformations of diffusions and Schrödinger processes. Prob. Th. Rel. Fields 82 (1989) 106-136.
- [3] Schrödinger equations and diffusion theory. Birkhauser 1993.
- [4] Stochastic processes in quantum physics. Birkhauser 2000.

Nakao, S.

- [1] On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations. Osaka J. Math. 9 (1972) 513-518.
- [2] Stochastic calculus for continuous additive functionals of zero energy. Zeit. für Wahr. 68 (1985) 557-578.

Neveu, J.

- [1] Processus aléatoires gaussiens. Les Presses de l' Univ. de Montréal, 1968.
- [2] Intégrales stochastiques et application. Cours 3^e Cycle. Laboratoire de Probabilités, Université de Paris VI, 1972.
- [3] Sur l' espérance conditionnelle par rapport à un mouvement Brownien. Ann. I.H.P. 12, 2 (1976) 105-110.
- [4] Bases mathématiques du calcul des probabilités, 2^eme édition. Masson, Paris 1971.

Ndumu, N.M.

- [1] The heat kernel formula in a geodesic chart and some applications to the eigenvalue problem of the 3-sphere. Prob. Th. Rel. F. 88 (3) (1991) 343-361.

Norris, J.R., Rogers, L.C.G., and Williams, D.

- [1] Self-avoiding random walk: A Brownian model with local time drift. Prob. Th. Rel. F. 74 (1987) 271-287.

Novikov, A.A.

- [1] On moment inequalities for stochastic integrals. Theor. Prob. Appl. 16 (1971) 538-541.
- [2] On an identity for stochastic integrals. Theor. Prob. Appl. 17 (1972) 717-720.

Nualart, D.

- [1] Weak convergence to the law of two-parameter continuous processes. Z.W. 55 (1981) 255-269.
- [2] The Malliavin calculus and related topics. Springer, Berlin Heidelberg New York 1995.

Obloj, J.

- [1] The Skorokhod problem and its offsprings. Preprint Arkiv. (2004).

Obloj, J. and Yor, M.

- [1] An explicit solution to Skorokhod problem for the age of Brownian excursions and Azéma martingale. Stoch. Proc. App. 110 (2003) 93-110.

Ocone, D.L.

- [1] A symmetry characterization of conditionally independent increment martingales. In: D. Nualart and M. Sanz (eds.) Proceedings of the San Felice workshop on Stochastic Analysis (1991). Birkhauser 1993, 147-167.
- [2] Malliavin's calculus and stochastic integral representations of functionals of diffusion processes. Stochastics and Stochastic Reports 12 (1984) 161-185.

O'Connell, N. and Yor, M.

- [1] A representation for non-colliding random walks. Elec. Comm. Prob. 7 (2002) 1-12.

Orey, S.

- [1] Two strong laws for shrinking Brownian tubes. Z.W. 63 (1983) 281-288.

Orey, S., and Pruitt, W.

- [1] Sample functions of the N-parameter Wiener process. Ann. Prob. 1 (1973) 138-163.

Orey, S., and Taylor, S.J.

- [1] How often on a Brownian path does the law of the iterated logarithm fail? Proc. London Math. Soc. 28 (1974) 174-192.

Oshima, Y., and Takeda, M.

- [1] On a transformation of symmetric Markov processes and recurrence property. Lect. Notes in Mathematics, vol. 1250. Proceedings Bielefeld. Springer, Berlin Heidelberg New York 1987.

Ouknine, Y., and Rutkowski, M.

- [1] Local times of functions of continuous semimartingales. Stochastic Anal. and Applications 13 (1995) 211-232.

Pages, H.

- [1] Personal communication.

Paley, R., Wiener, N., and Zygmund, A.

- [1] Note on random functions. Math. Z. 37 (1933) 647-668.

Papanicolaou, G., Stroock, D.W., and Varadhan, S.R.S.

- [1] Martingale approach to some limit theorems. Proc. 1976. Duke Conf. On Turbulence. Duke Univ. Math. Series III, 1977.

Parthasarathy, K.R.

- [1] Probability measures on metric spaces. Academic Press, New York 1967.

Pauwels, E.J., and Rogers, L.C.G.

- [1] Skew-product decompositions of Brownian motions. Contemp. Math. 73 (1988) 237-262.

Pazy, A.

- [1] Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations. (Applied Mathematical Sciences, vol. 44). Springer, Berlin Heidelberg New York 1983.

Perkins, E.

- [1] A global intrinsic characterization of Brownian local time. Ann. Prob. 9 (1981) 800-817.
- [2] The exact Hausdorff measure of the level sets of Brownian motion. Z.W. 58 (1981) 373-388.
- [3] Local time is a semimartingale. Z.W. 60 (1982) 79-117.
- [4] Weak invariance principles for local time. Z.W. 60 (1982) 437-451.
- [5] Local time and pathwise uniqueness for stochastic differential equations. Sémin. Prob. XVI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 920. Springer, Berlin Heidelberg New York 1982, pp. 201-208.
- [6] On the Hausdorff dimension of Brownian slow points. Z.W. 64 (1983) 369-399.
- [7] The Cereteli-Davis solution to the H^1 -embedding problem and an optimal embedding in Brownian motion. Seminar on stochastic processes. Birkhauser, Basel 1985, pp. 172-223.

Petit, F.

- [1] Quelques extensions de la loi de l' arcsinus. C.R. Acad. Sci. Paris 315 Série I (1992) 855-858.

Pierre, M.

- [1] Le problème de Skorokhod: une remarque sur la démonstration d' Azéma-Yor. Sémin. Prob. XIV, Lect. Notes in Mathematics, vol. 784. Springer, Berlin Heidelberg New York 1980, pp. 392-396.

Pitman, J.W.

- [1] One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process. Adv. Appl. Prob. 7 (1975) 511-526.
- [2] A note on L ; maximal inequalities. Sémin. Prob. XV, Lect. Notes in Mathematics, vol. 850. Springer, Berlin Heidelberg New York 1981, pp. 251-258.
- [3] Stationary excursions. Sémin. Prob. XVI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1247. Springer, Berlin Heidelberg New York 1987, pp. 289-302.
- [4] Lévy systems and path decompositions. Seminar on stochastic processes. Birkhäuser, Basel 1981, pp. 79-110.

- [5] Cyclically stationary Brownian local time processes. *Prob. Th. Rel. Fields* 106 (1996) 299-329.
- [6] The SDE solved by local times of a Brownian excursion or bridge derived from the height profile of a random tree or forest. *Ann. Prob.* 27 (1999) 261-283.
- [7] The distribution of local times of a Brownian bridge. *Sém. Prob. XXXIII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1709. Springer, Berlin Heidelberg New York 1999, pp. 388-394.

Pitman, J.W., and Rogers, L.C.G.

- [1] Markov functions. *Ann. Prob.* 9 (1981) 573-582.

Pitman, J.W., and Yor, M.

