

布朗运动、鞅与随机微积分

独立中文讲义

Jean-François Le Gall

依据 2016 年英文版翻译、校订并重新排版

中文译校与排版：Yuguang XIAO（肖煜光）

原著信息 (Springer, Graduate Texts in Mathematics 274):

<https://doi.org/10.1007/978-3-319-31089-3>

阅读说明

本书是原著的独立中文版本，不采用中英对照形式。正文保持原书的章节结构、编号、论证顺序和数学记号；能够由原文与数学推导共同确认的原稿错误，会在正文中改正，并用“校订注”说明。为帮助中国本科生阅读而补充的背景或术语说明，均用“阅读提示”标明，不与作者原文混写。

适合的读者与预备知识。 本书适合已经掌握测度与积分、概率论基础和实分析基本知识的高年级本科生及研究生。第 1、2 章从高斯过程和布朗运动出发；第 3–5 章建立连续时间鞅、半鞅和随机积分；第 6–9 章讨论马尔可夫过程、偏微分方程、随机微分方程以及局部时。

练习解答来源。 本版在相应练习之后加入蓝色“解答”框。解答依据 Te-Chun Wang 于 2021 年整理的 *Solutions to Exercises on Le Gall's Book: Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus* 翻译、核对并重新排印；这些解答不是 Le Gall 原书正文。该解答集列出本书 61 道练习（不含练习 5.34），但其中练习 9.22 只有标题、没有解答正文。本版为 9.22 补写了独立解答，并对来源解答中的疏漏作了数学订正。为便于检索，解答编号与原书练习编号保持一致。

记号与阅读约定

- $\mathcal{B}(E)$ 表示拓扑空间 E 的 Borel σ -代数；“几乎必然”缩写为“a.s.”时，均相对于当前概率测度而言。
- $\mathcal{L}(X)$ 表示随机变量 X 的分布； $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ 表示均值为 m 、方差为 σ^2 的一维高斯分布。
- 内积写作 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ，随机变量空间中的范数通常写作 $\|\cdot\|_p$ 。条件期望中的竖线 $|$ 读作“关于……取条件期望”。

目录

阅读说明	ii
第一章 高斯随机变量与高斯过程	1
1.1 高斯随机变量	1
1.2 高斯向量	2
1.3 高斯过程与高斯空间	5
1.4 高斯白噪声	9
练习	11
注记与评述	16
第二章 布朗运动	17
2.1 预布朗运动	17
2.2 样本路径的连续性	20
2.3 布朗样本路径的性质	24
2.4 布朗运动的强马尔可夫性质	27
练习	31
注释与评述	36
第三章 滤过与鞅	37
3.1 滤过与随机过程	37
3.2 停时及其相关的 σ -代数	39
3.3 连续时间鞅与上鞅	43
3.4 可选停时定理	51
练习	57
注记与评述	62
第四章 连续半鞅	63
4.1 有限变差过程	63
4.1.1 有限变差函数	63
4.1.2 有限变差过程	66
4.2 连续局部鞅	68
4.3 连续局部鞅的二次变差	71
4.4 两个连续局部鞅的括号	77
4.5 连续半鞅	80

第五章 随机积分	88
5.1 随机积分的构造	88
5.1.1 关于在 L^2 中有界鞅的随机积分	88
5.1.2 关于局部鞅的随机积分	95
5.1.3 关于半鞅的随机积分	97
5.1.4 随机积分的收敛	98
5.2 Itô 公式	101
5.3 Itô 公式的若干推论	105
5.3.1 布朗运动的 Lévy 刻画	105
5.3.2 连续鞅作为时间变换后的布朗运动	106
5.3.3 Burkholder–Davis–Gundy 不等式	109
5.4 鞅的随机积分表示	112
5.5 Girsanov 定理	116
5.6 Girsanov 定理的若干应用	121
练习	123
注记与评论	137
第六章 马尔可夫过程的一般理论	138
6.1 一般定义与存在性问题	138
6.2 Feller 半群	143
6.3 样本路径的正则性	148
6.4 强马尔可夫性质	151
6.5 三类重要的 Feller 过程	154
6.5.1 有限状态空间上的跳过程	154
6.5.2 Lévy 过程	158
6.5.3 连续状态分枝过程	159
练习	161
注释与评述	169
第七章 布朗运动与偏微分方程	170
7.1 布朗运动与热方程	170
7.2 布朗运动与调和函数	171
7.3 球内的调和函数与 Poisson 核	176
7.4 布朗运动的暂留性与常返性	179
7.5 平面布朗运动与全纯函数	181
7.6 平面布朗运动的渐近律	183
练习	186
注释与评述	192

第八章 随机微分方程	193
8.1 动机与一般定义	193
8.2 Lipschitz 情形	195
8.3 随机微分方程的解作为马尔可夫过程	201
8.4 随机微分方程的几个例子	204
8.4.1 Ornstein–Uhlenbeck 过程	205
8.4.2 几何布朗运动	205
8.4.3 Bessel 过程	205
练习	207
注释与评述	214
第九章 局部时	215
9.1 Tanaka 公式与局部时的定义	215
9.2 局部时的连续性与广义 Itô 公式	218
9.3 局部时的逼近	224
9.4 一维布朗运动的局部时	226
9.5 Kallianpur–Robbins 律	230
练习	231
注释与评述	239
英文版勘误说明	240
附录 A1 单调类引理	241
附录 A2 离散鞅	243
参考文献	246
主题索引 (原英文版页码)	249

第一章 高斯随机变量与高斯过程

高斯随机过程在理论概率和各种应用模型中都占有重要地位。本章先回顾高斯随机变量与高斯向量的基本事实，随后讨论高斯空间和高斯过程，并建立高斯情形下关于独立性与条件化的基本性质。最后，我们引入高斯白噪声；下一章将用它给出布朗运动的一种简洁构造。

1.1 高斯随机变量

本章始终考虑定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量。对于下文某些存在性结论，需要适当选取这个概率空间。对每个实数 $p \geq 1$ ，记 $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ （无歧义时简写为 L^p ）为满足 $|X|^p$ 可积的全体实随机变量所成的空间；按通常约定，几乎必然相等的随机变量视为同一元素。空间 L^p 配备通常的 L^p 范数。

若实随机变量 X 的分布关于 Lebesgue 测度的密度为

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

则称 X 为**标准高斯随机变量**（或标准正态随机变量）。此时 X 的复 Laplace 变换为

$$\mathbb{E}[e^{zX}] = e^{z^2/2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

为得到这个公式，同时验证复 Laplace 变换确有定义，先取 $z = \lambda \in \mathbb{R}$ 。配方可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\lambda X}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} e^{-x^2/2} dx \\ &= e^{\lambda^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-\lambda)^2/2} dx = e^{\lambda^2/2}. \end{aligned}$$

这个计算说明 $\mathbb{E}[e^{zX}]$ 对每个 $z \in \mathbb{C}$ 都有定义，并且给出 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数。由解析延拓，实轴上成立的恒等式 $\mathbb{E}[e^{zX}] = e^{z^2/2}$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$ 仍成立。

取 $z = i\xi$ ($\xi \in \mathbb{R}$)，得到 X 的特征函数

$$\mathbb{E}[e^{i\xi X}] = e^{-\xi^2/2}.$$

另一方面，当 $\xi \rightarrow 0$ 时，

$$\mathbb{E}[e^{i\xi X}] = 1 + i\xi \mathbb{E}[X] + \cdots + \frac{(i\xi)^n}{n!} \mathbb{E}[X^n] + O(|\xi|^{n+1}).$$

只要 X 属于所有 L^p ($1 \leq p < \infty$)，这个展开对每个整数 $n \geq 1$ 都成立；标准高斯随机变量正满足这一条件。比较系数即得

$$\mathbb{E}[X] = 0, \quad \mathbb{E}[X^2] = 1,$$

并且对每个整数 $n \geq 0$ ，

$$\mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad \mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0.$$

设 $\sigma > 0$ 、 $m \in \mathbb{R}$ 。若实随机变量 Y 满足下列三个等价条件中的任意一个，就称 Y 服从 $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ 分布：

- (i) $Y = \sigma X + m$, 其中 X 是标准高斯随机变量;
(ii) Y 的分布具有密度

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right);$$

- (iii) Y 的特征函数满足

$$\mathbb{E}\left[e^{i\xi Y}\right] = \exp\left(im\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

此时

$$\mathbb{E}[Y] = m, \quad \text{Var}(Y) = \sigma^2.$$

作为延伸, 若 $Y = m$ 几乎必然成立, 就称 Y 服从退化分布 $\mathcal{N}(m, 0)$; 此时条件 (iii) 仍然成立。

独立高斯随机变量之和。 设 $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ 、 $Y' \sim \mathcal{N}(m', \sigma'^2)$, 且 Y, Y' 相互独立。由特征函数相乘立即得到

$$Y + Y' \sim \mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2).$$

命题 1.1。 设 $(X_n)_{n \geq 1}$ 是实随机变量序列, 且 $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ 。假设 X_n 在 L^2 中收敛于 X 。则:

- (i) $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, 其中 $m = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$ 、 $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$;
(ii) 对每个 $1 \leq p < \infty$, $X_n \rightarrow X$ 也在 L^p 中成立。

注。 命题中“在 L^2 中收敛”的假设可以减弱为依概率收敛; 事实上, 仅假设 $(X_n)_{n \geq 1}$ 依分布收敛, 便足以推出 (i)。这一点留作练习。

证明。 (i) L^2 收敛蕴含

$$m_n = \mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}[X], \quad \sigma_n^2 = \text{Var}(X_n) \rightarrow \text{Var}(X).$$

令 $m = \mathbb{E}[X]$ 、 $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ 。对每个 $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{i\xi X}] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{i\xi X_n}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(im_n\xi - \frac{\sigma_n^2\xi^2}{2}\right) = \exp\left(im\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right). \end{aligned}$$

因此 $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ 。

- (ii) 设 N 是标准高斯随机变量。 X_n 与 $\sigma_n N + m_n$ 同分布; 又因 (m_n) 、 (σ_n) 有界, 所以

$$\sup_n \mathbb{E}[|X_n|^q] < \infty, \quad q \geq 1.$$

从而

$$\sup_n \mathbb{E}[|X_n - X|^q] < \infty, \quad q \geq 1.$$

固定 $p \geq 1$ 。序列 $Y_n = |X_n - X|^p$ 依概率收敛于 0; 取上式中的 $q = 2p$, 可知 (Y_n) 在 L^2 中有界, 因而一致可积。于是 $Y_n \rightarrow 0$ 在 L^1 中成立, 也就是 $X_n \rightarrow X$ 在 L^p 中成立。 $\square$

1.2 高斯向量

设 E 是 d 维 Euclidean 空间。虽然 E 与 $\mathbb{R}^d$ 同构, 也可以直接取 $E = \mathbb{R}^d$ 并使用通常的内积, 但在抽象 Euclidean 空间中表述会更方便。记 $\langle u, v \rangle$ 为 E 中的内积。若取值于 E 的随机

变量 X 满足：对每个 $u \in E$ ，实随机变量 $\langle u, X \rangle$ 都是高斯随机变量，则称 X 为**高斯向量**。例如，当 $E = \mathbb{R}^d$ ，若 $X_1, \dots, X_d$ 是相互独立的高斯随机变量，则独立高斯随机变量之和的性质说明 $X = (X_1, \dots, X_d)$ 是高斯向量。

设 X 是取值于 E 的高斯向量。存在 $m_X \in E$ 和 E 上的非负二次型 q_X ，使对每个 $u \in E$ ，

$$\mathbb{E}[\langle u, X \rangle] = \langle u, m_X \rangle, \quad \text{Var}(\langle u, X \rangle) = q_X(u).$$

事实上，取 E 的一组标准正交基 $(e_1, \dots, e_d)$ ，并写成

$$X = \sum_{j=1}^d X_j e_j, \quad X_j = \langle e_j, X \rangle.$$

各 X_j 都是高斯随机变量。于是上式中的向量和二次型可取为

$$m_X = \sum_{j=1}^d \mathbb{E}[X_j] e_j = \mathbb{E}[X]$$

以及（当 $u = \sum_{j=1}^d u_j e_j$ 时）

$$q_X(u) = \sum_{j,k=1}^d u_j u_k \text{Cov}(X_j, X_k).$$

由于

$$\langle u, X \rangle \sim \mathcal{N}(\langle u, m_X \rangle, q_X(u)),$$

高斯向量 X 的特征函数为

$$\mathbb{E}[\exp(i\langle u, X \rangle)] = \exp\left(i\langle u, m_X \rangle - \frac{1}{2}q_X(u)\right). \quad (1.1)$$

命题 1.2. 在上述假设下，随机变量 $X_1, \dots, X_d$ 相互独立，当且仅当协方差矩阵

$$(\text{Cov}(X_j, X_k))_{1 \leq j, k \leq d}$$

是对角矩阵；等价地，当且仅当二次型 q_X 在基 $(e_1, \dots, e_d)$ 下为对角型。

证明. 若 $X_1, \dots, X_d$ 相互独立，则它们的协方差矩阵显然是对角矩阵。反过来，若该矩阵为对角矩阵，则对每个 $u = \sum_{j=1}^d u_j e_j \in E$ ，

$$q_X(u) = \sum_{j=1}^d \lambda_j u_j^2, \quad \lambda_j = \text{Var}(X_j).$$

由 (1.1)，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{j=1}^d u_j X_j\right)\right] &= \prod_{j=1}^d \exp\left(i u_j \mathbb{E}[X_j] - \frac{1}{2} \lambda_j u_j^2\right) \\ &= \prod_{j=1}^d \mathbb{E}[e^{i u_j X_j}]. \end{aligned}$$

联合特征函数分解为各边缘特征函数之积，故 $X_1, \dots, X_d$ 相互独立。 $\square$

与二次型 q_X 相联系的, 是唯一满足

$$q_X(u) = \langle u, \gamma_X(u) \rangle, \quad u \in E,$$

的对称线性映射 $\gamma_X : E \rightarrow E$ 。它在基 $(e_1, \dots, e_d)$ 下的矩阵正是 $(\text{Cov}(X_j, X_k))_{1 \leq j, k \leq d}$, 但 γ_X 的定义当然与基的选择无关。 γ_X 是非负的, 即它的所有特征值都非负。

为简化表述, 以下主要考虑中心高斯向量, 即 $m_X = 0$ 的情形; 下面的结果很容易推广到非中心情形。

定理 1.3。

- (i) 若 γ 是 E 上的非负对称线性映射, 则存在高斯向量 X , 使 $\gamma_X = \gamma$ 。
- (ii) 设 X 是中心高斯向量。取一组使 γ_X 对角化的标准正交基 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$, 并设 $\gamma_X \varepsilon_j = \lambda_j \varepsilon_j$, 其中

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_d.$$

这里 $r = \text{rank}(\gamma_X)$ 。则

$$X = \sum_{j=1}^r Y_j \varepsilon_j,$$

其中 $Y_1, \dots, Y_r$ 是相互独立的中心高斯随机变量, 且 $\text{Var}(Y_j) = \lambda_j$ 。因此, 若 P_X 表示 X 的分布, 则 P_X 的拓扑支集是由 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ 张成的向量空间。此外, P_X 关于 E 上的 Lebesgue 测度绝对连续, 当且仅当 $r = d$; 在这种情形下, X 的密度为

$$p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det \gamma_X}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x, \gamma_X^{-1}(x) \rangle\right).$$

证明。 (i) 取 E 的一组使 γ 对角化的标准正交基 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$, 使 $\gamma(\varepsilon_j) = \lambda_j \varepsilon_j$ 。再取相互独立的中心高斯随机变量 $Y_1, \dots, Y_d$, 满足 $\text{Var}(Y_j) = \lambda_j$, 并令

$$X = \sum_{j=1}^d Y_j \varepsilon_j.$$

若 $u = \sum_{j=1}^d u_j \varepsilon_j$, 则

$$q_X(u) = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^d u_j Y_j \right)^2 \right] = \sum_{j=1}^d \lambda_j u_j^2 = \langle u, \gamma(u) \rangle.$$

故 $\gamma_X = \gamma$ 。

(ii) 设 $Y_1, \dots, Y_d$ 是 X 在基 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ 下的坐标。它们的协方差矩阵就是 γ_X 在该基下的矩阵, 因而为对角矩阵。由命题 1.2, $Y_1, \dots, Y_d$ 相互独立。若 $j \in \{r+1, \dots, d\}$, 则 $\mathbb{E}[Y_j^2] = 0$, 故 $Y_j = 0$ 几乎必然成立。

因为 $X = \sum_{j=1}^r Y_j \varepsilon_j$ 几乎必然成立, 所以 $\text{supp } P_X$ 包含于 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ 张成的子空间。反过来, 若

$$O = \left\{ u = \sum_{j=1}^r \alpha_j \varepsilon_j : a_j < \alpha_j < b_j, 1 \leq j \leq r \right\},$$

则

$$\mathbb{P}(X \in O) = \prod_{j=1}^r \mathbb{P}(a_j < Y_j < b_j) > 0.$$

这足以说明 $\text{supp } P_X$ 恰为上述子空间。

若 $r < d$ ，由 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ 张成的子空间的 d 维 Lebesgue 测度为零，所以 P_X 关于 Lebesgue 测度是奇异的。现设 $r = d$ ，并令 $Y = (Y_1, \dots, Y_d) \in \mathbb{R}^d$ 。向量等距同构

$$\varphi(y_1, \dots, y_d) = \sum_{j=1}^d y_j \varepsilon_j$$

把 Y 映为 X 。对任意非负 Borel 函数 g ，写 $y = (y_1, \dots, y_d)$ ，则

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X)] &= \mathbb{E}[g(\varphi(Y))] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} g(\varphi(y)) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \frac{y_j^2}{\lambda_j}\right) \frac{dy_1 \cdots dy_d}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_d}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det \gamma_X}} \int_{\mathbb{R}^d} g(\varphi(y)) \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \varphi(y), \gamma_X^{-1}(\varphi(y)) \rangle\right) dy_1 \cdots dy_d \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det \gamma_X}} \int_E g(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x, \gamma_X^{-1}(x) \rangle\right) dx. \end{aligned}$$

最后一个等式使用了： E 上的 Lebesgue 测度按定义是 $\mathbb{R}^d$ 上 Lebesgue 测度在任一向量等距同构下的像测度。第二个等式使用了 $Y_1, \dots, Y_d$ 的独立性；第三个等式使用

$$\langle \varphi(y), \gamma_X^{-1}(\varphi(y)) \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^d y_j \varepsilon_j, \sum_{j=1}^d \frac{y_j}{\lambda_j} \varepsilon_j \right\rangle = \sum_{j=1}^d \frac{y_j^2}{\lambda_j}.$$

所需密度公式随即得到。 □

1.3 高斯过程与高斯空间

从现在起直到本章结束，我们只考虑中心高斯随机变量，并经常省略“中心”二字。

定义 1.4. (中心) 高斯空间是 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 的闭线性子空间，并且其中每个元素都是中心高斯随机变量。

例如，若 $X = (X_1, \dots, X_d)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的中心高斯向量，则 $\{X_1, \dots, X_d\}$ 张成的向量空间是高斯空间。

定义 1.5. 设 $(E, \mathcal{E})$ 是可测空间， T 是任意指标集。取值于 E 、以 T 为指标集的 **随机过程**，是取值于 E 的随机变量族 $(X_t)_{t \in T}$ 。若未明确指定 $(E, \mathcal{E})$ ，则默认 $E = \mathbb{R}$ 、 $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。

本书始终以 $\mathcal{B}(F)$ 表示拓扑空间 F 的 Borel σ -代数。大多数时候，指标集 T 将取为 $\mathbb{R}_+$ 或实轴上的某个区间。

定义 1.6. 若实值随机过程 $(X_t)_{t \in T}$ 的任意有限线性组合都是中心高斯随机变量，则称 $(X_t)_{t \in T}$ 为 **(中心) 高斯过程**。

命题 1.7. 若 $(X_t)_{t \in T}$ 是高斯过程，则由随机变量 X_t ($t \in T$) 在 L^2 中生成的闭线性子空间是一个高斯空间，称为过程 X **生成的高斯空间**。

证明。由命题 1.1，中心高斯随机变量的 L^2 极限仍是中心高斯随机变量。结论立即成立。□

下面讨论高斯空间中的独立性。先给出一个记号。

定义 1.8。设 $\mathcal{H}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一族随机变量。由 $\mathcal{H}$ 生成的 σ -代数，记作 $\sigma(\mathcal{H})$ ，是使 $\mathcal{H}$ 中所有随机变量都可测的最小 Ω 上的 σ -代数。若 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的一族子集，也用 $\sigma(\mathcal{C})$ 表示包含 $\mathcal{C}$ 中所有集合的最小 σ -代数。

下一个定理表明，在高斯空间中，独立性在某种意义上等价于正交性。这是高斯分布非常特殊的性质。

定理 1.9。设 H 是中心高斯空间， $(H_i)_{i \in I}$ 是 H 的一族线性子空间。则子空间 H_i ($i \in I$) 在 L^2 中两两正交，当且仅当 σ -代数 $\sigma(H_i)$ ($i \in I$) 相互独立。

注。各子空间 H_i 必须包含于同一个高斯空间 H ，这一点至关重要。设 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ，另取与 X 独立的随机变量 ε ，满足

$$\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}.$$

令 $X_1 = X$ 、 $X_2 = \varepsilon X$ 。二者都服从 $\mathcal{N}(0, 1)$ ，而且

$$\mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[\varepsilon] \mathbb{E}[X^2] = 0.$$

然而 X_1, X_2 显然不独立，因为 $|X_1| = |X_2|$ 。在这个例子中，尽管两个坐标分别是高斯随机变量， (X_1, X_2) 却不是 $\mathbb{R}^2$ 中的高斯向量。

证明。先设 $\sigma(H_i)$ ($i \in I$) 相互独立。若 $i \neq j$ 、 $X \in H_i$ 、 $Y \in H_j$ ，则

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y] = 0,$$

所以各 H_i 两两正交。

反过来，设各 H_i 两两正交。根据无穷多个 σ -代数相互独立的定义，只需证明：若 $i_1, \dots, i_p \in I$ 两两不同，则 $\sigma(H_{i_1}), \dots, \sigma(H_{i_p})$ 相互独立。为此，只需验证：固定

$$\xi_1^1, \dots, \xi_{n_1}^1 \in H_{i_1}, \quad \dots, \quad \xi_1^p, \dots, \xi_{n_p}^p \in H_{i_p},$$

向量

$$(\xi_1^1, \dots, \xi_{n_1}^1), \dots, (\xi_1^p, \dots, \xi_{n_p}^p)$$

相互独立。事实上，对每个 j ，形如

$$\{\xi_1^j \in A_1, \dots, \xi_{n_j}^j \in A_{n_j}\}$$

的事件构成一个对有限交封闭、并生成 $\sigma(H_{i_j})$ 的集合类；所需结论可由附录 A1 中的标准单调类论证得到。

对每个 $j \in \{1, \dots, p\}$ ，在 L^2 中由 $\xi_1^j, \dots, \xi_{n_j}^j$ 张成的线性子空间内取一组标准正交基 $(\eta_1^j, \dots, \eta_{m_j}^j)$ 。向量

$$(\eta_1^1, \dots, \eta_{m_1}^1, \eta_1^2, \dots, \eta_{m_2}^2, \dots, \eta_1^p, \dots, \eta_{m_p}^p)$$

的协方差矩阵是单位矩阵：当 $i \neq j$ 时，由 $H_i \perp H_j$ 有 $\mathbb{E}[\eta_i^i \eta_j^j] = 0$ 。另一方面，这个向量的每个分量都属于 H ，故它是高斯向量。由命题 1.2，其全部坐标相互独立。因此 $(\eta_1^1, \dots, \eta_{m_1}^1), \dots, (\eta_1^p, \dots, \eta_{m_p}^p)$ 相互独立；等价地，前述由 ξ 组成的各向量相互独立。□

下面把定理 1.9 应用于高斯框架下的条件期望。条件期望能够像下一个推论那样由正交投影计算，同样是高斯情形所特有的性质。

推论 1.10. 设 H 是 (中心) 高斯空间, K 是 H 的闭线性子空间。记 p_K 为 Hilbert 空间 L^2 中到 K 上的正交投影, 并设 $X \in H$ 。

(i) 有

$$\mathbb{E}[X \mid \sigma(K)] = p_K(X).$$

(ii) 令

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(X - p_K(X))^2].$$

则对每个 Borel 集 $A \subset \mathbb{R}$, 条件概率 $\mathbb{P}(X \in A \mid \sigma(K))$ 可写为

$$\mathbb{P}(X \in A \mid \sigma(K))(\omega) = Q(\omega, A),$$

其中 $Q(\omega, \cdot)$ 是分布 $\mathcal{N}(p_K(X)(\omega), \sigma^2)$:

$$Q(\omega, A) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_A \exp\left(-\frac{(y - p_K(X)(\omega))^2}{2\sigma^2}\right) dy.$$

当 $\sigma = 0$ 时, 约定 $Q(\omega, A) = 1_A(p_K(X)(\omega))$ 。

注。

(a) 断言 (ii) 可以表述为: 在已知 $\sigma(K)$ 的条件下, X 的条件分布是 $\mathcal{N}(p_K(X), \sigma^2)$ 。

(b) 对一般的 $X \in L^2$, 有

$$\mathbb{E}[X \mid \sigma(K)] = p_{L^2(\Omega, \sigma(K), \mathbb{P})}(X).$$

断言 (i) 说明, 在高斯框架中, 这个正交投影恰好等于到空间 K 上的正交投影; 而 K 比 $L^2(\Omega, \sigma(K), \mathbb{P})$ 小得多。

(c) 断言 (i) 也给出了线性回归原理。例如, 若 (X_1, X_2, X_3) 是 $\mathbb{R}^3$ 中的中心高斯向量, 则用 X_1, X_2 的任意函数在 L^2 中逼近 X_3 时, 最佳逼近实际上具有线性形式 $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ 。系数 λ_1, λ_2 由下述条件确定: $X_3 - (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)$ 与 X_1, X_2 张成的向量空间正交。

证明。 (i) 令 $Y = X - p_K(X)$ 。则 $Y \perp K$, 由定理 1.9, Y 与 $\sigma(K)$ 独立。因此

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \mid \sigma(K)] &= \mathbb{E}[p_K(X) \mid \sigma(K)] + \mathbb{E}[Y \mid \sigma(K)] \\ &= p_K(X) + \mathbb{E}[Y] = p_K(X). \end{aligned}$$

(ii) 对任意非负 Borel 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X) \mid \sigma(K)] &= \mathbb{E}[f(p_K(X) + Y) \mid \sigma(K)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(p_K(X) + y) P_Y(dy), \end{aligned}$$

其中 P_Y 是 Y 的分布; 因为 Y 是方差为 σ^2 的中心高斯随机变量, 故 $P_Y = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 。第二个等式还用到了下面的一般事实: 若 Z 关于 σ -代数 $\mathcal{G}$ 可测, 且 Y 与 $\mathcal{G}$ 独立, 则对每个非负可测函数 g ,

$$\mathbb{E}[g(Y, Z) \mid \mathcal{G}] = \int g(y, Z) P_Y(dy).$$

代入高斯密度便得到 (ii)。 □

设 $(X_t)_{t \in T}$ 是中心高斯过程。 X 的**协方差函数**是

$$\Gamma: T \times T \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[X_s X_t].$$

它刻画过程 X 的全部有限维边缘分布。具体地, 对 T 中任意两两不同的指标 $t_1, \dots, t_p$, 向量 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_p})$ 是 $\mathbb{R}^p$ 中的中心高斯向量, 其协方差矩阵为

$$(\Gamma(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq p}.$$

注。 可以用显然的方式定义非中心高斯过程。此时, 全部有限维边缘分布由协方差函数和均值函数

$$t \mapsto m(t) = \mathbb{E}[X_t]$$

共同刻画。

反过来, 给定 $T \times T$ 上的函数 Γ , 可以问是否存在以 Γ 为协方差函数的高斯过程。必要条件是 Γ 对称, 即 $\Gamma(s, t) = \Gamma(t, s)$, 并且 Γ 具有下述正定型性质: 若 $c: T \rightarrow \mathbb{R}$ 具有有限支集, 则

$$\sum_{(s, t) \in T \times T} c(s)c(t)\Gamma(s, t) \geq 0.$$

事实上, 若 Γ 是过程 X 的协方差函数, 则

$$\sum_{(s, t) \in T \times T} c(s)c(t)\Gamma(s, t) = \text{Var}\left(\sum_{s \in T} c(s)X_s\right) \geq 0.$$

当 T 有限时, 定理 1.3 已经在上述条件下解决了 X 的存在性问题。

下一个定理解决一般情形下的存在性问题。它是 Kolmogorov 扩张定理的直接推论; 在 $T = \mathbb{R}_+$ 的特殊情形, 该扩张定理将在第 6 章以定理 6.3 给出。一般情形可参见 Neveu [64, 第 III 章] 或 Kallenberg [47, 第 VI 章]。本书后文不会用到下述结果, 故略去证明。

定理 1.11。 设 Γ 是 $T \times T$ 上的对称正定型函数。则可在适当的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上构造一个以 Γ 为协方差函数的中心高斯过程。

例。 取 $T = \mathbb{R}$, 并设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的有限对称测度, 即 $\mu(-A) = \mu(A)$ 。对每个 $s, t \in \mathbb{R}$, 令

$$\Gamma(s, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(t-s)} \mu(d\xi).$$

容易验证 Γ 具有所需性质。特别地, 若 c 是 $\mathbb{R}$ 上具有有限支集的实函数, 则

$$\sum_{(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} c(s)c(t)\Gamma(s, t) = \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{s \in \mathbb{R}} c(s)e^{i\xi s} \right|^2 \mu(d\xi) \geq 0.$$

这里 $\Gamma(s, t)$ 只依赖于差 $t - s$ 。因此, 任意以 Γ 为协方差函数的中心高斯过程 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ 都是严格平稳的, 即对任意 $t_1, \dots, t_n, t \in \mathbb{R}$,

$$(X_{t_1+t}, X_{t_2+t}, \dots, X_{t_n+t}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}).$$

反过来, 任意以 $\mathbb{R}$ 为指标集的平稳高斯过程, 其协方差都具有上述形式; 这是 Bochner 定理, 本书不使用它。测度 μ 称为过程 X 的谱测度。

1.4 高斯白噪声

定义 1.12. 设 $(E, \mathcal{E})$ 是可测空间, μ 是其上的 σ -有限测度。强度为 μ 的 **高斯白噪声**, 是从 $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ 到某个中心高斯空间的线性等距映射 G 。

因此, 对每个 $f \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$, $G(f)$ 是中心高斯随机变量, 且

$$\mathbb{E}[G(f)^2] = \|G(f)\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}^2 = \|f\|_{L^2(E, \mathcal{E}, \mu)}^2 = \int_E f^2 d\mu.$$

若 $f, g \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$, 则

$$\mathbb{E}[G(f)G(g)] = \langle f, g \rangle_{L^2(E, \mathcal{E}, \mu)} = \int_E fg d\mu.$$

特别地, 若 $f = 1_A$ 且 $\mu(A) < \infty$, 则 $G(1_A) \sim \mathcal{N}(0, \mu(A))$ 。为简化记号, 以下写

$$G(A) = G(1_A).$$

设 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ 两两不交, 且每个 $\mu(A_j) < \infty$ 。向量

$$(G(A_1), \dots, G(A_n))$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的高斯向量; 当 $i \neq j$ 时,

$$\mathbb{E}[G(A_i)G(A_j)] = \langle 1_{A_i}, 1_{A_j} \rangle_{L^2(E, \mathcal{E}, \mu)} = 0,$$

故其协方差矩阵为对角矩阵。由命题 1.2, 随机变量 $G(A_1), \dots, G(A_n)$ 相互独立。

设 $A \in \mathcal{E}$, $\mu(A) < \infty$, 并且 A 是可数个可测集 $A_1, A_2, \dots$ 的不交并。由于

$$1_A = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{A_j}$$

在 $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ 中收敛, 等距性质给出

$$G(A) = \sum_{j=1}^{\infty} G(A_j),$$

其中级数在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中收敛。由于 $G(A_j)$ 相互独立, 离散鞅收敛定理还容易推出该级数几乎必然收敛。

因此, 映射 $A \mapsto G(A)$ 的性质很像一个依赖参数 $\omega \in \Omega$ 的测度。然而可以证明, 固定 ω 后, 映射 $A \mapsto G(A)(\omega)$ 一般并不定义测度。后文还会回到这一点。

命题 1.13. 设 $(E, \mathcal{E})$ 是可测空间, μ 是其上的 σ -有限测度。则可在适当的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上构造一个强度为 μ 的高斯白噪声。

证明. 使用基本的 Hilbert 空间理论。设 $(f_i)_{i \in I}$ 是 Hilbert 空间 $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ 中的完备标准正交系。对每个 $f \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$, 有

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i, \quad \alpha_i = \langle f, f_i \rangle, \quad \sum_{i \in I} \alpha_i^2 = \|f\|_2^2 < \infty.$$

在适当的概率空间上构造一族以同一集合 I 为指标、相互独立且服从 $\mathcal{N}(0, 1)$ 的随机变量 $(X_i)_{i \in I}$ (其存在性可参见 [64, 第 III 章]; 后文只需 I 可数的情形, 此时可仅利用 $[0, 1]$ 上 Lebesgue 测度的存在性作初等构造), 并令

$$G(f) = \sum_{i \in I} \alpha_i X_i.$$

因为 $(X_i)_{i \in I}$ 在 L^2 中构成标准正交系, 级数在 L^2 中收敛。显然, G 的值落在由 X_i ($i \in I$) 生成的高斯空间中; 并且 G 把标准正交基 $(f_i)_{i \in I}$ 映成标准正交系, 所以 G 是等距映射。□

也可以由定理 1.11 推出命题 1.13: 取

$$T = L^2(E, \mathcal{E}, \mu), \quad \Gamma(f, g) = \langle f, g \rangle_{L^2(E, \mathcal{E}, \mu)},$$

便得到高斯过程 $(X_f)_{f \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu)}$, 再令 $G(f) = X_f$ 即可。

注。 后文只考虑 $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ 可分的情形。例如, 当 $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ 、 μ 为 Lebesgue 测度时, 构造 G 只需一系列相互独立的 $\mathcal{N}(0, 1)$ 随机变量 $(\xi_n)_{n \geq 0}$, 以及 $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$ 的一组标准正交基 $(\varphi_n)_{n \geq 0}$:

$$G(f) = \sum_{n \geq 0} \langle f, \varphi_n \rangle \xi_n.$$

当 $E = [0, 1]$ 时, 一组显式的 (φ_n) 可见练习 1.18。

最后一个命题说明: 把集合 A 划分得越来越细时, 可以由白噪声在各小块上的取值恢复强度 $\mu(A)$ 。

命题 1.14。 设 G 是 $(E, \mathcal{E})$ 上强度为 μ 的高斯白噪声, 且 $A \in \mathcal{E}$ 、 $\mu(A) < \infty$ 。假设存在 A 的一系列有限分割

$$A = A_1^n \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} A_{k_n}^n,$$

其“网格”趋于 0, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq j \leq k_n} \mu(A_j^n) = 0.$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} G(A_j^n)^2 = \mu(A)$$

在 L^2 中成立。

证明。 固定 n 。随机变量 $G(A_1^n), \dots, G(A_{k_n}^n)$ 相互独立, 并且 $\mathbb{E}[G(A_j^n)^2] = \mu(A_j^n)$ 。因此

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^{k_n} G(A_j^n)^2 - \mu(A) \right)^2 \right] &= \sum_{j=1}^{k_n} \text{Var}(G(A_j^n)^2) \\ &= 2 \sum_{j=1}^{k_n} \mu(A_j^n)^2. \end{aligned}$$

这里用到了: 若 $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, 则

$$\text{Var}(X^2) = \mathbb{E}[X^4] - \sigma^4 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4.$$

另一方面,

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mu(A_j^n)^2 \leq \left(\sup_{1 \leq j \leq k_n} \mu(A_j^n) \right) \mu(A),$$

由假设, 右端随 $n \rightarrow \infty$ 趋于 0。

□

练习

练习 1.15。 设 $(X_t)_{t \in [0,1]}$ 是中心高斯过程, 并假设映射

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

从 $[0,1] \times \Omega$ 到 $\mathbb{R}$ 可测。记 K 为 X 的协方差函数。

1. 证明: 映射 $t \mapsto X_t$ 从 $[0,1]$ 到 $L^2(\Omega)$ 连续, 当且仅当 K 在 $[0,1]^2$ 上连续。以下均假设这个条件成立。

2. 设 $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ 可测, 且

$$\int_0^1 |h(t)| \sqrt{K(t,t)} dt < \infty.$$

证明: 对几乎所有 ω , 积分 $\int_0^1 h(t) X_t(\omega) dt$ 绝对收敛。记

$$Z = \int_0^1 h(t) X_t dt.$$

3. 进一步假设 $\int_0^1 |h(t)| dt < \infty$ 。证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, Z 是下列随机变量的 L^2 极限:

$$Z_n = \sum_{i=1}^n X_{i/n} \int_{(i-1)/n}^{i/n} h(t) dt.$$

由此推出 Z 是高斯随机变量。

4. 假设 K 二阶连续可微。证明: 对每个 $t \in [0,1]$, 极限

$$\dot{X}_t := \lim_{s \rightarrow t} \frac{X_s - X_t}{s - t}$$

在 $L^2(\Omega)$ 中存在。验证 $(\dot{X}_t)_{t \in [0,1]}$ 是中心高斯过程, 并计算其协方差函数。

解答 1.15。

1. 对任意 $s, t \in [0,1]$,

$$\|X_t - X_s\|_2^2 = K(t,t) + K(s,s) - 2K(t,s).$$

因而 K 连续立即推出 $t \mapsto X_t$ 在 L^2 中连续。反过来, 若 $t \mapsto X_t$ 在 L^2 中连续, 则由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$|K(u', v') - K(u, v)| \leq \|X_{u'} - X_u\|_2 \|X_{v'}\|_2 + \|X_u\|_2 \|X_{v'} - X_v\|_2.$$

当 $(u', v') \rightarrow (u, v)$ 时右端趋于零, 所以 K 连续。

2. 由 Tonelli 定理和 $\|X_t\|_1 \leq \|X_t\|_2 = \sqrt{K(t,t)}$,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^1 |h(t) X_t| dt \right] = \int_0^1 |h(t)| \mathbb{E} |X_t| dt \leq \int_0^1 |h(t)| \sqrt{K(t,t)} dt < \infty.$$

故该积分几乎必然绝对收敛。

3. 令

$$X_t^{(n)} = \sum_{i=1}^n X_{i/n} 1_{[(i-1)/n, i/n)}(t).$$

则 $Z_n = \int_0^1 h(t) X_t^{(n)} dt$, 并且 Minkowski 不等式给出

$$\|Z - Z_n\|_2 \leq \int_0^1 |h(t)| \|X_t - X_t^{(n)}\|_2 dt.$$

对每个 $t < 1$, 被积函数中的范数趋于零; 又因 K 在紧集上有界, 它被 $2 \sup_{r \in [0,1]} \sqrt{K(r,r)} |h(t)|$ 控制。支配收敛定理于是说明 $Z_n \rightarrow Z$ 于 L^2 。每个 Z_n 都是中心高斯随机变量, 而中心高斯随机变量族在 L^2 极限下封闭, 故 Z 也是中心高斯随机变量。

4. 记 $D_h X_t = (X_{t+h} - X_t)/h$ (端点处只取允许的单侧 h)。对 $h, k \rightarrow 0$,

$$\mathbb{E}[D_h X_t D_k X_t] = \frac{K(t+h, t+k) - K(t+h, t) - K(t, t+k) + K(t, t)}{hk} \rightarrow \partial_1 \partial_2 K(t, t).$$

同一极限也适用于 $\mathbb{E}[(D_h X_t)^2]$ 和 $\mathbb{E}[(D_k X_t)^2]$, 所以 $\|D_h X_t - D_k X_t\|_2 \rightarrow 0$ 。完备性给出 L^2 极限 $\dot{X}_t$ 。差商是中心高斯变量, 有限线性组合取 L^2 极限后仍为中心高斯变量, 故 $(\dot{X}_t)$ 是中心高斯过程。再对两个时刻分别取差商, 得到其协方差

$$\mathbb{E}[\dot{X}_t \dot{X}_s] = \partial_1 \partial_2 K(t, s).$$

□

练习 1.16 (Kalman 滤波)。 设 $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ 和 $(\eta_n)_{n \geq 0}$ 是两个相互独立的随机变量序列, 每个序列内部的随机变量也相互独立, 并且对每个 n ,

$$\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \eta_n \sim \mathcal{N}(0, \delta^2),$$

其中 $\sigma > 0, \delta > 0$ 。再定义两个序列 $(X_n)_{n \geq 0}, (Y_n)_{n \geq 0}$:

$$X_0 = 0, \quad X_{n+1} = a_n X_n + \varepsilon_{n+1}, \quad Y_n = c X_n + \eta_n,$$

其中 c 和各 a_n 都是正常数。令

$$\hat{X}_{n/n} = \mathbb{E}[X_n | Y_0, Y_1, \dots, Y_n], \quad \hat{X}_{n+1/n} = \mathbb{E}[X_{n+1} | Y_0, Y_1, \dots, Y_n].$$

本练习的目标是找出递推计算这些条件期望的公式。

1. 验证: 对每个 $n \geq 0$,

$$\hat{X}_{n+1/n} = a_n \hat{X}_{n/n}.$$

2. 证明: 对每个 $n \geq 1$,

$$\hat{X}_{n/n} = \hat{X}_{n/n-1} + \frac{\mathbb{E}[X_n Z_n]}{\mathbb{E}[Z_n^2]} Z_n, \quad Z_n := Y_n - c \hat{X}_{n/n-1}.$$

3. 令

$$P_n := \mathbb{E}[(X_n - \hat{X}_{n/n-1})^2].$$

用 P_n 表示 $\mathbb{E}[X_n Z_n]$ 和 $\mathbb{E}[Z_n^2]$, 并推出: 对每个 $n \geq 1$,

$$\hat{X}_{n+1/n} = a_n \left(\hat{X}_{n/n-1} + \frac{c P_n}{c^2 P_n + \delta^2} Z_n \right).$$

4. 验证 $P_1 = \sigma^2$, 并证明对每个 $n \geq 1$,

$$P_{n+1} = \sigma^2 + a_n^2 \frac{\delta^2 P_n}{c^2 P_n + \delta^2}.$$

解答 1.16。 记 $\mathcal{Y}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n)$ 。

1. ε_{n+1} 与 $\mathcal{Y}_n$ 独立且均值为零, 因此

$$\hat{X}_{n+1/n} = \mathbb{E}[a_n X_n + \varepsilon_{n+1} \mid \mathcal{Y}_n] = a_n \hat{X}_{n/n}.$$

2. 在高斯 Hilbert 空间中, 给定有限个中心高斯变量的条件期望就是到其线性张成空间上的正交投影。由

$$Z_n = Y_n - \mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{Y}_{n-1}]$$

可知 $Z_n \perp L^2(\mathcal{Y}_{n-1})$, 而 $\text{span}(Y_0, \dots, Y_n)$ 是 $\text{span}(Y_0, \dots, Y_{n-1})$ 与 $\text{span}(Z_n)$ 的正交和。因此

$$\hat{X}_{n/n} = \hat{X}_{n/n-1} + \frac{\mathbb{E}[X_n Z_n]}{\mathbb{E}[Z_n^2]} Z_n.$$

3. 因为 $Z_n = c(X_n - \hat{X}_{n/n-1}) + \eta_n$, 且 η_n 与前面的变量独立,

$$\mathbb{E}[Z_n^2] = c^2 P_n + \delta^2.$$

此外, 投影误差 $X_n - \hat{X}_{n/n-1}$ 与 $\hat{X}_{n/n-1}$ 正交, 故

$$\mathbb{E}[X_n Z_n] = c \mathbb{E}[X_n (X_n - \hat{X}_{n/n-1})] = c P_n.$$

代入第 2 问并使用第 1 问即得

$$\hat{X}_{n+1/n} = a_n \left(\hat{X}_{n/n-1} + \frac{c P_n}{c^2 P_n + \delta^2} Z_n \right).$$

4. $X_1 = \varepsilon_1$ 与 $Y_0 = \eta_0$ 独立, 所以 $P_1 = \sigma^2$ 。又 ε_{n+1} 与 $X_n - \hat{X}_{n/n}$ 独立, 因而

$$P_{n+1} = \sigma^2 + a_n^2 \mathbb{E}[(X_n - \hat{X}_{n/n})^2].$$

第 2、3 问给出

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_n - \hat{X}_{n/n})^2] &= P_n - \frac{\mathbb{E}[X_n Z_n]^2}{\mathbb{E}[Z_n^2]} \\ &= P_n - \frac{c^2 P_n^2}{c^2 P_n + \delta^2} = \frac{\delta^2 P_n}{c^2 P_n + \delta^2}. \end{aligned}$$