- [1] Bessel processes and infinitely divisible laws. In: D. Williams (ed.) *Stochastic integrals. Lect. Notes in Mathematics*, vol. 851. Springer, Berlin Heidelberg New York 1981.
- [2] A decomposition of Bessel bridges. *Z.W.* 59 (1982) 425-457.
- [3] Sur une décomposition des ponts de Bessel. In: *Functional Analysis in Markov processes. Lect. Notes in Mathematics*, vol. 923. Springer, Berlin Heidelberg New York 1982, pp. 276-285.
- [4] The asymptotic joint distribution of windings of planar Brownian motion. *Bull. Amer. Math. Soc.* 10 (1984) 109-111.
- [5] Asymptotic laws of planar Brownian motion. *Ann. Prob.* 14 (1986) 733-779.
- [6] Some divergent integrals of Brownian motion. In: D. Kendall (ed.) *Analysis and Geometric Stochastics, Supplement to Adv. Appl. Prob.* (1986) 109-116.
- [7] Further asymptotic laws of planar Brownian motion. *Ann. Prob.* 17 (3) (1989) 965—1011.
- [8] Arcsine laws and interval partitions derived from a stable subordinator. *Proc. London Math. Soc.* 65 (3) (1992) 326-356.
- [9] Dilatations d' espace-temps, réarrangements des trajectoires browniennes, et quelques extensions d' une identité de Knight. *C.R. Acad. Sci. Paris, t 316, Série I* (1993) 723-726.
- [10] Decomposition at the maximum for excursions and bridges of one dimensional diffusions. In: N. Ikeda, S. Watanabe, M. Fukushima, H. Kunita (eds.) *Itô's stochastic calculus and Probability Theory*. Springer, Berlin Heidelberg New York 1996, pp. 293-310.
- [11] Quelques identités en loi pour les processus de Bessel. In: *Hommage a P.A. Meyer et J. Neveu. Astérisque* 236, Soc. Math. France 1996.
- [12] Ranked Functionals of Brownian excursions. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t 326, Série I*, January 1998, 93-97.
- [13] Path decompositions of a Brownian bridge related to the ratio of its maximum and amplitude. *Studia Sci. Math. Hung.* 35 (1999) 457-474.

Port, S.C. and Stone, C.J.

- [1] *Brownian motion and classical potential theory*. Academic Press, New York 1978.

Pratelli, M.

- [1] Le support exact du temps local d' une martingale continue. *Sém. Prob. XIII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 721. Springer, Berlin Heidelberg New York 1979, pp. 126-131.

Priouret, P.

- [1] Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques. *École d' Ete de Probabilités de Saint-Flour III, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 390. Springer, Berlin Heidelberg New York 1974, pp. 38-113.

Priouret, P. and Yor, M.

- [1] Processus de diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}$ et mesures quasi-invariantes sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Astérisque* 22-23 (1975) 247-290.

Protter, Ph.

- [1] Stochastic Integration and Differential Equations. In: App. of Maths. vol. 21, 2nd edition (2003), Springer.
- [2] A partial introduction to financial asset pricing. Stoch. Proc. App. 91 (2001) 169-203.

Protter, Ph. and Sharpe, M.J.

- [1] Martingales with given absolute value. Ann. Prob. 7 (1979) 1056-1058.

Rao, M.

- [1] Brownian Motion and Classical Potential Theory. Aarhus University, Lect. Notes Series 47, February 1977.

Rauscher, B.

- [1] Some remarks on Pitman's theorem. Sémin. Prob. XXXI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1655. Springer, Berlin Heidelberg New York 1997, pp. 266-271.

Ray, D.B.

- [1] Sojourn times of a diffusion process. II. J. Math. 7 (1963) 615-630.

Rebolledo, R.

- [1] La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi des processus. Mémoire de la S.M.F. 62 (1979)
- [2] Central limit theorems for local martingales. Z.W. 51 (1980) 269-286.

Resnick, S.I.

- [1] Inverses of extremal processes. J. Appl. Prob. (1974) 392-405.

Revuz, D.

- [1] Mesures associées aux fonctionnelles additives de Markov I. Trans. Amer. Math. Soc. 148 (1970) 501-531.
- [2] Lois du tout ou rien et comportement asymptotique pour les probabilités de transition des processus de Markov. Ann. L.H.P. 19 (1983) 9-24.
- [3] Markov chains. North-Holland, Amsterdam New York 1984.
- [4] Une propriété ergodique des chaînes de Harris et du mouvement Brownien linéaire (unpublished),

Robbins, H., and Siegmund, D.

- [1] Boundary crossing probabilities for the Wiener process and sample sums. Ann. Math. Stat. 41 (1970) 1410-1429,

Rogers, L.C.G.

- [1] Williams characterization of the Brownian excursion law: proof and applications. Sémin. Prob. XV, Lect. Notes in Mathematics, vol. 850. Springer, Berlin Heidelberg New York 1981, pp. 227-250.
- [2] Characterizing all diffusions with the 2M — X property. Ann. Prob. 9 (1981) 561-572.
- [3] Itô excursions via resolvents. Z.W. 63 (1983) 237-255.
- [4] A guided tour through excursions. Bull. London Math. Soc. 21 (1989) 305-341.
- [5] The joint law of the maximum and terminal value of a martingale. Prob. Th. Rel. F. 95 (4) (1993) 451-466.
- [6] Continuity of martingales in the Brownian excursion filtration. Prob. Th. Rel. F. 76 (1987) 291-298.

Rogers, L.C.G., and Walsh, J.B.

- [1] The intrinsic local time sheet of Brownian motion. Prob. Th. Rel. F. 88 (1991) 363-379.
- [2] The exact +-variation of a process arising from Brownian motion. Stochastics and Stoch. Reports 51 (1994) 267-291.
- [3] $A(t, B)$ is not a semi-martingale. Seminar on Stoch. processes 1990. Prog. in Prob. 24 (1991) 275-283. Birkhauser.

[4] Local time and stochastic area integrals. *Ann. Prob.* 19 (1991) 457-482.

Rogers, L.C.G., and Williams, D.

[1] Diffusions, Markov processes and Martingales, vol. 2: Ito calculus. Wiley and Sons, New York 1987.

[2] Diffusions, Markov processes and Martingales, vol. 1: Foundations. Wiley and sons, New York 1994.

Root, D.H.

[1] The existence of certain stopping times on Brownian motion. *Ann. Math. Stat.* 40 (1969) 715-718.

Rosen, J.

[1] A local time approach to the self-intersection of Brownian paths in space. *Comm. Math. Phys.* 88 (1983) 327-338.

Rosen, J. and Yor, M.

[1] Tanaka formulae and renormalization for triple intersections of Brownian motion in the plane. *Ann. Prob.* 19 (1991) 142-159.

Roth, J.P.

[1] Opérateurs dissipatifs et semi-groupes dans les espaces de fonctions continues. *Ann. Inst. Fourier* 26 (1976) 1-97.

Royette, B., Vallois, P., and Yor, M.

[1] Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by normalized exponential weights. *Studia Math. Hung.* 2004.

Ruiz de Chavez, J.

[1] Le théorème de Paul Lévy pour des mesures signées. *Sém. Prob. XVIII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1059. Springer, Berlin Heidelberg New York 1984, pp. 245-255.

Saisho, Y., and Tanemura, H.

[1] Pitman type theorem for one-dimensional diffusion processes. *Tokyo J. Math.* 18 (2) (1990) 429-440.

Sato, K.I.

[1] Lévy processes and infinitely divisible distributions. *Camb. Univ. Press* (1999).

Schilder, M.

[1] Asymptotic formulas for Wiener integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.* 125 (1966) 63-85.

Schwartz, L.

[1] Le mouvement brownien sur $\mathbb{R}^N$, en tant que semi-martingale dans S_N . *Ann. I.H.P.* 21, 1 (1985) 15-25.

Seshadri, V.

[1] Exponential models, Brownian motion and independence. *Can. J. of Stat.* 16 (1988) 209-221.

[2] The inverse Gaussian distribution. *Clarendon Press, Oxford* 1993.

Sharpe, M.J.

[1] Local times and singularities of continuous local martingales. *Sém. Prob. XIV, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 784. Springer, Berlin Heidelberg New York 1980, pp. 76-101.

[2] Some transformation of diffusions by time reversal. *Ann. Prob.* 8 (1980) 6, 1157—1162.

[3] General theory of Markov processes. *Academic Press, New York* 1989.

Shepp, L.A.

[1] Radon-Nikodym derivatives of Gaussian measures. *Ann. Math. Stat.* 37 (1966) 321-354.

[2] On the integral of the absolute value of the pinned Wiener process. *Ann. Prob.* 10 (1982) 234-239.

[3] The joint density of the maximum and its location for a Wiener process with drift. *J. Appl. Prob.* 16 (1979) 423-427.

Sheppard, P.

- [1] On the Ray-Knight Markov properties of local times. J. London Math. Soc. 31 (1985) 377-384.

Shi, Z.

- [1] Lim inf behaviours of the windings and Lévy's stochastic areas of planar Brownian motion. Sémin. Prob. XXVIII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1583. Springer, Berlin Heidelberg New York 1994, pp. 122-137.
- [2] Sinai's walk via stochastic calculus. In: Milieux Aléatoires. Panoramas et Synthèses n° 12, 2001, p. 53-74.

Shiga, T., and Watanabe, S.

- [1] Bessel diffusion as a one-parameter family of diffusion processes. Z.W. 27 (1973) 37-46.

Shyriaev, A.N., and Cherny, A.

- [1] Some distributional properties of a Brownian motion with drift and an extension of P. Lévy's theorem. Theory Prob. Appl. 44 (2) (1999) 412-418.

Skorokhod, A.

- [1] Stochastic equation for diffusion processes in a bounded region, I and II. Theor. Prob. Appl. 6 (1961) 264-274; 7 (1962) 3-23.
- [2] Studies in the theory of random processes. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1965.
- [3] On a generalization of a stochastic integral. Theor. Prob. and Appl. 20 (1975) 219-233.

Simon, B.

- [1] Functional integration and quantum physics. Academic Press, New York 1979.

Smith, L., and Diaconis, P.

- [1] Honest Bernoulli excursions. J. Appl. Prob. 25 (3) (1988) 464-477.

Song, S.Q., and Yor, M.

- [1] Inégalités pour les processus self-similaires arrêtés à un temps quelconque. Sémin. Prob. XXI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1247. Springer, Berlin Heidelberg New York 1987, pp. 230-245.

Spitzer, F.

- [1] Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958) 187-197.
- [2] Recurrent random walk and logarithmic potential. Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. II. University of California 1961, pp. 515-534.
- [3] Electrostatic capacity in heat flow and Brownian motion. Z.W. 3 (1964) 110-121. [Thèse papers are reprinted in: Durrett, R. and Kesten, H. (eds.), Random walks, Brownian motion and interacting particle systems. Birkhauser 1992.]

Stoll, A.

- [1] Self-repellent random walks and polymer measures in two dimensions. Doctoral dissertation. Bochum, 1985.

Strassen, V.

- [1] An invariance principle for the law of the iterated logarithm. Z.W. 3 (1964) 211-226.

Stricker, C.

- [1] Quasi-martingales, martingales locales, semi-martingales et filtrations. Z.W. 39 (1977) 55-63.
- [2] Sur un théorème de H.J. Engelbert et J. Hess. Stochastics 6 (1981) 73-77.

Stricker, C. and Yor, M.

- [1] Calcul stochastique dépendant d'un paramètre. Z.W. 45 (1978) 109-133.

Stroock, D.W.

- [1] On the growth of stochastic integrals. Z.W. 18 (1971) 340-344.
- [2] Topics in stochastic differential equations. Tata Institute, Bombay 1982.
- [3] Some applications of stochastic calculus to partial differential equations. École d' Été de Probabilités de Saint-Flour XI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 976. Springer, Berlin Heidelberg New York 1983, pp. 268-382.
- [4] An introduction to the theory of large deviations. (Universitext). Springer, Berlin Heidelberg New York 1984.
- [5] Probability Theory. An analytic view. Cambridge Univ. Press 1994.
- [6] Markov Processes from K. Itô's perspective. Princeton Univ. Press 2003.

Stroock, D.W. and Varadhan, S.R.S.

- [1] Multidimensional diffusion processes. Springer, Berlin Heidelberg New York 1979.

Stroock, D.W. and Yor, M.

- [1] On extremal solutions of martingale problems. Ann. Sci. École Norm. Sup. 13 (1980) 95-164.
- [2] Some remarkable martingales. Sémin. Prob. XV, Lect. Notes in Mathematics, vol. 850. Springer, Berlin Heidelberg New York 1981, pp. 590-603.

Sussman, H.J.

- [1] An interpretation of stochastic differential equations as ordinary differential equations which depend on the sample point. Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977) 296-298.
- [2] On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations. Ann. Prob. 6 (1978) 19-41.

Sznitman, A.S. and Varadhan, S.R.S.

- [1] A multidimensional process involving local time. Proc. Th. Rel. F. 71 (1986) 553-579.

Takaoka, K.

- [1] On the martingales obtained by an extension due to Saisho, Tanemura and Yor of Pitman's theorem. Sémin. Prob. XX XI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1655. Springer, Berlin Heidelberg New York 1997, pp. 256-265.

Tanaka, H.

- [1] Note on continuous additive functionals of the 1-dimensional Brownian path. Z.W. 1 (1963) 251-257.
- [2] Time reversal of random walks in one dimension. Tokyo J. Math. 12 (1989) 159-174.
- [3] Time reversal of random walks in $\mathbb{R}^d$. Tokyo J. Math. 13 (1990) 375-389.
- [4] Diffusion processes in random environments. Proc. ICM (S.D. Chatterji, ed.). Birkhäuser, Basel 1995, pp. 1047-1054. [Selected papers of H. Tanaka have appeared in Stochastic Processes, World Scientific (2002), eds. M. Maejima, T. Shiga.]

Taylor, S.J.

- [1] The α -dimensional measure of the graph and the set of zeros of a Brownian path. Proc. Cambridge Phil. Soc. 51 (1955) 265-274.

Toby, E. and Werner, W.

- [1] On windings of multidimensional reflected Brownian motion. Stoch. and Stoch. Re-ports, vol. 55 (1995), pp. 315-327.

Trotter, H.F.