这就得到所需递推式。

□

练习 1.17。 设 H 是中心高斯空间, H_1, H_2 是 H 的线性子空间, K 是 H 的闭线性子空间。记 p_K 为到 K 上的正交投影。证明: 条件

$$\forall X_1 \in H_1, \forall X_2 \in H_2, \quad \mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[p_K(X_1) p_K(X_2)]$$

蕴含 $\sigma(H_1)$ 和 $\sigma(H_2)$ 在给定 $\sigma(K)$ 的条件下相互独立。这里的条件独立指: 对任意非负的

$\sigma(H_1)$ -可测随机变量 U_1 和任意非负的 $\sigma(H_2)$ -可测随机变量 U_2 , 都有

$$\mathbb{E}[U_1 U_2 \mid \sigma(K)] = \mathbb{E}[U_1 \mid \sigma(K)] \mathbb{E}[U_2 \mid \sigma(K)].$$

提示。 使用附录 A1 中的单调类论证, 只需考虑 U_1 (分别地, U_2) 是某个事件的示性函数, 而该事件仅依赖于 H_1 (分别地, H_2) 中的有限多个随机变量。

解答 1.17。 对任意 $X \in H$, 高斯投影性质给出 $\mathbb{E}[X \mid \sigma(K)] = p_K X$, 并且残差 $X - p_K X$ 与 $\sigma(K)$ 独立。

先分别从 H_1, H_2 中取有限族 $(X_i^1)_{1 \leq i \leq m}$ 和 $(X_j^2)_{1 \leq j \leq n}$, 令 $Y_i^r = X_i^r - p_K X_i^r$ 。投影恒等式与题设条件给出

$$\mathbb{E}[Y_i^1 Y_j^2] = \mathbb{E}[X_i^1 X_j^2] - \mathbb{E}[p_K X_i^1 p_K X_j^2] = 0.$$

联合向量 (Y^1, Y^2) 是中心高斯向量, 两个分块之间协方差为零, 故 Y^1 与 Y^2 相互独立; 二者还都与 $\sigma(K)$ 独立。条件于 $\sigma(K)$ 后,

$$X_i^r = p_K X_i^r + Y_i^r,$$

其中第一项已经确定, 而两个残差分块仍相互独立。因此, 对任意有界 Borel 函数 f, g ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_1^1, \dots, X_m^1) g(X_1^2, \dots, X_n^2) \mid \sigma(K)] \\ = \mathbb{E}[f(X_1^1, \dots, X_m^1) \mid \sigma(K)] \mathbb{E}[g(X_1^2, \dots, X_n^2) \mid \sigma(K)]. \end{aligned}$$

最后用附录 A1 的单调类论证, 从有限维柱事件推广到 $\sigma(H_1)$ 与 $\sigma(H_2)$ 中的所有事件, 再由简单函数与单调收敛推广到题述非负随机变量。□

练习 1.18 (Lévy 的布朗运动构造)。 对每个 $t \in [0, 1]$, 令 $h_0(t) = 1$ 。再对每个整数 $n \geq 0$ 以及 $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, 令

$$\begin{aligned} h_k^n(t) &= 2^{n/2} 1_{[(2k)2^{-n-1}, (2k+1)2^{-n-1})}(t) \\ &\quad - 2^{n/2} 1_{[(2k+1)2^{-n-1}, (2k+2)2^{-n-1})}(t). \end{aligned}$$

1. 验证函数

$$h_0, \quad (h_k^n)_{n \geq 0, 0 \leq k \leq 2^n - 1}$$

构成 $L^2([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), dt)$ 的一组标准正交基。^a

提示。 固定 $n \geq 0$ 。若函数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 在每个区间

$$[(j-1)2^{-n}, j2^{-n}), \quad 1 \leq j \leq 2^n,$$

上为常数, 则 f 是

$$h_0, \quad (h_k^m)_{0 \leq m < n, 0 \leq k \leq 2^m - 1}$$

的线性组合。

2. 设

$$N_0, \quad (N_k^n)_{n \geq 0, 0 \leq k \leq 2^n - 1}$$

是相互独立的 $\mathcal{N}(0, 1)$ 随机变量。说明存在唯一的 $[0, 1]$ 上、强度为 dt 的高斯白噪声 G , 满足

$$G(h_0) = N_0, \quad G(h_k^n) = N_k^n$$

对每个 $n \geq 0, 0 \leq k \leq 2^n - 1$ 都成立。

3. 对每个 $t \in [0, 1]$, 令 $B_t = G([0, t])$ 。验证

$$B_t = tN_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} g_k^n(t) N_k^n \right),$$

其中级数在 L^2 中收敛, 且

$$g_k^n(t) = \int_0^t h_k^n(s) ds.$$

函数 g_k^n 连续。对每个固定的 $n \geq 0$, 函数 g_k^n ($0 \leq k \leq 2^n - 1$) 的支集两两不交, 并且都不超过 $2^{-n/2}$ 。

4. 对每个整数 $m \geq 0$ 和每个 $t \in [0, 1]$, 令

$$B_t^{(m)} = tN_0 + \sum_{n=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} g_k^n(t) N_k^n \right).$$

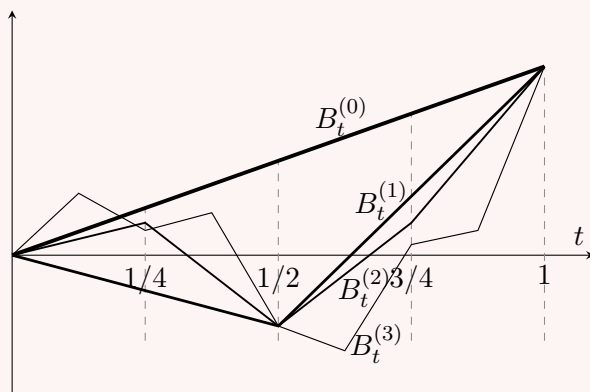


图 1.1 练习 1.18 中 $m = 0, 1, 2, 3$ 时 $B_t^{(m)}$ 的构造示意。为便于观察, m 越大, 曲线越细; 虚线段的长度由 N_0 以及 $m = 0, 1, 2$ 时的 N_k^m 决定。

验证: 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 连续函数 $t \mapsto B_t^{(m)}(\omega)$ 对几乎所有 ω 都在 $[0, 1]$ 上一致收敛。

提示。 若 $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 先证明对 $a \geq 1$,

$$\mathbb{P}(|N| \geq a) \leq e^{-a^2/2},$$

再用这个估计控制事件

$$\left\{ \sup_{0 \leq k \leq 2^n-1} |N_k^n| > 2^{n/4} \right\}$$

的概率。

5. 推出: 对每个 $t \in [0, 1]$, 可以选取一个与 B_t 几乎必然相等的随机变量 B'_t , 并使映射 $t \mapsto B'_t(\omega)$ 对每个 $\omega \in \Omega$ 都连续。^b

^a校订注: 原书在本小问及下一小问的指标中写成 $n \geq 1$, 但 h_k^n 已从 $n = 0$ 开始定义, 后文级数也从 $n = 0$ 求和; 若漏掉 h_0^0 , 该函数族并不完备。因此这里统一改为 $n \geq 0$ 。

^b校订注: 原书此处写“对每个 $t \geq 0$ ”, 但本练习只在 $[0, 1]$ 上定义了白噪声 G 和变量 $B_t = G([0, t])$ 。按本练习已经建立的范围, 结论应为 $t \in [0, 1]$; 向 $\mathbb{R}_+$ 的扩张可逐个单位区间另行完成。

解答 1.18。

1. 由支集和取值直接计算可知, h_0 与所有 h_k^n 的范数均为 1, 不同函数两两正交。

令 S_m 为在每个二进区间 $[j2^{-m}, (j+1)2^{-m})$ 上为常数的函数空间。对 $f = \sum_{j=0}^{2^m-1} c_j 1_{[j2^{-m}, (j+1)2^{-m})} \in S_m$, 取

$$\alpha_k = 2^{-(m+1)/2} (c_{2k} - c_{2k+1}), \quad 0 \leq k < 2^{m-1},$$

则 $f - \sum_k \alpha_k h_k^{m-1} \in S_{m-1}$ 。向下归纳得 $S_m \subset \text{span}\{h_0, h_k^n : n < m\}$ 。二进阶梯函数在 $L^2[0, 1]$ 中稠密, 故该正交系完备。

2. 先在有限线性组合上定义

$$G\left(c_0 h_0 + \sum_{n,k} c_k^n h_k^n\right) = c_0 N_0 + \sum_{n,k} c_k^n N_k^n.$$

独立标准高斯变量的等距性质给出 $\mathbb{E}[G(f)G(g)] = \langle f, g \rangle_{L^2}$ 。由稠密性唯一连续延拓到 $L^2[0, 1]$, 所得映射正是所需高斯白噪声; 唯一性也由基上的取值确定。

3. 将 $1_{[0,t]}$ 按 Haar 基展开并应用 G , 得到

$$B_t = tN_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} g_k^n(t) N_k^n, \quad g_k^n(t) = \langle 1_{[0,t]}, h_k^n \rangle.$$

Parseval 等式保证 $L^2(\Omega)$ 收敛。由 h_k^n 的定义, g_k^n 是三角形状的连续函数, 支集包含于 $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$; 固定 n 时这些支集除端点外不相交, 且 $0 \leq g_k^n \leq 2^{-n/2-1} \leq 2^{-n/2}$ 。

4. 若 $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 则对 $a \geq 1$, $\mathbb{P}(|N| \geq a) \leq e^{-a^2/2}$ 。于是

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}\left(\max_{k < 2^n} |N_k^n| > 2^{n/4}\right) \leq \sum_{n \geq 0} 2^n e^{-2^{n/2-1}} < \infty.$$

Borel–Cantelli 引理说明, 几乎必然地, 从某个 n 起 $\max_k |N_k^n| \leq 2^{n/4}$ 。因同一层的 g_k^n 支集不交,

$$\sup_{t \in [0, 1]} \left| \sum_{k < 2^n} g_k^n(t) N_k^n \right| \leq 2^{-n/2} \max_{k < 2^n} |N_k^n| \leq 2^{-n/4}.$$

右端可求和, Weierstrass 判别法即给出部分和的一致收敛。

5. 在上述概率为 1 的事件上, 以一致极限定义 B'_t ; 在其补集上令 $B'_t = 0$ 。则每条 $t \mapsto B'_t$ 路径连续。另一方面, 第 3 问的部分和在每个固定 t 处于 L^2 收敛到 $B_t = G(1_{[0,t]})$, 故一致极限与 B_t 几乎必然相等。

□

注记与评述

本章内容是标准理论。关于高斯过程的更多资料, 可参见 Adler [1] 和 Lifshits [55]。Marcus 与 Rosen 的较新著作 [56] 发展了高斯过程已知结果在马尔可夫过程及其局部时理论中的一些精彩应用。练习 1.16 讨论著名 Kalman 滤波器的一个简单特例; Kalman 滤波在工程技术中有大量应用。练习 1.18 中构造的详细讨论可参见 [49] 或 [62]。

第二章 布朗运动

本章构造布朗运动并研究它的一些性质。我们先引入“预布朗运动”（这不是标准术语）：利用强度为 Lebesgue 测度的 $\mathbb{R}_+$ 上高斯白噪声，很容易定义它。从预布朗运动过渡到布朗运动，还需要样本路径连续这一附加性质；这里将用经典的 Kolmogorov 引理推出该性质。本章后半部分讨论布朗样本路径的若干性质，证明强马尔可夫性质，并把经典的反射原理作为应用。

2.1 预布朗运动

本章始终在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上讨论。随机过程通常（但并非总是）以 $T = \mathbb{R}_+$ 为指标集并取实值。

定义 2.1。 设 G 是 $\mathbb{R}_+$ 上强度为 Lebesgue 测度的高斯白噪声。由

$$B_t = G(1_{[0,t]}) = G([0, t]), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

定义的随机过程 $(B_t)_{t \geq 0}$ 称为**预布朗运动**。

命题 2.2。 预布朗运动是中心高斯过程，其协方差函数为

$$K(s, t) = \min\{s, t\} = s \wedge t.$$

证明。 由高斯白噪声的定义，各 B_t 属于同一个高斯空间，所以 $(B_t)_{t \geq 0}$ 是高斯过程。而且对每个 $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_s B_t] &= \mathbb{E}[G([0, s])G([0, t])] \\ &= \int_0^\infty 1_{[0, s]}(r) 1_{[0, t]}(r) dr = s \wedge t. \end{aligned}$$

□

下一个命题给出预布朗运动的几种等价刻画。

命题 2.3。 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是实值随机过程。下列性质等价：

- (i) $(X_t)_{t \geq 0}$ 是预布朗运动；
- (ii) $(X_t)_{t \geq 0}$ 是协方差函数为 $K(s, t) = s \wedge t$ 的中心高斯过程；
- (iii) $X_0 = 0$ 几乎必然成立，并且对每个 $0 \leq s < t$ ，随机变量 $X_t - X_s$ 与 $\sigma(X_r : r \leq s)$ 独立，且服从 $\mathcal{N}(0, t - s)$ ；
- (iv) $X_0 = 0$ 几乎必然成立，并且对任意 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$ ，增量

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}}, \quad 1 \leq i \leq p,$$

相互独立；对每个 $1 \leq i \leq p$ ，该增量服从 $\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$ 。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii) 就是命题 2.2。下面证明 (ii) $\Rightarrow$ (iii)。假设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是协方差函数为 $s \wedge t$ 的中心高斯过程，并令 H 为它生成的高斯空间。因为 $X_0 \sim \mathcal{N}(0, 0)$ ，所以 $X_0 = 0$ 几乎必然成立。固定 $s > 0$ ，记 H_s 为 $(X_r)_{0 \leq r \leq s}$ 张成的向量空间， $\tilde{H}_s$ 为 $(X_{s+u} - X_s)_{u \geq 0}$ 张成的向量空间。若

$r \in [0, s]$ 、 $u \geq 0$ ，则

$$\mathbb{E}[X_r(X_{s+u} - X_s)] = r \wedge (s+u) - r \wedge s = r - r = 0.$$

故 $H_s \perp \tilde{H}_s$ 。二者都是 H 的子空间，由定理 1.9， $\sigma(H_s)$ 与 $\sigma(\tilde{H}_s)$ 独立。特别地，对固定的 $t > s$ ， $X_t - X_s$ 与

$$\sigma(H_s) = \sigma(X_r : r \leq s)$$

独立。再由协方差函数的形式立即得到 $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ 。

(iii) $\Rightarrow$ (iv) 很直接。先取 $s = t_{p-1}$ 、 $t = t_p$ ，可知 $X_{t_p} - X_{t_{p-1}}$ 与 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_{p-1}})$ 独立；随后对 $X_{t_{p-1}} - X_{t_{p-2}}$ 等逐次使用同一论证，便得到所有增量相互独立。

最后证明 (iv) $\Rightarrow$ (i)。性质 (iv) 容易推出 X 是中心高斯过程。若 f 是 $\mathbb{R}_+$ 上的阶梯函数，并可写成

$$f = \sum_{i=1}^p \lambda_i 1_{(t_{i-1}, t_i]}, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p,$$

则定义

$$G(f) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}).$$

这个定义只依赖于 f ，与所选表示无关。对两个阶梯函数 f, g ，细分区间后可使用同一分割，由性质 (iv) 直接计算得

$$\mathbb{E}[G(f)G(g)] = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)g(t) dt.$$

所以 G 是从 $\mathbb{R}_+$ 上阶梯函数空间到 X 生成的高斯空间 H 的等距映射。阶梯函数在

$$L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$$

中稠密，因而 G 唯一延拓为该 L^2 空间到 H 的等距映射。最后，按构造

$$G([0, t]) = X_t - X_0 = X_t.$$

故 X 是预布朗运动。 □

注。 若把 (iii) 中 “ $X_t - X_s$ 服从 $\mathcal{N}(0, t - s)$ ” 改为 “ $X_t - X_s$ 的分布只依赖于 $t - s$ ”，就得到 **平稳（或齐次）独立增量** 性质。预布朗运动因而是平稳独立增量过程的一个特例；再加适当的正则性假设，这类过程也称为 Lévy 过程，见第 6.5.2 节。

推论 2.4。 设 $(B_t)_{t \geq 0}$ 是预布朗运动。对任意 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ，向量 $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ 的分布具有密度

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}} \times \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right),$$

其中约定 $x_0 = 0$ 。

证明。 随机变量

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

相互独立，其分布依次为

$$\mathcal{N}(0, t_1), \mathcal{N}(0, t_2 - t_1), \dots, \mathcal{N}(0, t_n - t_{n-1}).$$

因此向量 $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ 的密度为

$$q(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1})}} \times \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right).$$

作变量替换 $x_i = y_1 + \cdots + y_i$ ($1 \leq i \leq n$) 即得结论。也可以使用定理 1.3 (ii)。□

注。 推论 2.4 与 $B_0 = 0$ 共同确定预布朗运动的全部有限维边缘分布。命题 2.3 (iv) 还说明：凡是与预布朗运动具有相同有限维边缘分布的过程，本身也必为预布朗运动。

命题 2.5。 设 B 是预布朗运动。则：

- (i) $-B$ 也是预布朗运动（对称性）；
- (ii) 对每个 $\lambda > 0$ ，过程

$$B_t^\lambda = \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t}, \quad t \geq 0,$$

也是预布朗运动（尺度不变性）；

- (iii) 对每个 $s \geq 0$ ，过程

$$B_t^{(s)} = B_{s+t} - B_s, \quad t \geq 0,$$

是预布朗运动，并且与 $\sigma(B_r : r \leq s)$ 独立（简单马尔可夫性质）。

证明。 (i)、(ii) 都很容易。证明 (iii)。沿用命题 2.3 证明中的记号，由 $B^{(s)}$ 生成的 σ -代数 $\sigma(\tilde{H}_s)$ ，它与 $\sigma(H_s) = \sigma(B_r : r \leq s)$ 独立。要验证 $B^{(s)}$ 是预布朗运动，只需验证命题 2.3 (iv)，而这由

$$B_{t_i}^{(s)} - B_{t_{i-1}}^{(s)} = B_{s+t_i} - B_{s+t_{i-1}}$$

立即得到。□

设 B 是预布朗运动， G 是与之相联系的高斯白噪声。注意 G 由 B 唯一确定：当 f 是阶梯函数时， $G(f)$ 可用 B 显式表示；对一般 f ，再用稠密性延拓。对 $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$ ，常写

$$G(f) = \int_0^\infty f(s) dB_s,$$

并类似地写成

$$G(f1_{[0,t]}) = \int_0^t f(s) dB_s, \quad G(f1_{(s,t]}) = \int_s^t f(r) dB_r.$$

这种记号是合理的，因为当 $u < v$ 时，

$$\int_u^v dB_s = G((u, v]) = G([0, v]) - G([0, u]) = B_v - B_u.$$

映射

$$f \mapsto \int_0^\infty f(s) dB_s$$

(也就是高斯白噪声 G) 称为关于 B 的 **Wiener 积分**。并且

$$\int_0^\infty f(s) dB_s \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^\infty f(s)^2 ds\right).$$

高斯白噪声并不是一个依赖 ω 的“真正测度”，所以 $\int_0^\infty f(s) dB_s$ 也不是一个依赖 ω 的通常积分。本书后文很大一部分内容，将用于把 $\int_0^\infty f(s) dB_s$ 的定义推广到允许依赖 ω 的函数 f 。

2.2 样本路径的连续性

先给出一般定义。设 E 是配备 Borel σ -代数的度量空间。

定义 2.6. 设 $(X_t)_{t \in T}$ 是取值于 E 的随机过程。固定 $\omega \in \Omega$ 后得到的映射

$$T \ni t \mapsto X_t(\omega) \in E$$

称为 X 的**样本路径**。因此， X 的样本路径是一族由 $\omega \in \Omega$ 标记的从 T 到 E 的映射。

设 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ 是预布朗运动。到目前为止，我们对 B 的样本路径还一无所知，甚至不能断言这些路径是可测函数。本节将证明：只需对 B 作“轻微”修改，就能保证样本路径连续。

定义 2.7. 设 $(X_t)_{t \in T}$ 与 $(\tilde{X}_t)_{t \in T}$ 具有相同的指标集 T ，并且都取值于同一度量空间 E 。若

$$\forall t \in T, \quad \mathbb{P}(\tilde{X}_t = X_t) = 1,$$

则称 $\tilde{X}$ 是 X 的一个**修正**。

修正 $\tilde{X}$ 与 X 具有相同的有限维边缘分布。因此，若 X 是预布朗运动，则 $\tilde{X}$ 也是预布朗运动；但二者的样本路径性质可能大不相同。例如，当 $T = \mathbb{R}_+$ 、 $E = \mathbb{R}$ 时，很容易构造这样的例子： $\tilde{X}$ 的所有样本路径都连续，而 X 的所有样本路径都不连续。

定义 2.8. 若存在零测集 $N \subset \Omega$ ，使

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \forall t \in T, \quad \tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega),$$

则称过程 $\tilde{X}$ 与 X **不可区分**。

换言之，不可区分性可以形式化地写成

$$\mathbb{P}(\forall t \in T, X_t = \tilde{X}_t) = 1.$$

不过这个写法略不严谨，因为集合 $\{\forall t \in T, X_t = \tilde{X}_t\}$ 未必可测。

若 $\tilde{X}$ 与 X 不可区分，则 $\tilde{X}$ 必为 X 的修正；反之不一定成立。不可区分性强得多：不可区分的两个过程几乎必然具有完全相同的样本路径。以后总把不可区分的过程视为同一过程；诸如“存在唯一过程使……”的断言，即使未明说，也总按“在不可区分意义下唯一”理解。

下面的观察十分重要。设 $T = I$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间。若 X 与 $\tilde{X}$ 的样本路径都连续（允许在一个零测集上例外），则 $\tilde{X}$ 是 X 的修正，当且仅当二者不可区分。事实上，若 $\tilde{X}$ 是修正，则排除可数个零测集后，几乎必然对每个 $t \in I \cap \mathbb{Q}$ 都有 $X_t = \tilde{X}_t$ ；再由连续性，该等式对每个 $t \in I$ 成立。只假设样本路径右连续或左连续时，结论仍成立。

定理 2.9 (Kolmogorov 引理). 设 $X = (X_t)_{t \in I}$ 是以 $\mathbb{R}$ 中有界区间 I 为指标集、取值于完备度量空间 (E, d) 的随机过程。假设存在三个实数 $q, \varepsilon, C > 0$ ，使对每个 $s, t \in I$ ，

$$\mathbb{E}[d(X_s, X_t)^q] \leq C|t - s|^{1+\varepsilon}.$$

则 X 有一个修正 $\tilde{X}$ ，其样本路径对每个 $\alpha \in (0, \varepsilon/q)$ 都是 α -Hölder 连续的。也就是说，对每个 $\omega \in \Omega$ 和每个 $\alpha \in (0, \varepsilon/q)$ ，存在有限常数 $C_\alpha(\omega)$ ，使对所有 $s, t \in I$ ，

$$d(\tilde{X}_s(\omega), \tilde{X}_t(\omega)) \leq C_\alpha(\omega)|t - s|^\alpha.$$

特别地, $\tilde{X}$ 的样本路径连续; 由前面的观察, 这种连续修正在不可区分意义下唯一。

注。

- (i) 若 I 无界, 例如 $I = \mathbb{R}_+$, 仍可依次在 $[0, 1], [1, 2], [2, 3], \dots$ 上应用定理 2.9, 得到一个样本路径局部 α -Hölder 连续的修正, 其中每个 $\alpha \in (0, \varepsilon/q)$ 都允许。
- (ii) 只需对每个固定的 $\alpha \in (0, \varepsilon/q)$ 证明存在一个样本路径 α -Hölder 连续的修正。事实上, 可取一列 $\alpha_k \uparrow \varepsilon/q$ 并逐个应用该结论; 由定理前的观察, 所得各修正两两不可区分。

证明。为简化表述, 取 $I = [0, 1]$; 对任意有界区间 (无论是否闭) 证明完全相同。固定 $\alpha \in (0, \varepsilon/q)$ 。由定理假设和马尔可夫不等式, 对 $a > 0, s, t \in I$,

$$\mathbb{P}(d(X_s, X_t) \geq a) \leq a^{-q} \mathbb{E}[d(X_s, X_t)^q] \leq C a^{-q} |t - s|^{1+\varepsilon}.$$

取

$$s = (i-1)2^{-n}, \quad t = i2^{-n}, \quad a = 2^{-n\alpha},$$

其中 $i \in \{1, \dots, 2^n\}$, 得到

$$\mathbb{P}(d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}) \geq 2^{-n\alpha}) \leq C 2^{nq\alpha} 2^{-(1+\varepsilon)n}.$$

对 i 求和,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{2^n} \{d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}) \geq 2^{-n\alpha}\}\right) \\ \leq 2^n C 2^{nq\alpha} 2^{-(1+\varepsilon)n} = C 2^{-n(\varepsilon - q\alpha)}. \end{aligned}$$

因为 $\varepsilon - q\alpha > 0$, 上式对 n 的级数收敛。由 Borel–Cantelli 引理, 以概率 1 存在有限整数 $n_0(\omega)$, 使

$$\forall n \geq n_0(\omega), \forall i \in \{1, \dots, 2^n\}, \quad d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}) \leq 2^{-n\alpha}.$$

因此随机常数

$$K_\alpha(\omega) = \sup_{n \geq 1} \left(\sup_{1 \leq i \leq 2^n} \frac{d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}})}{2^{-n\alpha}} \right)$$

几乎必然有限: 当 $n \geq n_0(\omega)$ 时, 内层上确界不超过 1; 而此前只有有限项。

下面使用一个初等分析引理, 证明放在定理 2.9 的证明之后。记

$$D = \{i2^{-n} : n \geq 1, 0 \leq i \leq 2^n - 1\} \subset [0, 1].$$

引理 2.10。 设 $f : D \rightarrow (E, d)$ 。假设存在 $\alpha > 0, K < \infty$, 使对每个整数 $n \geq 1$ 和每个 $i \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$,

$$d(f((i-1)2^{-n}), f(i2^{-n})) \leq K 2^{-n\alpha}.$$

则对每个 $s, t \in D$,

$$d(f(s), f(t)) \leq \frac{2K}{1 - 2^{-\alpha}} |t - s|^\alpha.$$

由引理和 $K_\alpha(\omega)$ 的定义, 在概率为 1 的事件 $\{K_\alpha(\omega) < \infty\}$ 上, 对每个 $s, t \in D$ 都有

$$d(X_s, X_t) \leq C_\alpha(\omega) |t - s|^\alpha, \quad C_\alpha(\omega) = \frac{2K_\alpha(\omega)}{1 - 2^{-\alpha}}.$$

所以映射 $t \mapsto X_t(\omega)$ 在 D 上 Hölder 连续, 特别地一致连续。因为 (E, d) 完备, 它唯一连续延拓到 $[0, 1]$, 而且延拓仍是 α -Hölder 连续的。任取固定点 $x_0 \in E$, 定义

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in D}} X_s(\omega), & K_\alpha(\omega) < \infty, \\ x_0, & K_\alpha(\omega) = \infty. \end{cases}$$

显然, $\tilde{X}_t$ 是随机变量; 并且 $\tilde{X}$ 的样本路径在 $[0, 1]$ 上 α -Hölder 连续。

还需验证 $\tilde{X}$ 是 X 的修正。固定 $t \in [0, 1]$ 。定理假设给出

$$X_s \rightarrow X_t \quad \text{依概率}, \quad s \rightarrow t.$$

而按定义, 当 $s \rightarrow t, s \in D$ 时, X_s 几乎必然收敛于 $\tilde{X}_t$ 。依概率极限的唯一性说明 $X_t = \tilde{X}_t$ 几乎必然成立。□

证明。(引理 2.10)。 固定 $s, t \in D, s < t$ 。设 $p \geq 1$ 是满足 $2^{-p} \leq t - s$ 的最小整数, 并设 $k \geq 0$ 是满足 $k2^{-p} \geq s$ 的最小整数。可以写成

$$\begin{aligned} s &= k2^{-p} - \varepsilon_1 2^{-p-1} - \dots - \varepsilon_\ell 2^{-p-\ell}, \\ t &= k2^{-p} + \varepsilon'_0 2^{-p} + \varepsilon'_1 2^{-p-1} + \dots + \varepsilon'_m 2^{-p-m}, \end{aligned}$$

其中 ℓ, m 是非负整数, 而所有 $\varepsilon_i, \varepsilon'_j$ 都等于 0 或 1。对 $0 \leq i \leq \ell, 0 \leq j \leq m$, 令

$$\begin{aligned} s_i &= k2^{-p} - \varepsilon_1 2^{-p-1} - \dots - \varepsilon_i 2^{-p-i}, \\ t_j &= k2^{-p} + \varepsilon'_0 2^{-p} + \varepsilon'_1 2^{-p-1} + \dots + \varepsilon'_j 2^{-p-j}. \end{aligned}$$

注意 $s = s_\ell, t = t_m$ 。对点对 $(s_0, t_0), (s_{i-1}, s_i) (1 \leq i \leq \ell)$ 和 $(t_{j-1}, t_j) (1 \leq j \leq m)$ 逐一应用引理假设和三角不等式, 得到

$$\begin{aligned} d(f(s), f(t)) &\leq d(f(s_0), f(t_0)) + \sum_{i=1}^{\ell} d(f(s_{i-1}), f(s_i)) + \sum_{j=1}^m d(f(t_{j-1}), f(t_j)) \\ &\leq K2^{-p\alpha} + \sum_{i=1}^{\ell} K2^{-(p+i)\alpha} + \sum_{j=1}^m K2^{-(p+j)\alpha} \\ &\leq \frac{2K}{1-2^{-\alpha}} 2^{-p\alpha} \leq \frac{2K}{1-2^{-\alpha}} (t-s)^\alpha. \end{aligned}$$

最后一步使用了 $2^{-p} \leq t - s$ 。引理得证。□

现在把定理 2.9 应用于预布朗运动。

推论 2.11。 设 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ 是预布朗运动。则 B 存在样本路径连续的修正; 更强地, 对每个 $\delta \in (0, 1/2)$, 该修正的样本路径局部 $(1/2 - \delta)$ -Hölder 连续。

证明。 若 $s < t$, 则 $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, 因而与 $\sqrt{t - s}U$ 同分布, 其中 $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 。所以对每个 $q > 0$,

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^q] = (t - s)^{q/2} \mathbb{E}[|U|^q] = C_q (t - s)^{q/2},$$

其中 $C_q = \mathbb{E}[|U|^q] < \infty$ 。取 $q > 2$, 可在定理 2.9 中令 $\varepsilon = q/2 - 1$ 。于是 B 有一个修正, 其样本路径对每个

$$\alpha < \frac{q-2}{2q}$$

都局部 α -Hölder 连续。令 q 充分大, α 可以任意接近 $1/2$ 。□

定义 2.12. 若过程 $(B_t)_{t \geq 0}$ 满足:

- (i) $(B_t)_{t \geq 0}$ 是预布朗运动;
 - (ii) B 的所有样本路径连续,
- 则称 $(B_t)_{t \geq 0}$ 为**布朗运动**。

严格地说, 这是从 0 出发的一维 (或线性) 布朗运动的定义。任意初值以及高维情形将在后文讨论。推论 2.11 说明上述布朗运动存在: 从预布朗运动出发, 取其连续修正; 这个修正仍是预布朗运动。以后不再讨论预布朗运动, 而只研究布朗运动。

还应注意: 命题 2.5 中把“预布朗运动”全部换成“布朗运动”, 结论仍原样成立。事实上, 若 B 的样本路径连续, 则该命题中的 $-B$ 、 B^λ 、 $B^{(s)}$ 显然也都有连续样本路径。

Wiener 测度。 记 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 为从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}$ 的全体连续函数所成的空间。在其上赋予 σ -代数 $\mathcal{C}$: 它是使每个坐标映射

$$w \mapsto w(t), \quad t \geq 0,$$

可测的最小 σ -代数。也可以验证, $\mathcal{C}$ 正是由“在每个紧集上一致收敛”的拓扑所生成的 Borel σ -代数。

给定布朗运动 B , 考虑映射

$$\Omega \longrightarrow C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad \omega \mapsto (t \mapsto B_t(\omega)).$$

这个映射可测: 与任一坐标映射 $w \mapsto w(t)$ 复合后就是随机变量 B_t , 而一个简单论证说明这已经足以保证所需可测性。

概率测度 $\mathbb{P}(d\omega)$ 在上述映射下的像测度, 称为 **Wiener 测度** (或布朗运动的分布), 记为 $W(dw)$ 。因此 W 是 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 上的概率测度; 对每个 $\mathcal{C}$ -可测集 A ,

$$W(A) = \mathbb{P}(B_\bullet \in A),$$

其中右端的 $B_\bullet$ 表示随机连续函数 $t \mapsto B_t(\omega)$ 。

对柱集

$$A = \{w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) : w(t_0) \in A_0, \dots, w(t_n) \in A_n\},$$

其中 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, 且 $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 推论 2.4 给出

$$\begin{aligned} W(w(t_0) \in A_0, \dots, w(t_n) \in A_n) &= \mathbb{P}(B_{t_0} \in A_0, \dots, B_{t_n} \in A_n) \\ &= 1_{A_0}(0) \int_{A_1 \times \dots \times A_n} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1})}} \\ &\quad \times \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right), \end{aligned}$$

其中仍约定 $x_0 = 0$ 。

这个柱集公式唯一刻画概率测度 W 。事实上, 柱集类对有限交封闭并生成 $\mathcal{C}$, 附录 A1 的标准单调类论证说明, 一个概率测度由它在这类集合上的值唯一确定。一个重要而幸运的是: Wiener 测度的定义与所选布朗运动 B 无关; 布朗运动的分布是唯一确定的。

若 B' 是另一个布朗运动, 则对每个 $A \in \mathcal{C}$,

$$\mathbb{P}(B'_\bullet \in A) = W(A) = \mathbb{P}(B_\bullet \in A).$$

也就是说, 对应于 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 中可测集的任一样本路径性质, 在 B 和 B' 下发生的概率相同。后文将反复使用这一观察, 尤其见命题 2.14 证明的第二部分。

最后, 特取概率空间

$$\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad \mathcal{F} = \mathcal{C}, \quad \mathbb{P}(dw) = W(dw).$$

在这个空间上, **典范过程**

$$X_t(w) = w(t)$$

是布朗运动: 样本路径连续显然成立, 而前述柱集公式说明 X 具有正确的有限维边缘分布。这就是布朗运动的典范构造。

2.3 布朗样本路径的性质

本节研究布朗运动样本路径的若干性质。固定一个布朗运动 $(B_t)_{t \geq 0}$, 并对每个 $t \geq 0$ 令

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : s \leq t).$$

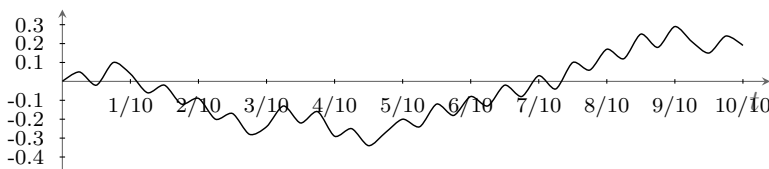


图 2.1 时间区间 $[0, 1]$ 上一条布朗样本路径的模拟。

当 $s \leq t$ 时, 显然 $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ 。再令

$$\mathcal{F}_{0+} = \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s.$$

先给出一个有用的 0-1 律。

定理 2.13 (Blumenthal 0-1 律)。 σ -代数 $\mathcal{F}_{0+}$ 是平凡的, 即对每个 $A \in \mathcal{F}_{0+}$,

$$\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}.$$

证明。 取 $0 < t_1 < \dots < t_k$, 并令 $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ 为有界连续函数。再固定 $A \in \mathcal{F}_{0+}$ 。由连续性,

$$\mathbb{E}[1_A g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}[1_A g(B_{t_1} - B_\varepsilon, \dots, B_{t_k} - B_\varepsilon)].$$

当 $0 < \varepsilon < t_1$ 时, 由命题 2.5 的简单马尔可夫性质, 随机向量 $(B_{t_1} - B_\varepsilon, \dots, B_{t_k} - B_\varepsilon)$ 与 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 独立, 因而也与 $\mathcal{F}_{0+}$ 独立。所以

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[1_A g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})] &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}(A) \mathbb{E}[g(B_{t_1} - B_\varepsilon, \dots, B_{t_k} - B_\varepsilon)] \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{E}[g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})]. \end{aligned}$$

这说明 $\mathcal{F}_{0+}$ 与 $\sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$ 独立。该结论对任意有限个正实数指标成立, 故 $\mathcal{F}_{0+}$ 与 $\sigma(B_t : t > 0)$ 独立。又因为 $B_0 = \lim_{t \downarrow 0} B_t$,

$$\sigma(B_t : t > 0) = \sigma(B_t : t \geq 0).$$

而 $\mathcal{F}_{0+} \subset \sigma(B_t : t \geq 0)$, 所以 $\mathcal{F}_{0+}$ 与自身独立。因此对 $A \in \mathcal{F}_{0+}$, 有 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$, 结论成立。□

命题 2.14。

(i) 几乎必然地, 对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s > 0, \quad \inf_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s < 0.$$

(ii) 对每个 $a \in \mathbb{R}$, 令

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\},$$

并约定 $\inf \emptyset = \infty$ 。则几乎必然地,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad T_a < \infty.$$

因而几乎必然有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = +\infty, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} B_t = -\infty.$$

注。 $\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s$ 的可测性并非先验显然, 因为这是不可数族随机变量的上确界。但由样本路径连续性, 可以把上确界限制到 $[0, \varepsilon]$ 中的有理数指标, 于是它成为可数族随机变量的上确界。后文将默认使用这类观察。

证明。 (i) 取严格递减到 0 的正数列 (ε_p) , 并令

$$A = \bigcap_p \left\{ \sup_{0 \leq s \leq \varepsilon_p} B_s > 0 \right\}.$$

这是单调递减的交, 容易看出 $A \in \mathcal{F}_{0+}$: 对任意 $p_0 \geq 1$, 可把交限制为 $p \geq p_0$ 。另一方面,

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{p \rightarrow \infty} \downarrow \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon_p} B_s > 0 \right),$$

且

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon_p} B_s > 0 \right) \geq \mathbb{P}(B_{\varepsilon_p} > 0) = \frac{1}{2}.$$

所以 $\mathbb{P}(A) \geq 1/2$ 。由定理 2.13, $\mathbb{P}(A) = 1$, 从而几乎必然地对每个 $\varepsilon > 0$, $\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s > 0$ 。把 B 换成 $-B$, 即得关于下确界的断言。

(ii) 先写成

$$1 = \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq 1} B_s > 0 \right) = \lim_{\delta \downarrow 0} \uparrow \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq 1} B_s > \delta \right).$$

对每个 $\delta > 0$, 利用命题 2.5 (ii) 的尺度不变性, 并沿用其中 $B_s^\delta = \delta^{-1} B_{\delta^2 s}$ 的记号, 得到

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq 1} B_s > \delta \right) &= \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq 1/\delta^2} B_s^\delta > 1 \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq 1/\delta^2} B_s > 1 \right). \end{aligned}$$

第二个等式使用了 Wiener 测度定义后的说明: 该事件的概率对任意布朗运动都相同。令 $\delta \downarrow 0$, 得到

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s \geq 0} B_s > 1 \right) = 1.$$

再作一次尺度变换可知, 对每个 $M > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \geq 0} B_s > M\right) = 1.$$

把 B 换成 $-B$, 还得到

$$\mathbb{P}\left(\inf_{s \geq 0} B_s < -M\right) = 1.$$

由可数个整数 M 同时取交, 再利用样本路径连续性, (ii) 中的所有断言随即成立。最后, 连续函数 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 若遍历每个实数, 就必有 $\limsup_{t \rightarrow \infty} f(t) = +\infty$ 与 $\liminf_{t \rightarrow \infty} f(t) = -\infty$ 。□

推论 2.15。 几乎必然地, 函数 $t \mapsto B_t$ 在任何非退化区间上都不单调。

证明。 由命题 2.14 (i) 和简单马尔可夫性质, 立即得到: 几乎必然地, 对每个有理数 $q \in \mathbb{Q}_+$ 和每个 $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{q \leq t \leq q+\varepsilon} B_t > B_q, \quad \inf_{q \leq t \leq q+\varepsilon} B_t < B_q.$$

结论随即成立。这里只取有理数 q , 是为了只排除可数并的零测集; 若对所有实数 q 都作上述断言, 结果反而不成立。□

命题 2.16。 设

$$0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$$

是一列 $[0, t]$ 的分割, 并且网格趋于 0, 即

$$\sup_{1 \leq i \leq p_n} (t_i^n - t_{i-1}^n) \rightarrow 0.$$

则

$$\sum_{i=1}^{p_n} (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \rightarrow t$$

在 L^2 中成立。

证明。 记 G 为与 B 相联系的高斯白噪声。因为

$$B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n} = G((t_{i-1}^n, t_i^n]),$$

结论就是命题 1.14 的直接推论。□

设 $a < b$, f 是 $[a, b]$ 上的实函数。若对所有分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b$ 而言, 数量

$$\sum_{i=1}^p |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

的上确界为 $+\infty$, 则称 f 在 $[a, b]$ 上具有**无穷变差**。

推论 2.17。 几乎必然地, 函数 $t \mapsto B_t$ 在任何非退化区间上都具有无穷变差。

证明。 由简单马尔可夫性质, 只需对固定的 $t > 0$ 考虑区间 $[0, t]$ 。使用命题 2.16; 抽取一个子列后, 可以假设该命题中的收敛几乎必然成立。再注意

$$\sum_{i=1}^{p_n} (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \leq \left(\sup_{1 \leq i \leq p_n} |B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}| \right) \sum_{i=1}^{p_n} |B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}|.$$

由样本路径连续性, 括号中的上确界趋于 0; 左端则几乎必然趋于 t 。所以 $\sum_i |B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}|$ 几乎必然趋于 $+\infty$, 结论成立。□

上一推论说明, 不能把 $\int_0^t f(s) dB_s$ 定义成关于有限变差函数的通常 Stieltjes 积分的特例。有限变差函数的积分将在第 4.1.1 节简要介绍; 另见第 2.1 节末的说明。

2.4 布朗运动的强马尔可夫性质

本节要把简单马尔可夫性质 (命题 2.5 (iii)) 推广到把确定时刻 s 换成随机时刻 T 的情形。为此, 首先要说明哪些随机时刻是允许的。仍固定一个布朗运动 $(B_t)_{t \geq 0}$, 沿用上一节的记号 $\mathcal{F}_t$, 并令

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(B_s : s \geq 0).$$

定义 2.18. 取值于 $[0, \infty]$ 的随机变量 T 称为**停时**, 如果对每个 $t \geq 0$,

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

这里允许 T 取值 ∞ , 这一点很重要。若 T 是停时, 则对每个 $t > 0$, 还有

$$\{T < t\} = \bigcup_{q \in [0, t) \cap \mathbb{Q}} \{T \leq q\} \in \mathcal{F}_t.$$

例. 常值随机变量 $T = t$ 以及到达时刻 $T = T_a$ 都是停时; 注意

$$\{T_a \leq t\} = \left\{ \inf_{0 \leq s \leq t} |B_s - a| = 0 \right\}.$$

另一方面, $T = \sup\{s \leq 1 : B_s = 0\}$ 不是停时: 若反设它是停时, 则由下述强马尔可夫性质和命题 2.14 可得矛盾。若 T 是停时, 则对每个 $t \geq 0$, $T + t$ 仍是停时。

定义 2.19. 设 T 是停时。 T 之前的过去所生成的 σ -代数定义为

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

容易验证 $\mathcal{F}_T$ 确为 σ -代数, 而且随机变量 T 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的。此外, 把实随机变量 $1_{\{T < \infty\}} B_T$ 定义为

$$1_{\{T < \infty\}} B_T(\omega) = \begin{cases} B_{T(\omega)}(\omega), & T(\omega) < \infty, \\ 0, & T(\omega) = \infty, \end{cases}$$

则它也是 $\mathcal{F}_T$ -可测的。事实上, 先注意

$$\begin{aligned} 1_{\{T < \infty\}} B_T &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} 1_{\{i2^{-n} \leq T < (i+1)2^{-n}\}} B_{i2^{-n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} 1_{\{T < (i+1)2^{-n}\}} 1_{\{i2^{-n} \leq T\}} B_{i2^{-n}}. \end{aligned}$$