- [1] A property of Brownian motion paths. III. J. Math. 2 (1958) 425-433.

Truman, A.

- [1] Classical mechanics, the diffusion heat equation and Schrödinger equation. J. Math. Phys. 18 (1977) 2308-2315.

Truman, A. and Williams, D.

- [1] A generalized Arcsine law and Nelson's mechanics of one-dimensional time-homogeneous diffusions. In: M. Pinsky (ed.) *Diffusion processes and related problems in Analysis I*. Birkhauser, Boston 1990, pp. 117-135.

Tsirel'son, B.

- [1] An example of a stochastic differential equation having no strong solution. *Theor. Prob. Appl.* 20 (1975) 427-430.
- [2] Triple points: from non-brownian filtrations to harmonic measures. *Geom. Funct. Anal. (GAFA)* 7 (1997) 1071-1118.
- [3] Within and beyond the reach of Brownian innovations. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Doc. Math., extra vol. III*, 1998, pp. 311-320.
- [4] Non classical Brownian motions, stochastic flows, continuous products I. *Arkiv / PR / 0402431 / (Feb. 2004)*.

Uppman, A.

- [1] Sur le flot d'une équation différentielle stochastique. *Sém. Prob. XVI, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 920. Springer, Berlin Heidelberg New York 1982, pp. 268-284.

Vallois, P.

- [1] Le problème de Skorokhod sur R : une approche avec le temps local. *Sém. Prob. XVII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 986. Springer, Berlin Heidelberg New York 1983, pp. 227-239.
- [2] Sur la loi du maximum et du temps local d'une martingale continue uniformément intégrable. *Proc. London Math. Soc.* 3 (69) (1994) 399-427.
- [3] Sur la loi conjointe du maximum et de l'inverse du temps local du mouvement brownien: application à un théorème de Knight. *Stochastics and Stochastics Reports* 35 (1991) 175-186.
- [4] Une extension des théorèmes de Ray-Knight sur les temps locaux browniens. *Prob. Th. Rel. Fields* 88 (1991) 443-482.
- [5] Diffusion arrêtée au premier instant où l'amplitude atteint un niveau donné. *Stoch. and Stoch. Reports* 43 (1993) 93-115.
- [6] Decomposing the Brownian path via the range process. *Stoch. Proc. and their Appl.* 55 (1995) 211-226.

Van den Berg, M. and Lewis, J.T.

- [1] Brownian motion on a hypersurface. *Bull. London Math. Soc.* 17 (1985) 144-150.

Van Schuppen, J.H. and Wong, E.

- [1] Transformations of local martingales under a change of law. *Ann. Prob.* 2 (1974) 879-888.

Ventsel, A.D.

- [1] Rough limit theorems on large deviations for Markov processes 1 and 2. *Theory Prob. Appl.* 21 (1976) 227-242 and 499-512.

Ventsel, A.D. and Freidlin, M.I.

- [1] On small random perturbations of dynamical systems. *Russ. Math. Surv.* 25 (1970) 1-55.
- [2] Some problems concerning stability under small random perturbations. *Theor. Prob. Appl.* 17 (1972) 269-283.

Vershik, A.

- [1] Decreasing sequence of measurable partitions and their applications. *Soviet Math. Dokl.* 11, 4 (1970) 1007-1011.
- [2] The theory of decreasing sequences of measurable partitions. *Saint-Petersburg Math. J.* 6 (1994) 705-761.

Vervaat, W.

- [1] A relation between Brownian bridge and Brownian excursion. *Ann. Prob.* 7 (1) (1979) 141-149.

Volkonski, V.A.

- [1] Random time changes in strong Markov processes. *Theor. Prob. Appl.* 3 (1958) 310-326.

von Weizsäcker, H.

- [1] Exchanging the order of taking suprema and countable intersection of σ -algebras. *Ann. I.H.P.* 19 (1983) 91-100.

Vostrikova, L. and Yor, M.

- [1] Some invariance properties (of the laws) of Ocone's martingales. *Sém. Prob. XXXIV, Lect. Notes in Mathematics* 1729, pp. 417-431, Springer (2000).

Vuolle-Apiala, J. and Graversen, S.E.

- [1] Duality theory for self-similar processes. *Ann. I.H.P.* 23, 4 (1989) 323-332.

Walsh, J.B.

- [1] A property of conformal martingales. *Sém. Prob. XI, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 581. Springer, Berlin Heidelberg New York 1977, pp. 490-492.
- [2] Excursions and local time. *Astérisque* 52-53, Temps locaux (1978) 159-192.
- [3] A diffusion with a discontinuous local time. *Astérisque* 52-53, Temps locaux (1978) 37-45.
- [4] The local time of the Brownian sheet. *Astérisque* 52-53, Temps locaux (1978) 47-62.
- [5] Downcrossings and the Markov property of local time. *Astérisque* 52-53, Temps locaux (1978) 89-116.
- [6] Propagation of singularities in the Brownian sheet. *Ann. Prob.* 10 (1982) 279-288.
- [7] Stochastic integration with respect to local time. *Seminar on Stochastic Processes* 1989. Birkhauser 1983, pp. 237-302.
- [8] Some remarks on $A(t, B)$. *Sém. Prob. XXVII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1557. Springer, Berlin Heidelberg New York 1993, pp. 173-176.

Wang, A.T.

- [1] Quadratic variation of functionals of Brownian motion. *Ann. Prob.* 5 (1977) 756-769.
- [2] Generalized Itô's formula and additive functionals of the Brownian path. *Z.W.* 41 (1977) 153-159.

Warren, J.

- [1] Branching processes, the Ray-Knight theorem and sticky Brownian motion. *Sém. Prob. XXXI, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1655. Springer, Berlin Heidelberg New York 1997, pp. 1-15.
- [2] On the joining of sticky Brownian motion. *Sém. Prob. XXXIII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1709. Springer, Berlin Heidelberg New York 1999, pp. 257-266.

Warren, J. and Yor, M.

- [1] The Brownian burglar: conditioning Brownian motion by its local time process. *Sém. Prob. XXXII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1686. Springer, Berlin Heidelberg New York 1998, pp. 328-342.

Watanabe, S.

- [1] On time-inversion of one-dimensional diffusion processes. *Z.W.* 31 (1975) 115-124.
- [2] A limit theorem for sums of i.i.d. random variables with slowly varying tail probability. P.R. Krishnaia (ed.) *Multivariate analysis*, vol. 5. North-Holland, Amsterdam 1980, pp. 249-261.
- [3] Generalized Arcsine laws for one-dimensional diffusion processes and random walks. In: M. Cranston and M. Pinsky (eds.) *Proceedings of Symposia in pure mathematics*, vol. 57. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1995) 157-172,
- [4] Bilateral Bessel diffusion processes with drift and time inversion. To appear (1998).
- [5] Asymptotic windings of Brownian motion paths on Riemann surfaces. *Acta Appl. Math.* 63 (2000), n° 1-3, 441-464

- [6] The existence of a multiple spider martingale in the natural filtration of a certain diffusion in the plane. *Sém. Prob. XXXIII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1709. Springer, Berlin Heidelberg New York 1999, pp. 277-290.
- [7] Invariants of one-dimensional diffusion processes and applications. *Korean Math. Soc.* 35 (1998), n° 3, 637-658.

Weber, M.

- [1] Analyse infinitésimale de fonctions aléatoires. *École d'été de Saint-Flour XI-1981, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 976. Springer, Berlin Heidelberg New York 1983, pp. 383-465.

Weinryb, S.

- [1] Etude d'une équation différentielle stochastique avec temps local. *Sém. Prob. XVII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 986. Springer, Berlin Heidelberg New York 1983, pp. 72-77.

Weinryb, S. and Yor, M.

- [1] Le mouvement brownien de Lévy indexé par $R^?$ comme limite centrale de temps locaux d'intersection. *Sém. Prob. XXII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1321. Springer, Berlin Heidelberg New York 1988, pp. 225-248.

Wendel, J.W.

- [1] Hitting spheres with Brownian motion. *Ann. Prob.* 8 (1980) 164-169.
- [2] An independence property of Brownian motion with drift. *Ann. Prob.* 8 (1980) 600-601.

Werner, W.

- [1] Girsanov's transformation for SLE (k, p) processes, intersection exponents and hiding exponents. *Ann. Sci. Toulouse* (2004).

Widder, D.V.

- [1] *The Heat Equation*. Academic Press 1975.

Wiener, N.

- [1] Differential space. *J. Math. Phys.* 2 (1923) 132-174.
- [2] The homogeneous chaos. *Amer. J. Math.* 60 (1930) 897-936.

Williams, D.

- [1] Markov properties of Brownian local time. *Bull. Amer. Math. Soc.* 76 (1969) 1035—1036.
- [2] Decomposing the Brownian path. *Bull. Amer. Math. Soc.* 76 (1970) 871-873.
- [3] Path decomposition and continuity of local time for one dimensional diffusions I. *Proc. London Math. Soc.* (3) 28 (1974) 738-768.
- [4] A simple geometric proof of Spitzer's winding number formula for 2-dimensional Brownian motion. University College, Swansea (1974).
- [5] On a stopped Brownian motion formula of H.M. Taylor. *Sém. Prob. X, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 511. Springer, Berlin Heidelberg New York 1976, pp. 235-239.
- [6] On Lévy's downcrossing theorem. *Z.W.* 40 (1977) 157-158.
- [7] *Diffusions, Markov processes and Martingales*, vol. 1: Foundations. Wiley and Sons, New York 1979,
- [8] Conditional excursion theory. *Sém. Prob. XIII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 721. Springer, Berlin Heidelberg New York 1979, pp. 490-494.
- [9] Brownian motion and the Riemann zeta function. In: D. Welsh and G. Grimmett (eds.) *Disorder in Physical Systems. Festschrift for J. Hammersley*. Oxford 1990, pp. 361-372.
- [10] *Probability with Martingales*. Cambridge Univ. Press 1990.
- [11] *Weighing the Odds*. Camb. Univ. Press (2001).
- [12] Some basic theorems on Harnesses. In: *Stoch. Analysis (A Tribute to the memory of Rollo Davidson)*, p. 349-363, Wiley (1973).
- [13] Brownian motion as a Harness. Unpublished manuscript 1980.

- [14] A “non-stopping” time with the optional stopping property. *Bull. London Math. Soc.* 34 (2002) 610-612.

Wong, E.

- [1] The construction of a class of stationary Markoff processes. In: *Stoch. Processes in Math. Physics and Engineering. Proc. of Symposia in Applied Maths.*, vol. XVI. Am. Math. Soc. 1964, pp. 264-276.

Wong, E. and Zakai, M.

- [1] The oscillation of stochastic integrals. *Z.W.* 4 (1965) 103-112.

Yamada, T.

- [1] On a comparison theorem for solutions of stochastic differential equations. *J. Math. Tokyo Univ.* 13 (1973) 497-512.
- [2] On some representations concerning the stochastic integrals. *Proba. and Math. Statistics* 4, 2 (1984) 153-166.
- [3] On the fractional derivative of Brownian local times. *J. Math. Kyoto Univ.* 21, 1 (1985) 49-58.
- [4] On some limit theorems for occupation times of one-dimensional Brownian motion and its continuous additive functionals locally of zero energy. *J. Math. Kyoto Univ.* 26, 2 (1986) 309-222.
- [5] Representations of continuous additive functionals of zero energy via convolution type transforms of Brownian local time and the Radon transform. *Stochastics and Stochastics Reports* 46, 1 (1994) 1-15.
- [6] Principal values of Brownian local times and their related topics. In: N. Ikeda, S. Watanabe, M. Fukushima, H. Kunita (eds.) *Itô's stochastic calculus and Probability theory*. Springer, Berlin Heidelberg New York 1996, pp. 413-422.

Yamada, T. and Ogura, Y.

- [1] On the strong comparison theorem for the solutions of stochastic differential equation. *Z.W.* 56 (1981) 3-19.

Yamada, T. and Watanabe, S.

- [1] On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *J. Math. Kyoto Univ.* 11 (1971) 155-167.

Yamazaki, Y.

- [1] On limit theorems related to a class of “winding-type” additive functionals of complex Brownian motion. *J. Math. Kyoto Univ.* 32 (4) (1992) 809-841.

Yan, J.A.

- [1] A propos de l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles. *Sém. Prob. XVI, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 920. Springer, Berlin Heidelberg New York 1982, pp. 338-347.
- [2] Sur un théorème de Kazamaki-Sekiguchi. *Sém. Prob. XVII, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 986. Springer, Berlin Heidelberg New York 1983, pp. 121-122.

Yan, J.A. and Yoeurp, C.

- [1] Représentation des martingales comme intégrales stochastiques de processus optionnels. *Sém. Prob. X, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 511. Springer, Berlin Heidelberg New York 1976, pp. 422-431.

Yoeurp, C.

- [1] Compléments sur les temps locaux et les quasi-martingales. *Astérisque* 52-53, Temps locaux (1978) 197-218.
- [2] Sur la dérivation des intégrales stochastiques. *Sém. Prob. XIV, Lect. Notes in Mathematics*, vol. 784. Springer, Berlin Heidelberg New York 1980, pp. 249-253.
- [3] Contribution au calcul stochastique. Thèse de doctorat d'état, Université de Paris VI, 1982.
- [4] Théorème de Girsanov généralisé et grossissement de filtrations. In: *Grossissement de filtrations: exemples et applications*. *Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1118. Springer, Berlin Heidelberg New York 1985, pp. 172-196.

Yor, M. (ed.)

- [1] Exponential functionals and principal values related to Brownian motion. Bib. Revista Mat. Ibero-Americana, 1997.

Yor, M.