再者, 对任意 $s \geq 0$, $B_s 1_{\{s \leq T\}}$ 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的。为说明这一点, 设 A 是不含 0 的 Borel 集 (含 0 的情形可转而考虑补事件), 则

$$\{B_s 1_{\{s \leq T\}} \in A\} \cap \{T \leq t\} = \begin{cases} \emptyset, & t < s, \\ \{B_s \in A\} \cap \{s \leq T \leq t\}, & t \geq s. \end{cases}$$

两种情形下右端都属于 $\mathcal{F}_t$, 其中 $\{s \leq T \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{T < s\}^c$ 。

定理 2.20 (强马尔可夫性质)。设 T 是停时, 并假设 $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$ 。对每个 $t \geq 0$, 令

$$B_t^{(T)} = 1_{\{T < \infty\}}(B_{T+t} - B_T).$$

则在条件概率测度 $\mathbb{P}(\cdot | T < \infty)$ 下, 过程 $(B_t^{(T)})_{t \geq 0}$ 是一个与 $\mathcal{F}_T$ 独立的布朗运动。

证明。先设 $T < \infty$ 几乎必然成立。固定 $A \in \mathcal{F}_T$, $0 \leq t_1 < \dots < t_p$, 并令 $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为有界连续函数。我们将验证

$$\mathbb{E}[1_A F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)})] = \mathbb{P}(A) \mathbb{E}[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_p})]. \quad (2.1)$$

定理的各项断言由此推出。取 $A = \Omega$, 可知 $B^{(T)}$ 与 B 的有限维边缘分布相同; 又因 $B^{(T)}$ 的样本路径连续, 故它是布朗运动。式 (2.1) 还说明, 对任意 $0 \leq t_1 < \dots < t_p$, 向量 $(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)})$ 与 $\mathcal{F}_T$ 独立, 进而整个过程 $B^{(T)}$ 与 $\mathcal{F}_T$ 独立。

下面证明 (2.1)。对整数 $n \geq 1$ 和 $t \geq 0$, 记 $[t]_n$ 为区间 $[t, \infty)$ 中形如 $k2^{-n}$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) 的最小实数, 并约定 $[\infty]_n = \infty$ 。由样本路径连续性, 几乎必然有

$$F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(B_{[t_1]_n}^{(T)}, \dots, B_{[t_p]_n}^{(T)}).$$

利用控制收敛定理, 并按 $[T]_n$ 的所有可能取值分解期望, 得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[1_A F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[1_A 1_{\{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\}} F(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \dots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}})]. \end{aligned}$$

关键在于, 由 $A \in \mathcal{F}_T$, 事件

$$A \cap \{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\} = (A \cap \{T \leq k2^{-n}\}) \cap \{T \leq (k-1)2^{-n}\}^c$$

属于 $\mathcal{F}_{k2^{-n}}$ 。于是由简单马尔可夫性质 (命题 2.5 (iii)), 上式求和中的每一项等于

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A \cap \{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\}) \\ & \times \mathbb{E}[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_p})]. \end{aligned}$$

对 k 求和即得 (2.1)。

若 $\mathbb{P}(T = \infty) > 0$, 同样的论证给出

$$\mathbb{E}[1_{A \cap \{T < \infty\}} F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)})] = \mathbb{P}(A \cap \{T < \infty\}) \mathbb{E}[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_p})],$$

所需结论仍立即成立。 □

强马尔可夫性质的一个重要应用是“反射原理”。

定理 2.21 (反射原理)。对每个 $t > 0$, 令

$$S_t = \sup_{s \leq t} B_s.$$

若 $a \geq 0$, $b \in (-\infty, a]$, 则

$$\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b).$$

特别地, S_t 与 $|B_t|$ 同分布。

证明。 在停时

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$$

处应用强马尔可夫性质。命题 2.14 已说明 $T_a < \infty$ 几乎必然成立。沿用定理 2.20 的记号,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) &= \mathbb{P}(T_a \leq t, B_t \leq b) \\ &= \mathbb{P}(T_a \leq t, B_{t-T_a}^{(T_a)} \leq b-a), \end{aligned}$$

因为在 $\{T_a \leq t\}$ 上, $B_{t-T_a}^{(T_a)} = B_t - B_{T_a} = B_t - a$ 。记 $B' = B^{(T_a)}$ 。由定理 2.20, B' 是与 $\mathcal{F}_{T_a}$ (从而与 T_a) 独立的布朗运动。又因 B' 与 $-B'$ 同分布, 二元组 (T_a, B') 与 $(T_a, -B')$ 同分布; 这个共同分布就是 T_a 的分布与 Wiener 测度的乘积。令

$$H = \{(s, w) \in \mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) : s \leq t, w(t-s) \leq b-a\}.$$

则上面的概率等于

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((T_a, B') \in H) &= \mathbb{P}((T_a, -B') \in H) \\ &= \mathbb{P}(T_a \leq t, -B_{t-T_a}^{(T_a)} \leq b-a) \\ &= \mathbb{P}(T_a \leq t, B_t \geq 2a-b) \\ &= \mathbb{P}(B_t \geq 2a-b). \end{aligned}$$

最后一个等式用到了事件 $\{B_t \geq 2a-b\}$ 几乎必然包含在 $\{T_a \leq t\}$ 中。

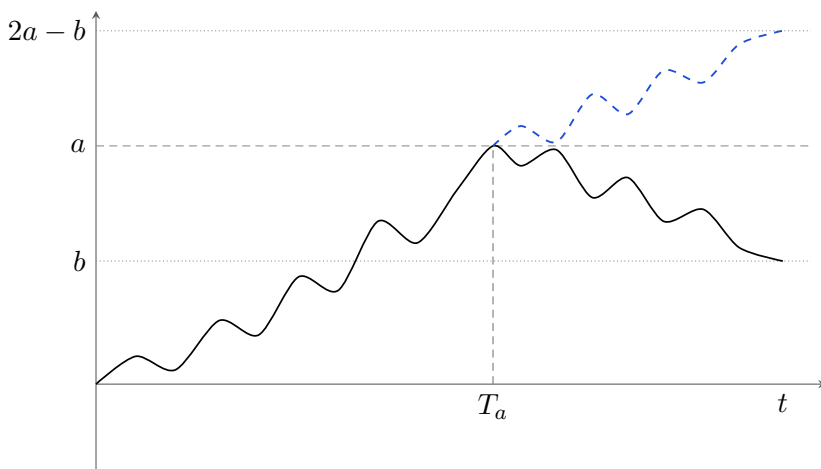


图 2.2 反射原理示意图: 在已知 $\{T_a \leq t\}$ 时, 原路径在时刻 t 位于 b 以下的条件概率, 等于路径从 T_a 起关于水平线 a 反射后 (虚线) 在时刻 t 位于 $2a-b$ 以上的条件概率。

最后, 对 $a \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_t \geq a) &= \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \geq a) + \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq a) \\ &= 2\mathbb{P}(B_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a), \end{aligned}$$

故 S_t 与 $|B_t|$ 同分布。 □

由上一定理可知, 二元组 (S_t, B_t) 的分布具有密度

$$g(a, b) = \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) 1_{\{a>0, b<a\}}. \quad (2.2)$$

推论 2.22. 对每个 $a > 0$, T_a 与 a^2/B_1^2 同分布, 并具有密度

$$f(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) 1_{\{t>0\}}.$$

证明. 由定理 2.21, 对每个 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_a \leq t) &= \mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a) = \mathbb{P}(B_t^2 \geq a^2) \\ &= \mathbb{P}(tB_1^2 \geq a^2) = \mathbb{P}\left(\frac{a^2}{B_1^2} \leq t\right). \end{aligned}$$

又因 $B_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 直接作变量替换即可得到 a^2/B_1^2 的上述密度。 $\square$

注. 由 T_a 的密度形式立即得到

$$\mathbb{E}[T_a] = \infty.$$

最后把布朗运动的定义推广到任意 (可能随机的) 初值以及任意维数。

定义 2.23. 若 Z 是实随机变量, 且过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 可写成

$$X_t = Z + B_t,$$

其中 B 是从 0 出发并与 Z 独立的实布朗运动, 则称 X 是从 Z 出发的实布朗运动。

定义 2.24. 取值于 $\mathbb{R}^d$ 的随机过程

$$B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$$

称为从 0 出发的 d 维布朗运动, 如果各分量 $B^1, \dots, B^d$ 是相互独立、从 0 出发的实布朗运动。若 Z 是取值于 $\mathbb{R}^d$ 的随机变量, 且取值于 $\mathbb{R}^d$ 的过程 $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ 可写成

$$X_t = Z + B_t,$$

其中 B 是从 0 出发并与 Z 独立的 d 维布朗运动, 则称 X 是从 Z 出发的 d 维布朗运动。

注意, 若 X 是初值随机的 d 维布朗运动, 则 X 的各分量未必独立, 因为随机初值可能引入依赖关系; 若初值是确定的, 则不会出现这种现象。

与第 2.2 节末完全类似, 把从 0 出发的 d 维布朗运动在 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ 上的分布称为 d 维 Wiener 测度。第 2.2 节的典范构造也适用于 d 维布朗运动。

前面的许多结果都能推广到任意起点的 d 维布朗运动。特别地, 命题 2.5 的不变性在作显然调整后仍成立; 其中 (i) 还可推广为: 若 X 是 d 维布朗运动, Φ 是 $\mathbb{R}^d$ 的等距变换, 则 $(\Phi(X_t))_{t \geq 0}$ 仍是 d 维布朗运动。Wiener 测度的构造和 Blumenthal 0-1 律也很容易推广。强马尔可夫性质同样成立: 若 T 是停时 (定义 2.18 的自然推广) 且 $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$, 则在条件概率测度 $\mathbb{P}(\cdot | T < \infty)$ 下, 过程

$$X_t^{(T)} = X_{T+t} - X_T, \quad t \geq 0,$$

是一个从 0 出发、与 $\mathcal{F}_T$ 独立的 d 维布朗运动。只需对定理 2.20 的证明作相应调整即可。

练习

以下各题中, $(B_t)_{t \geq 0}$ 均表示从 0 出发的实布朗运动, 并令

$$S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s.$$

练习 2.25 (时间反演)。

1. 定义 $W_0 = 0$, 并对 $t > 0$ 定义 $W_t = tB_{1/t}$ 。证明 $(W_t)_{t \geq 0}$ 与一个从 0 出发的实布朗运动不可区分。(提示: 先验证 W 是预布朗运动。)
2. 推出

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad \text{几乎必然.}$$

解答 2.25。 有限维线性组合表明 W 是中心高斯过程。对 $s, t > 0$,

$$\mathbb{E}[W_s W_t] = st \mathbb{E}[B_{1/s} B_{1/t}] = st \left(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t} \right) = s \wedge t,$$

而 $\mathbb{E}[W_0 W_t] = 0$ 。故 W 是预布朗运动, 只需检查它在 0 处有连续修正。由独立同分布增量的强大数律, $B_n/n \rightarrow 0$ a.s.。再由 Kolmogorov 最大不等式,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{n \leq t \leq n+1} |B_t - B_n| \geq n^{2/3} \right) \leq n^{-4/3}.$$

Borel–Cantelli 引理于是给出

$$\sup_{n \leq t \leq n+1} \frac{|B_t|}{t} \leq \frac{|B_n|}{n} + n^{-1/3} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

因此当 $t \downarrow 0$ 时, $W_t = tB_{1/t} \rightarrow 0 = W_0$ a.s.。在这个概率为 1 的事件外把整条路径改为零, 即得与 W 不可分辨的连续版本; 其协方差为 $s \wedge t$, 所以它是从 0 出发的布朗运动。□

练习 2.26。 对每个实数 $a \geq 0$, 令

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}.$$

证明过程 $(T_a)_{a \geq 0}$ 具有平稳独立增量: 对每个 $0 \leq a \leq b$, 随机变量 $T_b - T_a$ 与 $\sigma(T_c : 0 \leq c \leq a)$ 独立, 并且与 T_{b-a} 同分布。

解答 2.26。 固定 $0 \leq a < b$ 。由强马尔可夫性质,

$$\tilde{B}_t := B_{T_a+t} - B_{T_a}, \quad t \geq 0,$$

是与 $\mathcal{F}_{T_a}$ 独立的布朗运动。由于 $T_a < \infty$ a.s. 且连续路径从 a 到达 b 必须发生在 T_a 之后,

$$T_b - T_a = \inf\{t \geq 0 : \tilde{B}_t = b - a\}.$$

右端与 T_{b-a} 同分布, 并且与 $\mathcal{F}_{T_a}$ 独立。对 $c \leq a$, 有 $T_c \leq T_a$, 从而 T_c 是 $\mathcal{F}_{T_a}$ -可测的; 单调类论证给出 $\sigma(T_c : 0 \leq c \leq a) \subset \mathcal{F}_{T_a}$ 。所以 $T_b - T_a$ 与该 σ -代数独立, 结论成立。□

练习 2.27 (布朗桥)。 对每个 $t \in [0, 1]$, 令 $W_t = B_t - tB_1$ 。

1. 证明 $(W_t)_{t \in [0, 1]}$ 是中心高斯过程, 并求出它的协方差函数。
2. 设 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < 1$ 。证明 $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_p})$ 的分布具有密度

$$g(x_1, \dots, x_p) = \sqrt{2\pi} p_{t_1}(x_1) p_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \cdots \\ \times p_{t_p-t_{p-1}}(x_p - x_{p-1}) p_{1-t_p}(-x_p),$$

其中

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right).$$

说明为什么这个分布可以解释为: 在已知 $B_1 = 0$ 的条件下, $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_p})$ 的条件分布。

3. 验证过程 $(W_t)_{t \in [0, 1]}$ 与 $(W_{1-t})_{t \in [0, 1]}$ 同分布。与 Wiener 测度的定义类似, 这里所说的分布是 $[0, 1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的全体连续函数所成空间上的概率测度。

解答 2.27。

1. $W_t = B_t - tB_1$ 是中心高斯过程, 且

$$\mathbb{E}[W_s W_t] = s \wedge t - st, \quad s, t \in [0, 1].$$

2. 令 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = 1$ 。布朗增量的联合密度为 $\prod_{i=1}^{m+1} p_{t_i-t_{i-1}}(x_i - x_{i-1})$ 。作变量代换 $y_i = x_i - t_i x_{m+1}$ ($1 \leq i \leq m$), $y_{m+1} = x_{m+1}$ 。指数中的交叉项望远镜相消, 积分掉 y_{m+1} 后得到

$$g(y_1, \dots, y_m) = \sqrt{2\pi} p_{t_1}(y_1) \prod_{i=2}^m p_{t_i-t_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) p_{1-t_m}(-y_m).$$

另一方面, 给定 $B_1 = z$ 时的条件密度等于

$$\frac{p_{t_1}(x_1) \cdots p_{t_m-t_{m-1}}(x_m - x_{m-1}) p_{1-t_m}(z - x_m)}{p_1(z)}.$$

令 $z = 0$ 即为 g 。这正说明布朗桥是“给定 $B_1 = 0$ ”的布朗运动; 严格地说, 也可将其理解为条件于 $|B_1| \leq \varepsilon$ 后令 $\varepsilon \downarrow 0$ 的弱极限。

3. 过程 W 与 $t \mapsto W_{1-t}$ 都是连续中心高斯过程, 而且

$$\mathbb{E}[W_{1-s} W_{1-t}] = (1-s) \wedge (1-t) - (1-s)(1-t) = s \wedge t - st.$$

因而二者有限维分布相同; 连续性把这一结论提升为 $C([0, 1])$ 上的分布相同。

□

练习 2.28 (布朗路径的局部极大值)。 证明几乎必然地, 布朗运动的各个局部极大值互不相同。更明确地说, 几乎必然对任意满足 $p < q < r < s$ 的非负有理数 p, q, r, s , 都有

$$\sup_{p \leq t \leq q} B_t \neq \sup_{r \leq t \leq s} B_t.$$

解答 2.28。 固定有理数 $0 \leq p < q < r < s$, 令

$$X = \sup_{p \leq t \leq q} B_t - B_r, \quad Y = \sup_{r \leq t \leq s} B_t - B_r.$$

X 只由 r 以前的增量决定, Y 只由 r 以后的增量决定, 所以二者独立。由反射原理, Y 与 $|B_{s-r}|$ 同分布, 故其分布无原子。因此

$$\mathbb{P}\left(\sup_{p \leq t \leq q} B_t = \sup_{r \leq t \leq s} B_t\right) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(Y = x) \mathbb{P}_X(dx) = 0.$$

对可数个有理四元组取并, 仍为零概率事件。任意两个不同的局部极大点都可分别置于两个不交的有理闭区间内, 并在各自区间上达到最大值; 故几乎必然地, 两个局部极大值不可能相同。 $\square$

练习 2.29 (不可微性)。 利用 0-1 律证明, 几乎必然有

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty, \quad \liminf_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty.$$

推出: 对每个 $s \geq 0$, 函数 $t \mapsto B_t$ 几乎必然在 s 处不存在右导数。

解答 2.29。 固定 $M > 0$ 。事件

$$A_M = \left\{ \limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} \geq M \right\}$$

属于 $\mathcal{F}_{0+}$ 。又由 Fatou 引理和尺度不变性,

$$\mathbb{P}(A_M) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sqrt{n} B_{1/n} \geq M) = \mathbb{P}(N \geq M) > 0.$$

Blumenthal 零一律于是给出 $\mathbb{P}(A_M) = 1$ 。令 M 依次取正整数, 并对 $-B$ 作同样论证, 得到

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty, \quad \liminf_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \quad \text{a.s.}$$

固定 $s \geq 0$ 时, $(B_{s+t} - B_s)_{t \geq 0}$ 又是布朗运动, 因而

$$\frac{B_{s+t} - B_s}{t} = \frac{B_{s+t} - B_s}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

的上极限为 $+\infty$ 、下极限为 $-\infty$ 。所以右导数几乎必然不存在。 $\square$

练习 2.30 (布朗运动的零点集)。 令

$$H = \{t \in [0, 1] : B_t = 0\}.$$

利用命题 2.14 和强马尔可夫性质证明: 几乎必然地, H 是 $[0, 1]$ 的一个无孤立点且 Lebesgue 测度为零的紧子集。

解答 2.30。 由路径连续性, $H = B^{-1}(\{0\}) \cap [0, 1]$ 是闭集, 因而是紧集。Tonelli 定理给出

$$\mathbb{E}[\lambda(H)] = \int_0^1 \mathbb{P}(B_t = 0) dt = 0,$$

所以 $\lambda(H) = 0$ a.s.

再证没有孤立点。对有理数 $q \in [0, 1)$, 令

$$T_q = \inf\{t \geq q : B_t = 0\}.$$

在 $\{T_q < 1\}$ 上, 强马尔可夫性质与布朗运动在 0 附近的立即振荡性说明: 对每个 $\varepsilon > 0$, 区间 $(T_q, T_q + \varepsilon)$ 中还有零点。因此每个 T_q 都不是孤立点。若 $t \in H$ 不是某个 T_q , 取有理数 $q_n \uparrow t$, 则 $q_n \leq T_{q_n} \leq t$, 并可选使 $T_{q_n} < t$; 于是 $T_{q_n} \uparrow t$ 。故 t 也不是孤立点。只涉及可数个有理数, 以上结论可在同一个概率为 1 的事件上成立。□

练习 2.31 (时间反转)。 对每个 $t \in [0, 1]$, 令

$$B'_t = B_1 - B_{1-t}.$$

证明过程 $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ 与 $(B'_t)_{t \in [0, 1]}$ 同分布。与 Wiener 测度的定义一样, 这里的分布是 $[0, 1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的全体连续函数所成空间上的概率测度。

解答 2.31。 $B'_t = B_1 - B_{1-t}$ 是连续中心高斯过程。对 $0 \leq s \leq t \leq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B'_s B'_t] &= \mathbb{E}[(B_1 - B_{1-s})(B_1 - B_{1-t})] \\ &= 1 - (1-s) - (1-t) + (1-t) = s = s \wedge t. \end{aligned}$$

所以 B' 与 B 的协方差函数相同, 中心高斯性给出相同的有限维分布; 连续路径又说明它们在 $C([0, 1])$ 上的分布相同。□

练习 2.32 (反正弦律)。 令

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t = S_1\}.$$

1. 证明 $T < 1$ 几乎必然成立 (可以使用上一题的结果), 再证明 T 不是停时。
2. 验证三个随机变量 S_t , $S_t - B_t$ 与 $|B_t|$ 同分布。
3. 证明 T 服从所谓的反正弦律, 其密度为

$$g(t) = \frac{1}{\pi \sqrt{t(1-t)}} 1_{(0,1)}(t).$$

4. 证明: 若以

$$L = \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$$

代替 T , 第 1、3 问的结论仍成立。

解答 2.32。

1. 由练习 2.28, 区间 $[0, 1]$ 上的最大值几乎必然只在一个时刻取得。时间反转过程 $B_1 - B_{1-t}$ 在 0 的任意右邻域内同时取正、负值, 故最大时刻不可能为 1, 即 $T < 1$ a.s.。若 T 是

停时，则强马尔可夫性质使 $B_{T+t} - B_T$ 成为布朗运动；但由 T 的定义，它在某个非平凡右邻域内恒不为正，与布朗运动在 0 附近的立即振荡性矛盾。因此 T 不是停时。

2. 反射原理给出 $S_t \stackrel{d}{=} |B_t|$ 。时间反转与对称性又给出

$$S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s \stackrel{d}{=} \sup_{0 \leq s \leq t} (B_s - B_t) = S_t - B_t.$$

3. 固定 $0 < r < 1$ 。最大值唯一性、 r 前后增量的独立性及第 2 问说明，若 Z_1, Z_2 独立且服从 $\mathcal{N}(0, 1)$ ，则

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T < r) &= \mathbb{P}(\sqrt{r}|Z_1| > \sqrt{1-r}|Z_2|) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{Z_2^2}{Z_1^2 + Z_2^2} < r\right). \end{aligned}$$

用二维标准高斯向量的极坐标表示可知 $Z_2^2/(Z_1^2 + Z_2^2)$ 的密度为

$$\frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}} 1_{(0,1)}(t).$$

4. 令 $L(f) = \sup\{t \leq 1 : f(t) = f(0)\}$ 。由第 2 问的过程版本 $(S_t - B_t)_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (|B_t|)_{t \geq 0}$ ，最大时刻 T 对应于过程 $S - B$ 最后一次为零的时刻，故 $L \stackrel{d}{=} T$ 。因此 $L < 1$ a.s. 且服从同一反正弦律。若 L 是停时，则 L 后的布朗运动会以 0 为孤立零点，与练习 2.30 矛盾，故 L 也不是停时。

□

练习 2.33 (重对数律)。 本题的目标是证明

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad \text{几乎必然.}$$

记 $h(t) = \sqrt{2t \log \log t}$ 。

1. 证明：对每个 $t > 0$ ，当 $u \rightarrow +\infty$ 时，

$$\mathbb{P}(S_t > u\sqrt{t}) \sim \frac{2}{u\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}.$$

2. 设 r, c 为满足 $1 < r < c^2$ 的实数。研究 $n \rightarrow \infty$ 时概率 $\mathbb{P}(S_{r^n} > ch(r^{n-1}))$ 的行为，并推出几乎必然有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} \leq 1.$$

3. 证明几乎必然存在无穷多个 n ，使

$$B_{r^n} - B_{r^{n-1}} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} h(r^n).$$

进而证明题首的结论。

4. 求

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}}$$

的值。

解答 2.33。 记 $h(t) = \sqrt{2t \log \log t}$ (只考虑充分大的 t)。

1. 反射原理和标准正态尾部等价式给出

$$\mathbb{P}(S_t > u\sqrt{t}) = 2\mathbb{P}(N > u) \sim \frac{2}{u\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}, \quad u \rightarrow \infty.$$

2. 取 $r > 1$ 和 $c > \sqrt{r}$ 。由第 1 问,

$$\mathbb{P}(S_{r^n} > ch(r^{n-1})) = O\left(\frac{n^{-c^2/r}}{\sqrt{\log n}}\right),$$

故概率之和有限。Borel–Cantelli 引理说明, 从某个 n 起 $S_{r^n} \leq ch(r^{n-1})$ 。当 $r^{n-1} \leq t \leq r^n$ 时,

$$\frac{B_t}{h(t)} \leq \frac{S_{r^n}}{h(r^{n-1})} \leq c.$$

先令 $c \downarrow \sqrt{r}$, 再令 $r \downarrow 1$, 得到 $\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t/h(t) \leq 1$ a.s.; 同样地, $\liminf_{t \rightarrow \infty} B_t/h(t) \geq -1$ a.s.

3. 增量 $\Delta_n = B_{r^n} - B_{r^{n-1}}$ 相互独立, 且

$$\sum_n \mathbb{P}\left(\Delta_n \geq \frac{r-1}{r} h(r^n)\right) = \infty,$$

因为相应正态尾部的主阶为 $n^{-(r-1)/r}/\sqrt{\log n}$ 。第二 Borel–Cantelli 引理说明上述不等式无穷多次成立。结合第 2 问对 $-B$ 的上界,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{r^n}}{h(r^n)} \geq \frac{r-1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

令 $r \rightarrow \infty$, 右端趋于 1, 故 $\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t/h(t) \geq 1$ 。与第 2 问合并即得题中重对数律。

4. 对布朗运动 $-B$ 应用同一结果, 得到

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = -1 \quad \text{a.s.}$$

□

注释与评述

Wiener 于 1923 年在文献 [81] 中首次严格构造了布朗运动。我们采用并不标准的“预布朗运动”一词, 是为了强调: 必须选取适当的修正, 才能得到具有连续样本路径的随机过程。有若干种从独立高斯随机变量序列出发构造布朗运动的方法, 能够直接得到路径连续性; 其中一个十分优美的方案是 Lévy 构造 (见习题 1.18), 可参阅文献 [49] 或 [62]。Lévy 构造避开了 Kolmogorov 引理, 不过本书后文还会在其他地方用到该引理。关于上文证明 Kolmogorov 引理时所用“链式方法”的深刻推广, 可参阅 Talagrand 的著作 [78]。

我们对一维布朗运动的许多认识来自 Lévy, 特别参见 [54, 第 VI 章]。也许令人意外的是, 布朗运动的强马尔可夫性质直到 20 世纪 50 年代才由 Hunt [32] 证明; 另见 Dynkin [19] 独立得到的更一般版本。在此之前, 包括 Lévy [54] 在内的一些作者已经使用过这一性质, 却没有给出严格证明。早在布朗运动获得严格构造之前, 反射原理及其推论就已经出现在 Bachelier 的博士论文 [2] 中; 该论文是金融数学的先驱性工作。Mörters 与 Peres 的著作 [62] 是研究布朗运动各类样本路径性质的优秀资料。

第三章 滤过与鞅

本章简要介绍带滤过概率空间上的连续时间随机过程理论。在此过程中，我们将推广上一章在布朗运动框架下引入的若干概念，并系统讨论停时。随后建立连续时间鞅的基本理论，特别是推导鞅的样本路径正则性结果。最后讨论鞅与上鞅的可选停时定理，并把这些结果用于显式计算若干与布朗运动有关的分布。

3.1 滤过与随机过程

本章始终考虑一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 。本节先引入后文反复使用的若干一般概念。

定义 3.1。 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一个**滤过**，是由 $[0, \infty]$ 标记的一族 $\mathcal{F}$ 的子 σ -代数

$$(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty},$$

并且对每个 $s \leq t \leq \infty$ ，都有

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

因此，对每个 $0 \leq s < t$ ，

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}.$$

也称 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ 为一个**带滤过概率空间**。

例。 若 B 是布朗运动，第 2 章所考虑的滤过为

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t), \quad \mathcal{F}_\infty = \sigma(B_s : s \geq 0).$$

更一般地，若 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 是任意以 $\mathbb{R}_+$ 为指标集的随机过程，则 X 的**自然滤过**定义为

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t), \quad \mathcal{F}_\infty^X = \sigma(X_s : s \geq 0).$$

设 $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的滤过。对每个 $t \geq 0$ ，令

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s,$$

并令 $\mathcal{F}_{\infty+} = \mathcal{F}_\infty$ 。注意，对每个 $t \in [0, \infty]$ ，都有 $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+}$ ，而且 $(\mathcal{F}_{t+})_{0 \leq t \leq \infty}$ 仍是一个滤过。若

$$\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0,$$

则称滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 是**右连续的**。按构造，滤过 $(\mathcal{F}_{t+})$ 总是右连续的。

设 $(\mathcal{F}_t)$ 是一个滤过，并令 $\mathcal{N}$ 为全体 $(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ -零测集组成的类；也就是说， $A \in \mathcal{N}$ 是指存在 $A' \in \mathcal{F}_\infty$ ，使

$$A \subset A', \quad \mathbb{P}(A') = 0.$$

若 $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ （从而对每个 t ，都有 $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_t$ ），则称该滤过是**完备的**。

若 $(\mathcal{F}_t)$ 不完备，可对每个 $t \in [0, \infty]$ 令

$$\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\mathcal{N})$$

来完成它。这里， $\mathcal{F}_t \vee \sigma(\mathcal{N})$ 表示同时包含 $\mathcal{F}_t$ 与 $\sigma(\mathcal{N})$ 的最小 σ -代数，而 $\sigma(\mathcal{N})$ 是由 $\mathcal{N}$ 生成的 σ -代数。

我们经常把这一完备化步骤用于随机过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的自然滤过，并把所得滤过称为 X 的**完备自然滤过**。读者容易验证：第 2 章中关于布朗运动自然滤过陈述的全部结果，在改用完备自然滤过后仍然成立。关键在于，向一个 σ -代数加入零测集不会改变独立性。

下面转向随机过程；本章中的随机过程均以 $\mathbb{R}_+$ 为指标集。

定义 3.2。 设过程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 取值于可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 。若映射

$$(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$$

从配备乘积 σ -代数 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 的 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 到 $(E, \mathcal{E})$ 可测，则称 X 是**可测过程**。

这里只要求“对每个 $t \geq 0$ ， X_t 是 $\mathcal{F}$ -可测的”还不够，定义 3.2 的条件更强。另一方面，例如当 $E = \mathbb{R}$ 时，很容易看出：若 X 的样本路径连续，甚至只需右连续，那么只要每个 X_t 都是 $\mathcal{F}$ -可测的， X 就是上述意义下的可测过程；参见下面命题 3.4 的证明。

本章余下部分固定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一个滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 。下面引入的概念都依赖于这个滤过的选择。

定义 3.3。 设随机过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 取值于可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 。若对每个 $t \geq 0$ ， X_t 都是 $\mathcal{F}_t$ -可测的，则称 X 对滤过 $(\mathcal{F}_t)$ **适应**。

若对每个 $t \geq 0$ ，映射

$$(\omega, s) \mapsto X_s(\omega), \quad (\omega, s) \in \Omega \times [0, t],$$

关于 $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$ 可测，则称 X 是**渐进可测的**（或简称**渐进过程**）。

注意，渐进过程既适应又可测。事实上，过程可测等价于：对每个 $t \geq 0$ ，映射 $(\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$ 在 $\Omega \times [0, t]$ 上关于 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, t])$ 可测。

命题 3.4。 设随机过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 取值于配备 Borel σ -代数的度量空间 (E, d) 。假设 X 适应，而且它的样本路径右连续，即对每个 $\omega \in \Omega$ ，映射 $t \mapsto X_t(\omega)$ 都右连续。则 X 是渐进过程。把“右连续”换成“左连续”，结论仍成立。

证明。 只证明样本路径右连续的情形；左连续情形完全类似。固定 $t > 0$ 。对每个整数 $n \geq 1$ 和 $s \in [0, t]$ ，定义随机变量 X_s^n 如下：

$$X_s^n = X_{kt/n} \quad \text{当} \quad s \in [(k-1)t/n, kt/n), \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

并令 $X_t^n = X_t$ 。由样本路径右连续性，对每个 $s \in [0, t]$ 和 $\omega \in \Omega$ ，都有

$$X_s(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_s^n(\omega).$$

另一方面，对 E 的每个 Borel 子集 A ，

$$\begin{aligned} & \{(\omega, s) \in \Omega \times [0, t] : X_s^n(\omega) \in A\} \\ &= (\{X_t \in A\} \times \{t\}) \cup \bigcup_{k=1}^n (\{X_{kt/n} \in A\} \times [(k-1)t/n, kt/n)). \end{aligned}$$

右端属于 $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$ 。因此，对每个 $n \geq 1$ ，映射 $(\omega, s) \mapsto X_s^n(\omega)$ 在 $\Omega \times [0, t]$ 上关于 $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$ 可测。可测映射的逐点极限仍可测，所以 $(\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$ 也具有同样的可测性。于是 X 是渐进过程。□

渐进 σ -代数。 考虑所有满足下述条件的集合 $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$: 过程

$$X_t(\omega) = 1_A(\omega, t)$$

是渐进过程。这些集合组成 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上的一个 σ -代数, 记为 $\mathcal{P}$, 称为**渐进 σ -代数**。集合 $A \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$ 属于 $\mathcal{P}$, 当且仅当对每个 $t \geq 0$,

$$A \cap (\Omega \times [0, t]) \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t]).$$

于是可验证: 过程 X 是渐进过程, 当且仅当映射 $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ 在配备 $\mathcal{P}$ 的 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上可测。

3.2 停时及其相关的 σ -代数

本节推广上一章在布朗运动框架下已经引入的若干概念。下面的定义只是把上一章的相应定义原样写在一般滤过下。

定义 3.5。 随机变量

$$T : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$$

称为滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 的一个**停时**, 如果对每个 $t \geq 0$, 都有

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

此时, T 之前的过去所生成的 σ -代数定义为

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

读者可以验证, $\mathcal{F}_T$ 确为一个 σ -代数。以下若无特别说明, “停时” 总指滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 的停时。若 T 是停时, 与布朗运动情形相同, 对每个 $t > 0$ 还有 $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ 。此外,

$$\{T = \infty\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{T \leq n\} \right)^c \in \mathcal{F}_\infty.$$

回忆滤过 $(\mathcal{F}_{t+})$ 的定义。滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 的停时显然也是滤过 $(\mathcal{F}_{t+})$ 的停时, 但反过来一般并不成立。

命题 3.6。 对每个 $t \in [0, \infty]$, 令 $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t+}$ 。

(i) 随机变量 $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ 是滤过 $(\mathcal{G}_t)$ 的停时, 当且仅当对每个 $t > 0$, 都有

$$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

这又等价于: 对每个 $t > 0$, $T \wedge t$ 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。

(ii) 若 T 是滤过 $(\mathcal{G}_t)$ 的停时, 则

$$\mathcal{G}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t > 0, A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

以后记

$$\mathcal{F}_{T+} := \mathcal{G}_T.$$

证明。 (i) 先设 T 是滤过 $(\mathcal{G}_t)$ 的停时。对每个 $t > 0$,

$$\{T < t\} = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q}_+ \\ q < t}} \{T \leq q\} \in \mathcal{F}_t,$$

因为当 $q < t$ 时, $\{T \leq q\} \in \mathcal{G}_q \subset \mathcal{F}_t$.

反之, 假设对每个 $t > 0$, $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$. 对每个 $t \geq 0$ 和 $s > t$,

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q}_+ \\ t < q < s}} \{T < q\} \in \mathcal{F}_s.$$

因此, $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{G}_t$.

“对每个 $t > 0$, $T \wedge t$ 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的” 等价于: 对每个 $s < t$, $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_t$. 取一列递增到 t 的 s , 可见后一性质推出 $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$, 从而 T 是滤过 $(\mathcal{G}_t)$ 的停时. 反过来, 若 T 是滤过 $(\mathcal{G}_t)$ 的停时, 则当 $s < t$ 时,

$$\{T \leq s\} \in \mathcal{G}_s \subset \mathcal{F}_t,$$

故 $T \wedge t$ 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的.

(ii) 若 $A \in \mathcal{G}_T$, 则对每个 $t \geq 0$, $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$. 因此, 对 $t > 0$,

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q}_+ \\ q < t}} (A \cap \{T \leq q\}) \in \mathcal{F}_t,$$

因为当 $q < t$ 时, $A \cap \{T \leq q\} \in \mathcal{G}_q \subset \mathcal{F}_t$.

反之, 假设对每个 $t > 0$, 都有 $A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$. 对每个 $t \geq 0$ 和 $s > t$,

$$A \cap \{T \leq t\} = \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q}_+ \\ t < q < s}} (A \cap \{T < q\}) \in \mathcal{F}_s.$$

于是 $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{G}_t$, 故 $A \in \mathcal{G}_T$. □

停时及其相关 σ -代数的性质。

(a) 对每个停时 T , 都有

$$\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T+}.$$

若滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续, 则 $\mathcal{F}_{T+} = \mathcal{F}_T$.

(b) 若 $T = t$ 是常值停时, 则

$$\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t, \quad \mathcal{F}_{T+} = \mathcal{F}_{t+}.$$

(c) 若 T 是停时, 则 T 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的.

(d) 设 T 是停时, $A \in \mathcal{F}_\infty$, 并令

$$T^A(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in A, \\ +\infty, & \omega \notin A. \end{cases}$$

则 $A \in \mathcal{F}_T$ 当且仅当 T^A 是停时.

(e) 设 S, T 是两个停时, 且 $S \leq T$. 则

$$\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T, \quad \mathcal{F}_{S+} \subset \mathcal{F}_{T+}.$$

(f) 设 S, T 是两个停时. 则 $S \vee T$ 与 $S \wedge T$ 也都是停时, 并且

$$\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T.$$

此外,

$$\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_{S \wedge T}, \quad \{S = T\} \in \mathcal{F}_{S \wedge T}.$$

(g) 若 (S_n) 是单调递增的停时序列, 则

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow S_n$$

仍是停时。

(h) 若 (S_n) 是单调递减的停时序列, 则

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow S_n$$

是滤过 $(\mathcal{F}_{t+})$ 的停时, 而且

$$\mathcal{F}_{S+} = \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n+}.$$

(i) 若 (S_n) 是单调递减且逐点最终稳定的停时序列, 也就是说, 对每个 ω , 存在整数 $N(\omega)$, 使对所有 $n \geq N(\omega)$, 都有 $S_n(\omega) = S(\omega)$, 则

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow S_n$$

仍是停时, 而且

$$\mathcal{F}_S = \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n}.$$

(j) 设 T 是停时。定义在 $\{T < \infty\}$ 上、取值于可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 的函数 $\omega \mapsto Y(\omega)$ 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的, 当且仅当对每个 $t \geq 0$, Y 在 $\{T \leq t\}$ 上的限制是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。

注。 性质 (j) 使用了如下自然概念: 若 $\mathcal{G}$ 是 Ω 上的 σ -代数, 而随机变量 $\omega \mapsto Y(\omega)$ 只定义在一个 $\mathcal{G}$ -可测子集上, 则仍可谈论它的 $\mathcal{G}$ -可测性。下述定理 3.7 还会使用这一概念。

证明。(上述性质)。 (a)、(b)、(c) 几乎可由定义立即得到。下面证明其余各项。

(d) 对每个 $t \geq 0$,

$$\{T^A \leq t\} = A \cap \{T \leq t\},$$

结论由 $\mathcal{F}_T$ 的定义得到。

(e) 只需证明 $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ 。若 $A \in \mathcal{F}_S$, 则

$$A \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

故 $A \in \mathcal{F}_T$ 。

(f) 由

$$\begin{aligned} \{S \wedge T \leq t\} &= \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \\ \{S \vee T \leq t\} &= \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \end{aligned}$$

可知 $S \wedge T$ 与 $S \vee T$ 都是停时。

由 (e), $\mathcal{F}_{S \wedge T} \subset \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ 。反之, 若 $A \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$, 则

$$A \cap \{S \wedge T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cup (A \cap \{T \leq t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

故 $A \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$ 。

再者, 对每个 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} &= \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathcal{F}_t, \\ \{S \leq T\} \cap \{S \leq t\} &= \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \end{aligned}$$

因为由命题 3.6 (i), $S \wedge t$ 与 $T \wedge t$ 都是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。因此,

$$\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S \wedge T}.$$

最后, $\{S = T\} = \{S \leq T\} \cap \{T \leq S\}$ 。

(g) 对每个 $t \geq 0$,

$$\{S \leq t\} = \bigcap_n \{S_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

(h) 类似地,

$$\{S < t\} = \bigcup_n \{S_n < t\} \in \mathcal{F}_t,$$

于是可应用命题 3.6 (i)。由 (e), 对每个 n , 都有 $\mathcal{F}_{S+} \subset \mathcal{F}_{S_n+}$ 。反之, 若 $A \in \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n+}$, 则

$$A \cap \{S < t\} = \bigcup_n (A \cap \{S_n < t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

故 $A \in \mathcal{F}_{S+}$ 。

(i) 在逐点最终稳定的假设下, 还有

$$\{S \leq t\} = \bigcup_n \{S_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

由 (e), $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S_n}$ 对每个 n 都成立。若 $A \in \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n}$, 则

$$A \cap \{S \leq t\} = \bigcup_n (A \cap \{S_n \leq t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

故 $A \in \mathcal{F}_S$ 。

(j) 先假设对每个 $t \geq 0$, Y 在 $\{T \leq t\}$ 上的限制都是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。于是, 对 E 的每个可测子集 A ,

$$\{Y \in A\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

令 $t \rightarrow \infty$, 先得到 $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}_\infty$, 再由上式与定义推出 $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}_T$ 。

反过来, 若 Y 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的, 则 $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}_T$, 从而

$$\{Y \in A\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

这正是所需结论。 □

定理 3.7. 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是取值于可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 的渐进过程, T 是停时。则定义在事件 $\{T < \infty\}$ 上的函数

$$\omega \mapsto X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$$

是 $\mathcal{F}_T$ -可测的。

证明。 使用上面性质 (j)。固定 $t \geq 0$ 。函数 $\omega \mapsto X_T(\omega)$ 在 $\{T \leq t\}$ 上的限制, 是下列两个映射的复合:

$$\{T \leq t\} \ni \omega \mapsto (\omega, T(\omega) \wedge t) \in \Omega \times [0, t],$$

以及

$$\Omega \times [0, t] \ni (\omega, s) \mapsto X_s(\omega) \in E.$$

第一个映射关于 $\mathcal{F}_t$ 与 $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$ 可测, 因为命题 3.6 (i) 说明 $T \wedge t$ 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的; 第二个映射由渐进过程的定义可测。因此, $\omega \mapsto X_T(\omega)$ 在 $\{T \leq t\}$ 上的限制是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。性质 (j) 给出所需结论。 □

命题 3.8. 设 T 是停时, S 是取值于 $[0, \infty]$ 的 $\mathcal{F}_T$ -可测随机变量, 并且 $S \geq T$. 则 S 也是停时。

特别地, 若 T 是停时, 则对 $n = 0, 1, 2, \dots$, 令

$$T_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^n} 1_{\{k2^{-n} < T \leq (k+1)2^{-n}\}} + \infty 1_{\{T=\infty\}},$$

便得到一列单调递减到 T 的停时。

证明. 对第一个断言, 任取 $t \geq 0$, 有

$$\{S \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

因为 $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_T$. 第二个断言中, $T_n \geq T$, 且 T_n 是 T 的函数, 从而是 $\mathcal{F}_T$ -可测的; 按构造, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $T_n \downarrow T$. $\square$

下一个命题是从随机过程构造停时的主要工具。

命题 3.9. 设适应过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 取值于度量空间 (E, d) 。

(i) 假设 X 的样本路径右连续, O 是 E 的开子集。则

$$T_O = \inf\{t \geq 0 : X_t \in O\}$$

是滤过 $(\mathcal{F}_{t+})$ 的停时。

(ii) 假设 X 的样本路径连续, F 是 E 的闭子集。则

$$T_F = \inf\{t \geq 0 : X_t \in F\}$$

是滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 的停时。

证明. (i) 对每个 $t > 0$,

$$\{T_O < t\} = \bigcup_{s \in [0, t) \cap \mathbb{Q}} \{X_s \in O\} \in \mathcal{F}_t.$$

这里用到了样本路径右连续性以及 O 的开性。再由命题 3.6 (i), T_O 是滤过 $(\mathcal{F}_{t+})$ 的停时。

(ii) 对每个 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \{T_F \leq t\} &= \left\{ \inf_{0 \leq s \leq t} d(X_s, F) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} d(X_s, F) = 0 \right\} \in \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

第一等式使用了样本路径连续性和 F 的闭性; 第二等式使用了有理数的稠密性。 $\square$

3.3 连续时间鞅与上鞅

回顾一下, 我们已经固定了一个带滤过的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 。本章余下部分中的所有过程都取实值。下面的定义显然是离散时间情形中相应定义的连续时间版本 (见附录 A.2)。