- [1] Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles. Sémin. Prob. X, Lect. Notes in Mathematics, vol. 511. Springer, Berlin Heidelberg New York 1976, pp. 481-500.
- [2] Sur quelques approximations d' intégrales stochastiques. Sémin. Prob. XI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 528. Springer, Berlin Heidelberg New York 1977, pp. 518-528.
- [3] Formule de Cauchy relative à certains lacets browniens. Bull. Soc. Math. France 105 (1977) 3-31.
- [4] Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales. Astérisque 52-53, Temps locaux (1978) 23-36.
- [5] Un exemple de processus qui n' est pas une semi-martingale. Astérisque 52-53 (1978) 219-221.
- [6] Sous-espaces denses dans L^1 et H^1 et représentation des martingales. Sémin. Prob. XII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 649. Springer, Berlin Heidelberg New York 1978, pp. 264-309.
- [7] Les filtrations de certaines martingales du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$. Sémin. Prob. XIII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 721. Springer, Berlin Heidelberg New York 1979, pp. 427-440.
- [8] Sur le balayage des semi-martingales continues. Sémin. Prob. XIII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 721. Springer, Berlin Heidelberg New York 1979, pp. 453-471.
- [9] Sur l' étude des martingales continues extrémales. Stochastics 2 (1979) 191-196.
- [10] Loi de l' indice du lacet brownien et distribution de Hartman-Watson. Z.W. 53 (1980) 71-95.
- [11] Remarques sur une formule de P. Lévy. Sémin. Prob. XIV, Lect. Notes in Mathematics, vol. 784. Springer, Berlin Heidelberg New York 1980, pp. 343-346.
- [12] Sur un processus associé aux temps locaux browniens. Ann. Sci. Univ. ClermontFerrand II, 20 (1982) 140-148.
- [13] Sur la transformée de Hilbert des temps locaux browniens et une extension de la formule d' Itô. Sémin. Prob. XVI, Lect. Notes in Mathematics, vol. 920. Springer, Berlin Heidelberg New York 1982, pp. 238-247.
- [14] Le drap brownien comme limite en loi de temps locaux linéaires. Sémin. Prob. XVII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 986. Springer, Berlin Heidelberg New York 1983, pp. 89-105.
- [15] Une inégalité optimale pour le mouvement brownien arrêté à un temps quelconque. CR. Acad. Sci. Paris, Sér. A 296 (1983) 407-409.
- [16] A propos de l' inverse du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$). Ann. I.H.P. 21, 1 (1985) 27-38.
- [17] Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d' intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. Sémin. Prob. XIX, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1123. Springer, Berlin Heidelberg New York 1985, pp. 350-365.
- [18] Sur la représentation comme intégrale stochastique des temps locaux du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$. Sémin. Prob. XX, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1204. Springer, Berlin Heidelberg New York 1986, pp. 543-552.
- [19] De nouveaux résultats sur l' équation de Tsirel'son. C.R. Acad. Sci. Paris, Série I 309, (1989) 511-514.
- [20] Remarques sur certaines constructions des mouvements browniens fractionnaires. Sémin. Prob. XXII, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1321. Springer, Berlin Heidelberg New York 1988, pp. 217-224.
- [21] On stochastic areas and averages of planar Brownian motion. J. Phys. A. Math. Gen. 22 (1989) 3049-3057.
- [22] Etude asymptotique des nombres de tours de plusieurs mouvements browniens complexes corrélés. In: Durrett, R. and Kesten, H. (eds.), Random walks, Brownian motion and interacting particle systems. Birkhäuser, Basel 1992, pp. 441-455.
- [23] Some aspects of Brownian motion. Part I: Some special functionals. Lectures in Mathematics ETH

- Zürich. Birkhauser 1992. Part II: Some recent martingale problems. Lect. Notes in Maths. ETH Zürich. Birkhauser 1997.
- [24] The distribution of Brownian quantiles. J. Appl. Prob. 32 (1995) 405-416.
- [25] Random Brownian scaling and some absolute continuity relationships. In: E. Bolthausen, M. Dozzi, F. Russo (eds.) Progress in probability, vol. 36. Birkhauser (1995) 243-252,
- [26] Inégalités de martingales continues arrêtées à un temps quelconque, I, IT. In: Grossissements de filtrations: exemples et applications. Lect. Notes in Mathematics, vol. 1118. Springer, Berlin Heidelberg New York 1985, pp. 110-171.
- [27] Sur certaines fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien réel. J. Appl. Prob. 29 (1992) 202-208.
- [28] On some exponential functionals of Brownian motion. Adv. App. Prob. 24 (1992) 509-531.
- Zaremba, P.**
- [1] Skorokhod problem-elementary proof of the Azéma-Yor formula. Prob. Math. Stat. 6 (1985) 11-17.
- Zvonkin, A.K.**
- [1] A transformation of the phase space of a process that removes the drift. Math. USSR Sbornik 2 (1974) 129-149,

符号索引

使用说明。本索引的页码沿用英文第三版原页码，便于与原著互查；符号的说明已译为中文。
中文讲义本身可直接使用 PDF 全文检索定位符号。

$\mathcal{A}, \mathcal{A}^+$	有限变差过程空间	原页 119
a.s., a.e.	几乎必然、几乎处处	
$\mathbb{B}$	布朗片	原页 39
BM	布朗运动	原页 19
BM^d	d 维布朗运动	原页 20
$\text{BM}^d(x)$	从 x 出发的 d 维布朗运动	原页 20
BB	布朗桥	原页 37
$\text{BES}^\delta, \text{BES}^\delta(x), \text{BES}^{(\nu)}$	维数为 δ 、指标为 ν 的 Bessel 过程	原页 445
$\text{BESQ}^\delta, \text{BESQ}^{(\nu)}$	Bessel 过程的平方	原页 439, 440
$\text{BES}_a^\delta(x, y)$	Bessel 桥	原页 463
$\text{BESQ}_a^\delta(x, y)$	Bessel 桥的平方	原页 463
BMO, BMO_p	有界平均振荡鞅空间	原页 75
CAF	连续加性泛函	原页 401
Cont. semi. mart.	连续半鞅	原页 127
$C_k(E)$	E 上具有紧支集的连续函数空间	
$C_0(E)$	E 上在无穷远处趋于 0 的连续函数空间	原页 88
$C^{p,q}$	乘积空间上的相应可微函数空间	
DDS	Dambis–Dubins–Schwarz 定理	原页 181
$\mathcal{E}$	Borel 集的 σ -代数及 Borel 函数空间	
$\mathcal{E}_+$	非负 Borel 函数空间	
$b\mathcal{E}$	有界 Borel 函数空间	
$\mathcal{E}^*$	普遍可测函数空间	
$\mathcal{E}(M), \mathcal{E}^f, \mathcal{E}^\lambda(M)$	指数鞅	原页 148, 149
$e(f, g), e_x(\sigma, b)$	随机微分方程	原页 366
F.V.	有限变差	原页 5, 119
$\mathcal{F}_T$	停时 T 的 σ -代数	原页 44
$\mathcal{F}_t^X$	由 X 生成的右连续完备滤过	原页 98
$\mathcal{F}_t^\nu$	$\mathcal{F}_t$ 关于 ν 的完备化	原页 93
$g_t, g_t(x)$	方差为 t 的中心高斯随机变量的密度	
$g_t(\omega), d_t(\omega)$	t 以前的最后零点、 t 以后的最先零点	原页 239, 260
$\mathbb{H}^2$	L^2 -有界鞅空间	原页 129
H^2	L^2 -有界连续鞅空间	原页 129
H_0^2	从 0 出发的 L^2 -有界连续鞅空间	原页 129
H^p, H^1	鞅空间	原页 59
$\mathcal{I}$	不变事件的 σ -代数	原页 423
$K \cdot M, K \cdot X, \int_0^t K_s \, dX_s$	随机积分	原页 138, 140
$L^2(M), \mathcal{L}^2(M), L_{\text{loc}}^2(M)$	过程空间	原页 137, 140
$L_t^a(X)$	X 的局部时族	原页 222
$L \log L$	鞅的 $L \log L$ 类	原页 58
loc. mart.	局部鞅	原页 123
$\log_2 = \log \log$	迭代对数	原页 56
M^f	鞅加性泛函	原页 149, 284
$M^*, M_t^* = \sup_{s \leq t} M_s $	双边上确界	原页 54
$N, Nf, \hat{N}, M, mN$	核的记号	原页 80
$\mathcal{O}$	可选 σ -代数	原页 172

ODE	常微分方程	原页 382
OU	Ornstein–Uhlenbeck 过程	原页 37
$\mathcal{P}$	可料 σ -代数	原页 171
PRP	可料表示性质	原页 209
P_t	半群	原页 80
P_T	时刻 T 的 X 的分布	原页 104
$p_t^\delta(x, y)$	Bessel 半群的密度	原页 446
$P_{x,y}^{\delta,a}$	Bessel 桥的分布	原页 463
P_x^δ	Bessel 过程的分布	原页 445
PPP	Poisson 点过程	原页 474
Q_x^δ	Bessel 过程平方的分布	原页 440
$Q_{x,y}^{\delta,a}$	Bessel 桥平方的分布	原页 463
$q_t^\delta(x, y)$	Bessel 平方半群的密度	原页 441
R	游程的寿命	原页 480
r.v.	随机变量	原页 2
SDE	随机微分方程	原页 366
S	布朗运动的上确界过程: $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$	原页 54
sgn	符号函数	原页 222
t.f.	转移函数	原页 80
U, U_δ	游程空间	原页 480
$\mathcal{U}, \mathcal{U}_\delta$	游程空间的 σ -代数	原页 480
W	Wiener 测度	原页 35
$\mathbf{W}, \mathbf{W}^d$	Wiener 空间	原页 35
$\mathcal{X}$	路径空间	原页 500
$X^{(c)}$	缩放过程	原页 535
Z	布朗运动的零点集	原页 109
θ_t, θ_T	平移算子	原页 36
$\sigma(X_t : t \in T)$	由随机变量 X_t ($t \in T$) 生成的 σ -代数	原页 1
Δ, δ	墓地状态	原页 84
$ \Delta $	分割 Δ 的模	原页 4
$\pi(x, a, b)$	鞅问题	原页 296
ν_A	与加性泛函 A 相伴的测度	原页 410
γ_a	参数为 a 的 Gamma 随机变量	原页 12
$\beta_{a,b}$	参数为 a, b 的 Beta 随机变量	原页 12
τ_s	与零点局部时相伴的时间变换	原页 241
$\langle M, M \rangle, \langle X, X \rangle$	尖括号过程	原页 120, 124, 125, 128
$\langle M, N \rangle, \langle X, Y \rangle$	尖括号过程 (续)	原页 120, 124, 125, 128
$\stackrel{(d)}{=}$	同分布	原页 10
$\xrightarrow{\text{f.d.}}$	有限维分布意义下收敛	原页 516
$P\text{-}\lim$	依概率收敛	原页 10
$\mathbf{1}_A$	集合 A 的示性函数	原页 1
$\triangleleft$	在 $\mathcal{F}_t$ 上绝对连续	原页 325

主题索引

使用说明。本索引按英文原著的字母次序编排，但索引词已译为中文；页码是英文第三版原页码，用于与原著互查。中文讲义中的位置可用 PDF 全文检索。

A

吸收点 84, 97
作用泛函 342
适应过程 42
加性泛函 401
 连续加性泛函 401
 强加性泛函 402
 可积加性泛函 410
 σ -可积加性泛函 410
 符号加性泛函 419
反正弦律
 第一反正弦律 112
 第二反正弦律 242
面积
 随机面积 196, 396
随机积分的结合律 139
渐近 σ -代数 99
原子 76
增广
 滤过的通常增广 45
Azéma 鞅 505

B

Bachelier 方程 268
后向
 方程 282
 积分 144
Bernstein 不等式 153
Bessel
 桥 463
 过程 445
 平方过程 440
Itô 测度的 Bismut 描述 502
Blumenthal 零一律 95
BMO 鞅 75
Bougerol 恒等式 388
边界
 入口边界 306
 自然边界 306
尖括号过程
 两个连续局部鞅的尖括号 125
 两个半鞅的尖括号 128
桥
 布朗桥 37, 154, 384
 Bessel 桥 463
 Bessel 平方桥 463

 作为条件布朗运动的布朗桥 41
 伪布朗桥 248
布朗
 运动 19
 d 维运动 20
 标准线性运动 19
 桥 37, 154, 384
 滤过 98
 带漂移运动 73, 352
 片 39
 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动 97
 偏斜布朗运动 87, 292
 游程 480
 反射布朗运动 86, 238
 被杀布朗运动 87
 布朗徘徊 493
 球面上的布朗运动 530
Burkholder–Davis–Gundy 不等式 160

C

càdlàg (右连续有左极限) 34
Cameron–Martin
 公式 371, 445
 空间 339
典范
 过程 34
 实现 92
Cauchy
 随机变量 13
 过程 116
墓地状态 84
Chacon–Ornstein 定理 548
链式法则 6
Wiener 混沌 201, 207
Chapman–Kolmogorov 方程 80
Poisson 点过程的特征测度 475
Chernoff 不等式 292
Chung–Jacobi–Riemann 恒等式 509
Clark 公式 341
比较定理 393
共形
 局部鞅 189
 布朗运动的共形不变性 190
连续过程 17
收敛
 弱收敛 10

分布收敛	516
有限维分布意义下收敛	516
依分布收敛	10
余可选时间	313
协方差	294
Cramér 变换	343

D

Dambis 定理	181
首达集	46
布朗运动的大偏差	345
布朗运动的不可微性	32
扩散	
过程	294
系数	294
离散	
点过程	471
σ -离散点过程	471
分布收敛	516
被控制过程	162
Donsker 定理	518
Doob 不等式	54
下穿	60
Doss-Süssmann 方法	382
带漂移的布朗运动	73, 352
漂移系数	294
Dubins-Schwarz 定理	181
Dubins 不等式	66
Dynkin 算子	310

E

弹性布朗运动	408
能量	527
扩大	
概率空间的扩大	182
滤过的扩大	363
入口	
边界	306
律	494
等价过程	18
遍历定理	427, 548
布朗运动的遍历定理	548
过度	
测度	409
函数	423
游程	
区间	109
过程	480
归一化游程	486
爆炸判据	383
指数	
公式	476
局部鞅	148
不等式	153
滞留点	97
延拓	
Kolmogorov 延拓定理	34
极端	