定义 3.10. 设实值过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 适应于滤过 $(\mathcal{F}_t)$, 并且对每个 $t \geq 0$ 都有 $X_t \in L^1$ 。称 $(X_t)_{t \geq 0}$ 为

- **鞅**，如果对每个 $0 \leq s < t$, $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$;
- **上鞅**，如果对每个 $0 \leq s < t$, $E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$;
- **下鞅**，如果对每个 $0 \leq s < t$, $E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$ 。

若 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是下鞅，则 $(-X_t)_{t \geq 0}$ 是上鞅。因此，下文有些结果只对上鞅叙述；相应的下鞅版本可立即推出。

若 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是鞅（分别地，上鞅或下鞅），则当 $0 \leq s \leq t$ 时，

$$E[X_s] = E[X_t] \quad (\text{分别地, } E[X_s] \geq E[X_t] \text{ 或 } E[X_s] \leq E[X_t]).$$

构造鞅的一种简单方法是：取随机变量 $Z \in L^1$ ，并对每个 $t \geq 0$ 令

$$X_t = E[Z | \mathcal{F}_t].$$

不过，并非所有鞅都具有这种形式。下面给出一类重要例子。

重要例子。 设过程 $(Z_t)_{t \geq 0}$ 取值于 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^d$ 。若 Z 适应于 $(\mathcal{F}_t)$ ，且对每个 $0 \leq s < t$ ，增量 $Z_t - Z_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立，则称 Z **关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 具有独立增量**。例如，布朗运动关于其自然滤过具有独立增量。

若实值过程 Z 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 具有独立增量，则：

(i) 如果对每个 $t \geq 0$, $Z_t \in L^1$ ，则

$$\tilde{Z}_t = Z_t - E[Z_t]$$

是鞅；

(ii) 如果对每个 $t \geq 0$, $Z_t \in L^2$ ，则

$$Y_t = \tilde{Z}_t^2 - E[\tilde{Z}_t^2]$$

是鞅；

(iii) 如果对某个 $\theta \in \mathbb{R}$ ，每个 $t \geq 0$ 都满足 $E[e^{\theta Z_t}] < \infty$ ，则

$$X_t = \frac{e^{\theta Z_t}}{E[e^{\theta Z_t}]}$$

是鞅。

这些事实的证明都很容易。在情形 (ii) 中，对每个 $0 \leq s < t$ ，有

$$\begin{aligned} E[\tilde{Z}_t^2 | \mathcal{F}_s] &= E[(\tilde{Z}_s + \tilde{Z}_t - \tilde{Z}_s)^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \tilde{Z}_s^2 + 2\tilde{Z}_s E[\tilde{Z}_t - \tilde{Z}_s | \mathcal{F}_s] + E[(\tilde{Z}_t - \tilde{Z}_s)^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \tilde{Z}_s^2 + E[(\tilde{Z}_t - \tilde{Z}_s)^2] \\ &= \tilde{Z}_s^2 + E[\tilde{Z}_t^2] - 2E[\tilde{Z}_s \tilde{Z}_t] + E[\tilde{Z}_s^2] \\ &= \tilde{Z}_s^2 + E[\tilde{Z}_t^2] - E[\tilde{Z}_s^2], \end{aligned}$$

因为

$$E[\tilde{Z}_s \tilde{Z}_t] = E[\tilde{Z}_s E[\tilde{Z}_t | \mathcal{F}_s]] = E[\tilde{Z}_s^2].$$

所需结论随即得到。在情形 (iii) 中,

$$\begin{aligned} E[X_t | \mathcal{F}_s] &= \frac{e^{\theta Z_s} E[e^{\theta(Z_t - Z_s)} | \mathcal{F}_s]}{E[e^{\theta Z_s}] E[e^{\theta(Z_t - Z_s)}]} \\ &= \frac{e^{\theta Z_s}}{E[e^{\theta Z_s}]} = X_s, \end{aligned}$$

其中利用了独立性所给出的

$$E[e^{\theta(Z_t - Z_s)} | \mathcal{F}_s] = E[e^{\theta(Z_t - Z_s)}].$$

现在考察布朗运动这一特殊情形。

定义 3.11。 称实值过程 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ 为一个 $(\mathcal{F}_t)$ -**布朗运动**, 如果 B 是布朗运动、适应于 $(\mathcal{F}_t)$, 并且关于 $(\mathcal{F}_t)$ 具有独立增量。

类似地, 称取值于 $\mathbb{R}^d$ 的过程 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ 为一个 d **维** $(\mathcal{F}_t)$ -**布朗运动**, 如果 B 是 d 维布朗运动、适应于 $(\mathcal{F}_t)$, 并且关于 $(\mathcal{F}_t)$ 具有独立增量。

注意, 若 B 是 $(d$ 维) 布朗运动, $(\mathcal{F}_t^B)$ 是 B 的自然滤过 (也可以是完备自然滤过), 则 B 是 $(d$ 维) $(\mathcal{F}_t^B)$ -布朗运动。

设 B 是从 0 出发 (也可以从任意 $a \in \mathbb{R}$ 出发) 的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。由上面的观察, 过程

$$B_t, \quad B_t^2 - t, \quad \exp\left(\theta B_t - \frac{\theta^2}{2} t\right)$$

都是具有连续样本路径的鞅。过程 $\exp(\theta B_t - \frac{\theta^2}{2} t)$ 称为布朗运动的指数鞅。

还可以取

$$f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt), \quad Z_t = \int_0^t f(s) dB_s.$$

高斯白噪声的性质说明, Z 关于 B 的自然滤过具有独立增量。因此,

$$\int_0^t f(s) dB_s,$$

$$\left(\int_0^t f(s) dB_s\right)^2 - \int_0^t f(s)^2 ds,$$

以及

$$\exp\left(\theta \int_0^t f(s) dB_s - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t f(s)^2 ds\right)$$

都是关于这一滤过的鞅。可以证明, 这些鞅都有具有连续样本路径的修正; 只需对第一个过程证明即可, 而这将由第 5 章中更一般的结果推出。

最后, 若 $Z = N$ 是强度为 λ 的泊松过程, $(\mathcal{F}_t)$ 是 N 的自然滤过, 则众所周知, Z 具有独立增量, 因而

$$N_t - \lambda t, \quad (N_t - \lambda t)^2 - \lambda t, \quad \exp(\theta N_t - \lambda t(e^\theta - 1))$$

都是鞅。与前面的例子不同, 这些鞅没有具有连续样本路径的修正。

命题 3.12。 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是适应过程, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是凸函数, 并且对每个 $t \geq 0$, $E[f(X_t)] < \infty$ 。

(i) 若 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是鞅, 则 $(f(X_t))_{t \geq 0}$ 是下鞅。

(ii) 若 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是下鞅, 并且 f 还单调不减, 则 $(f(X_t))_{t \geq 0}$ 是下鞅。

证明。由 Jensen 不等式, 对 $s < t$,

$$E[f(X_t) | \mathcal{F}_s] \geq f(E[X_t | \mathcal{F}_s]) \geq f(X_s).$$

当 (X_t) 只是下鞅时, 最后一个不等式还需要使用 f 的单调不减性。□

推论。若 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是鞅, 则 $(|X_t|)_{t \geq 0}$ 是下鞅。更一般地, 对每个 $p \geq 1$, 只要对每个 $t \geq 0$ 都有 $E[|X_t|^p] < \infty$, 过程 $(|X_t|^p)_{t \geq 0}$ 就是下鞅。若 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是下鞅, 则 $(X_t^+)_{t \geq 0}$ 也是下鞅, 其中 $X_t^+ = X_t \vee 0$ 。

注。若 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是任意鞅, 则对每个 $p \geq 1$, Jensen 不等式说明 $t \mapsto E[|X_t|^p]$ 是取值于 $[0, \infty]$ 的单调不减函数。

命题 3.13。设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是下鞅或上鞅。则对每个 $t > 0$,

$$\sup_{0 \leq s \leq t} E[|X_s|] < \infty.$$

证明。只需处理 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是下鞅的情形。因为 $(X_t^+)_{t \geq 0}$ 也是下鞅, 所以对每个 $s \in [0, t]$,

$$E[X_s^+] \leq E[X_t^+].$$

另一方面, 由 X 的下鞅性质, 对 $s \in [0, t]$ 还有

$$E[X_s] \geq E[X_0].$$

合并这两个估计, 并注意到 $|x| = 2x^+ - x$, 得到

$$\sup_{s \in [0, t]} E[|X_s|] \leq 2E[X_t^+] - E[X_0] < \infty,$$

这就是所需结论。□

下一个命题在研究平方可积鞅时非常有用。

命题 3.14。设 $(M_t)_{t \geq 0}$ 是平方可积鞅 (即对每个 $t \geq 0$, $M_t \in L^2$)。给定 $0 \leq s < t$, 并设

$$s = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t$$

是区间 $[s, t]$ 的一个分割。则

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=1}^p (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] &= E[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= E[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

特别地,

$$E \left[\sum_{i=1}^p (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \right] = E[M_t^2 - M_s^2] = E[(M_t - M_s)^2].$$

证明。 对每个 $i = 1, \dots, p$,

$$\begin{aligned}
 & E[(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_s] \\
 &= E[E[(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] \mid \mathcal{F}_s] \\
 &= E\left[E[M_{t_i}^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] - 2M_{t_{i-1}}E[M_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] + M_{t_{i-1}}^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
 &= E\left[E[M_{t_i}^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] - M_{t_{i-1}}^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
 &= E[M_{t_i}^2 - M_{t_{i-1}}^2 \mid \mathcal{F}_s].
 \end{aligned}$$

对 i 求和便得到所需结论。 $\square$

下面研究鞅与上鞅样本路径的正则性。我们先建立离散时间经典不等式的连续时间版本。

命题 3.15。

(i) **(极大不等式)** 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是具有右连续样本路径的上鞅。则对每个 $t > 0$ 和每个 $\lambda > 0$,

$$\lambda P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s| > \lambda\right) \leq E[|X_0|] + 2E[|X_t|].$$

(ii) **(Doob 的 L^p 不等式)** 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是具有右连续样本路径的鞅。则对每个 $t > 0$ 和每个 $p > 1$,

$$E\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_t|^p].$$

第 (ii) 部分只有在 $E[|X_t|^p] < \infty$ 时才有实际内容。

证明。 (i) 固定 $t > 0$, 取 $\mathbb{R}_+$ 的一个可数稠密子集 D , 使得 $0, t \in D$ 。集合 $D \cap [0, t]$ 是一列递增有限集 $(D_m)_{m \geq 1}$ 的并, 其中

$$D_m = \{t_0^m, t_1^m, \dots, t_m^m\}, \quad 0 = t_0^m < t_1^m < \dots < t_m^m = t.$$

对每个固定的 m , 令 $Y_n = X_{t_n^m}$, 并令 $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{t_n^m}$ 。于是 $(Y_n)_{0 \leq n \leq m}$ 是关于 $(\mathcal{G}_n)$ 的离散时间上鞅。对它应用离散时间极大不等式 (见附录 A.2), 得到

$$\lambda P\left(\sup_{s \in D_m} |X_s| > \lambda\right) \leq E[|X_0|] + 2E[|X_t|].$$

当 $m \uparrow \infty$ 时,

$$P\left(\sup_{s \in D_m} |X_s| > \lambda\right) \uparrow P\left(\sup_{s \in D \cap [0, t]} |X_s| > \lambda\right).$$

因此,

$$\lambda P\left(\sup_{s \in D \cap [0, t]} |X_s| > \lambda\right) \leq E[|X_0|] + 2E[|X_t|].$$

最后, 由于样本路径右连续, 且 $t \in D$, 有

$$\sup_{s \in D \cap [0, t]} |X_s| = \sup_{s \in [0, t]} |X_s|. \quad (3.1)$$

这便证明了 (i)。

(ii) 沿用 (i) 的证明思路, 这次对离散时间鞅使用 Doob 的 L^p 不等式 (见附录 A.2), 则对每个 $m \geq 1$,

$$E\left[\sup_{s \in D_m} |X_s|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_t|^p].$$

令 $m \rightarrow \infty$, 使用单调收敛定理, 再使用等式 (3.1), 即得结论。 $\square$

注。 若不再假设上鞅 X 的样本路径右连续, 则上面的证明仍说明: 对 $\mathbb{R}_+$ 的每个可数稠密子集 D 以及每个 $t > 0$,

$$P\left(\sup_{s \in D \cap [0, t]} |X_s| > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} (E[|X_0|] + 2E[|X_t|]).$$

令 $\lambda \rightarrow \infty$, 特别得到

$$\sup_{s \in D \cap [0, t]} |X_s| < \infty, \quad \text{a.s.}$$

上穿次数。 设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 的某个子集 I 上的函数。给定 $a < b$, f 沿区间 $[a, b]$ 的**上穿次数**记为 $M_{ab}^f(I)$, 它是满足下述条件的最大整数 $k \geq 1$: 存在 I 中的有限递增序列

$$s_1 < t_1 < \cdots < s_k < t_k,$$

使得对每个 $i \in \{1, \dots, k\}$, 都有 $f(s_i) \leq a$ 且 $f(t_i) \geq b$ 。如果连 $k = 1$ 时也不存在这样的子序列, 就规定 $M_{ab}^f(I) = 0$; 如果对每个 $k \geq 1$ 都存在这样的子序列, 就规定 $M_{ab}^f(I) = \infty$ 。上穿次数是研究函数正则性的便利工具。

在下一个引理中, 记号

$$\lim_{s \downarrow t} f(s) \quad \left(\text{分别地, } \lim_{s \uparrow t} f(s) \right)$$

表示

$$\lim_{\substack{s \downarrow t \\ s > t}} f(s) \quad \left(\text{分别地, } \lim_{\substack{s \uparrow t \\ s < t}} f(s) \right).$$

若函数 $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 右连续, 并且在每个 $t > 0$ 处都有左极限, 就称 g 为 **càdlàg 函数**。这一名称来自法语 “continue à droite avec des limites à gauche” (右连续且有左极限)。

引理 3.16。 设 D 是 $\mathbb{R}_+$ 的可数稠密子集, f 是定义在 D 上的实函数。假设对每个 $T \in D$:

- (i) f 在 $D \cap [0, T]$ 上有界;
- (ii) 对所有满足 $a < b$ 的有理数 a, b ,

$$M_{ab}^f(D \cap [0, T]) < \infty.$$

则对每个实数 $t \geq 0$, 右极限

$$f(t+) := \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in D}} f(s)$$

都存在; 类似地, 对每个实数 $t > 0$, 左极限

$$f(t-) := \lim_{\substack{s \uparrow t \\ s \in D}} f(s)$$

都存在。此外, 由 $g(t) = f(t+)$ 定义的函数 $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 是 càdlàg 函数。

我们略去这个分析引理的证明。需要强调的是, 右极限 $f(t+)$ 与左极限 $f(t-)$ 是对每个 $t \geq 0$ (左极限情形为 $t > 0$) 定义的, 而不只对 $t \in D$ 定义。

定理 3.17. 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是上鞅, D 是 $\mathbb{R}_+$ 的可数稠密子集。

(i) 对几乎每个 $\omega \in \Omega$, 函数 $s \mapsto X_s(\omega)$ 在 D 上的限制, 在每个 $t \in [0, \infty)$ 处都有右极限

$$X_{t+}(\omega) := \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in D}} X_s(\omega), \quad (3.2)$$

并且在每个 $t \in (0, \infty)$ 处都有左极限

$$X_{t-}(\omega) := \lim_{\substack{s \uparrow t \\ s \in D}} X_s(\omega).$$

(ii) 对每个 $t \in \mathbb{R}_+$, $X_{t+} \in L^1$, 而且

$$X_t \geq E[X_{t+} | \mathcal{F}_t].$$

若函数 $t \mapsto E[X_t]$ 右连续, 则上式取等号; 特别地, 当 X 是鞅时取等号。过程 $(X_{t+})_{t \geq 0}$ 关于滤过 $(\mathcal{F}_{t+})$ 是上鞅; 若 X 是鞅, 则它也是鞅。

注. 为了陈述 (ii) 的最后几个断言, 需要对每个 $\omega \in \Omega$ 定义 $X_{t+}(\omega)$, 而不能只在某个零测集之外定义。正如下面的证明所示, 当 (3.2) 中的极限不存在时, 只需令 $X_{t+}(\omega) = 0$ 。

证明. (i) 固定 $T \in D$ 。由命题 3.15 后面的注,

$$\sup_{s \in D \cap [0, T]} |X_s| < \infty, \quad \text{a.s.}$$

与命题 3.15 的证明相同, 可以选取一列递增到 $D \cap [0, T]$ 的有限子集 $(D_m)_{m \geq 1}$, 并使 $0, T \in D_m$ 。对离散时间上鞅应用 Doob 上穿不等式 (见附录 A.2), 对每个 $a < b$ 和每个 $m \geq 1$ 得到

$$E[M_{ab}^X(D_m)] \leq \frac{1}{b-a} E[(X_T - a)^-].$$

令 $m \rightarrow \infty$, 由单调收敛定理,

$$E[M_{ab}^X(D \cap [0, T])] \leq \frac{1}{b-a} E[(X_T - a)^-] < \infty.$$

因而

$$M_{ab}^X([0, T] \cap D) < \infty, \quad \text{a.s.}$$

令

$$\begin{aligned} N = & \bigcup_{T \in D} \left\{ \sup_{t \in D \cap [0, T]} |X_t| = \infty \right\} \\ & \cup \bigcup_{\substack{T \in D \\ a, b \in \mathbb{Q}, a < b}} \{M_{ab}^X(D \cap [0, T]) = \infty\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

由上面的讨论, $P(N) = 0$ 。另一方面, 若 $\omega \notin N$, 则函数

$$D \ni t \mapsto X_t(\omega)$$

满足引理 3.16 的全部假设。因此, 断言 (i) 由该引理得到。

(ii) 为了对每个 $\omega \in \Omega$, 而不只对 $\Omega \setminus N$ 中的 ω , 定义 $X_{t+}(\omega)$, 令

$$X_{t+}(\omega) = \begin{cases} \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in D}} X_s(\omega), & \text{若此极限存在,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

按此定义, X_{t+} 是 $\mathcal{F}_{t+}$ -可测的。

固定 $t \geq 0$, 取 D 中一列严格递减到 t 的数 $(t_n)_{n \geq 0}$ 。由构造, 几乎必然有

$$X_{t+} = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}.$$

对每个整数 $k \leq 0$, 令 $Y_k = X_{t_{-k}}$ 。于是, Y 是关于反向离散滤过 $\mathcal{H}_k = \mathcal{F}_{t_{-k}}$ 的反向上鞅 (见附录 A.2)。由命题 3.13, $\sup_{k \leq 0} E[|Y_k|] < \infty$ 。反向上鞅收敛定理 (见附录 A.2) 因而说明, 序列 X_{t_n} 在 L^1 中收敛到 X_{t+} 。特别地, $X_{t+} \in L^1$ 。

利用这一 L^1 收敛, 可在不等式

$$X_t \geq E[X_{t_n} | \mathcal{F}_t]$$

中令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$X_t \geq E[X_{t+} | \mathcal{F}_t].$$

这里使用了条件期望关于 L^1 范数的连续性; 必须注意, 只有 a.s. 收敛并不足以保证可以这样取极限。此外, 再次利用 L^1 收敛, 有

$$E[X_{t+}] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{t_n}].$$

因此, 若 $s \mapsto E[X_s]$ 右连续, 则

$$E[X_t] = E[X_{t+}] = E[E[X_{t+} | \mathcal{F}_t]],$$

而不等式 $X_t \geq E[X_{t+} | \mathcal{F}_t]$ 迫使

$$X_t = E[X_{t+} | \mathcal{F}_t].$$

前面已经注意到, X_{t+} 是 $\mathcal{F}_{t+}$ -可测的。设 $s < t$, 并取 D 中严格递减到 s 的序列 $(s_n)_{n \geq 0}$ 。不妨设对每个 n , $s_n \leq t_n$ 。与前面一样, X_{s_n} 在 L^1 中收敛到 X_{s+} 。于是, 若 $A \in \mathcal{F}_{s+}$, 则对每个 n , $A \in \mathcal{F}_{s_n}$, 从而

$$\begin{aligned} E[X_{s+} 1_A] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{s_n} 1_A] \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{t_n} 1_A] \\ &= E[X_{t+} 1_A] = E[E[X_{t+} | \mathcal{F}_{s+}] 1_A]. \end{aligned}$$

这一不等式对每个 $A \in \mathcal{F}_{s+}$ 都成立, 而 X_{s+} 与 $E[X_{t+} | \mathcal{F}_{s+}]$ 都是 $\mathcal{F}_{s+}$ -可测的, 故

$$X_{s+} \geq E[X_{t+} | \mathcal{F}_{s+}].$$

最后, 若 X 是鞅, 则上述论证中的所有不等式都可改为等式。 □

定理 3.18。 假设滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续且完备。设 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 是上鞅, 并且函数 $t \mapsto E[X_t]$ 右连续。则 X 有一个样本路径为 càdlàg 的修正; 这个修正仍是 $(\mathcal{F}_t)$ -上鞅。

证明。 如定理 3.17 那样, 取 $\mathbb{R}_+$ 的可数稠密子集 D , 并令 N 为 (3.3) 中定义的可数集。对每个 $t \geq 0$, 令

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} X_{t+}(\omega), & \omega \notin N, \\ 0, & \omega \in N. \end{cases}$$

引理 3.16 说明 Y 的样本路径为 càdlàg。

随机变量 X_{t+} 是 $\mathcal{F}_{t+}$ -可测的；由于滤过右连续，它也是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。零测集 N 属于 $\mathcal{F}_\infty$ ，而滤过的完备性保证 Y_t 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。由定理 3.17 (ii)，对每个 $t \geq 0$ ，

$$X_t = E[X_{t+} | \mathcal{F}_t] = X_{t+} = Y_t, \quad \text{a.s.},$$

其中第二个等号是因为 X_{t+} 为 $\mathcal{F}_t$ -可测。因此， Y 是 X 的修正，并且适应于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 。由于 Y 是 X 的修正， $0 \leq s < t$ 时的不等式

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$$

也对 Y 成立。 □

注。

- (i) 先讨论定理中各项假设。一个简单例子说明，滤过右连续的假设不可删去。取 $\Omega = \{-1, 1\}$ ，并定义概率测度 P 使得 $P(\{1\}) = P(\{-1\}) = 1/2$ 。令随机变量 $\varepsilon(\omega) = \omega$ ，并定义过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ ：当 $0 \leq t \leq 1$ 时 $X_t = 0$ ，当 $t > 1$ 时 $X_t = \varepsilon$ 。容易验证， X 关于其自然滤过 $(\mathcal{F}_t^X)$ 是鞅；这一滤过还是完备的，因为不存在非空零测集。另一方面， X 的任何修正都不可能于 $t = 1$ 处右连续。这并不与定理矛盾，因为该滤过并不右连续：

$$\mathcal{F}_{1+}^X \neq \mathcal{F}_1^X.$$

- (ii) 同样，为说明映射 $t \mapsto E[X_t]$ 右连续的假设是必要的，只需取 $X_t = f(t)$ ，其中 f 是任意单调不增的确定性函数。若 f 不右连续，则 X 的任何修正都不可能具有右连续样本路径。

3.4 可选停时定理

我们先给出一个上鞅收敛定理。

定理 3.19. 设 X 是具有右连续样本路径的上鞅。假设随机变量族 $(X_t)_{t \geq 0}$ 在 L^1 中有界。则存在随机变量 $X_\infty \in L^1$ ，使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X_\infty, \quad \text{a.s.}$$

证明。 设 D 是 $\mathbb{R}_+$ 的可数稠密子集。由定理 3.17 的证明，对每个 $T \in D$ 和每个 $a < b$ ，

$$E[M_{ab}^X(D \cap [0, T])] \leq \frac{1}{b-a} E[(X_T - a)^-].$$

由单调收敛定理，对每个 $a < b$ ，

$$E[M_{ab}^X(D)] \leq \frac{1}{b-a} \sup_{t \geq 0} E[(X_t - a)^-] < \infty,$$

因为随机变量族 $(X_t)_{t \geq 0}$ 在 L^1 中有界。因此，几乎必然地，对所有满足 $a < b$ 的有理数 a, b ，都有 $M_{ab}^X(D) < \infty$ 。这说明极限

$$X_\infty := \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \in D}} X_t \quad (3.4)$$

几乎必然在 $[-\infty, \infty]$ 中存在。事实上， $+\infty$ 和 $-\infty$ 都可以排除，因为 Fatou 引理给出

$$E[|X_\infty|] \leq \liminf_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \in D}} E[|X_t|] < \infty.$$

于是 $X_\infty \in L^1$ 。最后，样本路径的右连续性（此前尚未使用）使我们可以 (3.4) 中去掉 $t \in D$ 的限制。 $\square$

在定理 3.19 的假设下， X_t 向 X_∞ 的收敛未必在 L^1 中成立。下一个结果在鞅的情形下给出 L^1 收敛的充要条件。

定义 3.20。 若存在随机变量 $Z \in L^1$ ，使得对每个 $t \geq 0$ ，

$$X_t = E[Z \mid \mathcal{F}_t],$$

则称鞅 $(X_t)_{t \geq 0}$ 为**闭鞅**。

定理 3.21。 设 X 是具有右连续样本路径的鞅。则下列性质等价：

- (i) X 是闭鞅；
 - (ii) 随机变量族 $(X_t)_{t \geq 0}$ 一致可积；
 - (iii) 当 $t \rightarrow \infty$ 时， X_t 几乎必然且在 L^1 中收敛。
- 此外，若这些性质成立，且 $X_\infty \in L^1$ 是 X_t 当 $t \rightarrow \infty$ 时的 a.s. 极限，则对每个 $t \geq 0$ ，

$$X_t = E[X_\infty \mid \mathcal{F}_t].$$

证明。 性质 (i) 推出 (ii) 很容易：若 $Z \in L^1$ ，当 $\mathcal{G}$ 遍历 $\mathcal{F}$ 的所有子 σ -代数时，随机变量族

$$\{E[Z \mid \mathcal{G}]\}$$

是一致可积的。若 (ii) 成立，则 $(X_t)_{t \geq 0}$ 特别在 L^1 中有界；定理 3.19 说明 X_t 几乎必然收敛到某个 X_∞ 。由一致可积性，这一收敛也在 L^1 中成立。最后，若 (iii) 成立，则对每个 $s \geq 0$ ，可在等式

$$X_s = E[X_t \mid \mathcal{F}_s]$$

中令 $t \rightarrow \infty$ ；利用条件期望关于 L^1 范数的连续性，得到

$$X_s = E[X_\infty \mid \mathcal{F}_s].$$

$\square$

现在利用离散时间鞅与上鞅的可选停时定理，建立连续时间中的相应结果。设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是具有右连续样本路径的鞅或上鞅，并且当 $t \rightarrow \infty$ 时， X_t 几乎必然收敛到一个记为 X_∞ 的随机变量。对每个停时 T ，定义

$$X_T(\omega) = 1_{\{T(\omega) < \infty\}} X_{T(\omega)}(\omega) + 1_{\{T(\omega) = \infty\}} X_\infty(\omega).$$

在定理 3.7 中，随机变量 X_T 只定义在 Ω 的子集 $\{T < \infty\}$ 上。按现在的定义， X_T 仍然是 $\mathcal{F}_T$ -可测的：这可由定理 3.7 以及容易验证的事实 $1_{\{T=\infty\}} X_\infty$ 为 $\mathcal{F}_T$ -可测得到。

定理 3.22 (鞅的可选停时定理)。 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是具有右连续样本路径的一致可积鞅。设 S, T 是两个停时，且 $S \leq T$ 。则 $X_S, X_T \in L^1$ ，并且

$$X_S = E[X_T \mid \mathcal{F}_S].$$

特别地，对每个停时 S ，

$$X_S = E[X_\infty \mid \mathcal{F}_S],$$

而且

$$E[X_S] = E[X_\infty] = E[X_0].$$

证明。对每个整数 $n \geq 0$, 令

$$T_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^n} 1_{\{k2^{-n} < T \leq (k+1)2^{-n}\}} + \infty 1_{\{T=\infty\}},$$

并类似地令

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^n} 1_{\{k2^{-n} < S \leq (k+1)2^{-n}\}} + \infty 1_{\{S=\infty\}}.$$

由命题 3.8, (T_n) 与 (S_n) 是两列停时, 分别单调递减到 T 与 S 。此外, 对每个 $n \geq 0$, 都有 $S_n \leq T_n$ 。

现在注意, 对每个固定的 n , $2^n S_n$ 与 $2^n T_n$ 都是离散滤过

$$\mathcal{H}_k^{(n)} := \mathcal{F}_{k/2^n}$$

的停时, 而

$$Y_k^{(n)} := X_{k/2^n}$$

是关于这一滤过的离散时间鞅。由一致可积离散时间鞅的可选停时定理 (见附录 A.2), $Y_{2^n S_n}^{(n)}$ 与 $Y_{2^n T_n}^{(n)}$ 都属于 L^1 , 并且

$$\begin{aligned} X_{S_n} &= Y_{2^n S_n}^{(n)} = E[Y_{2^n T_n}^{(n)} | \mathcal{H}_{2^n S_n}^{(n)}] \\ &= E[X_{T_n} | \mathcal{F}_{S_n}]. \end{aligned}$$

这里需要验证 $\mathcal{H}_{2^n S_n}^{(n)} = \mathcal{F}_{S_n}$, 但这是直接的。

取 $A \in \mathcal{F}_S$ 。因为 $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S_n}$, 所以 $A \in \mathcal{F}_{S_n}$, 从而

$$E[1_A X_{S_n}] = E[1_A X_{T_n}].$$

由样本路径的右连续性, 几乎必然有

$$X_S = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{S_n}, \quad X_T = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n}.$$

这些极限也在 L^1 中成立。事实上, 再次由一致可积离散时间鞅的可选停时定理, 对每个 n ,

$$X_{S_n} = E[X_\infty | \mathcal{F}_{S_n}],$$

故序列 (X_{S_n}) 一致可积; 序列 (X_{T_n}) 也同样一致可积。

上述 L^1 收敛说明 $X_S, X_T \in L^1$, 并允许我们在等式 $E[1_A X_{S_n}] = E[1_A X_{T_n}]$ 中令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$E[1_A X_S] = E[1_A X_T].$$

这一等式对每个 $A \in \mathcal{F}_S$ 都成立, 而 X_S 是 $\mathcal{F}_S$ -可测的, 因此

$$X_S = E[X_T | \mathcal{F}_S].$$

证明完成。 □

下面给出定理 3.22 的两个推论。

推论 3.23. 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是具有右连续样本路径的鞅, $S \leq T$ 是两个有界停时. 则 $X_S, X_T \in L^1$, 并且

$$X_S = E[X_T | \mathcal{F}_S].$$

证明. 取 $a \geq 0$ 使 $S \leq T \leq a$. 对鞅 $(X_{t \wedge a})_{t \geq 0}$ 应用定理 3.22; 该鞅由 X_a 闭合. $\square$

第二个推论说明: 鞅 (分别地, 一致可积鞅) 在任意停时处停止之后, 仍然是鞅 (分别地, 一致可积鞅). 这一结果将在后续各章中发挥重要作用。

推论 3.24. 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是具有右连续样本路径的鞅, T 是停时。

- (i) 过程 $(X_{t \wedge T})_{t \geq 0}$ 仍是鞅。
- (ii) 若鞅 $(X_t)_{t \geq 0}$ 还是一致可积的, 则过程 $(X_{t \wedge T})_{t \geq 0}$ 也是一致可积鞅; 更精确地, 对每个 $t \geq 0$,

$$X_{t \wedge T} = E[X_T | \mathcal{F}_t]. \quad (3.5)$$

证明. 先证明 (ii). 由停时性质 (f), $t \wedge T$ 是停时. 根据定理 3.22, $X_{t \wedge T}$ 与 X_T 都属于 L^1 . 还知道 $X_{t \wedge T}$ 是 $\mathcal{F}_{t \wedge T}$ -可测的; 由于 $\mathcal{F}_{t \wedge T} \subset \mathcal{F}_t$, 它也是 $\mathcal{F}_t$ -可测的. 因此, 为证明 (3.5), 只需说明对每个 $A \in \mathcal{F}_t$,

$$E[1_A X_T] = E[1_A X_{t \wedge T}].$$

固定 $A \in \mathcal{F}_t$. 首先, 显然有

$$E[1_{A \cap \{T \leq t\}} X_T] = E[1_{A \cap \{T \leq t\}} X_{t \wedge T}]. \quad (3.6)$$

另一方面, 由定理 3.22,

$$X_{t \wedge T} = E[X_T | \mathcal{F}_{t \wedge T}].$$

注意, $A \cap \{T > t\}$ 同时属于 $\mathcal{F}_t$ 和 $\mathcal{F}_T$ (后一事实可直接由 $\mathcal{F}_T$ 的定义得到), 所以

$$A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_t \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{t \wedge T}.$$

利用前一条件期望等式, 得到

$$E[1_{A \cap \{T > t\}} X_T] = E[1_{A \cap \{T > t\}} X_{t \wedge T}].$$

将此式与 (3.6) 相加, 即得所需结论。

为证明 (i), 只需对任意 $a \geq 0$, 把 (ii) 应用于一致可积鞅 $(X_{t \wedge a})_{t \geq 0}$. $\square$

应用. 可选停时定理首先是一种显式计算概率分布的有力工具. 下面给出几个重要而典型的应用 (本章及后续各章的练习中还有许多其他例子). 设 B 是从 0 出发的实布朗运动. 我们知道, 关于其自然滤过, B 是具有连续样本路径的鞅. 对每个 $a \in \mathbb{R}$, 令

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}.$$

回顾一下, $T_a < \infty$ a.s.

(a) 区间退出点的分布. 对每个 $a < 0 < b$,

$$P(T_a < T_b) = \frac{b}{b-a}, \quad P(T_b < T_a) = \frac{-a}{b-a}.$$

为得到这一结果, 考虑停时 $T = T_a \wedge T_b$ 以及停止鞅 $M_t = B_{t \wedge T}$; 由推论 3.24, 它确实是鞅。

又因为 $|M_t| \leq b \vee |a|$, 所以 M 一致可积. 应用定理 3.22, 得到

$$0 = E[M_0] = E[M_T] = bP(T_b < T_a) + aP(T_a < T_b).$$

再结合

$$P(T_b < T_a) + P(T_a < T_b) = 1,$$

即得所需结果. 事实上, 该证明还说明: 如果把布朗运动换成初值为 0、样本路径连续的鞅, 并且已知该过程几乎必然退出 (a, b) , 则结论仍然成立。

(b) 退出时刻的一阶矩。 对每个 $a > 0$, 考虑停时

$$U_a = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a\}.$$

则

$$E[U_a] = a^2.$$

为验证这一点, 考虑鞅 $M_t = B_t^2 - t$. 由推论 3.24, $M_{t \wedge U_a}$ 仍是鞅, 因而

$$E[M_{t \wedge U_a}] = E[M_0] = 0,$$

即

$$E[B_{t \wedge U_a}^2] = E[t \wedge U_a].$$

一方面, 由单调收敛定理, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $E[t \wedge U_a]$ 收敛到 $E[U_a]$; 另一方面, 由控制收敛定理, $E[B_{t \wedge U_a}^2]$ 收敛到

$$E[B_{U_a}^2] = a^2,$$

因为 $B_{t \wedge U_a}^2 \leq a^2$. 结论随即得到. 值得注意的是, $E[U_a] < \infty$, 而第 2 章已经指出 $E[T_a] = \infty$.

(c) 到达时刻的 Laplace 变换。 固定 $a > 0$, 目标是计算 T_a 的 Laplace 变换. 对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$, 可以考虑指数鞅

$$N_t^\lambda = \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right).$$

先设 $\lambda > 0$. 由推论 3.24, 停止过程 $(N_{t \wedge T_a}^\lambda)_{t \geq 0}$ 仍是鞅, 而且容易看出它不超过 $e^{\lambda a}$, 因而一致可积. 把定理 3.22 的最后一个断言应用于这一鞅和停时 $S = T_a$ (或者取 $S = \infty$), 得到

$$e^{\lambda a} E\left[e^{-\lambda^2 T_a / 2}\right] = E[N_{T_a}^\lambda] = E[N_0^\lambda] = 1.$$

把 λ 换成 $\sqrt{2\lambda}$, 便得到: 对每个 $\lambda > 0$,

$$E[e^{-\lambda T_a}] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}. \quad (3.7)$$

这个公式也可以由 T_a 的密度推出, 见推论 2.22.

作为一个有益的练习, 可以尝试用 $\lambda < 0$ 时的鞅 N^λ 重复上述论证; 这会得到荒谬的结果. 原因是当 $\lambda < 0$ 时, 停止鞅 $(N_{t \wedge T_a}^\lambda)$ 并非一致可积. 应用定理 3.22 时, 务必检查鞅的一致可积性; 多数情况下, 这是通过验证停止鞅有界来完成的。

(d) **区间退出时刻的 Laplace 变换。** 沿用 (b) 的记号。对每个 $a > 0$ 和每个 $\lambda > 0$,

$$E[e^{-\lambda U_a}] = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2\lambda})}.$$

先注意, U_a 与 B_{U_a} 相互独立。事实上, 由布朗运动的对称性,

$$\begin{aligned} E[1_{\{B_{U_a}=a\}}e^{-\lambda U_a}] &= E[1_{\{B_{U_a}=-a\}}e^{-\lambda U_a}] \\ &= \frac{1}{2}E[e^{-\lambda U_a}]. \end{aligned}$$

然后用与 (c) 相同的方法即可证明所述公式: 写出

$$E[N_{U_a}^\lambda] = E[N_0^\lambda] = 1,$$

并注意可选停时定理在这里可以应用, 因为 $(N_{t \wedge U_a}^\lambda)_{t \geq 0}$ 不超过 $e^{\lambda a}$ 。更一般的公式见练习 3.27。

本章最后给出非负上鞅的可选停时定理。这个结果将在后面对马尔可夫过程的应用中使用。先注意, 若 $(Z_t)_{t \geq 0}$ 是具有右连续样本路径的非负上鞅, 则它自动在 L^1 中有界, 因为 $E[Z_t] \leq E[Z_0]$ 。由定理 3.19, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, Z_t 几乎必然收敛到某个 $Z_\infty \in L^1$ 。正如定理 3.22 之前所解释的, 因而可以对任意停时 T (无论是否有限) 定义 Z_T 。

定理 3.25。 设 $(Z_t)_{t \geq 0}$ 是具有右连续样本路径的非负上鞅。设 U, V 是两个停时, 且 $U \leq V$ 。则 $Z_U, Z_V \in L^1$, 并且

$$Z_U \geq E[Z_V | \mathcal{F}_U].$$

注。 该结论蕴含 $E[Z_U] \geq E[Z_V]$ 。又因为在事件 $\{U = \infty\}$ 上 $Z_U = Z_V = Z_\infty$, 还得到

$$E[1_{\{U < \infty\}}Z_U] \geq E[1_{\{U < \infty\}}Z_V] \geq E[1_{\{V < \infty\}}Z_V].$$

证明。 第一步先额外假设 U, V 有界, 并验证此时 $E[Z_U] \geq E[Z_V]$ 。取整数 $p \geq 1$, 使得 $U \leq p$ 且 $V \leq p$ 。对每个整数 $n \geq 0$, 令

$$U_n = \sum_{k=0}^{p2^n-1} \frac{k+1}{2^n} 1_{\{k2^{-n} < U \leq (k+1)2^{-n}\}},$$

$$V_n = \sum_{k=0}^{p2^n-1} \frac{k+1}{2^n} 1_{\{k2^{-n} < V \leq (k+1)2^{-n}\}}.$$

由命题 3.8, (U_n) 与 (V_n) 是两列有界停时, 分别单调递减到 U 与 V , 而且对每个 $n \geq 0$, $U_n \leq V_n$ 。样本路径右连续性保证当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$Z_{U_n} \longrightarrow Z_U, \quad Z_{V_n} \longrightarrow Z_V, \quad \text{a.s.}$$

对离散滤过 $(\mathcal{F}_{k/2^{n+1}})_{k \geq 0}$ 使用有界停时情形下离散时间上鞅的可选停时定理 (见附录 A.2), 对每个 $n \geq 0$ 得到

$$Z_{U_{n+1}} \geq E[Z_{U_n} | \mathcal{F}_{U_{n+1}}].$$

对每个整数 $n \leq 0$, 令

$$Y_n = Z_{U_{-n}}, \quad \mathcal{H}_n = \mathcal{F}_{U_{-n}}.$$

于是 $(Y_n)_{n \leq 0}$ 是关于 $(\mathcal{H}_n)_{n \leq 0}$ 的反向上鞅。又由离散可选停时定理，对每个 $n \geq 0$,

$$E[Z_{U_n}] \leq E[Z_0].$$

因此 $(Y_n)_{n \leq 0}$ 在 L^1 中有界。反向上鞅收敛定理 (见附录 A.2) 说明它在 L^1 中收敛。所以 $Z_{U_n} \rightarrow Z_U$ 也在 L^1 中成立；同理， $Z_{V_n} \rightarrow Z_V$ 在 L^1 中成立。由于 $U_n \leq V_n$ ，再次使用离散可选停时定理，有

$$E[Z_{U_n}] \geq E[Z_{V_n}].$$

利用这两个 L^1 收敛并令 $n \rightarrow \infty$ ，得到

$$E[Z_U] \geq E[Z_V],$$

如所声称。

现在证明定理的一般情形，不再假设 U, V 有界。把第一步用于停时 0 与 $U \wedge p$ ，对每个 $p \geq 1$ 有

$$E[Z_{U \wedge p}] \leq E[Z_0].$$

Fatou 引理给出

$$E[Z_U] \leq E[Z_0] < \infty;$$

同理， $E[Z_V] < \infty$ 。固定 $A \in \mathcal{F}_U \subset \mathcal{F}_V$ ，并回顾停时 U^A 的记号：当 $\omega \in A$ 时令 $U^A(\omega) = U(\omega)$ ，否则令 $U^A(\omega) = \infty$ ； V^A 类似定义。由证明的第一步，对每个 $p \geq 1$,

$$E[Z_{U^A \wedge p}] \geq E[Z_{V^A \wedge p}].$$

把两边的期望分别按 A^c 、 $A \cap \{U \leq p\}$ 和 $A \cap \{U > p\}$ 分解，并注意 $U > p$ 蕴含 $V > p$ ，得到

$$E[Z_U 1_{A \cap \{U \leq p\}}] \geq E[Z_V 1_{A \cap \{U \leq p\}}].$$

令 $p \rightarrow \infty$ ，左边由控制收敛定理收敛；右边使用 Fatou 引理，得到

$$E[Z_U 1_{A \cap \{U < \infty\}}] \geq E[Z_V 1_{A \cap \{U < \infty\}}].$$

校订注。 原书在这一步把截断项直接写成 $E[Z_V 1_{A \cap \{U \leq p\}}]$ ，但由 $E[Z_{U^A \wedge p}] \geq E[Z_{V^A \wedge p}]$ 直接分解所得应为 $Z_{V \wedge p}$ 。按上式保留截断，再用 Fatou 引理取极限，即可严格得到原定理结论。

另一方面，在 $A \cap \{U = \infty\}$ 上必有 $V = \infty$ ，所以显然

$$E[Z_U 1_{A \cap \{U = \infty\}}] = E[Z_V 1_{A \cap \{U = \infty\}}].$$

与前式相加，得到

$$E[Z_U 1_A] \geq E[Z_V 1_A] = E[E[Z_V | \mathcal{F}_U] 1_A].$$

这一不等式对每个 $A \in \mathcal{F}_U$ 都成立，而 Z_U 是 $\mathcal{F}_U$ -可测的，所需结论随即得到。□

练习

以下练习中的过程都定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上；该概率空间配备一个完备滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty]}$ 。

练习 3.26。

1. 设 M 是具有连续样本路径的鞅, 且 $M_0 = x \in \mathbb{R}_+$ 。假设对每个 $t \geq 0$, $M_t \geq 0$, 并且当 $t \rightarrow \infty$ 时, $M_t \rightarrow 0$, a.s. 证明: 对每个 $y > x$,

$$P\left(\sup_{t \geq 0} M_t \geq y\right) = \frac{x}{y}.$$

2. 设 B 是从 $x > 0$ 出发的布朗运动, 且

$$T_0 = \inf\{t \geq 0 : B_t = 0\}.$$

求随机变量

$$\sup_{t \leq T_0} B_t$$

的分布。

3. 现在设 B 是从 0 出发的布朗运动, $\mu > 0$ 。利用适当的指数鞅证明

$$\sup_{t \geq 0} (B_t - \mu t)$$

服从参数为 2μ 的指数分布。

解答 3.26。

1. 令 $T_y = \inf\{t \geq 0 : M_t = y\}$ 。路径连续且 $M \geq 0$, 所以 $0 \leq M_{t \wedge T_y} \leq y$ 。可选停时定理给出

$$x = \mathbb{E}[M_{t \wedge T_y}].$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 被停过程有界收敛到 $y1_{\{T_y < \infty\}}$: 在 $\{T_y = \infty\}$ 上使用题设 $M_t \rightarrow 0$ 。因而

$$x = y \mathbb{P}(T_y < \infty) = y \mathbb{P}\left(\sup_{t \geq 0} M_t \geq y\right).$$

2. $M_t = B_{t \wedge T_0}$ 是非负连续鞅, 且因 $T_0 < \infty$ a.s., $M_t \rightarrow 0$ 。于是对 $y > x$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \leq T_0} B_t \geq y\right) = \frac{x}{y},$$

而对 $0 \leq y \leq x$ 该概率为 1。故所求随机变量的分布函数为

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < x, \\ 1 - \frac{x}{y}, & y \geq x. \end{cases}$$

3. 指数鞅 $M_t = \exp(B_t - \frac{1}{2}t)$ 非负且 $M_t \rightarrow 0$ a.s.。布朗尺度变换给出

$$\sup_{t \geq 0} (B_t - \mu t) \stackrel{d}{=} \frac{1}{2\mu} \sup_{s \geq 0} (2B_s - s).$$

对 $y > 0$, 第 1 问应用于 M 得

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \geq 0} (B_t - \mu t) \geq y\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{s \geq 0} e^{B_s - s/2} \geq e^{2\mu y}\right) = e^{-2\mu y}.$$

这正是参数 2μ 的指数分布尾函数。

□

练习 3.27. 设 B 是从 0 出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。回顾记号

$$T_x = \inf\{t \geq 0 : B_t = x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

固定两个实数 a, b , 使 $a < 0 < b$, 并令

$$T = T_a \wedge T_b.$$

1. 证明: 对每个 $\lambda > 0$,

$$E[e^{-\lambda T}] = \frac{\cosh\left(\frac{b+a}{2}\sqrt{2\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{b-a}{2}\sqrt{2\lambda}\right)}.$$

提示. 可选取适当的 α , 考虑如下形式的鞅:

$$M_t = \exp\left(\sqrt{2\lambda}(B_t - \alpha) - \lambda t\right) + \exp\left(-\sqrt{2\lambda}(B_t - \alpha) - \lambda t\right).$$

2. 类似地证明: 对每个 $\lambda > 0$,

$$E[e^{-\lambda T} 1_{\{T=T_a\}}] = \frac{\sinh(b\sqrt{2\lambda})}{\sinh((b-a)\sqrt{2\lambda})}.$$

3. 由第 2 问重新推出 $P(T_a < T_b)$ 的公式。

解答 3.27. 令 $c = \sqrt{2\lambda}$ 。

1. 取 $\alpha = (a+b)/2$ 。过程

$$M_t = e^{c(B_t - \alpha) - \lambda t} + e^{-c(B_t - \alpha) - \lambda t}$$

是鞅。由于 $B_{t \wedge T} \in [a, b]$, 停止后的两指数鞅有界, 故可选停时定理适用。在 T 时, $|B_T - \alpha| = (b-a)/2$, 于是

$$2 \cosh(c\alpha) = \mathbb{E}[M_T] = 2 \cosh\left(\frac{c(b-a)}{2}\right) \mathbb{E}[e^{-\lambda T}],$$

即得第 1 问公式 (利用 $\cosh$ 的偶性)。

2. 更直接地考虑

$$N_t = e^{-\lambda t} \sinh(c(b - B_t)).$$

Itô 公式说明 N 是局部鞅; 停在 T 后有界, 故为一致可积鞅。由于 $N_T = 0$ 于 $\{T = T_b\}$, 而 $N_T = e^{-\lambda T} \sinh(c(b-a))$ 于 $\{T = T_a\}$,

$$\sinh(cb) = \mathbb{E}[N_T] = \sinh(c(b-a)) \mathbb{E}[e^{-\lambda T} 1_{\{T=T_a\}}],$$

从而得到题中等式。

3. 令 $\lambda \downarrow 0$, 由支配收敛与 $\sinh x \sim x$,

$$\mathbb{P}(T_a < T_b) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\sinh(b\sqrt{2\lambda})}{\sinh((b-a)\sqrt{2\lambda})} = \frac{b}{b-a}.$$

□

练习 3.28. 设 $(B_t)_{t \geq 0}$ 是从 0 出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。给定 $a > 0$, 令

$$\sigma_a = \inf\{t \geq 0 : B_t \leq t - a\}.$$

1. 证明 σ_a 是停时, 并且 $\sigma_a < \infty$, a.s.
2. 利用适当的指数鞅证明: 对每个 $\lambda \geq 0$,

$$E[e^{-\lambda \sigma_a}] = \exp\left(-a(\sqrt{1+2\lambda}-1)\right).$$

通过解析延拓论证, 还可以证明这个公式对 $\lambda \in [-\frac{1}{2}, 0)$ 仍然成立。

3. 设 $\mu \in \mathbb{R}$, 并令

$$M_t = \exp\left(\mu B_t - \frac{\mu^2}{2}t\right).$$

证明停止鞅 $(M_{\sigma_a \wedge t})_{t \geq 0}$ 是闭鞅, 当且仅当 $\mu \leq 1$. (提示: 该鞅为闭鞅, 当且仅当 $E[M_{\sigma_a}] = 1$.)

解答 3.28.

1. σ_a 是连续适应过程 $B_t - t$ 首次到达闭集 $(-\infty, -a]$ 的时刻, 故为停时。又 $B_t/t \rightarrow 0$ a.s., 所以 $B_t - t \rightarrow -\infty$, 从而 $\sigma_a < \infty$ a.s., 并由连续性 $B_{\sigma_a} = \sigma_a - a$ 。
2. 给定 $\lambda \geq 0$, 取

$$\mu = 1 - \sqrt{1+2\lambda} \leq 0, \quad \mu - \frac{\mu^2}{2} = -\lambda.$$

指数鞅 $Z_t = \exp(\mu B_t - \frac{1}{2}\mu^2 t)$ 停在 σ_a 后有界: 在 $t < \sigma_a$ 时 $B_t > t - a$, 乘以 $\mu \leq 0$ 可得 $Z_t \leq e^{-\mu a}$ 。因此可选停时定理给出

$$1 = E[Z_{\sigma_a}] = e^{-\mu a} E[e^{-\lambda \sigma_a}],$$

即

$$E[e^{-\lambda \sigma_a}] = e^{\mu a} = \exp\left[-a(\sqrt{1+2\lambda}-1)\right].$$

对 $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$, 两边都是该半平面内的解析函数, 故由恒等定理延拓; 端点 $-1/2$ 再由单调收敛得到。

3. 非负停止鞅 $M_{\sigma_a \wedge t}$ 为闭鞅, 当且仅当 $E[M_{\sigma_a}] = 1$ 。利用 $B_{\sigma_a} = \sigma_a - a$ 及第 2 问的延拓式,

$$\begin{aligned} E[M_{\sigma_a}] &= e^{-\mu a} E\left[e^{-(\mu^2/2 - \mu)\sigma_a}\right] \\ &= \exp\left[-a(\mu + |\mu - 1| - 1)\right]. \end{aligned}$$

若 $\mu \leq 1$, 该值为 1; 若 $\mu > 1$, 它等于 $e^{-2a(\mu-1)} < 1$ 。故闭鞅条件恰为 $\mu \leq 1$ 。

□

练习 3.29. 设 $(Y_t)_{t \geq 0}$ 是具有连续样本路径的一致可积鞅, 且 $Y_0 = 0$ 。令

$$Y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} Y_t.$$

固定实数 $p \geq 1$ 。如果存在常数 C , 使得对每个停时 T , 都有

$$E[|Y_\infty - Y_T|^p | \mathcal{F}_T] \leq C,$$

就称鞅 Y 满足**性质 (P)**。

1. 证明：如果 Y_∞ 有界，则 Y 满足性质 (P)。
2. 设 B 是从 0 出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。证明鞅

$$Y_t = B_{t \wedge 1}$$

满足性质 (P)。(提示：可以注意到随机变量 $\sup_{t \leq 1} |B_t|$ 属于 L^p 。)

3. 证明： Y 以常数 C 满足性质 (P)，当且仅当对任意停时 T ，

$$E[|Y_T - Y_\infty|^p] \leq C P(T < \infty).$$

(提示：可以考虑停时性质 (d) 中，对 $A \in \mathcal{F}_T$ 定义的停时 T^A 。)

4. 假设 Y 以常数 C 满足性质 (P)。设 S 是停时，令 Y^S 为停止鞅，即 $Y_t^S = Y_{t \wedge S}$ (见推论 3.24)。证明 Y^S 以同一个常数 C 满足性质 (P)。可以先注意到，对任意停时 S, T ，

$$Y_T^S = Y_{S \wedge T} = Y_S^T = E[Y_T | \mathcal{F}_{S \wedge T}].$$

校订注。原书提示的最后一项写作 $E[Y_T | \mathcal{F}_S]$ 。当 S, T 为任意停时时，该等式一般不成立；因为 $S \wedge T \leq T$ ，由可选停时定理应改为 $E[Y_T | \mathcal{F}_{S \wedge T}]$ 。

5. 本问及下一问假设 Y 以常数 $C = 1$ 满足性质 (P)。给定 $a > 0$ ，递归定义停时序列 $(R_n)_{n \geq 0}$ ：

$$R_0 = 0, \quad R_{n+1} = \inf\{t \geq R_n : |Y_t - Y_{R_n}| \geq a\}, \quad (\inf \emptyset = \infty).$$

证明：对每个整数 $n \geq 0$ ，

$$a^p P(R_{n+1} < \infty) \leq P(R_n < \infty).$$

6. 推出：对每个 $x > 0$ ，

$$P\left(\sup_{t \geq 0} Y_t > x\right) \leq 2^p 2^{-px/2}.$$

解答 3.29。

1. 若 $|Y_\infty| \leq K$ ，则 $Y_T = E[Y_\infty | \mathcal{F}_T]$ 也满足 $|Y_T| \leq K$ ，故

$$E[|Y_\infty - Y_T|^p | \mathcal{F}_T] \leq (2K)^p.$$

2. 这里 $Y_\infty = B_1$ 。在 $\{T < 1\}$ 上，强马尔可夫性质给出 $B_1 - B_T$ 在给定 $\mathcal{F}_T$ 后服从 $\mathcal{N}(0, 1 - T)$ ；在 $\{T \geq 1\}$ 上差为零。因此若 $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ，

$$E[|Y_\infty - Y_T|^p | \mathcal{F}_T] = 1_{\{T < 1\}} (1 - T)^{p/2} E|N|^p \leq E|N|^p.$$

3. 性质 (P) 蕴含积分形式，只需在 $\{T < \infty\} \in \mathcal{F}_T$ 上取期望。反过来，固定 $A \in \mathcal{F}_T$ ，定义 $T^A = T$ 于 A ， $T^A = \infty$ 于 A^c 。则

$$E[|Y_T - Y_\infty|^p 1_A] = E[|Y_{T^A} - Y_\infty|^p] \leq C P(A \cap \{T < \infty\}).$$

这对所有 $A \in \mathcal{F}_T$ 成立，故条件期望几乎处处不超过 C 。

4. 对任意停时 T ，在 $\{T < S\}$ 上，由条件 Jensen 不等式和可选停时定理，

$$\begin{aligned} E[|Y_S - Y_T|^p 1_{\{T < S\}} | \mathcal{F}_T] &\leq E[|Y_\infty - Y_T|^p 1_{\{T < S\}} | \mathcal{F}_T] \\ &\leq C. \end{aligned}$$

在 $\{S \leq T\}$ 上, $Y_T^S = Y_S$, 差为零。因此

$$\mathbb{E}[|(Y^S)_\infty - Y_T^S|^p | \mathcal{F}_T] \leq C,$$

即 Y^S 以同一常数满足性质 (P)。

5. 由第 4 问, $Y^{R_{n+1}}$ 仍以常数 1 满足性质 (P)。对停时 R_n 使用第 3 问,

$$\mathbb{E}[|Y_{R_{n+1}} - Y_{R_n}|^p] \leq \mathbb{P}(R_n < \infty).$$

在 $\{R_{n+1} < \infty\}$ 上, 路径连续性给出 $|Y_{R_{n+1}} - Y_{R_n}| = a$, 故 $a^p \mathbb{P}(R_{n+1} < \infty) \leq \mathbb{P}(R_n < \infty)$ 。

6. 在第 5 问中取 $a = 2$, 归纳得 $\mathbb{P}(R_n < \infty) \leq 2^{-np}$ 。令 m 为满足 $2m \geq x$ 的最小整数。若连续路径曾超过 x , 则至少完成 $m - 1$ 次大小为 2 的振荡, 所以

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \geq 0} Y_t > x\right) \leq \mathbb{P}(R_{m-1} < \infty) \leq 2^{-(m-1)p} \leq 2^p 2^{-px/2}.$$

□

注记与评述

本章简要介绍了所谓的过程一般理论。这里只讨论本书余下部分所需要的概念; 希望进一步了解这一主题的读者可以参阅 Dellacherie 与 Meyer 的专著 [13, 14]。第 3、4 节中介绍的大部分鞅论可追溯到 Doob [15]; 关于连续时间鞅理论的系统论述可见 [14]。可选停时定理在布朗运动中的应用都是十分经典的。同类的其他应用尤其可参阅 Revuz 与 Yor 的著作 [70]。练习 3.29 来自 BMO 鞅理论, 例如可参阅 [18, 第 7 章]。

第四章 连续半鞅

连续半鞅是具有连续样本路径的一类一般过程；下一章将为这类过程建立随机积分理论。按照定义，连续半鞅是一个连续局部鞅与一个（连续）有限变差过程之和。本章分别研究这两类过程。我们先介绍确定性有限变差函数的若干预备知识，再讨论相应的随机过程。随后定义（连续）局部鞅，并构造局部鞅的二次变差；二次变差将在随机积分的构造中发挥基础作用。我们还将说明局部鞅的性质如何与其二次变差的性质相联系。最后，引入连续半鞅及其二次变差过程。

4.1 有限变差过程

本章中的所有过程都以 $\mathbb{R}_+$ 为指标集并取实值。本节简要介绍有限变差过程，首先在确定性框架下讨论有限变差函数。

4.1.1 有限变差函数

在有限变差函数的讨论中，我们只考虑连续函数，因为后续内容所需的正是这一情形。回顾：紧区间 $[0, T]$ 上的符号测度，是该区间上两个有限正测度之差。

定义 4.1。 设 $T \geq 0$ 。若连续函数 $a : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $a(0) = 0$ ，并且存在 $[0, T]$ 上的符号测度 μ ，使得对每个 $t \in [0, T]$ ，

$$a(t) = \mu([0, t]),$$

则称 a 为**有限变差函数**。

测度 μ 由 a 唯一确定。由于 a 连续且 $a(0) = 0$ ， μ 没有原子。

注。 有限变差函数的一般定义既不要求函数连续，也不要求 $a(0) = 0$ 。这里为了方便而加上这两个条件。

把 μ 写成 $[0, T]$ 上两个有限正测度之差的方式并不唯一；但是，存在唯一分解

$$\mu = \mu_+ - \mu_-,$$

使得 μ_+ 与 μ_- 支持在两个互不相交的 Borel 集上。为证明存在性，先从任意分解 $\mu = \mu_1 - \mu_2$ 出发，令 $\nu = \mu_1 + \mu_2$ 。由 Radon-Nikodym 定理，存在 $[0, T]$ 上的非负 Borel 函数 h_1, h_2 ，使得

$$\mu_1(dt) = h_1(t)\nu(dt), \quad \mu_2(dt) = h_2(t)\nu(dt).$$

若令 $h(t) = h_1(t) - h_2(t)$ ，则

$$\mu(dt) = h(t)\nu(dt) = h(t)^+\nu(dt) - h(t)^-\nu(dt).$$

因此，令

$$\mu_+(dt) = h(t)^+\nu(dt), \quad \mu_-(dt) = h(t)^-\nu(dt),$$

便得到分解 $\mu = \mu_+ - \mu_-$ 。而且， μ_+ 与 μ_- 分别支持在两个互不相交的 Borel 集

$$D_+ = \{t : h(t) > 0\}, \quad D_- = \{t : h(t) < 0\}$$

上。该分解的唯一性来自下述事实：对每个 $A \in \mathcal{B}([0, T])$ ，必有

$$\mu_+(A) = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{B}([0, T]), C \subset A\}.$$

记有限正测度

$$|\mu| = \mu_+ + \mu_-.$$

测度 $|\mu|$ 称为 a 的**全变差测度**。对每个 $A \in \mathcal{B}([0, T])$ ，有

$$|\mu(A)| \leq |\mu|(A).$$

此外， μ 关于 $|\mu|$ 的 Radon–Nikodym 导数为

$$\frac{d\mu}{d|\mu|} = 1_{D_+} - 1_{D_-}.$$

等式

$$a(t) = \mu_+([0, t]) - \mu_-([0, t])$$

说明 a 是两个从 0 出发、连续且单调不减的函数之差；由于 μ 没有原子， μ_+ 与 μ_- 也没有原子。反过来，两个从 0 出发、连续且单调不减的函数之差，按定义 4.1 具有有限变差。这可由下述熟知事实推出：公式

$$g(t) = \theta([0, t]), \quad t \in [0, T],$$

在单调不减的右连续函数 $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ 与 $[0, T]$ 上的有限正测度 θ 之间建立一一对应。

设 $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 可测，并满足

$$\int_{[0, T]} |f(s)| |\mu|(ds) < \infty.$$

定义

$$\int_0^T f(s) da(s) := \int_{[0, T]} f(s) \mu(ds),$$

以及

$$\int_0^T f(s) |da(s)| := \int_{[0, T]} f(s) |\mu|(ds).$$

于是有估计

$$\left| \int_0^T f(s) da(s) \right| \leq \int_0^T |f(s)| |da(s)|.$$

把 a 限制在 $[0, t]$ 上（这等价于限制 μ, μ_+, μ_- ），便可对每个 $t \in [0, T]$ 定义 $\int_0^t f(s) da(s)$ 。还可注意到，函数

$$t \mapsto \int_0^t f(s) da(s)$$

在 $[0, T]$ 上也具有有限变差；与它对应的测度就是 $\mu'(ds) = f(s)\mu(ds)$ 。

命题 4.2。 对每个 $t \in (0, T]$,

$$\int_0^t |da(s)| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^p |a(t_i) - a(t_{i-1})| \right\},$$

其中上确界取遍 $[0, t]$ 的所有分割

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t.$$

更精确地, 若

$$0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$$

是 $[0, t]$ 的任意一列递增分割, 且其网格大小趋于 0, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p_n} |a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)| = \int_0^t |da(s)|.$$

注。 在通常的有限变差函数理论中, 往往从命题第一个公式中的上确界有限这一性质出发定义有限变差。

证明。 显然只需处理 $t = T$ 的情形。第一个断言中 “ $\geq$ ” 方向很容易。事实上, 对 $[0, T]$ 的任意分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = T$, 每个 $i \in \{1, \dots, p\}$ 都满足

$$|a(t_i) - a(t_{i-1})| = |\mu((t_{i-1}, t_i])| \leq |\mu|((t_{i-1}, t_i]),$$

而且

$$\sum_{i=1}^p |\mu|((t_{i-1}, t_i]) = |\mu|([0, T]) = \int_0^T |da(s)|.$$

为得到反向不等式, 只需证明第二个断言。取一列递增分割

$$0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = T,$$

其网格大小

$$\max\{t_i^n - t_{i-1}^n : 1 \leq i \leq p_n\}$$

趋于 0。虽然这里证明的是一个确定性结论, 我们将使用鞅论证。排除 $|\mu| = 0$ 的平凡情形, 令概率空间 $\Omega = [0, T]$, 配备 Borel σ -代数 $\mathcal{B} = \mathcal{B}([0, T])$ 和概率测度

$$P(ds) = \frac{|\mu|(ds)}{|\mu|([0, T])}.$$

在这一概率空间上, 考虑离散滤过 $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$: 对每个整数 $n \geq 0$, $\mathcal{B}_n$ 是由区间

$$(t_{i-1}^n, t_i^n], \quad 1 \leq i \leq p_n,$$

生成的 σ -代数。再令

$$X(s) = 1_{D_+}(s) - 1_{D_-}(s) = \frac{d\mu}{d|\mu|}(s),$$

并对每个 $n \geq 0$ 令

$$X_n = E[X | \mathcal{B}_n].$$

条件期望的性质说明, X_n 在每个区间 $(t_{i-1}^n, t_i^n]$ 上为常数, 其值为

$$\frac{\mu((t_{i-1}^n, t_i^n])}{|\mu|((t_{i-1}^n, t_i^n])} = \frac{a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)}{|\mu|((t_{i-1}^n, t_i^n])}.$$

在分母为零的区间上, 这个常数可以任意取值, 因为该区间为 P -零测集。

另一方面, (X_n) 是关于离散滤过 $(\mathcal{B}_n)$ 的闭鞅。由于 X 关于

$$\mathcal{B} = \bigvee_n \mathcal{B}_n$$

可测, 离散时间闭鞅收敛定理 (见附录 A.2) 说明 X_n 在 L^1 中收敛到 X 。特别地,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|X_n|] = E[|X|] = 1,$$

其中最后一个等号来自 $|X(s)| = 1$, $|\mu|(ds)$ -a.e. 再注意到

$$E[|X_n|] = \frac{1}{|\mu|([0, T])} \sum_{i=1}^{p_n} |a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)|,$$

并回顾

$$|\mu|([0, T]) = \int_0^T |da(s)|,$$

即可得到所需结论。 $\square$

下面给出一个有用的逼近引理, 用来逼近连续函数关于有限变差函数的积分。

引理 4.3. 设 $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 并设

$$0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = T$$

是一列网格大小趋于 0 的分割。则

$$\int_0^T f(s) da(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(t_{i-1}^n) (a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)).$$

证明. 在 $[0, T]$ 上定义 f_n : 当 $s \in (t_{i-1}^n, t_i^n]$, $1 \leq i \leq p_n$ 时, 令 $f_n(s) = f(t_{i-1}^n)$, 并令 $f_n(0) = f(0)$ 。于是

$$\sum_{i=1}^{p_n} f(t_{i-1}^n) (a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)) = \int_{[0, T]} f_n(s) \mu(ds).$$

对每个 $s \in [0, T]$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n(s) \rightarrow f(s)$ 。由控制收敛定理得到所需结论。 $\square$

若函数 $a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 在每个区间 $[0, T]$ 上的限制都具有有限变差, 就称 a 是 $\mathbb{R}_+$ 上的有限变差函数。此时, $\mathbb{R}_+$ 上存在唯一的 σ -有限正测度, 使其在每个 $[0, T]$ 上的限制, 都是 a 在该区间上限制的全变差测度。对 $\mathbb{R}_+$ 上的非负 Borel 函数 f , 把关于这一 σ -有限测度的积分记为

$$\int_0^\infty f(s) |da(s)|.$$

此外, 对满足

$$\int_0^\infty |f(s)| |da(s)| < \infty$$

的任意实 Borel 函数 f , 可以定义

$$\int_0^\infty f(s) da(s) := \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(s) da(s) \in (-\infty, \infty).$$

4.1.2 有限变差过程

现在考虑带滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 上定义的随机变量与过程。

定义 4.4. 若适应过程 $A = (A_t)_{t \geq 0}$ 的所有样本路径都是 $\mathbb{R}_+$ 上的有限变差函数, 则称 A 为**有限变差过程**。若其样本路径还都是单调不减函数, 则称 A 为**递增过程**。

注. 特别地, $A_0 = 0$, 而且 A 的样本路径连续。也可以定义具有 càdlàg 样本路径的有限变差过程, 但本书只考虑连续样本路径。我们特别约定有限变差过程的初值为 0, 这将方便后面若干唯一性结论的表述。

若 A 是有限变差过程, 则过程

$$V_t = \int_0^t |dA_s|$$

是递增过程。事实上, V 的样本路径显然单调不减, 而且连续并在 $t = 0$ 时取值 0; 由命题 4.2 的第二部分可知, V_t 是 $\mathcal{F}_t$ -可测随机变量。恒等式

$$A_t = \frac{1}{2}(V_t + A_t) - \frac{1}{2}(V_t - A_t)$$

说明每个有限变差过程都可写成两个递增过程之差; 反命题显然成立。

命题 4.5. 设 A 是有限变差过程, H 是渐进过程, 并且

$$\forall t \geq 0, \forall \omega \in \Omega, \quad \int_0^t |H_s(\omega)| |dA_s(\omega)| < \infty.$$

定义过程 $H \cdot A = ((H \cdot A)_t)_{t \geq 0}$:

$$(H \cdot A)_t = \int_0^t H_s dA_s.$$

则 $H \cdot A$ 也是有限变差过程。

证明. 由命题 4.2 之前的讨论, 已经知道 $H \cdot A$ 的样本路径都是有限变差函数。只需验证该过程适应。为此, 只要证明下述事实: 固定 $t > 0$, 若

$$h : \Omega \times [0, t] \longrightarrow \mathbb{R}$$

关于 $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$ 可测, 并且对每个 ω ,

$$\int_0^t |h(\omega, s)| |dA_s(\omega)| < \infty,$$

则随机变量

$$\int_0^t h(\omega, s) dA_s(\omega)$$

是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。

若

$$h(\omega, s) = 1_{(u, v]}(s) 1_\Lambda(\omega), \quad (u, v] \subset [0, t], \quad \Lambda \in \mathcal{F}_t,$$

则结论立即成立, 因为此时

$$\int_0^t h(\omega, s) dA_s(\omega) = 1_\Lambda(\omega) (A_v(\omega) - A_u(\omega)).$$

由单调类论证（见附录 A.1），结论进而对 $h = 1_G$ 、 $G \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$ 成立。最后，在一般情形下，可把 h 写成一列简单函数 h_n 的逐点极限，并使对每个 n ， $|h_n| \leq |h|$ 。于是，对每个 $\omega \in \Omega$ ，由控制收敛定理，

$$\int_0^t h_n(\omega, s) dA_s(\omega) \longrightarrow \int_0^t h(\omega, s) dA_s(\omega).$$

因此，极限仍是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。 □

注。

(i) 经常只能得到命题假设的下述较弱版本：

$$\text{a.s.}, \quad \forall t \geq 0, \quad \int_0^t |H_s(\omega)| |dA_s(\omega)| < \infty.$$

若滤过完备，在这一较弱假设下仍可把 $H \cdot A$ 定义为有限变差过程。具体地，把 H 换成过程

$$H'_t(\omega) = \begin{cases} H_t(\omega), & \text{若对每个 } n, \int_0^n |H_s(\omega)| |dA_s(\omega)| < \infty, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

由滤过的完备性， H' 仍是渐进过程，因而可定义 $H \cdot A := H' \cdot A$ 。下文将默认使用命题 4.5 的这一扩展形式。

(ii) 在适当的假设下——例如 H, K 渐进，并且对每个 $t \geq 0$ ，

$$\int_0^t |H_s| |dA_s| < \infty, \quad \int_0^t |H_s K_s| |dA_s| < \infty,$$

有“结合律”

$$K \cdot (H \cdot A) = (KH) \cdot A. \quad (4.1)$$

这来自相应的确定性结论。非正式地说，若 $h(s)$ 与 $k(s)h(s)$ 关于 $[0, t]$ 上的符号测度 μ 可积，则

$$k(s)(h(s)\mu(ds)) = (k(s)h(s))\mu(ds).$$

命题的一个重要特例是 $A_t = t$ 。若渐进过程 H 满足

$$\forall t \geq 0, \forall \omega \in \Omega, \quad \int_0^t |H_s(\omega)| ds < \infty,$$

则过程 $(\int_0^t H_s ds)_{t \geq 0}$ 是有限变差过程。

4.2 连续局部鞅

再次考虑带滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 。若 T 是停时， $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 是具有连续样本路径的适应过程，记 X^T 为 X 在 T 处停止所得过程，即对每个 $t \geq 0$ ，

$$X_t^T = X_{t \wedge T}.$$

若 S 是另一个停时，则

$$(X^T)^S = (X^S)^T = X^{S \wedge T}.$$

定义 4.6. 设适应过程 $M = (M_t)_{t \geq 0}$ 具有连续样本路径, 并且 $M_0 = 0$, a.s. 若存在一列单调不减的停时 $(T_n)_{n \geq 0}$, 使得 $T_n \uparrow \infty$ (即对每个 ω , $T_n(\omega) \uparrow \infty$), 并且对每个 n , 停止过程 M^{T_n} 都是一致可积鞅, 则称 M 为**连续局部鞅**。

更一般地, 不假设 $M_0 = 0$ a.s. 时, 如果过程

$$N_t = M_t - M_0$$

是连续局部鞅, 也称 M 为连续局部鞅。

无论哪种情形, 若停时序列 (T_n) 满足 $T_n \uparrow \infty$, 且对每个 n , M^{T_n} 都是一致可积鞅, 就称 (T_n) **约化** M 。

注。

- (i) 连续局部鞅的定义并不要求 $M_t \in L^1$, 这一点与鞅的定义不同。特别地, M_0 可以是任意 $\mathcal{F}_0$ -可测随机变量。
- (ii) 每个具有连续样本路径的鞅都是连续局部鞅 (见下面的性质 (a)), 但反命题不成立。因此, 有时会使用“真鞅”一词来强调它与局部鞅的区别。下面给出几个不是鞅的连续局部鞅。若 B 是从 0 出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, Z 是 $\mathcal{F}_0$ -可测随机变量, 则

$$M_t = Z + B_t$$

总是连续局部鞅; 但若 $E[|Z|] = \infty$, 它不是鞅。若要求 $M_0 = 0$, 还可考虑

$$M_t = ZB_t.$$

它总是连续局部鞅 (见练习 4.22), 但当 $E[|Z|] = \infty$ 时不是鞅。一个不那么人为的例子见练习 5.33 第 8 问。

- (iii) 也可以定义具有 càdlàg 样本路径的局部鞅; 不过, 本书只考虑连续局部鞅。

连续局部鞅的性质。

- (a) 具有连续样本路径的鞅是连续局部鞅, 且 $T_n = n$ 约化 M 。
- (b) 在从 0 出发的连续局部鞅定义中, 可以把“一致可积鞅”换成“鞅”。事实上, 若 M^{T_n} 是鞅, 则 $M^{T_n \wedge n}$ 一致可积, 且仍有 $T_n \wedge n \uparrow \infty$ 。
- (c) 若 M 是连续局部鞅, 则对每个停时 T , M^T 也是连续局部鞅 (这由推论 3.24 得到)。
- (d) 若 (T_n) 约化 M , (S_n) 是满足 $S_n \uparrow \infty$ 的停时序列, 则 $(T_n \wedge S_n)$ 也约化 M (再次使用推论 3.24)。
- (e) 所有连续局部鞅构成一个向量空间。为验证对加法封闭, 设 M, M' 是两个从 0 出发的连续局部鞅, (T_n) 约化 M , (T'_n) 约化 M' 。由 (d), $(T_n \wedge T'_n)$ 约化 $M + M'$ 。

下一个命题给出局部鞅的另外三个有用性质。

命题 4.7。

- (i) 若非负连续局部鞅 M 满足 $M_0 \in L^1$, 则 M 是上鞅。
- (ii) 若连续局部鞅 M 满足: 存在 $Z \in L^1$, 使对每个 $t \geq 0$, $|M_t| \leq Z$ (特别地, 若 M 有界), 则 M 是一致可积鞅。
- (iii) 若 M 是连续局部鞅且 $M_0 = 0$ (更一般地, $M_0 \in L^1$), 则停时序列

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$$

约化 M 。

证明。 (i) 写成 $M_t = M_0 + N_t$ 。按定义, 存在停时序列 (T_n) 约化 N 。若 $s \leq t$, 则对每个 n ,

$$N_{s \wedge T_n} = E[N_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s].$$

两边加上 $\mathcal{F}_0$ -可测且属于 L^1 的随机变量 M_0 , 得到

$$M_{s \wedge T_n} = E[M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s].$$

由于 M 非负, 可以令 $n \rightarrow \infty$, 并应用条件期望版 Fatou 引理, 得到

$$M_s \geq E[M_t | \mathcal{F}_s].$$

取 $s = 0$, 有

$$E[M_t] \leq E[M_0] < \infty,$$

从而对每个 $t \geq 0$, $M_t \in L^1$ 。前面的不等式说明 M 是上鞅。

(ii) 与 (i) 中同样的论证给出, 对 $0 \leq s \leq t$,

$$M_{s \wedge T_n} = E[M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s]. \quad (4.2)$$

由于 $|M_{t \wedge T_n}| \leq Z$, 由控制收敛定理, $M_{t \wedge T_n}$ 在 L^1 中收敛到 M_t 。因此, 可在 (4.2) 中令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$M_s = E[M_t | \mathcal{F}_s].$$

(iii) 先设 $M_0 = 0$ 。由命题 3.9, T_n 是停时。结论立即由 (ii) 得到, 因为 M^{T_n} 是连续局部鞅, 且 $|M^{T_n}| \leq n$ 。若只假设 $M_0 \in L^1$, 则注意到 M^{T_n} 被 $n + |M_0|$ 控制。□

注。 由命题 (ii), 人们或许会猜想: 若连续局部鞅 M 的随机变量族 $(M_t)_{t \geq 0}$ 一致可积, 甚至 M 在某个 $p > 1$ 下于 L^p 中有界, 则 M 自动是真鞅。这个猜想是错误的! 例如, 若 B 是从 $x \neq 0$ 出发的三维布朗运动, 则

$$M_t = \frac{1}{|B_t|}$$

是一个在 L^2 中有界的连续局部鞅, 但并非鞅; 见练习 5.33。

定理 4.8。 设 M 是连续局部鞅, 并且同时是有限变差过程 (特别地, $M_0 = 0$)。则对每个 $t \geq 0$, $M_t = 0$, a.s.

证明。 对每个整数 $n \geq 0$, 令

$$\tau_n = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t |dM_s| \geq n \right\}.$$

由命题 3.9, τ_n 是停时; 这里用到当 M 是有限变差过程时, $\int_0^t |dM_s|$ 是递增过程。

固定 $n \geq 0$, 令 $N = M^{\tau_n}$ 。对每个 $t \geq 0$,

$$|N_t| = |M_{t \wedge \tau_n}| \leq \int_0^{t \wedge \tau_n} |dM_s| \leq n.$$

由命题 4.7, N 是有界鞅。给定 $t > 0$, 取 $[0, t]$ 的任意分割

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t.$$

由命题 3.14,

$$\begin{aligned} E[N_t^2] &= \sum_{i=1}^p E[(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})^2] \\ &\leq E \left[\left(\sup_{1 \leq i \leq p} |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}| \right) \sum_{i=1}^p |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}| \right] \\ &\leq n E \left[\sup_{1 \leq i \leq p} |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}| \right]. \end{aligned}$$

最后一步使用了 $\int_0^t |dN_s| \leq n$ 以及命题 4.2。

现在取一系列网格大小趋于 0 的分割

$$0 = t_0^k < t_1^k < \cdots < t_{p_k}^k = t.$$

由样本路径连续性以及 N 有界 (后者用于控制收敛),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \left[\sup_{1 \leq i \leq p_k} |N_{t_i^k} - N_{t_{i-1}^k}| \right] = 0.$$

因此 $E[N_t^2] = 0$, 即 $M_{t \wedge \tau_n} = 0$, a.s. 令 $n \rightarrow \infty$, 得到 $M_t = 0$, a.s. □

4.3 连续局部鞅的二次变差

从本节起直至本章结束 (以及下一章), 都假设滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 是完备的。下面的定理将在后续内容中起极其重要的作用。

定理 4.9。 设 $M = (M_t)_{t \geq 0}$ 是连续局部鞅。则存在递增过程 $(\langle M, M \rangle_t)_{t \geq 0}$, 且在不可分辨意义下唯一, 使得

$$M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$$

是连续局部鞅。此外, 固定任意 $t > 0$, 若

$$0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$$

是一列逐次加细且网格大小趋于 0 的 $[0, t]$ 分割, 则

$$\langle M, M \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 \quad (\text{依概率}). \quad (4.3)$$

过程 $\langle M, M \rangle$ 称为 M 的**二次变差**。

先指出一个重要特例。若 $M = B$ 是一个 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动 (见定义 3.11), 则 B 是具有连续样本路径的鞅, 因而是连续局部鞅。比较 (4.3) 与命题 2.16 可得: 对每个 $t \geq 0$,

$$\langle B, B \rangle_t = t.$$

所以, 布朗运动的二次变差就是最简单的递增过程。

注。

(i) 过程 $\langle M, M \rangle$ 与初值 M_0 无关, 而只依赖于 M 的增量: 若 $M_t = M_0 + N_t$, 则

$$\langle M, M \rangle = \langle N, N \rangle.$$

这由定理的第二个结论立即可见, 也可从下面的证明中看出。

(ii) 定理第二个结论中, 实际上不必假设分割序列逐次加细。

证明。先证明第一个结论。唯一性是定理 4.8 的直接推论。事实上, 若递增过程 A, A' 都满足定理中的条件, 则

$$A_t - A'_t = (M_t^2 - A'_t) - (M_t^2 - A_t)$$

既是连续局部鞅, 又是有限变差过程。由定理 4.8, $A - A' = 0$ 。

为证明存在性, 先考虑 $M_0 = 0$ 且 M 有界的情形。此时由命题 4.7(ii), M 是真鞅。固定 $K > 0$, 并取一系列逐次加细、网格大小趋于 0 的分割

$$0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = K.$$

注意: 对任意 $0 \leq r < s$ 以及任意有界的 $\mathcal{F}_r$ -可测随机变量 Z , 过程

$$N_t = Z(M_{s \wedge t} - M_{r \wedge t})$$

都是鞅。因此, 对每个 n , 过程

$$X_t^n = \sum_{i=1}^{p_n} M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n \wedge t} - M_{t_{i-1}^n \wedge t})$$

是有界鞅。考虑这些鞅的原因在于下述恒等式: 对每个 $j \in \{0, 1, \dots, p_n\}$,

$$M_{t_j^n}^2 - 2X_{t_j^n}^n = \sum_{i=1}^j (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2. \quad (4.4)$$

引理 4.10。 有

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} E[(X_K^n - X_K^m)^2] = 0.$$

引理的证明。 固定 $n \leq m$, 计算 $E[X_K^n X_K^m]$ 。它等于

$$\sum_{i=1}^{p_n} \sum_{j=1}^{p_m} E \left[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) M_{t_{j-1}^m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}) \right].$$

在这个二重和中, 只有满足 $(t_{j-1}^m, t_j^m] \subset (t_{i-1}^n, t_i^n]$ 的项才可能不为零。事实上, 若 $t_i^n \leq t_{j-1}^m$, 则对 $\mathcal{F}_{t_{j-1}^m}$ 条件化可得

$$\begin{aligned} & E \left[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) M_{t_{j-1}^m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}) \right] \\ &= E \left[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) M_{t_{j-1}^m} E[M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m} | \mathcal{F}_{t_{j-1}^m}] \right] = 0. \end{aligned}$$

另一种不相交次序完全相同。

对每个 $j \in \{1, \dots, p_m\}$, 记 $i_{n,m}(j)$ 为唯一满足

$$(t_{j-1}^m, t_j^m] \subset (t_{i_{n,m}(j)-1}^n, t_{i_{n,m}(j)}^n]$$

的指标。于是

$$E[X_K^n X_K^m] = \sum_{j=1}^{p_m} E \left[M_{t_{i_n, m(j)-1}}^n (M_{t_{i_n, m(j)}}^n - M_{t_{i_n, m(j)-1}}^n) M_{t_{j-1}}^m (M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m) \right].$$

在每一项中，把粗分割的增量分解为所含细分割增量之和。若相应细分割指标 $k \neq j$ ，则按 $k > j$ 或 $k < j$ 分别对 $\mathcal{F}_{t_{k-1}}^m$ 或 $\mathcal{F}_{t_{j-1}}^m$ 条件化，该项为 0。因此只剩 $k = j$ ，从而

$$E[X_K^n X_K^m] = \sum_{j=1}^{p_m} E \left[M_{t_{i_n, m(j)-1}}^n M_{t_{j-1}}^m (M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m)^2 \right].$$

特别地，

$$E[(X_K^m)^2] = \sum_{j=1}^{p_m} E \left[M_{t_{j-1}}^m (M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m)^2 \right].$$

另一方面，利用命题 3.14，有

$$\begin{aligned} E[(X_K^n)^2] &= \sum_{i=1}^{p_n} E \left[M_{t_{i-1}}^n (M_{t_i}^n - M_{t_{i-1}}^n)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} E \left[M_{t_{i-1}}^n E[(M_{t_i}^n - M_{t_{i-1}}^n)^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}^n] \right] \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} E \left[M_{t_{i-1}}^n \sum_{\{j: i_{n, m(j)}=i\}} E[(M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m)^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}^n] \right] \\ &= \sum_{j=1}^{p_m} E \left[M_{t_{i_n, m(j)-1}}^n (M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m)^2 \right]. \end{aligned}$$

合并以上三个等式，得到

$$E[(X_K^n - X_K^m)^2] = E \left[\sum_{j=1}^{p_m} (M_{t_{i_n, m(j)-1}}^n - M_{t_{j-1}}^m)^2 (M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m)^2 \right].$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，

$$\begin{aligned} E[(X_K^n - X_K^m)^2] &\leq E \left[\sup_{1 \leq j \leq p_m} |M_{t_{i_n, m(j)-1}}^n - M_{t_{j-1}}^m|^4 \right]^{1/2} \\ &\quad \times E \left[\left(\sum_{j=1}^{p_m} (M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m)^2 \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

由样本路径连续性、分割网格趋于 0 以及控制收敛定理，第一因子趋于 0。因此只需证明存在有限常数 C ，使对每个 m ，

$$E \left[\left(\sum_{j=1}^{p_m} (M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m)^2 \right)^2 \right] \leq C. \quad (4.5)$$

取常数 A 使得 $|M_t| \leq A$ 对所有 $t \geq 0$ 成立。展开平方并两次使用命题 3.14, 得到

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(\sum_{j=1}^{p_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right)^2 \right] \\
&= E \left[\sum_{j=1}^{p_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^4 \right] + 2E \left[\sum_{1 \leq j < k \leq p_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 (M_{t_k^m} - M_{t_{k-1}^m})^2 \right] \\
&\leq 4A^2 E \left[\sum_{j=1}^{p_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right] \\
&\quad + 2 \sum_{j=1}^{p_m-1} E \left[(M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 E[(M_K - M_{t_j^m})^2 \mid \mathcal{F}_{t_j^m}] \right] \\
&\leq 12A^2 E \left[\sum_{j=1}^{p_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right] \\
&= 12A^2 E[(M_K - M_0)^2] \leq 48A^4.
\end{aligned}$$

所以 (4.5) 可取 $C = 48A^4$, 引理得证。 $\square$

回到定理的证明。由 L^2 中的 Doob 不等式 (命题 3.15(ii)) 和引理 4.10,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} E \left[\sup_{t \leq K} (X_t^n - X_t^m)^2 \right] = 0. \quad (4.6)$$

特别地, 对每个 $t \in [0, K]$, $(X_t^n)_{n \geq 1}$ 在 L^2 中为 Cauchy 列。为了得到具有连续样本路径的极限过程, 由 (4.6) 可选取严格递增整数列 $(n_k)_{k \geq 1}$, 使得对每个 $k \geq 1$,

$$E \left[\sup_{t \leq K} (X_t^{n_{k+1}} - X_t^{n_k})^2 \right] \leq 2^{-k}.$$

于是

$$E \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \leq K} |X_t^{n_{k+1}} - X_t^{n_k}| \right] < \infty,$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \leq K} |X_t^{n_{k+1}} - X_t^{n_k}| < \infty, \quad \text{a.s.}$$

因此, 除去上式级数发散的零测集 N 后, 随机函数列 $(X_t^{n_k}, 0 \leq t \leq K)$ 在 $[0, K]$ 上一致收敛, 极限函数连续。当 $\omega \notin N$ 时令 $Y_t(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} X_t^{n_k}(\omega)$; 当 $\omega \in N$ 时令 $Y_t(\omega) = 0$ 。过程 $(Y_t)_{0 \leq t \leq K}$ 具有连续样本路径, 且每个 Y_t 都是 $\mathcal{F}_t$ -可测的; 这里利用了滤过的完备性, 它保证 $N \in \mathcal{F}_t$ 对每个 $t \geq 0$ 成立。

又因为 (X_t^n) 的 L^2 极限必与某个子列的几乎处处极限一致, 所以对每个 $t \in [0, K]$, $X_t^n \rightarrow Y_t$ 于 L^2 。令 $n \rightarrow \infty$ 即可在 X^n 的鞅性质中取极限, 得到对 $0 \leq s \leq t \leq K$,

$$E[Y_t \mid \mathcal{F}_s] = Y_s.$$

故 $(Y_{t \wedge K})_{t \geq 0}$ 是具有连续样本路径的鞅。

另一方面, 恒等式 (4.4) 表明, 过程 $M_t^2 - 2X_t^n$ 的样本路径沿有限点列 $(t_i^n, 0 \leq i \leq p_n)$ 单调不减。沿子列 (n_k) 取极限可知: 除去零测集 N 后, $M_t^2 - 2Y_t$ 的样本路径在 $[0, K]$ 上单调不减。对 $t \in [0, K]$, 令

$$A_t^{(K)} = \begin{cases} M_t^2 - 2Y_t, & \omega \notin N, \\ 0, & \omega \in N. \end{cases}$$

则 $A_0^{(K)} = 0$, 每个 $A_t^{(K)}$ 都是 $\mathcal{F}_t$ -可测的, $A^{(K)}$ 具有连续且单调不减的样本路径, 而且

$$(M_{t \wedge K}^2 - A_{t \wedge K}^{(K)})_{t \geq 0}$$

是鞅。

对每个整数 $\ell \geq 1$ 重复上述构造, 得到过程 $(A_t^{(\ell)})_{0 \leq t \leq \ell}$ 。由证明开头的唯一性论证, 对每个 $\ell \geq 1$, $A^{(\ell+1)}$ 在 $[0, \ell]$ 上的限制与 $A^{(\ell)}$ 不可分辨。因此可定义递增过程 $\langle M, M \rangle$, 使得对每个 $\ell \geq 1$ 以及每个 $t \in [0, \ell]$,

$$\langle M, M \rangle_t = A_t^{(\ell)}, \quad \text{a.s.}$$

显然, $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$ 是鞅。

仍取证明开头的 $[0, K]$ 分割。由唯一性, $A^{(K)}$ 与 $\langle M, M \rangle$ 在 $[0, K]$ 上不可分辨, 因而 $\langle M, M \rangle_K = A_K^{(K)}$, a.s. 在 (4.4) 中取 $j = p_n$, 并利用

$$X_K^n \longrightarrow Y_K = \frac{1}{2}(M_K^2 - A_K^{(K)}) \quad \text{于 } L^2,$$

得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{p_n} (M_{t_j^n} - M_{t_{j-1}^n})^2 = \langle M, M \rangle_K \quad \text{于 } L^2.$$

这就完成了 $M_0 = 0$ 且 M 有界时的证明。

现在考虑一般情形。写成 $M_t = M_0 + N_t$, 则

$$M_t^2 = M_0^2 + 2M_0N_t + N_t^2.$$

由于 M_0N_t 是连续局部鞅 (见练习 4.22), 可以先把问题化归到 $M_0 = 0$ 的情形。令

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}.$$

可对有界的停止鞅 M^{T_n} 应用已经证明的情形, 并令

$$A^{[n]} = \langle M^{T_n}, M^{T_n} \rangle.$$

唯一性表明, $A^{[n+1]}$ 在 T_n 处停止所得过程与 $A^{[n]}$ 不可分辨。于是存在递增过程 A , 使对每个 n , A^{T_n} 与 $A^{[n]}$ 不可分辨。按构造, 对每个 n ,

$$M_{t \wedge T_n}^2 - A_{t \wedge T_n}$$

是鞅; 这恰好说明 $M_t^2 - A_t$ 是连续局部鞅。令 $\langle M, M \rangle = A$, 存在性得证。

最后证明 (4.3)。仍可设 $M_0 = 0$ 。有界情形已经说明: 把 M 与 $\langle M, M \rangle_t$ 分别换成 M^{T_n} 与 $\langle M, M \rangle_{t \wedge T_n}$ 后, 结论成立, 甚至为 L^2 收敛。再注意到对每个 $t > 0$, $P(t \leq T_n) \rightarrow 1$, 即可得到一般情形的依概率收敛。□

命题 4.11. 设 M 是连续局部鞅, T 是停时. 则对每个 $t \geq 0$, a.s.,

$$\langle M^T, M^T \rangle_t = \langle M, M \rangle_{t \wedge T}.$$

证明. 这是因为

$$M_{t \wedge T}^2 - \langle M, M \rangle_{t \wedge T}$$

是连续局部鞅 (参见连续局部鞅的性质 (c)), 再用定理 4.9 的唯一性即可。□

命题 4.12. 设 M 是满足 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅. 则

$$\langle M, M \rangle = 0 \iff M = 0.$$

证明. 设 $\langle M, M \rangle = 0$. 则 M_t^2 是非负连续局部鞅. 由命题 4.7(i), 它是上鞅, 所以

$$E[M_t^2] \leq E[M_0^2] = 0.$$

故对每个 t , $M_t = 0$, a.s. 反向结论显然。□

下面的定理说明, 连续局部鞅的性质与其二次变差的性质密切相关. 若 A 是递增过程, 则以 A_∞ 表示 $t \rightarrow \infty$ 时 A_t 的递增极限; 该极限总在 $[0, \infty]$ 中存在。

定理 4.13. 设 M 是连续局部鞅, 且 $M_0 \in L^2$.