鞅	213
概率测度	210
过程	406

F

Fefferman 不等式	76
Feller	
过程	90
半群	88
强 Feller 性质	423
Feynman-Kac 公式	358
带滤过空间	41
滤波	175, 207
滤过	41
布朗滤过	98
完备滤过	45
自然滤过	42
右连续滤过	42
通常增广	45
细拓扑	98
有限维分布	18
布朗运动的有限维分布	23
有限维分布意义下的收敛	516
Fokker-Planck 方程	282
前向方程	282
分数布朗运动	38
随机积分的 Fubini 定理	175

G

Galmarino 检验	47
Garsia-Neveu 引理	170
高斯	
鞅	133, 186
随机变量	11
过程	36
测度	16
空间	12
Markov 过程	86
Gebelein 不等式	205
生成元	
无穷小生成元	281
扩展无穷小生成元	285
Girsanov	
定理	327
变换	329
偶	329
好- λ 不等式	164
Gronwall 引理	543

H

Hardy 不等式	75, 155
热过程	20
Hermite 多项式	151
Hölder 性质	
布朗运动	28, 30
半鞅	187
局部时	237
滞留	

点	97
指数滞留时间	97
齐次	
Markov 过程	81
转移函数	80
超可压缩性	206

I

Markov 过程的像	87
独立增量	96
不可分辨	19
指标	
稳定律的指标	115
Bessel 过程的指标	440
不等式	
Burkholder–Davis–Gundy	160
指数	153
Chernoff	292
Dubins	66
Bernstein	153
Fefferman	76
Gebelein	205
Doob	54
好- λ	164
Hardy	155
Kunita–Watanabe	127
极大	53
无穷可分	115
无穷小生成元	281
扩展生成元	285
初始分布	81
革新过程	175
瞬时反射	307
随机积分	138, 140, 141
分部积分公式	146
不变	
测度	409
函数	423
σ -代数	423
事件	423
不规则点	98
迭代对数律	56
Itô	
积分	138
公式	147
Itô–Tanaka 公式	223
过程	298
游程测度	482

K–L

Kailath–Segal 恒等式	159
Kazamaki 判据	331
核	79
被杀过程	100
被杀布朗运动	87
Knight 定理	183
渐近版本	524
恒等式	504

Kolmogorov 连续性判据	19
Kunita–Watanabe 不等式	127
Lamperti 关系	452
Langevin 方程	378
局部鞅的大数定律	186
布朗运动的大偏差	345
末次离开时刻	408
律	
过程的律	34
依分布收敛	10
依分布唯一性	367
随机积分的 Lebesgue 定理	142
Lévy	
刻画定理	150, 158
测度	115
Khintchine 公式	115
过程	96
$L \log L$ 类	58
极限商定理	427
线性连续 Markov 过程	300
线性随机方程	377
局部化	123
布朗运动的局部极值	113
局部鞅	123
指数局部鞅	148
纯鞅	212
标准局部鞅	213
共形局部鞅	189
局部时	
连续半鞅的局部时	222
布朗运动的局部时	238
局部有界过程	140

M–N

Markov	
过程	81
性质	83, 94
强 Markov 性质	202
布朗运动的强 Markov 性质	102, 156
线性 Markov 过程	300
Markov 型	84
鞅	51
鞅问题	296
主公式	475
正最大值原理	283
布朗徘徊	493
测度	
与加性泛函相伴的测度	410
Poisson 点过程的特征测度	475
Itô 测度	482
Lévy 测度	115
Wiener 测度	35
可测过程	126
修正	19
Lévy 连续模	30
单调类定理	2
自然边界	306
Newton 势	100

归一化游程	486
Novikov 判据	332
O-P	
占用	
时间	20, 401
时间公式	224
平方场算子	351
可选	
σ -代数	172
过程	172
投影	173
停止定理	69
Ornstein-Uhlenbeck 过程	37
d 维过程	360
正交鞅	145
Papanicolaou-Stroock-Varadhan 定理	526
参数	
OU 过程的参数	37
Poisson 过程的参数	58, 471
路径分解	255, 318
逐路径唯一性	367
Pitman 定理	253
点过程	471
离散点过程	471
σ -离散点过程	471
布朗运动的增点	461
Poisson	
过程	471
点过程	474
$(\mathcal{F}_t)$ -Poisson 点过程	474
极集	
布朗运动的极函数	24
极集	191
极化	124
势核	100
Newton 势核	100
可料	47
σ -代数	47, 171
过程	171
投影	173
停止	76
停时	172
表示性质	209
过程	
适应过程	42
càdlàg 过程	34
连续过程	17
递增过程	119
有限变差过程	119
局部有界过程	140
可测过程	126
可选过程	172
可料过程	171
渐进可测过程	44
Prokhorov 判据	10, 516
伪布朗桥	248
纯鞅	212

Q-R

二次变差	28
布朗运动的二次变差	29
局部鞅的二次变差	124
半鞅的二次变差	128
Wiener 测度的拟不变性	339
拟左连续性	101
拟鞅	134
Ray-Knight 定理	454
布朗运动的常返性	58, 192
常返	
Harris 常返过程	425
过程	424
集合	424
约化高斯随机变量	11
反射	
瞬时反射	307
缓慢反射	307
反射布朗运动	86, 239
反射原理	105
带反射的随机微分方程	385
正则	
线性 Markov 过程	300
点	98
再生核 Hilbert 空间	21, 39, 339
预解方程	89

S

尺度函数	302
Bessel 过程的尺度函数	442, 446
尺度不变性	
布朗运动	21
局部时	244
Bessel 过程	446
截面定理	172
半鞅	127
布朗片	39
OU 过程的大小	37
偏斜布朗运动	292
斜积	194
Skorokhod 引理	239
缓慢反射	308
时空 Markov 过程	85
速度测度	305
稳定	
随机变量	115
过程	116
对称稳定过程	116
H_0^1 的稳定子空间	174
标准	
布朗运动	19, 97
局部鞅	213
状态空间	15
平稳	
过程	36
独立增量	96
随机	

积分	138, 140, 141	反向	312
微分方程	366	停止	42
面积	196, 396	暂留	
过程	15	集合	424
停止过程	44	过程	424
停止		转移	
时间	42	函数	80
可选停止	69	概率	80
Strassen 迭代对数律	346	陷阱	97
Stratonovich 积分	144	Tsirelson 例子	392
强		上穿	60
Markov 性质	102	变差	5
扩展 Markov 性质	111	有限变差过程	119
解	367	二次变差	
次 Markov	84	布朗运动的 p -变差	33
下鞅	51	向量值局部鞅与半鞅	147
次序过程	117	Ventcel-Freidlin 估计	343
上鞅	51	版本	18
局部时的支集	235	Watanabe 过程	504
对称局部时	234	弱收敛	10
对称稳定过程	116	随机微分方程的弱解	367
T-Z		Wiener	
Tanaka 与 Itô-Tanaka 公式	223	测度	35
终止时间	491	空间	35
时间		混沌	201, 207
变换	180	Williams	
进入时刻	43	路径分解定理	318
击中时刻	43	Itô 测度的描述	499
反演	359	Zvonkin 方法	384