(i) 下列条件等价:

(a) M 是在 L^2 中有界的真鞅;

(b) $E[\langle M, M \rangle_\infty] < \infty$.

此外, 当这些条件成立时, 过程 $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$ 是一致可积鞅, 并且

$$E[M_\infty^2] = E[M_0^2] + E[\langle M, M \rangle_\infty].$$

(ii) 下列条件等价:

(a) M 是真鞅, 并且对每个 $t \geq 0$, $M_t \in L^2$;

(b) 对每个 $t \geq 0$, $E[\langle M, M \rangle_t] < \infty$.

此外, 当这些条件成立时, 过程 $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$ 是鞅。

注. 在 (i)(a) (或 (ii)(a)) 中, 必须假设 M 是鞅, 而不能只假设它是连续局部鞅. 下面证明所用的 Doob 不等式对一般连续局部鞅并不成立。

证明. (i) 在证明中把 M 换成 $M - M_0$, 可设 $M_0 = 0$. 先设 M 是在 L^2 中有界的鞅. 由 L^2 中的 Doob 不等式 (命题 3.15(ii)), 对每个 $T > 0$,

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} M_t^2 \right] \leq 4E[M_T^2].$$

令 $T \rightarrow \infty$, 得到

$$E \left[\sup_{t \geq 0} M_t^2 \right] \leq 4 \sup_{t \geq 0} E[M_t^2] =: C < \infty.$$

令

$$S_n = \inf\{t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t \geq n\}.$$

连续局部鞅

$$M_{t \wedge S_n}^2 - \langle M, M \rangle_{t \wedge S_n}$$

被可积随机变量

$$\sup_{s \geq 0} M_s^2 + n$$

控制。由命题 4.7(ii)，它是一致可积鞅，因而

$$E[\langle M, M \rangle_{t \wedge S_n}] = E[M_{t \wedge S_n}^2] \leq E\left[\sup_{s \geq 0} M_s^2\right] \leq C.$$

依次令 $n \rightarrow \infty$ 、 $t \rightarrow \infty$ ，再用单调收敛定理，得到

$$E[\langle M, M \rangle_\infty] \leq C < \infty.$$

反过来，设 $E[\langle M, M \rangle_\infty] < \infty$ 。令

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}.$$

连续局部鞅

$$M_{t \wedge T_n}^2 - \langle M, M \rangle_{t \wedge T_n}$$

被可积随机变量 $n^2 + \langle M, M \rangle_\infty$ 控制，故由命题 4.7(ii)，它是一致可积鞅。因此，对每个 $t \geq 0$ ，

$$E[M_{t \wedge T_n}^2] = E[\langle M, M \rangle_{t \wedge T_n}] \leq E[\langle M, M \rangle_\infty] =: C' < \infty.$$

令 $n \rightarrow \infty$ ，由 Fatou 引理得 $E[M_t^2] \leq C'$ ，所以随机变量族 $(M_t)_{t \geq 0}$ 在 L^2 中有界。还需验证 M 是鞅。上式表明，对固定 t ，序列 $(M_{t \wedge T_n})_{n \geq 1}$ 一致可积，且它几乎处处收敛到 M_t ，因而也在 L^1 中收敛。由命题 4.7(iii)， M^{T_n} 是鞅；在

$$E[M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s] = M_{s \wedge T_n}, \quad 0 \leq s < t,$$

中令 $n \rightarrow \infty$ ，得到 M 是鞅。

最后，当 (a)、(b) 成立时，连续局部鞅 $M^2 - \langle M, M \rangle$ 被可积随机变量

$$\sup_{t \geq 0} M_t^2 + \langle M, M \rangle_\infty$$

控制，故由命题 4.7(ii)，它是一致可积鞅。

(ii) 对每个 $a \geq 0$ ，把 (i) 应用于停止过程 $(M_{t \wedge a})_{t \geq 0}$ 即得。 □

4.4 两个连续局部鞅的括号

定义 4.14。 若 M, N 是两个连续局部鞅，则把如下定义的有限变差过程 $\langle M, N \rangle$ 称为它们的**括号过程**：对每个 $t \geq 0$ ，

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{2}(\langle M + N, M + N \rangle_t - \langle M, M \rangle_t - \langle N, N \rangle_t).$$

下面列出括号过程的几个基本性质。

命题 4.15。

(i) $\langle M, N \rangle$ 是唯一的（在不可分辨意义下）有限变差过程，使得

$$M_t N_t - \langle M, N \rangle_t$$

是连续局部鞅。

(ii) 映射 $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle$ 是双线性且对称的。

(iii) 若

$$0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$$

是一列逐次加细且网格大小趋于 0 的 $[0, t]$ 分割, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}) = \langle M, N \rangle_t$$

依概率成立。

(iv) 对每个停时 T ,

$$\langle M^T, N^T \rangle_t = \langle M^T, N \rangle_t = \langle M, N \rangle_{t \wedge T}.$$

(v) 若 M, N 是具有连续样本路径、且在 L^2 中有界的两个鞅, 则

$$M_t N_t - \langle M, N \rangle_t$$

是一致可积鞅。因此, $\langle M, N \rangle_\infty$ 可良好定义为 $t \rightarrow \infty$ 时 $\langle M, N \rangle_t$ 的几乎处处极限; 它可积, 并满足

$$E[M_\infty N_\infty] = E[M_0 N_0] + E[\langle M, N \rangle_\infty].$$

证明。 (i) 由定理 4.9 中相应的刻画得到; 唯一性来自定理 4.8。 (iii) 同样由定理 4.9 的相应结论得到。 (ii) 可由 (iii) 推出, 也可直接使用唯一性论证证明。再由 (iii) 得到 (iv): 注意到对任意 $0 \leq s \leq t$, a.s.,

$$\begin{aligned} \langle M^T, N^T \rangle_t &= \langle M^T, N \rangle_t = \langle M, N \rangle_t, & \text{在 } \{T \geq t\} \text{ 上,} \\ \langle M^T, N^T \rangle_t - \langle M^T, N^T \rangle_s &= \langle M^T, N \rangle_t - \langle M^T, N \rangle_s = 0, & \text{在 } \{T \leq s < t\} \text{ 上.} \end{aligned}$$

最后, (v) 是定理 4.13(i) 的推论。 □

注。 由 (iv) 可知, $M^T(N - N^T)$ 是连续局部鞅; 这一事实若直接证明并不容易。

命题 4.16。 设 B, B' 是两个相互独立的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。则对每个 $t \geq 0$,

$$\langle B, B' \rangle_t = 0.$$

证明。 减去初值后, 可设 $B_0 = B'_0 = 0$ 。过程

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_t + B'_t)$$

是鞅, 因为它是两个鞅的线性组合。检查 X 的有限维边缘分布可知, X 也是布朗运动 (注意: 这里并未断言 X 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动)。由命题 2.16, $\langle X, X \rangle_t = t$; 再用括号过程的双线性, 得到 $\langle B, B' \rangle_t = 0$ 。 □

定义 4.17。 若两个连续局部鞅 M, N 满足

$$\langle M, N \rangle = 0,$$

则称它们**正交**。这等价于 MN 是连续局部鞅。

特别地, 由命题 4.16, 两个相互独立的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动是正交鞅。若 M, N 是在 L^2 中有界的两个正交鞅, 则

$$E[M_t N_t] = E[M_0 N_0],$$

甚至对任意停时 S ,

$$E[M_S N_S] = E[M_0 N_0].$$

这是由定理 3.22 和命题 4.15(v) 得到的。

命题 4.18 (Kunita–Watanabe 不等式)。 设 M, N 是两个连续局部鞅, H, K 是两个可测过程。则 a.s.,

$$\int_0^\infty |H_s| |K_s| |d\langle M, N \rangle_s| \leq \left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty K_s^2 d\langle N, N \rangle_s \right)^{1/2}.$$

证明。 仅在本证明中, 对 $0 \leq s \leq t$ 使用记号

$$\langle M, N \rangle_s^t := \langle M, N \rangle_t - \langle M, N \rangle_s.$$

第一步是注意到: 对任意有理数 $s < t$, a.s.,

$$|\langle M, N \rangle_s^t| \leq \sqrt{\langle M, M \rangle_s^t} \sqrt{\langle N, N \rangle_s^t}.$$

由连续性, 同一不等式对所有实数 $s < t$ 同时成立。事实上, 这可由定理 4.9 和命题 4.15 分别给出的 $\langle M, M \rangle$ 与 $\langle M, N \rangle$ 的分割逼近, 再结合 Cauchy–Schwarz 不等式得到; 这些逼近显然也适用于括号过程的增量。

以下固定一个使上式对所有 $s < t$ 都成立的 ω , 并在该样本点上作确定性论证。对每个 $0 \leq s \leq t$, 还有

$$\int_s^t |d\langle M, N \rangle_u| \leq \sqrt{\langle M, M \rangle_s^t} \sqrt{\langle N, N \rangle_s^t}. \quad (4.7)$$

事实上, 由命题 4.2, 对任意分割 $s = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p |\langle M, N \rangle_{t_{i-1}}^{t_i}| &\leq \sum_{i=1}^p \sqrt{\langle M, M \rangle_{t_{i-1}}^{t_i}} \sqrt{\langle N, N \rangle_{t_{i-1}}^{t_i}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^p \langle M, M \rangle_{t_{i-1}}^{t_i} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^p \langle N, N \rangle_{t_{i-1}}^{t_i} \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\langle M, M \rangle_s^t} \sqrt{\langle N, N \rangle_s^t}. \end{aligned}$$

因此, 对任意有界 Borel 集 $A \subset \mathbb{R}_+$,

$$\int_A |d\langle M, N \rangle_u| \leq \left(\int_A d\langle M, M \rangle_u \right)^{1/2} \left(\int_A d\langle N, N \rangle_u \right)^{1/2}.$$

当 $A = [s, t]$ 时, 这就是 (4.7); 当 A 是有限个区间之并时, 结论由 (4.7) 和再次使用 Cauchy–Schwarz 不等式得到。再用单调类论证, 可知上式对任意有界 Borel 集 A 都成立。

现在设

$$h = \sum_{i=1}^p \alpha_i 1_{A_i}, \quad k = \sum_{i=1}^p \beta_i 1_{A_i}$$

是支集包含在某个 $[0, K]$ 中的两个非负简单函数；这里 $A_1, \dots, A_p$ 是 $[0, K]$ 的可测分割, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ 。于是

$$\begin{aligned} \int h(s)k(s)|d\langle M, N \rangle_s| &= \sum_{i=1}^p \alpha_i \beta_i \int_{A_i} |d\langle M, N \rangle_s| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i^2 \int_{A_i} d\langle M, M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^p \beta_i^2 \int_{A_i} d\langle N, N \rangle_s \right)^{1/2} \\ &= \left(\int h(s)^2 d\langle M, M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int k(s)^2 d\langle N, N \rangle_s \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

这就证明了简单函数情形。每个非负 Borel 函数都可由一系列具有有界支集的简单函数单调递增逼近，再应用单调收敛定理，即得所需不等式。□

4.5 连续半鞅

现在引入下一章将要建立随机积分理论的过程类。

定义 4.19。 若过程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 可以写成

$$X_t = M_t + A_t,$$

其中 M 是连续局部鞅， A 是有限变差过程，则称 X 为**连续半鞅**。

由定理 4.8，分解 $X = M + A$ 在不可分辨意义下唯一，称为 X 的**典范分解**。按构造，连续半鞅具有连续样本路径。也可以定义具有 càdlàg 样本路径的半鞅；但本书只讨论连续半鞅，因此有时省略“连续”二字。

定义 4.20。 设两个连续半鞅 X, Y 的典范分解分别为

$$X = M + A, \quad Y = M' + A'.$$

把有限变差过程 $\langle X, Y \rangle$ 定义为

$$\langle X, Y \rangle_t = \langle M, M' \rangle_t.$$

特别地， $\langle X, X \rangle_t = \langle M, M \rangle_t$ 。

命题 4.21。 设

$$0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = t$$

是一列逐次加细且网格大小趋于 0 的 $[0, t]$ 分割。则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}) = \langle X, Y \rangle_t$$

依概率成立。

证明。 只证明 $X = Y$ 的情形，一般情形留给读者。写 $X = M + A$ ，则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 &= \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 + \sum_{i=1}^{p_n} (A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n})^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n}). \end{aligned}$$

由定理 4.9，第一项依概率收敛到 $\langle M, M \rangle_t = \langle X, X \rangle_t$ 。另一方面，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p_n} (A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n})^2 &\leq \left(\sup_{1 \leq i \leq p_n} |A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n}| \right) \sum_{i=1}^{p_n} |A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n}| \\ &\leq \left(\int_0^t |dA_s| \right) \sup_{1 \leq i \leq p_n} |A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n}|, \end{aligned}$$

由 A 的样本路径连续性，右端几乎处处趋于 0。同样，

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{p_n} (A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n})(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) \right| \\ \leq \left(\int_0^t |dA_s| \right) \sup_{1 \leq i \leq p_n} |M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}| \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

结论得证。 □

练习

以下练习中的过程都定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上；该概率空间配备一个完备滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$ 。

练习 4.22。 设 U 是 $\mathcal{F}_0$ -可测实随机变量， M 是连续局部鞅。证明过程

$$N_t = UM_t$$

是连续局部鞅。（这一结论已经用于连续局部鞅二次变差的构造。）

解答 4.22。 减去常数 M_0 后只需处理 $M_0 = 0$ 。取递增停时 $\rho_n \uparrow \infty$ ，使 M^{ρ_n} 为有界鞅。令

$$S_n = \rho_n 1_{\{|Z| \leq n\}} + 0 \cdot 1_{\{|Z| > n\}}.$$

因为 $\{|Z| \leq n\} \in \mathcal{F}_0$ ， S_n 是停时，并且 $S_n \uparrow \infty$ a.s. 过程

$$(ZM)_t^{S_n} = Z 1_{\{|Z| \leq n\}} M_{t \wedge \rho_n}$$

是鞅：对 $s \leq t$ ，可把有界的 $\mathcal{F}_0$ -可测因子 $Z 1_{\{|Z| \leq n\}}$ 提出条件期望。它还是有界过程。因此 (S_n) 局部化 ZM ，而 ZM 的路径连续，故 ZM 是连续局部鞅。 □

练习 4.23。

1. 设 M 是具有连续样本路径的真鞅，且 $M_0 = 0$ 。再假设 $(M_t)_{t \geq 0}$ 是高斯过程。证明：对

每个 $t \geq 0$ 和每个 $s > 0$, 随机变量 $M_{t+s} - M_t$ 与

$$\sigma(M_r : 0 \leq r \leq t)$$

相互独立。

2. 在第 1 问的假设下, 证明存在连续单调不减函数 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, 使对每个 $t \geq 0$,

$$\langle M, M \rangle_t = f(t).$$

解答 4.23。

1. 若 $0 \leq r \leq t$, 鞅性质给出

$$\mathbb{E}[(M_{t+s} - M_t)M_r] = \mathbb{E}[M_r \mathbb{E}(M_{t+s} - M_t | \mathcal{F}_t)] = 0.$$

联合高斯性说明 $M_{t+s} - M_t$ 与任意有限向量 $(M_{r_1}, \dots, M_{r_k})$ ($r_i \leq t$) 独立。单调类论证于是把独立性推广到 $\sigma(M_r : 0 \leq r \leq t)$ 。

2. 令 $f(t) = \mathbb{E}[M_t^2]$ 。由正交增量, $f(t) - f(s) = \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] \geq 0$, 所以 f 单调不减。路径连续及 Doob 的 L^2 最大不等式说明 f 连续。第 1 问还给出

$$\mathbb{E}[M_t^2 - f(t) | \mathcal{F}_s] = M_s^2 - f(s), \quad s \leq t.$$

因而 $M^2 - f$ 是鞅。另一方面 $M^2 - \langle M \rangle$ 是局部鞅; 二者之差 $\langle M \rangle - f$ 是从 0 出发的连续有限变差局部鞅, 只能恒为零。因此

$$\langle M \rangle_t = f(t) = \mathbb{E}[M_t^2], \quad t \geq 0.$$

□

练习 4.24。设 M 是满足 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅。

1. 对每个整数 $n \geq 1$, 令

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| = n\}.$$

证明 a.s.,

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ 存在且有限} \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{T_n = \infty\} \subset \{\langle M, M \rangle_{\infty} < \infty\}.$$

2. 对每个整数 $n \geq 1$, 令

$$S_n = \inf\{t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t = n\}.$$

证明 a.s.,

$$\{\langle M, M \rangle_{\infty} < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{S_n = \infty\} \subset \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ 存在且有限} \right\},$$

并由此推出 a.s.,

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ 存在且有限} \right\} = \{\langle M, M \rangle_{\infty} < \infty\}.$$

解答 4.24。

1. 若 M_t 收敛到有限值, 则连续路径在 $[0, \infty)$ 上有界, 故对某个 n , $T_n = \infty$ 。反之, 若 $T_n = \infty$, 则 $M = M^{T_n}$, 而 M^{T_n} 是有界鞅, 所以几乎必然收敛到有限值。并且 M^{T_n} 在 L^2 中有界, 故

$$\mathbb{E}[\langle M^{T_n} \rangle_\infty] = \mathbb{E}[(M_\infty^{T_n})^2] < \infty.$$

在 $\{T_n = \infty\}$ 上, $\langle M \rangle_\infty = \langle M^{T_n} \rangle_\infty < \infty$ 。

2. 因 $\langle M \rangle$ 连续递增,

$$\{\langle M \rangle_\infty < \infty\} = \bigcup_{n \geq 1} \{S_n = \infty\}.$$

对每个 n , $\langle M^{S_n} \rangle_\infty \leq n$, 故 M^{S_n} 是 L^2 有界鞅, 从而几乎必然收敛。若 $S_n = \infty$, 则 $M = M^{S_n}$, 所以 M_t 收敛到有限值。与第 1 问合并即得

$$\{M_t \text{ 收敛到有限值}\} = \{\langle M \rangle_\infty < \infty\} \quad \text{a.s.}$$

□

练习 4.25。 对每个整数 $n \geq 1$, 设 $M^n = (M_t^n)_{t \geq 0}$ 是满足 $M_0^n = 0$ 的连续局部鞅, 并假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle M^n, M^n \rangle_\infty = 0$$

依概率成立。

1. 给定 $\varepsilon > 0$, 对每个 $n \geq 1$, 令

$$T_\varepsilon^n = \inf\{t \geq 0 : \langle M^n, M^n \rangle_t \geq \varepsilon\}.$$

说明 T_ε^n 是停时, 然后证明停止连续局部鞅

$$M_t^{n,\varepsilon} = M_{t \wedge T_\varepsilon^n}^n, \quad t \geq 0,$$

是在 L^2 中有界的真鞅。

2. 证明

$$E \left[\sup_{t \geq 0} |M_t^{n,\varepsilon}|^2 \right] \leq 4\varepsilon.$$

3. 对每个 $a > 0$, 写出

$$P \left(\sup_{t \geq 0} |M_t^n| \geq a \right) \leq P \left(\sup_{t \geq 0} |M_t^{n,\varepsilon}| \geq a \right) + P(T_\varepsilon^n < \infty),$$

并证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} |M_t^n| = 0$$

依概率成立。

校订注。 原书第 2 问在阈值定义为 $\langle M^n, M^n \rangle_t \geq \varepsilon$ 的同时, 把右端写成 $4\varepsilon^2$ 。由定理 4.13 与 Doob 的 L^2 不等式, 直接得到且一般只能得到 4ε 。若希望保留 $4\varepsilon^2$, 则第 1 问的阈值应相应改为 ε^2 。这里采用对定义改动最小的修正。

解答 4.25。

1. $\langle M^n \rangle$ 连续适应, 所以 $T_\varepsilon^n = \inf\{t : \langle M^n \rangle_t \geq \varepsilon\}$ 是停时。对 $M^{n,\varepsilon} = (M^n)^{T_\varepsilon^n}$,

$$\langle M^{n,\varepsilon} \rangle_\infty = \langle M^n \rangle_{T_\varepsilon^n} \leq \varepsilon.$$

因而它是 L^2 有界真鞅。

2. 由等距关系与 Doob 不等式,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \geq 0} |M_t^{n,\varepsilon}|^2 \right] \leq 4 \mathbb{E}[\langle M^{n,\varepsilon} \rangle_\infty] = 4 \mathbb{E}[\langle M^n \rangle_{T_\varepsilon^n}] \leq 4\varepsilon.$$

3. 对 $a > 0$, Chebyshev 不等式给出

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} |M_t^n| \geq a \right) &\leq \frac{4\varepsilon}{a^2} + \mathbb{P}(T_\varepsilon^n < \infty) \\ &= \frac{4\varepsilon}{a^2} + \mathbb{P}(\langle M^n \rangle_\infty \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

先令 $n \rightarrow \infty$, 再令 $\varepsilon \downarrow 0$, 右端趋于零。因此 $\sup_{t \geq 0} |M_t^n| \rightarrow 0$ 于概率。

□

练习 4.26。

1. 设 A 是递增过程 (适应、样本路径连续且 $A_0 = 0$), 并且 $A_\infty < \infty$, a.s. 设 Z 是可积随机变量, 并假设对每个停时 T ,

$$E[A_\infty - A_T] \leq E[Z1_{\{T < \infty\}}].$$

引入适当的停时, 证明: 对每个 $\lambda > 0$,

$$E[(A_\infty - \lambda)1_{\{A_\infty > \lambda\}}] \leq E[Z1_{\{A_\infty > \lambda\}}].$$

2. 设 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续可微的单调不减函数, 满足 $f(0) = 0$, 并对每个 $x \geq 0$ 令

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

证明: 在第 1 问的假设下,

$$E[F(A_\infty)] \leq E[Zf(A_\infty)].$$

(提示: 可使用恒等式 $F(x) = xf(x) - \int_0^x \lambda f'(\lambda) d\lambda$.)

3. 设 M 是具有连续样本路径、在 L^2 中有界的真鞅, $M_0 = 0$, 并令 M_∞ 为 $t \rightarrow \infty$ 时 M_t 的几乎处处极限。证明: 取

$$A_t = \langle M, M \rangle_t, \quad Z = M_\infty^2$$

时满足第 1 问的假设。推出对每个实数 $q \geq 1$,

$$E[(\langle M, M \rangle_\infty)^{q+1}] \leq (q+1)E[(\langle M, M \rangle_\infty)^q M_\infty^2].$$

4. 设实数 $p \geq 2$, 且 $E[(\langle M, M \rangle_\infty)^p] < \infty$ 。证明

$$E[(\langle M, M \rangle_\infty)^p] \leq p^p E[|M_\infty|^{2p}].$$

5. 设 N 是满足 $N_0 = 0$ 的连续局部鞅, T 是停时, 并且停止鞅 N^T 一致可积。证明: 对每个实数 $p \geq 2$,

$$E[(\langle N, N \rangle_T)^p] \leq p^p E[|N_T|^{2p}].$$

举例说明: 若 N^T 不是一致可积鞅, 该结论可能不成立。

解答 4.26。

1. 令 $T_\lambda = \inf\{t : A_t > \lambda\}$ 。连续性给出 $\{T_\lambda < \infty\} = \{A_\infty > \lambda\}$, 且在该事件上 $A_{T_\lambda} = \lambda$ 。故

$$\mathbb{E}[(A_\infty - \lambda)1_{\{A_\infty > \lambda\}}] = \mathbb{E}[A_\infty - A_{T_\lambda}] \leq \mathbb{E}[Z1_{\{A_\infty > \lambda\}}].$$

2. 分部积分给出

$$F(x) = xf(x) - \int_0^x \lambda f'(\lambda) d\lambda.$$

用 Tonelli 定理和第 1 问逐层积分,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F(A_\infty)] &= \int_0^\infty \mathbb{E}[(A_\infty - \lambda)1_{\{A_\infty > \lambda\}}] f'(\lambda) d\lambda \\ &\leq \int_0^\infty \mathbb{E}[Z1_{\{A_\infty > \lambda\}}] f'(\lambda) d\lambda = \mathbb{E}[Zf(A_\infty)]. \end{aligned}$$

3. $M^2 - \langle M \rangle$ 是一致可积鞅。对任意停时 T ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T] &= \mathbb{E}[M_\infty^2 - M_T^2] \\ &= \mathbb{E}[(M_\infty - M_T)^2] \leq \mathbb{E}[M_\infty^2 1_{\{T < \infty\}}]. \end{aligned}$$

故第 1 问的条件对 $A = \langle M \rangle$ 、 $Z = M_\infty^2$ 成立。在第 2 问取 $f(x) = (q+1)x^q$ 、 $F(x) = x^{q+1}$, 得到

$$\mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty^{q+1}] \leq (q+1)\mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty^q M_\infty^2].$$

4. 令 $q = p/(p-1)$, 在上一式取指数 $q_0 = p-1$, 再用 Hölder 不等式:

$$\mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty^p] \leq p \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty^{(p-1)/p}] \mathbb{E}[|M_\infty|^{2p}]^{1/p}.$$

消去公共因子并取 p 次方, 得到

$$\mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty^p] \leq p^p \mathbb{E}[|M_\infty|^{2p}].$$

5. 若右端无穷则结论显然。否则, 一致可积性给出 $N_{T \wedge t} = \mathbb{E}[N_T | \mathcal{F}_t]$, 所以 N^T 在 L^{2p} 中有界。令 $\tau_n = \inf\{t : \langle N \rangle_{t \wedge T} \geq n\}$, 对 $N^{T \wedge \tau_n}$ 应用第 4 问, 再令 $n \rightarrow \infty$, 由单调收敛和条件 Jensen 不等式得到

$$\mathbb{E}[\langle N \rangle_T^p] \leq p^p \mathbb{E}[|N_T|^{2p}].$$

6. 令 B 从 0 出发, $T = \inf\{t : B_t = a\}$, 其中 $a \neq 0$ 。则 $B_T = a$, 但 $\mathbb{E}[T] = \infty$, 从而对 $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}[\langle B \rangle_T^p] = \mathbb{E}[T^p] = \infty > p^p |a|^{2p}.$$

此时 B^T 不一致可积, 否则 $0 = \mathbb{E}[B_0] = \mathbb{E}[B_T] = a$, 矛盾。

□

练习 4.27. 设 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 是取非负值、具有连续样本路径的适应过程, $A = (A_t)_{t \geq 0}$ 是递增过程 (适应、样本路径连续且 $A_0 = 0$)。考虑条件

$$\text{对每个有界停时 } T, \quad E[X_T] \leq E[A_T]. \quad (\text{D})$$

1. 设 M 是具有连续样本路径、满足 $M_0 = 0$ 的平方可积鞅。证明: 取

$$X_t = M_t^2, \quad A_t = \langle M, M \rangle_t$$

时, 条件 (D) 成立。

2. 证明: 若只假设 M 是满足 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅, 第 1 问的结论仍然成立。
3. 令

$$X_t^* = \sup_{s \leq t} X_s.$$

证明: 在条件 (D) 下, 对每个有界停时 S 和每个 $c > 0$,

$$P(X_S^* \geq c) \leq \frac{1}{c} E[A_S].$$

(提示: 可把 (D) 用于 $T = S \wedge R$, 其中 $R = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq c\}$ 。)

4. 推出: 仍在条件 (D) 下, 对每个停时 S (可以取值 ∞),

$$P(X_S^* > c) \leq \frac{1}{c} E[A_S].$$

当 $S = \infty$ 时, 约定 $X_\infty^* = \sup_{s \geq 0} X_s$ 。

5. 给定 $c, d > 0$, 令

$$S = \inf\{t \geq 0 : A_t \geq d\}.$$

设 T 是停时。注意到

$$\{X_T^* > c\} \subset \{X_{T \wedge S}^* > c\} \cup \{A_T \geq d\},$$

证明: 在条件 (D) 下,

$$P(X_T^* > c) \leq \frac{1}{c} E[A_T \wedge d] + P(A_T \geq d).$$

6. 利用第 2、5 问验证: 若 $(M^{(n)})$ 是一列连续局部鞅, T 是停时, 并且

$$\langle M^{(n)}, M^{(n)} \rangle_T \rightarrow 0$$

依概率成立, 则

$$\sup_{s \leq T} |M_s^{(n)}| \rightarrow 0$$

依概率成立。

解答 4.27.

1. 对有界停时 T , $M^2 - \langle M \rangle$ 的可选停时定理给出

$$\mathbb{E}[M_T^2] = \mathbb{E}[\langle M \rangle_T].$$

2. 取局部化停时 $\tau_n \uparrow \infty$, 使 M^{τ_n} 为平方可积鞅。第 1 问及 Fatou、单调收敛给出

$$\mathbb{E}[M_T^2] \leq \liminf_n \mathbb{E}[M_{T \wedge \tau_n}^2] = \lim_n \mathbb{E}[\langle M \rangle_{T \wedge \tau_n}] = \mathbb{E}[\langle M \rangle_T].$$

3. 令 $R = \inf\{t : X_t \geq c\}$, 并取 $U = S \wedge R$ 。则 U 有界且 $\{R \leq S\} = \{X_S^* \geq c\}$ 。由连续性, 在该事件上 $X_U = X_R \geq c$, 所以

$$c \mathbb{P}(X_S^* \geq c) \leq \mathbb{E}[X_U] \leq \mathbb{E}[A_U] \leq \mathbb{E}[A_S].$$

4. 对 $S_n = S \wedge n$ 应用第 3 问, 并令 $n \rightarrow \infty$:

$$\mathbb{P}(X_S^* > c) = \lim_n \mathbb{P}(X_{S_n}^* > c) \leq \frac{1}{c} \lim_n \mathbb{E}[A_{S_n}] = \frac{1}{c} \mathbb{E}[A_S].$$

5. 令 $R = \inf\{t : A_t \geq d\}$ 。由连续性, $A_{T \wedge R} = A_T \wedge d$, 并且

$$\{X_T^* > c\} \subset \{X_{T \wedge R}^* > c\} \cup \{A_T \geq d\}.$$

第 4 问于是给出

$$\mathbb{P}(X_T^* > c) \leq \frac{1}{c} \mathbb{E}[A_T \wedge d] + \mathbb{P}(A_T \geq d).$$

6. 对 $X^{(n)} = (M^{(n)})^2$ 、 $A^{(n)} = \langle M^{(n)} \rangle$ 使用第 2、5 问。给定 $\varepsilon, d > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq T} |M_s^{(n)}| > \varepsilon\right) \leq \frac{d}{\varepsilon^2} + \mathbb{P}(\langle M^{(n)} \rangle_T \geq d).$$

先令 $n \rightarrow \infty$, 再令 $d \downarrow 0$, 即得所需概率收敛。

□

注记与评述

Dellacherie 与 Meyer 的著作 [14] 仍是本章主题的极佳参考资料; 该书在具有 càdlàg 样本路径的局部鞅与半鞅这一更一般的框架下讨论这些内容。另见 [72] 与 [49] (特别地, [72] 讨论了有限变差过程的初等理论)。局部鞅的概念由 Itô 与 Watanabe 于 1965 年在 [43] 中提出。半鞅的概念似乎源于 Fisk 1965 年的工作 [25], 其中使用的名称是“拟鞅” (quasimartingales); 另见 Meyer [60]。连续 (局部) 鞅二次变差的经典构造以 Doob–Meyer 分解定理 [58] 为基础, 例如见 [49]。本章采用的较初等表述受 [70] 启发。

第五章 随机积分

本章是全书的核心。我们先定义关于平方可积连续鞅的随机积分：首先处理初等过程的积分（它们在这里所起的作用，类似于 Riemann 积分理论中的阶梯函数），然后利用 Hilbert 空间之间的等距映射处理一般情形。随后，很容易把随机积分的定义推广到连续局部鞅与半鞅。

接着将推导著名的 Itô 公式。该公式说明，一个或多个连续半鞅经光滑函数作用后的像仍是连续半鞅，并且其典范分解可以用随机积分表示。Itô 公式是随机分析最主要的技术工具。本章将讨论它的若干重要应用，包括：Lévy 定理，即以二次变差过程等于 t 刻画布朗运动；Burkholder–Davis–Gundy 不等式；以及布朗滤过中的鞅表示为随机积分。

本章最后讨论 Girsanov 定理，它研究在绝对连续的概率测度变换下，鞅与半鞅概念的稳定性。作为 Girsanov 定理的应用，还将证明著名的 Cameron–Martin 公式；该公式给出 Wiener 测度在确定性函数平移下的像。

5.1 随机积分的构造

本章始终在带滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 上讨论，并假设滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 完备。除非另有说明，本章所有过程均以 $\mathbb{R}_+$ 为指标集并取实值。我们常把“具有连续样本路径的鞅”简称为“连续鞅”。

5.1.1 关于在 L^2 中有界鞅的随机积分

记 $\mathcal{H}^2$ 为所有满足 $M_0 = 0$ 、且在 L^2 中有界的连续鞅 M 所成的空间；照例，把不可分辨的过程视为同一个元素。等价地，由命题 4.13， $M \in \mathcal{H}^2$ 当且仅当 M 是满足 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅，并且

$$E[\langle M, M \rangle_\infty] < \infty.$$

由命题 3.21，若 $M \in \mathcal{H}^2$ ，则

$$M_t = E[M_\infty \mid \mathcal{F}_t],$$

其中 $M_\infty \in L^2$ 是 $t \rightarrow \infty$ 时 M_t 的几乎处处极限。

命题 4.15(v) 表明，若 $M, N \in \mathcal{H}^2$ ，则随机变量 $\langle M, N \rangle_\infty$ 有良好定义，且 $E[|\langle M, N \rangle_\infty|] < \infty$ 。因此可在 $\mathcal{H}^2$ 上定义对称双线性型

$$(M, N)_{\mathcal{H}^2} = E[\langle M, N \rangle_\infty] = E[M_\infty N_\infty],$$

其中第二个等号来自命题 4.15(v)。显然， $(M, M)_{\mathcal{H}^2} = 0$ 当且仅当 $M = 0$ 。因此该内积给出的范数为

$$\|M\|_{\mathcal{H}^2} = (M, M)_{\mathcal{H}^2}^{1/2} = E[\langle M, M \rangle_\infty]^{1/2} = E[M_\infty^2]^{1/2}.$$

命题 5.1. 赋以内积 $(M, N)_{\mathcal{H}^2}$ 后，空间 $\mathcal{H}^2$ 是 Hilbert 空间。

证明。 只需验证向量空间 $\mathcal{H}^2$ 关于范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^2}$ 完备。设 $(M^n)_{n \geq 1}$ 是该范数下的 Cauchy 列。于是

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} E[(M_\infty^n - M_\infty^m)^2] = \lim_{m, n \rightarrow \infty} (M^n - M^m, M^n - M^m)_{\mathcal{H}^2} = 0.$$

所以 (M_∞^n) 在 L^2 中收敛到某个极限, 记为 Z 。另一方面, 由 L^2 中的 Doob 不等式 (命题 3.15(ii)), 对每个 m, n ,

$$E \left[\sup_{t \geq 0} (M_t^n - M_t^m)^2 \right] \leq 4E[(M_\infty^n - M_\infty^m)^2].$$

从而

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} E \left[\sup_{t \geq 0} (M_t^n - M_t^m)^2 \right] = 0. \quad (5.1)$$

因此, 对每个 $t \geq 0$, M_t^n 在 L^2 中收敛。还需说明这些极限组成一个具有连续样本路径的过程。由 (5.1) 可选取严格递增整数列 $n_k \uparrow \infty$, 使得

$$E \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \geq 0} |M_t^{n_k} - M_t^{n_{k+1}}| \right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} E \left[\sup_{t \geq 0} (M_t^{n_k} - M_t^{n_{k+1}})^2 \right]^{1/2} < \infty.$$

于是 a.s.,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \geq 0} |M_t^{n_k} - M_t^{n_{k+1}}| < \infty.$$

所以过程列 $(M_t^{n_k})_{t \geq 0}$ a.s. 在 $\mathbb{R}_+$ 上一致收敛到某个过程 $(M_t)_{t \geq 0}$ 。在一致收敛不成立的零测集上, 对所有 $t \geq 0$ 令 $M_t = 0$ 。显然, 极限过程 M 具有连续样本路径并且适应; 这里使用了滤过的完备性。

此外, 由 $M_\infty^n \rightarrow Z$ 于 L^2 , 在恒等式

$$M_t^{n_k} = E[M_\infty^{n_k} | \mathcal{F}_t]$$

中取极限, 立即得到

$$M_t = E[Z | \mathcal{F}_t].$$

因此 M 是在 L^2 中有界的连续鞅, 即 $M \in \mathcal{H}^2$ 。上述一致收敛还保证

$$M_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} M_\infty^{n_k} = Z, \quad \text{a.s.}$$

最后, $M_\infty^n \rightarrow Z = M_\infty$ 于 L^2 , 说明 $M^n \rightarrow M$ 于 $\mathcal{H}^2$ 。□

记 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上的渐进 σ -代数为 $\mathcal{P}$ (见第 3.1 节末尾)。若 $M \in \mathcal{H}^2$, 令 $L^2(M)$ 表示所有满足

$$E \left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] < \infty$$

的渐进过程 H 所成的空间。约定: 若两个满足上述可积条件的渐进过程 H, H' 满足

$$H_s = H'_s, \quad d\langle M, M \rangle_s\text{-a.e.}, \quad \text{a.s.},$$

则把它们视为同一个元素。可以把 $L^2(M)$ 看作通常的 L^2 空间:

$$L^2(M) = L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}, dP d\langle M, M \rangle_s),$$

其中 $dP d\langle M, M \rangle_s$ 表示 $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P})$ 上的有限测度; 它赋予集合 $A \in \mathcal{P}$ 的质量为

$$E \left[\int_0^\infty 1_A(\omega, s) d\langle M, M \rangle_s \right].$$

该测度的总质量为

$$E[\langle M, M \rangle_\infty] = \|M\|_{\mathcal{H}^2}^2.$$

和任意 L^2 空间一样, $L^2(M)$ 在内积

$$(H, K)_{L^2(M)} = E \left[\int_0^\infty H_s K_s d\langle M, M \rangle_s \right]$$

下是 Hilbert 空间; 相应范数为

$$\|H\|_{L^2(M)} = E \left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right]^{1/2}.$$

定义 5.2. 若渐进过程 H 具有形式

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(\omega) 1_{(t_i, t_{i+1}]}(s),$$

其中

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p,$$

且对每个 $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $H^{(i)}$ 都是有界的 $\mathcal{F}_{t_i}$ -可测随机变量, 则称 H 为**初等过程**。

所有初等过程组成的集合记为 $\mathcal{E}$ 。它是 $L^2(M)$ 的线性子空间。严格地说, 这里应当称为“初等过程的等价类”; 回顾: 若 $\|H - H'\|_{L^2(M)} = 0$, 则在 $L^2(M)$ 中把 H, H' 视为同一元素。

命题 5.3. 对每个 $M \in \mathcal{H}^2$, $\mathcal{E}$ 在 $L^2(M)$ 中稠密。

证明. 由 Hilbert 空间的初等理论, 只需证明: 若 $K \in L^2(M)$ 与 $\mathcal{E}$ 正交, 则 $K = 0$ 。设 $K \in L^2(M)$ 与 $\mathcal{E}$ 正交, 并对每个 $t \geq 0$ 令

$$X_t = \int_0^t K_u d\langle M, M \rangle_u.$$

为说明右端积分有意义并且定义了有限变差过程 $(X_t)_{t \geq 0}$, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式得到

$$E \left[\int_0^t |K_u| d\langle M, M \rangle_u \right] \leq E \left[\int_0^t K_u^2 d\langle M, M \rangle_u \right]^{1/2} E[\langle M, M \rangle_\infty]^{1/2}.$$

右端有限, 因为 $M \in \mathcal{H}^2$ 且 $K \in L^2(M)$ 。特别地,

$$\text{a.s.}, \quad \forall t \geq 0, \quad \int_0^t |K_u| d\langle M, M \rangle_u < \infty.$$

由命题 4.5 (以及该命题后的注 (i)), X 可良好定义为有限变差过程。前面的估计还说明对每个 $t \geq 0$, $X_t \in L^1$ 。

取 $0 \leq s < t$, 令 F 为任意有界的 $\mathcal{F}_s$ -可测随机变量, 并令初等过程

$$H_r(\omega) = F(\omega) 1_{(s, t]}(r).$$

由 $(H, K)_{L^2(M)} = 0$, 得到

$$E \left[F \int_s^t K_u d\langle M, M \rangle_u \right] = 0.$$

所以对任意 $s < t$ 和任意有界的 $\mathcal{F}_s$ -可测随机变量 F ,

$$E[F(X_t - X_s)] = 0.$$

过程 X 适应, 且每个 $X_r \in L^1$, 因而 X 是连续鞅。另一方面, X 还是有限变差过程; 由定理 4.8, 只能有 $X = 0$ 。因此

$$\int_0^t K_u d\langle M, M \rangle_u = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{a.s.}$$

这说明: 以 K_u 为 $d\langle M, M \rangle_u$ 密度的符号测度几乎处处为零, 因而

$$K_u = 0, \quad d\langle M, M \rangle_u\text{-a.e.}, \quad \text{a.s.}$$

也就是说, $K = 0$ 于 $L^2(M)$ 。□

回顾: 若 T 是停时, 则 X^T 表示 X 在 T 处停止所得过程, 即 $X_t^T = X_{t \wedge T}$ 。若 $M \in \mathcal{H}^2$, 由

$$\langle M^T, M^T \rangle_\infty = \langle M, M \rangle_T$$

立即可知 $M^T \in \mathcal{H}^2$ 。此外, 若 $H \in L^2(M)$, 则过程 $1_{[0, T]}H$ 也属于 $L^2(M)$, 其中

$$(1_{[0, T]}H)_s(\omega) = 1_{\{0 \leq s \leq T(\omega)\}}H_s(\omega).$$

注意: $1_{[0, T]}$ 是渐进过程, 因为它适应且样本路径左连续。

定理 5.4. 设 $M \in \mathcal{H}^2$ 。对每个具有形式

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(\omega) 1_{(t_i, t_{i+1}]}(s)$$

的 $H \in \mathcal{E}$, 公式

$$(H \cdot M)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t})$$

定义了一个过程 $H \cdot M \in \mathcal{H}^2$ 。映射 $H \mapsto H \cdot M$ 可延拓为从 $L^2(M)$ 到 $\mathcal{H}^2$ 的等距映射。此外, $H \cdot M$ 是唯一满足下述性质的 $\mathcal{H}^2$ 中的鞅:

$$\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle, \quad \forall N \in \mathcal{H}^2. \quad (5.2)$$

若 T 是停时, 则

$$(1_{[0, T]}H) \cdot M = (H \cdot M)^T = H \cdot M^T. \quad (5.3)$$

常用记号

$$(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s,$$

并称 $H \cdot M$ 为 H 关于 M 的**随机积分**。

注. 式 (5.2) 右端的 $H \cdot \langle M, N \rangle$ 是关于有限变差过程的积分, 定义见第 4.1 节。关于有限变差过程 A 的积分与关于鞅 M 的积分都使用相似记号 $H \cdot A$ 、 $H \cdot M$, 不会造成歧义, 因为这两类过程本质上互不相交。

证明. 先注意: 当 $H \in \mathcal{E}$ 时, $H \cdot M$ 的定义与选取的初等过程表示无关。由此容易验证映射 $H \mapsto H \cdot M$ 线性。下面说明它把 $\mathcal{E}$ (视为 $L^2(M)$ 的子空间) 等距映入 $\mathcal{H}^2$ 。

固定定理中形式的 $H \in \mathcal{E}$ 。对每个 $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ 和每个 $t \geq 0$, 令

$$M_t^i = H^{(i)}(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}).$$

直接验证可知, M^i 是连续鞅 (定理 4.9 证明开头已经使用过这一事实), 且 $M^i \in \mathcal{H}^2$ 。因此

$$H \cdot M = \sum_{i=0}^{p-1} M^i$$

也属于 $\mathcal{H}^2$ 。各连续鞅 M^i 两两正交, 并且

$$\langle M^i, M^i \rangle_t = (H^{(i)})^2 (\langle M, M \rangle_{t_{i+1} \wedge t} - \langle M, M \rangle_{t_i \wedge t}).$$

由此得到

$$\begin{aligned} \langle H \cdot M, H \cdot M \rangle_t &= \sum_{i=0}^{p-1} (H^{(i)})^2 (\langle M, M \rangle_{t_{i+1} \wedge t} - \langle M, M \rangle_{t_i \wedge t}) \\ &= \int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \|H \cdot M\|_{\mathcal{H}^2}^2 &= E[\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle_\infty] \\ &= E\left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M \rangle_s\right] = \|H\|_{L^2(M)}^2. \end{aligned}$$

由线性可知, 若另一初等过程 H' 与 H 在 $L^2(M)$ 中等同, 则 $H \cdot M = H' \cdot M$ 。故该映射确实从 $\mathcal{E} \subset L^2(M)$ 映入 $\mathcal{H}^2$, 并且是等距映射。由命题 5.3, $\mathcal{E}$ 在 $L^2(M)$ 中稠密; 由命题 5.1, $\mathcal{H}^2$ 是 Hilbert 空间。因此, 该映射唯一延拓为从 $L^2(M)$ 到 $\mathcal{H}^2$ 的等距映射。

下面验证 (5.2)。固定 $N \in \mathcal{H}^2$ 。若 $H \in L^2(M)$, 由 Kunita–Watanabe 不等式 (命题 4.18),

$$E\left[\int_0^\infty |H_s| |d\langle M, N \rangle_s|\right] \leq \|H\|_{L^2(M)} \|N\|_{\mathcal{H}^2} < \infty.$$

所以

$$\int_0^\infty H_s d\langle M, N \rangle_s = (H \cdot \langle M, N \rangle)_\infty$$

有良好定义且属于 L^1 。先设 H 是定理中形式的初等过程, 并仍采用前面定义的 M^i 。则

$$\langle H \cdot M, N \rangle = \sum_{i=0}^{p-1} \langle M^i, N \rangle,$$

而且

$$\langle M^i, N \rangle_t = H^{(i)} (\langle M, N \rangle_{t_{i+1} \wedge t} - \langle M, N \rangle_{t_i \wedge t}).$$

因此

$$\begin{aligned} \langle H \cdot M, N \rangle_t &= \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)} (\langle M, N \rangle_{t_{i+1} \wedge t} - \langle M, N \rangle_{t_i \wedge t}) \\ &= \int_0^t H_s d\langle M, N \rangle_s. \end{aligned}$$

这就证明了初等过程情形。

再注意, 线性映射

$$X \mapsto \langle X, N \rangle_\infty$$

从 $\mathcal{H}^2$ 到 L^1 连续。事实上, 由 Kunita–Watanabe 不等式,

$$E[|\langle X, N \rangle_\infty|] \leq E[\langle X, X \rangle_\infty]^{1/2} E[\langle N, N \rangle_\infty]^{1/2} = \|N\|_{\mathcal{H}^2} \|X\|_{\mathcal{H}^2}.$$

若 $(H^n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{E}$ 且 $H^n \rightarrow H$ 于 $L^2(M)$, 则在 L^1 中

$$\begin{aligned}\langle H \cdot M, N \rangle_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle H^n \cdot M, N \rangle_\infty \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (H^n \cdot \langle M, N \rangle)_\infty = (H \cdot \langle M, N \rangle)_\infty.\end{aligned}$$

最后一步再次由 Kunita–Watanabe 不等式得到, 因为

$$E \left[\left| \int_0^\infty (H_s^n - H_s) d\langle M, N \rangle_s \right| \right] \leq E[\langle N, N \rangle_\infty]^{1/2} \|H^n - H\|_{L^2(M)}.$$

目前只得到 $t = \infty$ 时的等式; 在该等式中把 N 换成停止鞅 N^t , 即可得到任意 $t \geq 0$ 时的等式, 从而完成 (5.2) 的证明。

该性质还唯一刻画 $H \cdot M$ 。事实上, 若 $X \in \mathcal{H}^2$ 是另一个满足同一等式的鞅, 则对每个 $N \in \mathcal{H}^2$,

$$\langle H \cdot M - X, N \rangle = 0.$$

取 $N = H \cdot M - X$, 再用命题 4.12, 得到 $X = H \cdot M$ 。

最后验证 (5.3)。由连续局部鞅括号过程的性质, 对每个 $N \in \mathcal{H}^2$,

$$\begin{aligned}\langle (H \cdot M)^T, N \rangle_t &= \langle H \cdot M, N \rangle_{t \wedge T} \\ &= (H \cdot \langle M, N \rangle)_{t \wedge T} \\ &= ((1_{[0, T]} H) \cdot \langle M, N \rangle)_t.\end{aligned}$$

所以停止鞅 $(H \cdot M)^T$ 满足随机积分 $(1_{[0, T]} H) \cdot M$ 的特征性质, 得到 (5.3) 的第一个等号。第二个等号同理:

$$\begin{aligned}\langle H \cdot M^T, N \rangle &= H \cdot \langle M^T, N \rangle \\ &= H \cdot \langle M, N \rangle^T \\ &= (1_{[0, T]} H) \cdot \langle M, N \rangle.\end{aligned}$$

定理得证。 □

注。 也可以用关系 (5.2) 定义随机积分 $H \cdot M$ 。事实上, 映射

$$N \longmapsto E[(H \cdot \langle M, N \rangle)_\infty]$$

是 $\mathcal{H}^2$ 上的连续线性泛函。由 Riesz 表示定理, 存在唯一的 $H \cdot M \in \mathcal{H}^2$, 使得

$$\begin{aligned}E[(H \cdot \langle M, N \rangle)_\infty] &= (H \cdot M, N)_{\mathcal{H}^2} \\ &= E[\langle H \cdot M, N \rangle_\infty].\end{aligned}$$

采用定理 5.4 末尾引入的记号, 式 (5.2) 可改写为

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s dM_s, N \right\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N \rangle_s.$$

可把它理解为: 随机积分与括号运算“可交换”。立即得到一个非常重要的推论。若 $M \in \mathcal{H}^2$, $H \in L^2(M)$, 连续两次使用 (5.2), 有

$$\begin{aligned}\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle &= H \cdot (H \cdot \langle M, M \rangle) \\ &= H^2 \cdot \langle M, M \rangle,\end{aligned}$$

其中使用了有限变差过程积分的“结合律”(4.1)。换言之，连续鞅 $H \cdot M$ 的二次变差为

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s dM_s, \int_0^\cdot H_s dM_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s. \quad (5.4)$$

更一般地，若 $N \in \mathcal{H}^2$ 、 $K \in L^2(N)$ ，同样的论证给出

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s dM_s, \int_0^\cdot K_s dN_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s. \quad (5.5)$$

下面这个随机积分的“结合律”与有限变差过程积分的(4.1)类似，并且非常有用。

命题 5.5。 设 $H \in L^2(M)$ 。若 K 是渐进过程，则

$$KH \in L^2(M) \iff K \in L^2(H \cdot M).$$

当这些条件成立时，

$$(KH) \cdot M = K \cdot (H \cdot M).$$

证明。 由 (5.4)，

$$E \left[\int_0^\infty K_s^2 H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] = E \left[\int_0^\infty K_s^2 d\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle_s \right],$$

这就给出第一个结论。对第二个结论，任取 $N \in \mathcal{H}^2$ ，有

$$\begin{aligned} \langle (KH) \cdot M, N \rangle &= KH \cdot \langle M, N \rangle \\ &= K \cdot (H \cdot \langle M, N \rangle) \\ &= K \cdot \langle H \cdot M, N \rangle. \end{aligned}$$

由 (5.2) 中的唯一性，得到所需等式。 $\square$

随机积分的矩。 设 $M, N \in \mathcal{H}^2$ 、 $H \in L^2(M)$ 、 $K \in L^2(N)$ 。由于 $H \cdot M$ 与 $K \cdot N$ 都是 $\mathcal{H}^2$ 中的鞅，对每个 $t \in [0, \infty]$ ，

$$E \left[\int_0^t H_s dM_s \right] = 0, \quad (5.6)$$

并且由命题 4.15(v) 与 (5.5)，

$$E \left[\left(\int_0^t H_s dM_s \right) \left(\int_0^t K_s dN_s \right) \right] = E \left[\int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s \right]. \quad (5.7)$$

特别地，

$$E \left[\left(\int_0^t H_s dM_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right]. \quad (5.8)$$

此外，因为 $H \cdot M$ 是真鞅，所以对每个 $0 \leq s < t \leq \infty$ ，

$$E \left[\int_0^t H_r dM_r \middle| \mathcal{F}_s \right] = \int_0^s H_r dM_r, \quad (5.9)$$

等价地，

$$E \left[\int_s^t H_r dM_r \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0.$$

这里对 $\int_s^t H_r dM_r$ 使用了显然的记号。需要特别注意：对于下文即将介绍的随机积分推广，上述公式——尤其是 (5.6) 与 (5.8)——可能不再成立。

5.1.2 关于局部鞅的随机积分

现在利用 (5.3), 把 $H \cdot M$ 的定义推广到任意连续局部鞅。若 M 是连续局部鞅, 以 $L_{\text{loc}}^2(M)$ (相应地, 以 $L^2(M)$) 表示所有满足下述条件的渐进过程 H 所成的集合:

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s < \infty, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{a.s.}$$

(相应地, 满足

$$E \left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] < \infty$$

)。为后文使用, 注意 $L^2(M)$ 仍可看作通常的 L^2 空间, 因而具有 Hilbert 空间结构; 等价关系与 $M \in \mathcal{H}^2$ 时相同。

定理 5.6. 设 M 是连续局部鞅。对每个 $H \in L_{\text{loc}}^2(M)$, 存在唯一的、初值为 0 的连续局部鞅, 记为 $H \cdot M$, 使得对每个连续局部鞅 N ,

$$\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle. \quad (5.10)$$

若 T 是停时, 则

$$(1_{[0,T]} H) \cdot M = (H \cdot M)^T = H \cdot M^T. \quad (5.11)$$

若 $H \in L_{\text{loc}}^2(M)$, K 是渐进过程, 则

$$K \in L_{\text{loc}}^2(H \cdot M) \iff HK \in L_{\text{loc}}^2(M),$$

并且在这些条件成立时,

$$K \cdot (H \cdot M) = HK \cdot M. \quad (5.12)$$

最后, 若 $M \in \mathcal{H}^2$ 、 $H \in L^2(M)$, 这里的定义与定理 5.4 的定义一致。

校订注. 原书在 (5.12) 中把左端写为 $H \cdot (K \cdot M)$ 。但紧邻该式的可积条件是 $K \in L_{\text{loc}}^2(H \cdot M)$, 且原书随后的证明明确说它与命题 5.5 相同; 因此正确次序必为 $K \cdot (H \cdot M)$ 。

证明. 可以假设 $M_0 = 0$ 。一般情形下, 写成 $M = M_0 + M'$, 并定义

$$H \cdot M := H \cdot M';$$

注意对每个连续局部鞅 N , $\langle M, N \rangle = \langle M', N \rangle$ 。还可以假设

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s < \infty$$

对每个 $t \geq 0$ 以及每个 $\omega \in \Omega$ 都成立; 在该性质失效的零测集上把 H 换成 0 即可。

对每个 $n \geq 1$, 令

$$T_n = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t (1 + H_s^2) d\langle M, M \rangle_s \geq n \right\}.$$

则 (T_n) 是单调递增且趋于 ∞ 的停时序列。由于

$$\langle M^{T_n}, M^{T_n} \rangle_t = \langle M, M \rangle_{t \wedge T_n} \leq n,$$

由定理 4.13, 停止鞅 M^{T_n} 属于 $\mathcal{H}^2$ 。此外,

$$\int_0^\infty H_s^2 d\langle M^{T_n}, M^{T_n} \rangle_s = \int_0^{T_n} H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \leq n.$$

所以 $H \in L^2(M^{T_n})$, 可由定理 5.4 定义 $H \cdot M^{T_n}$ 。若 $m > n$, 由 (5.3),

$$H \cdot M^{T_n} = (H \cdot M^{T_m})^{T_n}.$$

于是存在唯一过程 $H \cdot M$, 使对每个 n ,

$$(H \cdot M)^{T_n} = H \cdot M^{T_n}.$$

显然, $H \cdot M$ 具有连续样本路径; 它也是适应的, 因为

$$(H \cdot M)_t = \lim_{n \rightarrow \infty} (H \cdot M^{T_n})_t.$$

各停止过程 $(H \cdot M)^{T_n}$ 都是 $\mathcal{H}^2$ 中的鞅, 所以 $H \cdot M$ 是连续局部鞅。

下面验证 (5.10)。可设 $N_0 = 0$ 。对每个 $n \geq 1$, 令

$$T'_n = \inf\{t \geq 0 : |N_t| \geq n\}, \quad S_n = T_n \wedge T'_n.$$

注意 $N^{T'_n} \in \mathcal{H}^2$, 于是

$$\begin{aligned} \langle H \cdot M, N \rangle^{S_n} &= \langle (H \cdot M)^{T_n}, N^{T'_n} \rangle \\ &= \langle H \cdot M^{T_n}, N^{T'_n} \rangle \\ &= H \cdot \langle M^{T_n}, N^{T'_n} \rangle \\ &= H \cdot \langle M, N \rangle^{S_n} \\ &= (H \cdot \langle M, N \rangle)^{S_n}. \end{aligned}$$

由于 $S_n \uparrow \infty$, 得到 $\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle$ 。与定理 5.4 的证明相同, 把这一等式对所有连续局部鞅 N 写出, 再用命题 4.12, 即可证明它在初值为 0 的连续局部鞅中唯一刻画 $H \cdot M$ 。

式 (5.11) 的证明与定理 5.4 中 (5.3) 的证明完全相同, 因为该证明只用到了括号特征性质。同理, (5.12) 的证明与命题 5.5 相同。

最后, 若 $M \in \mathcal{H}^2$ 、 $H \in L^2(M)$, 由 (5.10),

$$\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle = H^2 \cdot \langle M, M \rangle.$$

所以 $H \cdot M \in \mathcal{H}^2$ 。再用 (5.2) 的特征性质可知, 定理 5.4 与本定理的定义一致。□

在定理 5.6 的情形下, 仍记

$$(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s.$$

值得指出, 若 M, N 是连续局部鞅, $H \in L^2_{\text{loc}}(M)$ 、 $K \in L^2_{\text{loc}}(N)$, 则 (5.4) 与 (5.5) 仍然成立; 它们由 (5.10) 立即得到。

与 Wiener 积分的联系。 设 B 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, 且 $h \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$ 是确定性的平方可积函数。可定义 Wiener 积分

$$\int_0^t h(s) dB_s = G(h1_{[0,t]}),$$

其中 G 是与 B 相联系的高斯白噪声 (见第 2.1 节末尾)。容易验证, 该积分与随机积分 $(h \cdot B)_t$ 一致; 这里把 h 看作确定性的渐进过程。当 h 是简单函数时结论立即成立, 一般情形由稠密性论证得到。

下面讨论定理 5.4 情形中矩公式的推广。设 M 是连续局部鞅, $H \in L^2_{\text{loc}}(M)$, 且 $t \in [0, \infty]$ 。若

$$E \left[\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] < \infty, \quad (5.13)$$

则可把定理 4.13 应用于 $(H \cdot M)^t$, 得到它是 $\mathcal{H}^2$ 中的鞅。因此 (5.6) 与 (5.8) 仍成立:

$$E \left[\int_0^t H_s dM_s \right] = 0, \quad E \left[\left(\int_0^t H_s dM_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right].$$

同样, (5.9) 对 $0 \leq s \leq t$ 成立。特别地, 在 $t = \infty$ 的情形, 若 $H \in L^2(M)$, 则连续局部鞅 $H \cdot M$ 属于 $\mathcal{H}^2$, 且其终值满足

$$E \left[\left(\int_0^\infty H_s dM_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right].$$

若条件 (5.13) 不成立, 上述公式可能失效; 不过总有估计

$$E \left[\left(\int_0^t H_s dM_s \right)^2 \right] \leq E \left[\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right]. \quad (5.14)$$

事实上, 若右端有限, 则由前面的讨论等号成立; 若右端为无穷, 估计显然成立。

5.1.3 关于半鞅的随机积分

最后把随机积分的定义推广到连续半鞅。若渐进过程 H 满足

$$\forall t \geq 0, \quad \sup_{s \leq t} |H_s| < \infty, \quad \text{a.s.},$$

则称 H **局部有界**。特别地, 任意具有连续样本路径的适应过程都是局部有界的渐进过程。若 H 渐进且局部有界, 则对每个有限变差过程 V ,

$$\forall t \geq 0, \quad \int_0^t |H_s| |dV_s| < \infty, \quad \text{a.s.},$$

并且对每个连续局部鞅 M , 都有 $H \in L^2_{\text{loc}}(M)$ 。

定义 5.7. 设 X 是连续半鞅, 其典范分解为 $X = M + V$ 。若 H 是局部有界渐进过程, 则把典范分解为

$$H \cdot X = H \cdot M + H \cdot V$$

的连续半鞅称为 H 关于 X 的随机积分, 并记

$$(H \cdot X)_t = \int_0^t H_s dX_s.$$

性质。

- (i) 映射 $(H, X) \mapsto H \cdot X$ 是双线性的。
- (ii) 若 H, K 渐进且局部有界, 则

$$H \cdot (K \cdot X) = (HK) \cdot X.$$

(iii) 对每个停时 T ,

$$(H \cdot X)^T = (H1_{[0,T]}) \cdot X = H \cdot X^T.$$

(iv) 若 X 是连续局部鞅 (相应地, 若 X 是有限变差过程), 则 $H \cdot X$ 也具有相同性质。

(v) 若

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(\omega) 1_{(t_i, t_{i+1}]}(s),$$

其中 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$, 且每个 $H^{(i)}$ 都是 $\mathcal{F}_{t_i}$ -可测的, 则

$$(H \cdot X)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i \wedge t}).$$

可把性质 (ii) 改述为: 若

$$Y_t = \int_0^t K_s dX_s,$$

则

$$\int_0^t H_s dY_s = \int_0^t H_s K_s dX_s.$$

性质 (i)–(iv) 由连续局部鞅和有限变差过程情形的相应结论立即得到。下面说明性质 (v)。只需考虑 $X = M$ 是满足 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅的情形; 在适当停时处停止 M , 再用 (5.11), 甚至可设 $M \in \mathcal{H}^2$ 。困难仅在于随机变量 $H^{(i)}$ 未必有界, 因而不能直接使用初等过程积分的构造。为此, 对每个 $n \geq 1$, 令

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |H_t| \geq n\} = \inf\{t_i : |H^{(i)}| \geq n\}, \quad (\inf \emptyset = \infty).$$

容易验证, T_n 是停时, 且 $T_n \uparrow \infty$ 。此外,

$$H_s 1_{[0, T_n]}(s) = \sum_{i=0}^{p-1} H_n^{(i)} 1_{(t_i, t_{i+1}]}(s),$$

其中

$$H_n^{(i)} = H^{(i)} 1_{\{T_n > t_i\}}.$$

这些随机变量具有与 $H^{(i)}$ 相同的可测性, 并且绝对值不超过 n 。所以 $H 1_{[0, T_n]}$ 是初等过程。根据关于 $\mathcal{H}^2$ 中鞅的随机积分定义,

$$\begin{aligned} (H \cdot M)_{t \wedge T_n} &= (H 1_{[0, T_n]} \cdot M)_t \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} H_n^{(i)} (M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}). \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 即得性质 (v)。

5.1.4 随机积分的收敛

先给出随机积分的一个“控制收敛定理”。

命题 5.8. 设连续半鞅 X 的典范分解为 $X = M + V$, 并固定 $t > 0$ 。设 $(H^n)_{n \geq 1}$ 与 H 是局部有界渐进过程, K 是非负渐进过程。假设下列性质 a.s. 成立:

- (i) 对每个 $s \in [0, t]$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $H_s^n \rightarrow H_s$;
(ii) 对每个 $n \geq 1$ 和每个 $s \in [0, t]$, $|H_s^n| \leq K_s$;
(iii)

$$\int_0^t K_s^2 d\langle M, M \rangle_s < \infty, \quad \int_0^t K_s |dV_s| < \infty.$$

则

$$\int_0^t H_s^n dX_s \rightarrow \int_0^t H_s dX_s$$

依概率成立。

注。

- (a) 若 K 局部有界, 则条件 (iii) 自动成立。
(b) 不必假设 (i)、(ii) 对每个 $s \in [0, t]$ 都成立; 只需它们分别对 $d\langle M, M \rangle_s$ -a.e. 的 $s \in [0, t]$ 和 $|dV_s|$ -a.e. 的 $s \in [0, t]$ 成立, a.s. 这一点从证明中即可看出。

证明。 通常的控制收敛定理给出 a.s. 收敛

$$\int_0^t H_s^n dV_s \rightarrow \int_0^t H_s dV_s.$$

因此只需证明 $\int_0^t H_s^n dM_s$ 依概率收敛到 $\int_0^t H_s dM_s$ 。对每个整数 $p \geq 1$, 考虑停时

$$T_p = \inf \left\{ r \in [0, t] : \int_0^r K_s^2 d\langle M, M \rangle_s \geq p \right\} \wedge t.$$

由条件 (iii), a.s. 对所有充分大的 p , 都有 $T_p = t$ 。由 (5.14),

$$E \left[\left(\int_0^{T_p} H_s^n dM_s - \int_0^{T_p} H_s dM_s \right)^2 \right] \leq E \left[\int_0^{T_p} (H_s^n - H_s)^2 d\langle M, M \rangle_s \right].$$

右端由控制收敛定理趋于 0: 这里使用条件 (i)、(ii), 以及

$$\int_0^{T_p} K_s^2 d\langle M, M \rangle_s \leq p.$$

由于当 $p \rightarrow \infty$ 时 $P(T_p = t) \rightarrow 1$, 所需的依概率收敛随即得到。□

下面把命题 5.8 应用于连续被积过程的逼近; 下一节将使用这一结果。

命题 5.9。 设 X 是连续半鞅, H 是具有连续样本路径的适应过程。固定 $t > 0$ 。对任意一列网格大小趋于 0 的 $[0, t]$ 分割

$$0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t,$$

都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} H_{t_i^n} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t H_s dX_s$$

依概率成立。

证明。对每个 $n \geq 1$, 定义过程 H^n :

$$H_s^n = \begin{cases} H_{t_i^n}, & t_i^n < s \leq t_{i+1}^n, \quad i \in \{0, 1, \dots, p_n - 1\}, \\ H_0, & s = 0, \\ 0, & s > t. \end{cases}$$

注意 H^n 渐进。令

$$K_s = \max_{0 \leq r \leq s} |H_r|,$$

则 K 是局部有界渐进过程, 而且命题 5.8 的全部假设都成立。因此

$$\int_0^t H_s^n dX_s \longrightarrow \int_0^t H_s dX_s$$

依概率成立。由第 5.1.3 节性质 (v),

$$\int_0^t H_s^n dX_s = \sum_{i=0}^{p_n-1} H_{t_i^n} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}),$$

从而得到所需结论。 □

校订注。原书在上述证明最后一个离散和中把增量写成 $M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n}$, 但命题从始至终讨论的是连续半鞅 X , 且所引用的第 5.1.3 节性质 (v) 明确给出 X 的增量。因此这里应为 $X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}$ 。

注。命题 5.9 可视为引理 4.3 在随机积分情形下的推广。但与该引理不同, 在命题 5.9 中必须在区间 $(t_i^n, t_{i+1}^n]$ 的左端点取 H 的值。若把 $H_{t_i^n}$ 换成 $H_{t_{i+1}^n}$, 结论一般不成立。给出一个简单反例。取 $H_t = X_t$, 并假设分割序列逐次加细。由命题 5.9,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} X_{t_i^n} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t X_s dX_s$$

依概率成立。另一方面, 写成

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{p_n-1} X_{t_{i+1}^n} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) &= \sum_{i=0}^{p_n-1} X_{t_i^n} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{p_n-1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2, \end{aligned}$$

再用命题 4.21, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} X_{t_{i+1}^n} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t X_s dX_s + \langle X, X \rangle_t$$

依概率成立。除非 X 的鞅部分退化, 这一极限不同于 $\int_0^t X_s dX_s$ 。把前面两个收敛式相加, 得到

$$X_t^2 - X_0^2 = 2 \int_0^t X_s dX_s + \langle X, X \rangle_t,$$

这是下一节 Itô 公式的一个特例。

5.2 Itô 公式

Itô 公式是随机分析的基石。它说明：把二次连续可微函数作用于的一组连续半鞅，所得过程仍是连续半鞅，而且可以显式写出这个半鞅的典范分解。

定理 5.10 (Itô 公式)。 设 $X^1, \dots, X^p$ 是 p 个连续半鞅， $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ 是二次连续可微函数。则对每个 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} F(X_t^1, \dots, X_t^p) &= F(X_0^1, \dots, X_0^p) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^1, \dots, X_s^p) dX_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^1, \dots, X_s^p) d\langle X^i, X^j \rangle_s. \end{aligned}$$

证明。 先处理 $p = 1$ 的情形，并简记 $X = X^1$ 。固定 $t > 0$ ，取一列逐次加细且网格大小趋于 0 的 $[0, t]$ 分割

$$0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = t.$$

对每个 n ,

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=0}^{p_n-1} (F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n})).$$

对每个 $i \in \{0, 1, \dots, p_n - 1\}$ ，在 0 与 1 之间对函数

$$\theta \mapsto F(X_{t_i^n} + \theta(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}))$$

应用 Taylor–Lagrange 公式，得到

$$\begin{aligned} F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n}) &= F'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{n,i}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2, \end{aligned}$$

其中对某个 $c \in [0, 1]$,

$$f_{n,i} = F''(X_{t_i^n} + c(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})).$$

对 $H_s = F'(X_s)$ 使用命题 5.9，得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} F'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t F'(X_s) dX_s$$

依概率成立。因此，为完成 $p = 1$ 时的证明，只需验证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 = \int_0^t F''(X_s) d\langle X, X \rangle_s \quad (5.15)$$

依概率成立。

注意

$$\sup_{0 \leq i \leq p_n-1} |f_{n,i} - F''(X_{t_i^n})| \leq \sup_{0 \leq i \leq p_n-1} \sup_{x \in [X_{t_i^n} \wedge X_{t_{i+1}^n}, X_{t_i^n} \vee X_{t_{i+1}^n}]} |F''(x) - F''(X_{t_i^n})|.$$

由 F'' 与 X 的样本路径在紧区间上的一致连续性，右端 a.s. 趋于 0。又因为

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2$$

依概率收敛 (命题 4.21), 所以

$$\left| \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 - \sum_{i=0}^{p_n-1} F''(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \right| \longrightarrow 0 \quad \text{依概率.}$$

故只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} F''(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 = \int_0^t F''(X_s) d\langle X, X \rangle_s \quad (5.16)$$

依概率成立。下面沿适当子列证明几乎处处收敛。为此, 写成

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} F''(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 = \int_{[0,t]} F''(X_s) \nu_n(ds),$$

其中 $[0, t]$ 上的随机测度 ν_n 定义为

$$\nu_n(dr) = \sum_{i=0}^{p_n-1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \delta_{t_i^n}(dr).$$

令 D 为所有分点 t_i^n 组成的 $[0, t]$ 稠密集。由命题 4.21, 对每个 $r \in D$,

$$\nu_n([0, r]) \longrightarrow \langle X, X \rangle_r$$

依概率成立。通过对可数集 D 作对角抽取, 可选取子列, 使沿该子列对每个 $r \in D$,

$$\nu_n([0, r]) \longrightarrow \langle X, X \rangle_r, \quad \text{a.s.}$$

这说明 ν_n a.s. 弱收敛到有限测度 $1_{[0,t]}(r) d\langle X, X \rangle_r$ 。因此沿所选子列,

$$\int_{[0,t]} F''(X_s) \nu_n(ds) \longrightarrow \int_0^t F''(X_s) d\langle X, X \rangle_s, \quad \text{a.s.}$$

对任意子列重复这一抽取论证, 即得 (5.16) 的依概率收敛, 进而完成 $p = 1$ 的证明。

现在考虑一般情形。记

$$X_t = (X_t^1, \dots, X_t^p).$$

对每个 $n \geq 1$ 、每个 $i \in \{0, 1, \dots, p_n - 1\}$, 把 Taylor-Lagrange 公式用于函数

$$\theta \longmapsto F(X_{t_i^n} + \theta(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})), \quad \theta \in [0, 1],$$

得到

$$\begin{aligned} F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n}) &= \sum_{k=1}^p \frac{\partial F}{\partial x_k}(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n}^k - X_{t_i^n}^k) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^p f_{n,i}^{k,l}(X_{t_{i+1}^n}^k - X_{t_i^n}^k)(X_{t_{i+1}^n}^l - X_{t_i^n}^l), \end{aligned}$$

其中对某个 $c \in [0, 1]$,

$$f_{n,i}^{k,l} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}(X_{t_i^n} + c(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})).$$

一次偏导数对应的各项仍由命题 5.9 处理。对 $p = 1$ 情形的论证稍作修改可得：至少沿适当子列，对每个 $k, l \in \{1, \dots, p\}$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}^{k,l} (X_{t_{i+1}^n}^k - X_{t_i^n}^k) (X_{t_{i+1}^n}^l - X_{t_i^n}^l) \\ = \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l} (X_s^1, \dots, X_s^p) d\langle X^k, X^l \rangle_s \end{aligned}$$

依概率成立。定理得证。 $\square$

Itô 公式的一个重要特例是分部积分公式。取 $p = 2$ 和 $F(x, y) = xy$ ，若 X, Y 是两个连续半鞅，则

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t.$$

特别地，取 $Y = X$ ，有

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \langle X, X \rangle_t.$$

若 $X = M$ 是连续局部鞅，由二次变差的定义， $M^2 - \langle M, M \rangle$ 是连续局部鞅。上式说明该连续局部鞅就是

$$M_0^2 + 2 \int_0^t M_s dM_s.$$

也可从第 4 章中 $\langle M, M \rangle$ 的构造直接看出这一点；该构造正使用了 $\int_0^t M_s dM_s$ 的离散逼近。

设 B 是实值 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。回顾定义 3.11：这意味着 B 是适应于 $(\mathcal{F}_t)$ 的布朗运动，并且对每个 $0 \leq s < t$ ，随机变量 $B_t - B_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立。 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动是连续局部鞅；若 $B_0 \in L^1$ ，它还是真鞅。前面已经指出

$$\langle B, B \rangle_t = t.$$

在这一特例中，Itô 公式为

$$F(B_t) = F(B_0) + \int_0^t F'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(B_s) ds.$$

取 $X_t^1 = t$ 、 $X_t^2 = B_t$ ，还得到：对 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上任意二次连续可微函数 $F(t, x)$ ，

$$\begin{aligned} F(t, B_t) = F(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, B_s) dB_s \\ + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)(s, B_s) ds. \end{aligned}$$

再设 $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$ 是 d 维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。各分量 $B^1, \dots, B^d$ 都是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。由命题 4.16，当 $i \neq j$ 时， $\langle B^i, B^j \rangle = 0$ ；减去初值不改变括号过程，并可由此化归到各分量独立的情形。因此，对 $\mathbb{R}^d$ 上任意二次连续可微函数 F ，Itô 公式给出

$$\begin{aligned} F(B_t^1, \dots, B_t^d) = F(B_0^1, \dots, B_0^d) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(B_s^1, \dots, B_s^d) dB_s^i \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta F(B_s^1, \dots, B_s^d) ds. \end{aligned}$$

常把它简写为

$$F(B_t) = F(B_0) + \int_0^t \nabla F(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta F(B_s) ds,$$

其中 ∇F 表示 F 的一阶偏导数组成的向量。对 $F(t, B_t)$ 也有类似公式。

重要注记。 经常需要把 Itô 公式用于只在开集 $U \subset \mathbb{R}^p$ 上定义且二次连续可微的函数 F 。可按如下方式处理。设存在另一个开集 V ，使得

$$(X_0^1, \dots, X_0^p) \in V, \quad \text{a.s.}, \quad \bar{V} \subset U.$$

典型地， V 可取为到 U^c 的距离严格大于某个 $\varepsilon > 0$ 的点集。令

$$T_V = \inf\{t \geq 0 : (X_t^1, \dots, X_t^p) \notin V\};$$

由命题 3.9, T_V 是停时。初等分析论证表明，存在 $\mathbb{R}^p$ 上二次连续可微函数 G ，使得 $G = F$ 于 $\bar{V}$ 。现在可对半鞅

$$G(X_{t \wedge T_V}^1, \dots, X_{t \wedge T_V}^p) = F(X_{t \wedge T_V}^1, \dots, X_{t \wedge T_V}^p)$$

应用 Itô 公式；其典范分解只涉及 F 在 V 上的一、二阶偏导数。

若还知道过程 $(X_t^1, \dots, X_t^p)$ a.s. 不离开 U ，可令开集 V 递增到 U ，得到 $F(X_t^1, \dots, X_t^p)$ 的 Itô 公式仍与定理 5.10 完全相同。例如，这一论证可用于 $F(x) = \log x$ 以及取严格正值的半鞅 X ；见后文命题 5.21 的证明。

下面用 Itô 公式构造一类重要的局部鞅；它推广了与独立增量过程相联系的指数鞅。若复值随机过程的实部与虚部都是连续局部鞅，则称它为**复连续局部鞅**。

命题 5.11。 设 M 是连续局部鞅。对每个 $\lambda \in \mathbb{C}$ ，令

$$\mathcal{E}(\lambda M)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M, M \rangle_t\right).$$

则 $\mathcal{E}(\lambda M)$ 是复连续局部鞅，并且

$$\mathcal{E}(\lambda M)_t = e^{\lambda M_0} + \lambda \int_0^t \mathcal{E}(\lambda M)_s dM_s.$$

注。 上式右端的随机积分通过分别处理实部与虚部来定义。

证明。 若 $F(r, x)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的二次连续可微函数，Itô 公式给出

$$\begin{aligned} F(\langle M, M \rangle_t, M_t) &= F(0, M_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(\langle M, M \rangle_s, M_s) dM_s \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) (\langle M, M \rangle_s, M_s) d\langle M, M \rangle_s. \end{aligned}$$

因此，只要 F 满足方程

$$\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0,$$

过程 $F(\langle M, M \rangle_t, M_t)$ 就是连续局部鞅。函数

$$F(r, x) = \exp\left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} r\right)$$

满足该方程；更准确地说，它的实部与虚部都满足该方程。此外， $\partial F / \partial x = \lambda F$ ，从而得到命题中的公式。□

5.3 Itô 公式的若干推论

Itô 公式有大量应用。本节推导其中若干最重要的结果。

5.3.1 布朗运动的 Lévy 刻画

先给出一个引人注目的刻画：实布朗运动是满足 $\langle M, M \rangle_t = t$ 的唯一连续局部鞅。下面证明这一结果的多维版本，通常称为 Lévy 定理。

定理 5.12 (Lévy 定理)。 设 $X = (X^1, \dots, X^d)$ 是具有连续样本路径的适应过程。下列条件等价：

- (i) X 是 d 维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动；
- (ii) 过程 $X^1, \dots, X^d$ 都是连续局部鞅，并且对每个 $i, j \in \{1, \dots, d\}$,

$$\langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{ij}t,$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号，即 $\delta_{ij} = 1_{\{i=j\}}$ 。

特别地，连续局部鞅 M 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动，当且仅当对每个 $t \geq 0$,

$$\langle M, M \rangle_t = t;$$

等价地，当且仅当 $M_t^2 - t$ 是连续局部鞅。

证明。 (i) 推出 (ii) 已经证明。下面假设 (ii) 成立。取 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ 。则

$$\xi \cdot X_t = \sum_{j=1}^d \xi_j X_t^j$$

是连续局部鞅，其二次变差为

$$\sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \langle X^j, X^k \rangle_t = |\xi|^2 t.$$

由命题 5.11,

$$\exp \left(i\xi \cdot X_t + \frac{1}{2} |\xi|^2 t \right)$$

是复连续局部鞅。它在每个区间 $[0, a]$ 、 $a > 0$ 上都有界，因而是真鞅；也就是说，其实部与虚部都是真鞅。因此，对每个 $0 \leq s < t$,

$$E \left[\exp \left(i\xi \cdot X_t + \frac{1}{2} |\xi|^2 t \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \exp \left(i\xi \cdot X_s + \frac{1}{2} |\xi|^2 s \right).$$

从而

$$E \left[e^{i\xi \cdot (X_t - X_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] = \exp \left(-\frac{1}{2} |\xi|^2 (t - s) \right).$$

所以对每个 $A \in \mathcal{F}_s$,

$$E \left[1_A e^{i\xi \cdot (X_t - X_s)} \right] = P(A) \exp \left(-\frac{1}{2} |\xi|^2 (t - s) \right).$$

取 $A = \Omega$ ，得到 $X_t - X_s$ 是协方差矩阵为 $(t - s)I_d$ 的中心高斯向量；特别地，其各分量 $X_t^j - X_s^j$ 、 $1 \leq j \leq d$ 相互独立。

再固定满足 $P(A) > 0$ 的 $A \in \mathcal{F}_s$, 并记条件概率测度

$$P_A(\cdot) = P(A)^{-1}P(\cdot \cap A).$$

上式还给出

$$E_A \left[e^{i\xi \cdot (X_t - X_s)} \right] = \exp \left(-\frac{1}{2} |\xi|^2 (t - s) \right),$$

这说明 $X_t - X_s$ 在 P_A 下的分布与它在 P 下的分布相同。因此, 对 $\mathbb{R}^d$ 上任意非负可测函数 f ,

$$E_A[f(X_t - X_s)] = E[f(X_t - X_s)],$$

等价地,

$$E[1_A f(X_t - X_s)] = P(A)E[f(X_t - X_s)].$$

该等式对任意 $A \in \mathcal{F}_s$ 都成立 (当 $P(A) = 0$ 时显然), 所以 $X_t - X_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立。

于是, 若

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p,$$

则向量

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_p} - X_{t_{p-1}}$$

相互独立。每个向量的各分量也相互独立, 因此所有随机变量

$$X_{t_k}^j - X_{t_{k-1}}^j, \quad 1 \leq j \leq d, \quad 1 \leq k \leq p,$$

相互独立, 并且

$$X_{t_k}^j - X_{t_{k-1}}^j \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1}).$$

这说明 $X - X_0$ 是从 0 出发的 d 维布朗运动。又因为对每个 $0 \leq s < t$, $X_t - X_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立, 容易推出 $X - X_0$ 与 X_0 独立, 故 X 是 d 维布朗运动。最后, X 适应且相对于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 具有独立增量, 所以它是 d 维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。□

5.3.2 连续鞅作为时间变换后的布朗运动

下面的定理说明, 任意连续局部鞅 M 都可写成“时间变换”后的布朗运动。严格地说, 下面只在 $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ 时证明这一点, 较一般的情形见定理后的注。这意味着 M 的样本路径就是以不同且变化的速度运行的布朗样本路径, 所以 M 样本路径的某些几乎处处性质可由布朗样本路径的相应性质推出。例如, 在 $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ 的条件下, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, M 的样本路径必在 $+\infty$ 与 $-\infty$ 之间振荡 (参见命题 2.14 的最后一个结论)。

定理 5.13 (Dambis–Dubins–Schwarz 定理)。 设 M 是连续局部鞅, 并且

$$\langle M, M \rangle_\infty = \infty, \quad \text{a.s.}$$

则存在布朗运动 $(\beta_s)_{s \geq 0}$, 使得

$$\text{a.s.,} \quad \forall t \geq 0, \quad M_t = \beta_{\langle M, M \rangle_t}.$$

注。

- (i) 若扩大底层概率空间, 可以去掉 $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ 的假设; 见 [70, 第 V 章]。
- (ii) 布朗运动 β 并不适应于滤过 $(\mathcal{F}_t)$, 而是适应于下面证明中出现的一个“时间变换后的”

滤过。

证明。 先设 $M_0 = 0$ 。对每个 $r \geq 0$ ，令

$$\tau_r = \inf\{t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t \geq r\}.$$

由命题 3.9, τ_r 是停时。在事件 $\{\langle M, M \rangle_\infty = \infty\}$ 上, 对每个 $r \geq 0$, 都有 $\tau_r < \infty$ 。为方便起见, 在零测集

$$N = \{\langle M, M \rangle_\infty < \infty\}$$

上重新定义这些随机变量: 当 $\omega \in N$ 时, 对每个 $r \geq 0$ 令 $\tau_r(\omega) = 0$ 。由于滤过完备, 作此修改后 τ_r 仍是停时。

按构造, 对每个 $\omega \in \Omega$, 函数 $r \mapsto \tau_r(\omega)$ 单调不减且左连续, 因此在每个 $r \geq 0$ 处都有右极限, 记为 τ_{r+} 。除去零测集 N , 有

$$\tau_{r+} = \inf\{t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t > r\};$$

在 N 上则 $\tau_{r+} = 0$ 。

对每个 $r \geq 0$, 令

$$\beta_r = M_{\tau_r}.$$

由定理 3.7, 过程 $(\beta_r)_{r \geq 0}$ 适应于滤过

$$\mathcal{G}_r = \mathcal{F}_{\tau_r}, \quad r \geq 0, \quad \mathcal{G}_\infty = \mathcal{F}_\infty.$$

由于 $(\mathcal{F}_t)$ 完备, $(\mathcal{G}_r)$ 也完备。

样本路径 $r \mapsto \beta_r(\omega)$ 左连续, 并且对每个 $r \geq 0$, 其右极限为

$$\beta_{r+} = \lim_{s \downarrow r} \beta_s = M_{\tau_{r+}}.$$

事实上, 下面的引理说明: 对每个 $r \geq 0$, a.s. 有 $\beta_{r+} = \beta_r$ 。

引理 5.14。 a.s. 对每个 $0 \leq a < b$,

$$(M_t = M_a, \forall t \in [a, b]) \iff \langle M, M \rangle_b = \langle M, M \rangle_a.$$

暂缓证明该引理。对每个 $r \geq 0$, 有

$$\langle M, M \rangle_{\tau_r} = \langle M, M \rangle_{\tau_{r+}}.$$

所以由引理 5.14, a.s. 对每个 $r \geq 0$,

$$M_{\tau_r} = M_{\tau_{r+}}.$$

故 β 的样本路径连续。严格地说, 应在引理 5.14 的性质失效的零测集上, 对每个 $r \geq 0$ 重新定义 $\beta_r = 0$ 。

下面验证 β_s 和 $\beta_s^2 - s$ 关于滤过 $(\mathcal{G}_s)$ 都是鞅。对每个整数 $n \geq 1$, 停止连续局部鞅

$$M^{\tau_n} \quad \text{和} \quad (M^{\tau_n})^2 - \langle M, M \rangle^{\tau_n}$$

都是一致可积鞅。事实上, 由定理 4.13,

$$\langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n} \rangle_\infty = \langle M, M \rangle_{\tau_n} = n, \quad \text{a.s.}$$

回顾 $M_0 = 0$, 对任意 $0 \leq r \leq s \leq n$, 由可选停时定理 (定理 3.22),

$$E[\beta_s | \mathcal{G}_r] = E[M_{\tau_s}^{\tau_n} | \mathcal{F}_{\tau_r}] = M_{\tau_r}^{\tau_n} = \beta_r,$$

并且类似地,

$$\begin{aligned} E[\beta_s^2 - s | \mathcal{G}_r] &= E[(M_{\tau_s}^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n} \rangle_{\tau_s} | \mathcal{F}_{\tau_r}] \\ &= (M_{\tau_r}^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n} \rangle_{\tau_r} = \beta_r^2 - r. \end{aligned}$$

由定理 5.12 的一维情形, β 是 $(\mathcal{G}_r)$ -布朗运动。

最后, 按 β 的定义, a.s. 对每个 $t \geq 0$,

$$\beta_{\langle M, M \rangle_t} = M_{\tau_{\langle M, M \rangle_t}}.$$

又有

$$\tau_{\langle M, M \rangle_t} \leq t \leq \tau_{\langle M, M \rangle_{t+}},$$

而 $\langle M, M \rangle$ 在这两个端点取相同值。由引理 5.14, a.s. 对每个 $t \geq 0$,

$$M_t = M_{\tau_{\langle M, M \rangle_t}}.$$

因此

$$M_t = \beta_{\langle M, M \rangle_t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{a.s.}$$

这就完成了 $M_0 = 0$ 时的证明。

若 $M_0 \neq 0$, 写成

$$M_t = M_0 + M'_t,$$

并把前面的论证用于 M' , 得到从 0 出发的布朗运动 β' , 使得 a.s. 对每个 $t \geq 0$,

$$M'_t = \beta'_{\langle M', M' \rangle_t}.$$

因为 β' 是 $(\mathcal{G}_r)$ -布朗运动, 所以它与 $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_0$ 独立, 特别地与 M_0 独立。因此

$$\beta_s = M_0 + \beta'_s$$

也是布朗运动, 并给出 M 所需的表示。 □

引理 5.14 的证明。 由 M 和 $\langle M, M \rangle$ 的样本路径连续性, 只需证明: 对任意固定的 $0 \leq a < b$, a.s. 有事件等式

$$\{M_t = M_a, \forall t \in [a, b]\} = \{\langle M, M \rangle_b = \langle M, M \rangle_a\}.$$

由定理 4.9 中 $\langle M, M \rangle$ 的分割逼近, 左边事件 a.s. 包含于右边事件。

下面证明反向包含。考虑连续局部鞅

$$N_t = M_t - M_{t \wedge a},$$

并注意

$$\langle N, N \rangle_t = \langle M, M \rangle_t - \langle M, M \rangle_{t \wedge a}.$$

对每个 $\varepsilon > 0$, 引入停时

$$T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : \langle N, N \rangle_t \geq \varepsilon\}.$$

停止过程 N^{T_ε} 是 $\mathcal{H}^2$ 中的鞅, 因为

$$\langle N^{T_\varepsilon}, N^{T_\varepsilon} \rangle_\infty \leq \varepsilon.$$

固定 $t \in [a, b]$, 则

$$E[N_{t \wedge T_\varepsilon}^2] = E[\langle N, N \rangle_{t \wedge T_\varepsilon}] \leq \varepsilon.$$

令

$$A = \{\langle M, M \rangle_b = \langle M, M \rangle_a\} \subset \{T_\varepsilon \geq b\}.$$

于是

$$E[1_A N_t^2] = E[1_A N_{t \wedge T_\varepsilon}^2] \leq E[N_{t \wedge T_\varepsilon}^2] \leq \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 得到 $E[1_A N_t^2] = 0$, 所以在 A 上 a.s. 有 $N_t = 0$. 先对 $[a, b]$ 中的有理数 t 同时取结论, 再用样本路径连续性, 得到在 A 上对所有 $t \in [a, b]$ 都有 $M_t = M_a$. 引理得证. $\square$

把定理 5.13 证明中的论证与定理 5.12 结合, 可得到下面的技术结果. 第 7 章讨论平面布朗运动在全纯变换下的像时将用到它.

命题 5.15. 设 M, N 是两个满足 $M_0 = N_0 = 0$ 的连续局部鞅, 并假设:

- (i) 对每个 $t \geq 0$, a.s., $\langle M, M \rangle_t = \langle N, N \rangle_t$;
- (ii) M, N 正交, 即对每个 $t \geq 0$, a.s., $\langle M, N \rangle_t = 0$;
- (iii) a.s.,

$$\langle M, M \rangle_\infty = \langle N, N \rangle_\infty = \infty.$$

设 $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$ 、 $\gamma = (\gamma_t)_{t \geq 0}$ 分别是满足

$$M_t = \beta_{\langle M, M \rangle_t}, \quad N_t = \gamma_{\langle N, N \rangle_t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{a.s.}$$

的实布朗运动. 则 β 与 γ 相互独立.

证明. 采用定理 5.13 证明中的记号, 则

$$\beta_r = M_{\tau_r}, \quad \gamma_r = N_{\tau_r},$$

其中

$$\tau_r = \inf\{t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t \geq r\} = \inf\{t \geq 0 : \langle N, N \rangle_t \geq r\}.$$

已知 β, γ 都是 $(\mathcal{G}_r)$ -布朗运动. 由于 M, N 是正交鞅, $M_t N_t$ 是局部鞅. 与定理 5.13 的证明相同, 并使用命题 4.15(v), 可知对每个 $n \geq 1$, $M_t^{\tau_n} N_t^{\tau_n}$ 是一致可积鞅. 对 $r \leq s \leq n$ 应用可选停时定理, 得到

$$\begin{aligned} E[\beta_s \gamma_s \mid \mathcal{G}_r] &= E[M_{\tau_s}^{\tau_n} N_{\tau_s}^{\tau_n} \mid \mathcal{F}_{\tau_r}] \\ &= M_{\tau_r}^{\tau_n} N_{\tau_r}^{\tau_n} = \beta_r \gamma_r. \end{aligned}$$

所以 $\beta_r \gamma_r$ 是 $(\mathcal{G}_r)$ -鞅, 因而在滤过 $(\mathcal{G}_r)$ 下计算的括号 $\langle \beta, \gamma \rangle$ 恒为 0. 由定理 5.12, (β, γ) 是二维布朗运动. 又 $\beta_0 = \gamma_0 = 0$, 故 β, γ 相互独立. $\square$

5.3.3 Burkholder–Davis–Gundy 不等式

下面给出联系连续局部鞅与其二次变差的重要不等式. 若 M 是连续局部鞅, 对每个 $t \geq 0$, 令

$$M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|.$$

下面的定理说明: 若 $M_0 = 0$, 则对每个 $p > 0$, M_T^* 的 p 阶矩在相差只依赖于 p 的普适乘法常数的意义下, 上下均可由 $\langle M, M \rangle_T^{1/2}$ 的 p 阶矩控制. 这些估计非常有用, 因为当 M 是随机积分时, 估计 $\langle M, M \rangle_T$ 的矩通常比直接估计 M_T^* 的矩容易. 例如, 第 8 章研究随机微分方程时就会出现这种应用 (见定理 8.5 的证明).

定理 5.16 (Burkholder–Davis–Gundy 不等式)。对每个实数 $p > 0$ ，存在只依赖于 p 的常数 $c_p, C_p > 0$ ，使得对任意满足 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅 M 和任意停时 T ，

$$c_p E[\langle M, M \rangle_T^{p/2}] \leq E[(M_T^*)^p] \leq C_p E[\langle M, M \rangle_T^{p/2}].$$

注。量 $E[\langle M, M \rangle_T^{p/2}]$ 与 $E[(M_T^*)^p]$ 可能为无穷。定理断言：它们或者同时有限，此时上述不等式成立；或者同时为无穷。

证明。把 M 换成停止鞅 M^T ，可知只需处理 $T = \infty$ 的情形。进一步，只需考虑 M 有界的情形。事实上，若已经证明有界情形，可令

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| = n\},$$

把结果用于 M^{T_n} ，再令 $n \rightarrow \infty$ ，即可得到一般情形。

当 $p \geq 4$ 时，左侧不等式由练习 4.26 第 4 问得到。下面对所有 $p > 0$ 证明右侧不等式；本书后文只使用这一侧。左侧不等式的其余情形可参见 [70，第 IV 章]。

先设 $p \geq 2$ 。对函数 $|x|^p$ 使用 Itô 公式：

$$\begin{aligned} |M_t|^p &= \int_0^t p |M_s|^{p-1} \operatorname{sgn}(M_s) dM_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t p(p-1) |M_s|^{p-2} d\langle M, M \rangle_s. \end{aligned}$$

由于 M 有界，特别地 $M \in \mathcal{H}^2$ ，所以过程

$$\int_0^t p |M_s|^{p-1} \operatorname{sgn}(M_s) dM_s$$

是 $\mathcal{H}^2$ 中的鞅。因此

$$\begin{aligned} E[|M_t|^p] &= \frac{p(p-1)}{2} E\left[\int_0^t |M_s|^{p-2} d\langle M, M \rangle_s\right] \\ &\leq \frac{p(p-1)}{2} E[(M_t^*)^{p-2} \langle M, M \rangle_t] \\ &\leq \frac{p(p-1)}{2} E[(M_t^*)^p]^{(p-2)/p} E[\langle M, M \rangle_t^{p/2}]^{2/p}, \end{aligned}$$

最后一步使用 Hölder 不等式。另一方面，由 L^p 中的 Doob 不等式（命题 3.15），

$$E[(M_t^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|M_t|^p].$$

合并以上估计，得到

$$E[(M_t^*)^p] \leq \left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{p(p-1)}{2}\right]^{p/2} E[\langle M, M \rangle_t^{p/2}].$$

令 $t \rightarrow \infty$ 即得结论。

现在设 $0 < p < 2$ 。因为 M 有界，所以 $M \in \mathcal{H}^2$ ，并且 $M^2 - \langle M, M \rangle$ 是一致可积鞅。于是对每个停时 T ，

$$E[M_T^2] = E[\langle M, M \rangle_T].$$

给定 $x > 0$, 考虑停时

$$T_x = \inf\{t \geq 0 : (M_t^*)^2 \geq x\}.$$

若 T 是任意有界停时, 则

$$\begin{aligned} P((M_T^*)^2 \geq x) &= P(T_x \leq T) = P((M_{T_x \wedge T}^*)^2 \geq x) \\ &\leq \frac{1}{x} E[M_{T_x \wedge T}^2] = \frac{1}{x} E[\langle M, M \rangle_{T_x \wedge T}] \\ &\leq \frac{1}{x} E[\langle M, M \rangle_T]. \end{aligned}$$

再考虑停时

$$S_x = \inf\{t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t \geq x\}.$$

对每个 $t \geq 0$,

$$\{(M_t^*)^2 \geq x\} \subset \{(M_{S_x \wedge t}^*)^2 \geq x\} \cup \{S_x \leq t\}.$$

把前面的估计用于 $T = S_x \wedge t$, 得到

$$\begin{aligned} P((M_t^*)^2 \geq x) &\leq P((M_{S_x \wedge t}^*)^2 \geq x) + P(S_x \leq t) \\ &\leq \frac{1}{x} E[\langle M, M \rangle_{S_x \wedge t}] + P(\langle M, M \rangle_t \geq x) \\ &= \frac{1}{x} E[\langle M, M \rangle_t \wedge x] + P(\langle M, M \rangle_t \geq x) \\ &= \frac{1}{x} E[\langle M, M \rangle_t 1_{\{\langle M, M \rangle_t < x\}}] + 2P(\langle M, M \rangle_t \geq x). \end{aligned}$$

令 $q = p/2 \in (0, 1)$, 并把上式两边关于测度 $qx^{q-1} dx$ 在 $(0, \infty)$ 上积分。首先,

$$\int_0^\infty P((M_t^*)^2 \geq x) qx^{q-1} dx = E \left[\int_0^{(M_t^*)^2} qx^{q-1} dx \right] = E[(M_t^*)^{2q}],$$

且同样有

$$\int_0^\infty P(\langle M, M \rangle_t \geq x) qx^{q-1} dx = E[\langle M, M \rangle_t^q].$$

此外,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{1}{x} E[\langle M, M \rangle_t 1_{\{\langle M, M \rangle_t < x\}}] qx^{q-1} dx \\ &= E \left[\langle M, M \rangle_t \int_{\langle M, M \rangle_t}^\infty qx^{q-2} dx \right] = \frac{q}{1-q} E[\langle M, M \rangle_t^q]. \end{aligned}$$

综合以上等式, 得到

$$E[(M_t^*)^{2q}] \leq \left(2 + \frac{q}{1-q} \right) E[\langle M, M \rangle_t^q].$$

令 $t \rightarrow \infty$, 得到所需的右侧不等式。 □

推论 5.17. 设 M 是满足 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅。若

$$E[\langle M, M \rangle_\infty^{1/2}] < \infty,$$

则 M 是一致可积鞅。

证明。由定理 5.16 中 $p = 1$ 的情形, 条件 $E[\langle M, M \rangle_\infty^{1/2}] < \infty$ 推出

$$E[M_\infty^*] < \infty.$$

连续局部鞅 M 被可积随机变量 M_∞^* 控制, 故由命题 4.7(ii), 它是一致可积鞅。□

条件 $E[\langle M, M \rangle_\infty^{1/2}] < \infty$ 弱于保证 $M \in \mathcal{H}^2$ 的条件 $E[\langle M, M \rangle_\infty] < \infty$ 。推论可用于随机积分: 若 M 是连续局部鞅, H 是渐进过程, 并且对每个 $t \geq 0$,

$$E\left[\left(\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s\right)^{1/2}\right] < \infty,$$

则过程

$$\int_0^t H_s dM_s$$

是鞅; 随机积分的一阶矩公式 (5.6) 与条件期望公式 (5.9) 也成立 (这里当然取有限的 t)。

5.4 鞅的随机积分表示

现在考虑一种特殊情形: Ω 上的滤过是某个布朗运动的完备自然滤过。我们将证明, 此时所有鞅都可以表示为关于该布朗运动的随机积分。为简化叙述, 先处理一维布朗运动; 本节末尾再说明高维推广。

定理 5.18。 设 Ω 上的滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 是从 0 出发的实布朗运动 B 的完备自然滤过。则对每个随机变量

$$Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P),$$

存在唯一的渐进过程 $h \in L^2(B)$, 也就是说

$$E\left[\int_0^\infty h_s^2 ds\right] < \infty,$$

使得

$$Z = E[Z] + \int_0^\infty h_s dB_s.$$

因此, 对每个在 L^2 中有界的鞅 M (分别地, 对每个连续局部鞅 M), 存在唯一的过程 $h \in L^2(B)$ (分别地, $h \in L_{\text{loc}}^2(B)$) 以及常数 $C \in \mathbb{R}$, 使得

$$M_t = C + \int_0^t h_s dB_s, \quad t \geq 0.$$

注。下面的证明表明, 定理第二部分适用于任意在 L^2 中有界的鞅 M , 不需要预先假设 M 的样本路径连续。这一点在稍后讨论表示定理的推论时会用到。连续局部鞅则依定义具有连续样本路径。

引理 5.19。 在定理 5.18 的假设下, 由下列随机变量张成的向量空间在 $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ 中稠密:

$$\exp\left(i \sum_{j=1}^n \theta_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right),$$

其中可以任取

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n, \quad \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}.$$

这里 $L_{\mathbb{C}}^2$ 表示所有平方可积、复值且 $\mathcal{F}_{\infty}$ -可测的随机变量所成的空间。

证明。 只需证明：若 $Z \in L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{F}_{\infty}, P)$ ，并且对任意上述 $t_0, \dots, t_n$ 与 $\theta_1, \dots, \theta_n$ ，都有

$$E \left[Z \exp \left(i \sum_{j=1}^n \theta_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right) \right] = 0, \quad (5.17)$$

则 $Z = 0$ 。

固定 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ ，并在 $\mathbb{R}^n$ 上定义复测度 ν ：对每个 Borel 集 $F \subset \mathbb{R}^n$ ，令

$$\nu(F) = E[Z 1_F(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})].$$

式 (5.17) 恰好说明 ν 的傅里叶变换恒为零。由 $\mathbb{R}^n$ 上复测度的傅里叶变换具有单射性， $\nu = 0$ 。因此，对每个 $A \in \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ ，都有

$$E[Z 1_A] = 0.$$

再由单调类论证，这一等式对任意 $A \in \sigma(B_t : t \geq 0)$ 都成立；取完备化后，它对任意 $A \in \mathcal{F}_{\infty}$ 都成立。于是 $Z = 0$ 。 $\square$

定理 5.18 的证明。 先证明第一个断言。唯一性是直接的：若同一个随机变量 Z 分别由 $h, h' \in L^2(B)$ 表示，则由随机积分的等距性质，

$$E \left[\int_0^{\infty} (h_s - h'_s)^2 ds \right] = E \left[\left(\int_0^{\infty} h_s dB_s - \int_0^{\infty} h'_s dB_s \right)^2 \right] = 0.$$

所以 $h = h'$ 于 $L^2(B)$ 中。

下面证明存在性。记 $\mathcal{V}$ 为所有满足定理表示式的 $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\infty}, P)$ 所成的向量空间。若 $Z \in \mathcal{V}$ ，相应过程为 $h \in L^2(B)$ ，则

$$E[Z^2] = (E[Z])^2 + E \left[\int_0^{\infty} h_s^2 ds \right].$$

由此可见， $\mathcal{V}$ 是 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\infty}, P)$ 的闭子空间。事实上，若 $Z_n \in \mathcal{V}$ 且 $Z_n \rightarrow Z$ 于 L^2 ，分别对应过程 $h^{(n)}$ ，则 $(h^{(n)})$ 是 $L^2(B)$ 中的 Cauchy 列。由于 $L^2(B)$ 是 Hilbert 空间，它收敛到某个 $h \in L^2(B)$ ，并立即得到

$$Z = E[Z] + \int_0^{\infty} h_s dB_s.$$

既然 $\mathcal{V}$ 闭，只需验证它包含 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\infty}, P)$ 的一个稠密子集。任取 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ 与 $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ ，令

$$f(s) = \sum_{j=1}^n \theta_j 1_{(t_{j-1}, t_j]}(s).$$

把指数鞅

$$\mathcal{Z}_t^f := \mathcal{E} \left(i \int_0^{\cdot} f(s) dB_s \right)_t$$

记为 Z^f 。由命题 5.11,

$$\begin{aligned} & \exp \left(i \sum_{j=1}^n \theta_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \theta_j^2 (t_j - t_{j-1}) \right) \\ &= Z_\infty^f = 1 + i \int_0^\infty Z_s^f f(s) dB_s. \end{aligned}$$

因此, 引理 5.19 中各随机变量的实部和虚部都属于 $\mathcal{V}$ 。由该引理, 这些随机变量的线性组合在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ 中稠密。第一个断言得证。

再证第二个断言。若 M 是在 L^2 中有界的鞅, 则存在 $M_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$, 且

$$M_\infty = E[M_\infty] + \int_0^\infty h_s dB_s$$

对某个 $h \in L^2(B)$ 成立。由条件期望公式 (5.9),

$$M_t = E[M_\infty | \mathcal{F}_t] = E[M_\infty] + \int_0^t h_s dB_s.$$

过程 h 的唯一性也由第一个断言的唯一性立即得到。

最后, 设 M 是连续局部鞅。由于 $\mathcal{F}_0$ 只包含概率为 0 或 1 的事件, $M_0 = C \in \mathbb{R}$ 。令

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}.$$

把上一步用于 M^{T_n} , 得到 $h^{(n)} \in L^2(B)$, 使得

$$M_t^{T_n} = C + \int_0^t h_s^{(n)} dB_s.$$

由表示中渐进过程的唯一性, 当 $m < n$ 时,

$$h_s^{(m)} = 1_{[0, T_m]}(s) h_s^{(n)}, \quad ds\text{-a.e., a.s.}$$

因此可以把这些过程相容地拼接成 $h \in L_{\text{loc}}^2(B)$, 使得对每个 m ,

$$h_s^{(m)} = 1_{[0, T_m]}(s) h_s, \quad ds\text{-a.e., a.s.}$$

定理中的表示式随即成立, 唯一性也同样直接。 □

推论 (鞅表示定理的两个重要推论)。 在定理 5.18 的假设下, 有以下结论。

- (1) 滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 是右连续的。事实上, 固定 $t \geq 0$, 设 Z 有界且 $\mathcal{F}_{t+}$ -可测。可取 $h \in L^2(B)$, 使得

$$Z = E[Z] + \int_0^\infty h_s dB_s.$$

对每个 $\varepsilon > 0$, 随机变量 Z 都是 $\mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ -可测的, 故由 (5.9),

$$Z = E[Z | \mathcal{F}_{t+\varepsilon}] = E[Z] + \int_0^{t+\varepsilon} h_s dB_s.$$

当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时, 右端在 L^2 中收敛到

$$E[Z] + \int_0^t h_s dB_s.$$

因而 Z a.s. 等于一个 $\mathcal{F}_t$ -可测随机变量；由于滤过完备， Z 本身 $\mathcal{F}_t$ -可测。
类似的论证还说明滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 是左连续的：对 $t > 0$ ，令

$$\mathcal{F}_{t-} := \bigvee_{0 \leq s < t} \mathcal{F}_s,$$

即包含所有 $\mathcal{F}_s$ ($0 \leq s < t$) 的最小 σ -代数，则 $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$ 。

- (2) 滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 的每个鞅都存在具有连续样本路径的修正。对在 L^2 中有界的鞅，这由表示公式直接得到（见定理后的注）。下面考虑一致可积鞅 M ；若 M 不是一致可积的，只需对每个 $a \geq 0$ 分别考虑停止过程 $M^a = (M_{t \wedge a})_{t \geq 0}$ 。在一致可积情形，对每个 $t \geq 0$ ，

$$M_t = E[M_\infty | \mathcal{F}_t].$$

由定理 3.18（此时已知滤过右连续，故可应用该定理）， M 有一个 càdlàg 修正；以下就取这个修正。

取一列有界随机变量 $(M_\infty^{(n)})$ ，使得 $M_\infty^{(n)} \rightarrow M_\infty$ 于 L^1 ，并令

$$M_t^{(n)} = E[M_\infty^{(n)} | \mathcal{F}_t].$$

每个 $M^{(n)}$ 都在 L^2 中有界，因此可取其连续修正。另一方面，由 Doob 极大不等式（命题 3.15），对每个 $\varepsilon > 0$ ，

$$P\left(\sup_{t \geq 0} |M_t^{(n)} - M_t| > \varepsilon\right) \leq \frac{3}{\varepsilon} E[|M_\infty^{(n)} - M_\infty|].$$

因此可选取子列 $n_k \uparrow \infty$ ，使得对每个 $k \geq 1$ ，

$$P\left(\sup_{t \geq 0} |M_t^{(n_k)} - M_t| > 2^{-k}\right) \leq 2^{-k}.$$

由 Borel–Cantelli 引理，

$$\sup_{t \geq 0} |M_t^{(n_k)} - M_t| \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.}$$

因而 M 的样本路径是连续函数的一致极限，所以连续。

多维推广。 最后简述上述结果的多维形式。现设 Ω 上的滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 是从 0 出发的 d 维布朗运动 $B = (B^1, \dots, B^d)$ 的完备自然滤过。则对每个 $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ ，存在唯一的 d 元渐进过程组 $(h^1, \dots, h^d)$ ，满足

$$E\left[\int_0^\infty (h_s^i)^2 ds\right] < \infty, \quad 1 \leq i \leq d,$$

并且

$$Z = E[Z] + \sum_{i=1}^d \int_0^\infty h_s^i dB_s^i.$$

同样，若 M 是连续局部鞅，则存在常数 C 和唯一的 d 元渐进过程组 $(h^1, \dots, h^d)$ ，满足

$$\int_0^t (h_s^i)^2 ds < \infty, \quad \text{a.s.}, \quad t \geq 0, \quad 1 \leq i \leq d,$$

且

$$M_t = C + \sum_{i=1}^d \int_0^t h_s^i dB_s^i.$$

证明与一维情形（定理 5.18）完全相同。以上两个重要推论也仍然成立。

5.5 Girsanov 定理

本节始终假设滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 完备且右连续。我们的目标是研究：把底层概率测度 P 换成另一个概率测度 Q 后，鞅与半鞅的概念如何变化。多数时候，我们假设 P 与 Q 相互绝对连续；此时， $(\mathcal{F}_t)$ 关于 P 的完备性也推出它关于 Q 完备。可能混淆时，分别用 E_P 与 E_Q 表示在 P 与 Q 下的期望。除非特别说明，本节所说的（局部）鞅或半鞅均相对于 P ；若相对于 Q ，将明确指出。与鞅不同，有限变差过程的概念不依赖底层概率测度。

命题 5.20. 设 Q 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度，并且 Q 在 $\mathcal{F}_\infty$ 上关于 P 绝对连续。对每个 $t \in [0, \infty]$ ，令

$$D_t = \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t},$$

即 Q 关于 P 在 $\mathcal{F}_t$ 上的 Radon–Nikodym 导数。则 $(D_t)_{t \geq 0}$ 是一致可积鞅，从而有一个 càdlàg 修正。仍以 $(D_t)_{t \geq 0}$ 表示这一修正，则对每个停时 T ，

$$D_T = \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_T}.$$

最后，若进一步假设 P 与 Q 在 $\mathcal{F}_\infty$ 上相互绝对连续，则

$$\inf_{t \geq 0} D_t > 0, \quad P\text{-a.s.}$$

证明。 若 $A \in \mathcal{F}_t$ ，则

$$Q(A) = E_Q[1_A] = E_P[1_A D_\infty] = E_P[1_A E_P[D_\infty | \mathcal{F}_t]].$$

由 $\mathcal{F}_t$ 上 Radon–Nikodym 导数的唯一性，

$$D_t = E_P[D_\infty | \mathcal{F}_t], \quad P\text{-a.s.}$$

所以 D 是由 D_∞ 终结的一致可积鞅。由定理 3.18（这里使用滤过的完备性与右连续性）， D 有 càdlàg 修正，以下均取这一修正。

若 T 是停时，则由可选停时定理（定理 3.22），对每个 $A \in \mathcal{F}_T$ ，

$$Q(A) = E_Q[1_A] = E_P[1_A D_\infty] = E_P[1_A E_P[D_\infty | \mathcal{F}_T]] = E_P[1_A D_T].$$

又 D_T 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的，故

$$D_T = \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_T}.$$

下面证明最后一个断言。对每个 $\varepsilon > 0$ ，令

$$T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : D_t < \varepsilon\}.$$

因为 D 是 càdlàg 过程，且滤过右连续， T_ε 是停时：这是 càdlàg 过程首次进入开集的时刻（回顾命题 3.9）。事件 $\{T_\varepsilon < \infty\}$ 属于 $\mathcal{F}_{T_\varepsilon}$ ，故

$$Q(T_\varepsilon < \infty) = E_P[1_{\{T_\varepsilon < \infty\}} D_{T_\varepsilon}] \leq \varepsilon,$$

其中在 $\{T_\varepsilon < \infty\}$ 上, 样本路径的右连续性给出 $D_{T_\varepsilon} \leq \varepsilon$ 。于是

$$Q\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{T_{1/n} < \infty\}\right) = 0.$$

由于 $P \ll Q$, 同一事件的 P -概率也为零。这恰好说明: P -a.s. 存在整数 $n \geq 1$, 使得 $T_{1/n} = \infty$, 也就是对所有 $t \geq 0$ 都有 $D_t \geq 1/n$ 。命题得证。 $\square$

命题 5.21. 设 D 是取严格正值的连续局部鞅。则存在唯一的连续局部鞅 L , 使得

$$D_t = \exp\left(L_t - \frac{1}{2}\langle L, L \rangle_t\right) = \mathcal{E}(L)_t.$$

而且

$$L_t = \log D_0 + \int_0^t D_s^{-1} dD_s.$$

证明. 唯一性由定理 4.8 立即得到。由于 D 严格为正, 可以对 $\log D_t$ 使用 Itô 公式 (见命题 5.11 前的注), 得到

$$\begin{aligned} \log D_t &= \log D_0 + \int_0^t \frac{dD_s}{D_s} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d\langle D, D \rangle_s}{D_s^2} \\ &= L_t - \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_t, \end{aligned}$$

其中 L 正是命题中给出的过程。 $\square$

下面给出本节的主要定理。它刻画了 P 下连续局部鞅与 Q 下连续局部鞅之间的关系。

定理 5.22 (Girsanov 定理). 设概率测度 P, Q 在 $\mathcal{F}_\infty$ 上相互绝对连续。令 $(D_t)_{t \geq 0}$ 为具有 càdlàg 样本路径的鞅, 并满足对每个 $t \geq 0$,

$$D_t = \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t}.$$

假设 D 具有连续样本路径, 并令 L 为满足 $D_t = \mathcal{E}(L)_t$ 的唯一连续局部鞅。若 M 是 P 下的连续局部鞅, 则

$$Q_M := M - \langle M, L \rangle$$

是 Q 下的连续局部鞅。

注. 由上一节末尾的鞅表示定理及其推论, 当 $(\mathcal{F}_t)$ 是布朗运动的完备自然滤过时, D 的样本路径连续这一假设总是成立。在 Girsanov 定理的应用中, 也常常先构造鞅 (D_t) , 再用它定义概率测度 Q ; 此时连续性通常由构造直接保证 (见下一节的例子)。

证明. 由命题 5.21, $D_t = \mathcal{E}(L)_t$ (这里使用了 D 的连续性, 以及命题 5.20 所保证的严格正性)。

先证明一个辅助结论。设 T 是停时, X 是具有连续样本路径的适应过程。若 $(XD)^T$ 是 P 下的鞅, 则 X^T 是 Q 下的鞅。事实上, 由命题 5.20,

$$E_Q[|X_{t \wedge T}|] = E_P[|X_{t \wedge T}| D_{t \wedge T}] < \infty,$$

所以 $X_{t \wedge T} \in L^1(Q)$ 。再取 $A \in \mathcal{F}_s$ 及 $s < t$ 。因为 $A \cap \{T > s\} \in \mathcal{F}_s$, 且 $(XD)^T$ 是 P -鞅,

$$E_P[1_{A \cap \{T > s\}} X_{t \wedge T} D_{t \wedge T}] = E_P[1_{A \cap \{T > s\}} X_{s \wedge T} D_{s \wedge T}].$$

又由命题 5.20,

$$D_{t \wedge T} = \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_{t \wedge T}}, \quad D_{s \wedge T} = \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_{s \wedge T}},$$

并且 $A \cap \{T > s\} \in \mathcal{F}_{s \wedge T} \subset \mathcal{F}_{t \wedge T}$, 故

$$E_Q[1_{A \cap \{T > s\}} X_{t \wedge T}] = E_Q[1_{A \cap \{T > s\}} X_{s \wedge T}].$$

在 $A \cap \{T \leq s\}$ 上, 两边的被积随机变量本来就相等。两部分合并, 得到

$$E_Q[1_A X_{t \wedge T}] = E_Q[1_A X_{s \wedge T}],$$

辅助结论得证。因此, 只要 XD 是 P 下的连续局部鞅, X 就是 Q 下的连续局部鞅。

现在令 M 为 P 下的连续局部鞅, 并令 ${}^Q M = M - \langle M, L \rangle$ 。对 $X = {}^Q M$ 使用分部积分公式, 得到

$$\begin{aligned} {}^Q M_t D_t &= M_0 D_0 + \int_0^t {}^Q M_s dD_s + \int_0^t D_s dM_s - \int_0^t D_s d\langle M, L \rangle_s + \langle M, D \rangle_t \\ &= M_0 D_0 + \int_0^t {}^Q M_s dD_s + \int_0^t D_s dM_s. \end{aligned}$$

最后一步使用了命题 5.21 给出的

$$d\langle M, L \rangle_s = D_s^{-1} d\langle M, D \rangle_s.$$

因此 ${}^Q M D$ 是 P 下的连续局部鞅。由刚才的辅助结论, ${}^Q M$ 是 Q 下的连续局部鞅。 $\square$

推论 (Girsanov 定理的推论)。

(a) 若 M 是 P 下的连续局部鞅, 则它在 Q 下仍是半鞅, 而且它在 Q 下的典范分解为

$$M = {}^Q M + \langle M, L \rangle.$$

这里再次用到: 有限变差过程的概念不依赖底层概率测度。因此, P 下的半鞅类包含于 Q 下的半鞅类。

事实上, 这两个半鞅类相同。在定理 5.22 的假设下, P, Q 的地位是对称的, 因为 P 关于 Q 在 $\mathcal{F}_t$ 上的 Radon-Nikodym 导数是 D_t^{-1} , 而 D^{-1} 也具有连续样本路径。进一步, 令

$${}^Q L := L - \langle L, L \rangle.$$

由定理 5.22, ${}^Q L$ 是 Q 下的连续局部鞅, 且 $\langle {}^Q L, {}^Q L \rangle = \langle L, L \rangle$ 。于是

$$\begin{aligned} D_t^{-1} &= \exp\left(-L_t + \frac{1}{2}\langle L, L \rangle_t\right) \\ &= \exp\left(-{}^Q L_t - \frac{1}{2}\langle {}^Q L, {}^Q L \rangle_t\right) = \mathcal{E}(-{}^Q L)_t. \end{aligned}$$

因此, 交换 P, Q 时, 只需把 D 换成 D^{-1} , 把 L 换成 $-{}^Q L$ 。

(b) 设 X, Y 是半鞅 (相对于 P 或 Q)。括号过程 $\langle X, Y \rangle$ 在 P 与 Q 下相同。事实上, 在两种测度下, 该括号都由命题 4.21 的同一离散逼近给出; 上面的 (a) 已隐含使用了这一点。同样, 若 H 是局部有界渐进过程, 则随机积分 $H \cdot X$ 在 P 与 Q 下也相同。只需考虑 $X = M$ 是 P 下连续局部鞅的情形。分别以 $(H \cdot M)_P$ 与 $(H \cdot M)_Q$ 记两种测度下的随机积分。由线性性,

$$\begin{aligned} (H \cdot {}^Q M)_P &= (H \cdot M)_P - H \cdot \langle M, L \rangle \\ &= (H \cdot M)_P - \langle (H \cdot M)_P, L \rangle. \end{aligned}$$

定理 5.22 说明上式是 Q 下的连续局部鞅。它与任意 Q 下连续局部鞅 N 的括号等于

$$H \cdot \langle M, N \rangle = H \cdot \langle {}^Q M, N \rangle.$$

由定理 5.6,

$$(H \cdot {}^Q M)_P = (H \cdot {}^Q M)_Q,$$

从而也有 $(H \cdot M)_P = (H \cdot M)_Q$ 。

用定理 5.22 的记号, 定义

$$G_{QP}(M) := {}^Q M = M - \langle M, L \rangle.$$

则 G_{QP} 把所有 P -连续局部鞅映到所有 Q -连续局部鞅之上。由 (a) 中的讨论容易验证

$$G_{PQ} \circ G_{QP} = \text{Id}.$$

此外, G_{QP} 与随机积分可交换: 若 H 是局部有界渐进过程, 则

$$H \cdot G_{QP}(M) = G_{QP}(H \cdot M).$$

(c) 若 $M = B$ 是 P 下的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, 则

$$B^Q := B - \langle B, L \rangle$$

是 Q 下的连续局部鞅, 而且

$$\langle B^Q, B^Q \rangle_t = \langle B, B \rangle_t = t.$$

由定理 5.12, B^Q 是 Q 下的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。

在 Girsanov 定理的大多数应用中, 概率测度 Q 按如下方式构造。先取满足 $L_0 = 0$ 且

$$\langle L, L \rangle_\infty < \infty, \quad \text{a.s.}$$

的连续局部鞅 L 。后一条件保证极限

$$L_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} L_t$$

a.s. 存在 (见练习 4.24)。过程 $\mathcal{E}(L)$ 是非负连续局部鞅, 因而是上鞅 (命题 4.7); 它 a.s. 收敛到

$$\mathcal{E}(L)_\infty = \exp\left(L_\infty - \frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty\right),$$

且由 Fatou 引理, $E[\mathcal{E}(L)_\infty] \leq 1$ 。若

$$E[\mathcal{E}(L)_\infty] = 1, \tag{5.18}$$

则 $\mathcal{E}(L)$ 是一致可积鞅。事实上, Fatou 引理还给出

$$\mathcal{E}(L)_t \geq E[\mathcal{E}(L)_\infty \mid \mathcal{F}_t],$$

而 (5.18) 迫使两边期望相同, 因而等号成立。若令 Q 为关于 P 具有密度 $\mathcal{E}(L)_\infty$ 的概率测度, 就处于定理 5.22 的框架中, 且 $D_t = \mathcal{E}(L)_t$ 。所以, 给出保证 (5.18) 成立的条件非常重要。

定理 5.23. 设 L 是满足 $L_0 = 0$ 的连续局部鞅。考虑下列性质：

- (i) $E[\exp(\frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty)] < \infty$ (Novikov 判据)；
- (ii) L 是一致可积鞅，并且 $E[\exp(\frac{1}{2}L_\infty)] < \infty$ (Kazamaki 判据)；
- (iii) $\mathcal{E}(L)$ 是一致可积鞅。

则

$$(i) \implies (ii) \implies (iii).$$

证明. 先证 (i) $\implies$ (ii)。性质 (i) 推出 $E[\langle L, L \rangle_\infty] < \infty$ ，因而 L 是在 L^2 中有界的连续鞅 (定理 4.13)。又

$$\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right) = (\mathcal{E}(L)_\infty)^{1/2} \left(\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty\right)\right)^{1/2}.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)\right] &\leq (E[\mathcal{E}(L)_\infty])^{1/2} \left(E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty\right)\right]\right)^{1/2} \\ &\leq \left(E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty\right)\right]\right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

再证 (ii) $\implies$ (iii)。因为 L 是一致可积鞅，定理 3.22 说明：对任意停时 T ，

$$L_T = E[L_\infty \mid \mathcal{F}_T].$$

Jensen 不等式给出

$$\exp\left(\frac{1}{2}L_T\right) \leq E\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right) \mid \mathcal{F}_T\right].$$

由假设，右端在所有停时 T 上组成一致可积族。因此， $\exp(\frac{1}{2}L_T)$ 在所有停时 T 上也组成一致可积族。

固定 $0 < a < 1$ ，令

$$Z_t^{(a)} = \exp\left(\frac{aL_t}{1+a}\right).$$

直接计算可得

$$\mathcal{E}(aL)_t = (\mathcal{E}(L)_t)^{a^2} (Z_t^{(a)})^{1-a^2}.$$

若 $\Gamma \in \mathcal{F}$ ，且 T 是停时，则 Hölder 不等式给出

$$\begin{aligned} E[1_\Gamma \mathcal{E}(aL)_T] &\leq (E[\mathcal{E}(L)_T])^{a^2} (E[1_\Gamma Z_T^{(a)}])^{1-a^2} \\ &\leq (E[1_\Gamma Z_T^{(a)}])^{1-a^2} \\ &\leq \left(E\left[1_\Gamma \exp\left(\frac{1}{2}L_T\right)\right]\right)^{2a(1-a)}. \end{aligned}$$

第二个不等式使用了 $E[\mathcal{E}(L)_T] \leq 1$ ：这是命题 3.25 对从 1 出发的非负上鞅 $\mathcal{E}(L)$ 的应用。第三个不等式来自 Jensen 不等式，并注意 $(1+a)/(2a) > 1$ 。由于 $\exp(\frac{1}{2}L_T)$ 在所有停时 T 上组成一致可积族，上式表明 $\mathcal{E}(aL)_T$ 在所有停时 T 上也组成一致可积族。

由连续局部鞅的定义，存在停时 $T_n \uparrow \infty$ ，使得对每个 n ， $\mathcal{E}(aL)^{T_n}$ 是鞅。若 $0 \leq s \leq t$ ，利用刚得到的一致可积性，可在

$$E[\mathcal{E}(aL)_{t \wedge T_n} \mid \mathcal{F}_s] = \mathcal{E}(aL)_{s \wedge T_n}$$

中令 $n \rightarrow \infty$, 从而得到 $\mathcal{E}(aL)$ 是一致可积鞅。于是

$$\begin{aligned} 1 = E[\mathcal{E}(aL)_\infty] &\leq (E[\mathcal{E}(L)_\infty])^{a^2} (E[Z_\infty^{(a)}])^{1-a^2} \\ &\leq (E[\mathcal{E}(L)_\infty])^{a^2} \left(E \left[\exp \left(\frac{1}{2} L_\infty \right) \right] \right)^{2a(1-a)}. \end{aligned}$$

令 $a \uparrow 1$, 得到 $E[\mathcal{E}(L)_\infty] \geq 1$ 。而非负上鞅性质给出反向不等式, 所以 $E[\mathcal{E}(L)_\infty] = 1$ 。由 (5.18) 后的讨论, $\mathcal{E}(L)$ 是一致可积鞅。□

5.6 Girsanov 定理的若干应用

本节给出 Girsanov 定理的几个应用, 以说明前述结果的威力。

构造随机微分方程的解。 设 b 是 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上的有界可测函数。假设存在

$$g \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt),$$

使得对每个 $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, 都有

$$|b(t, x)| \leq g(t).$$

例如, 若存在 $A > 0$, 使得 $|b|$ 在 $[0, A] \times \mathbb{R}$ 上有界, 且在 $(A, \infty) \times \mathbb{R}$ 上恒为零, 那么上述假设成立。

设 B 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。考虑连续局部鞅

$$L_t = \int_0^t b(s, B_s) dB_s$$

及相应的指数鞅

$$D_t = \mathcal{E}(L)_t = \exp \left(\int_0^t b(s, B_s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t b(s, B_s)^2 ds \right).$$

关于 b 的假设保证定理 5.23 的条件 (i) 成立, 所以 D 是一致可积鞅。令概率测度 Q 由

$$dQ = D_\infty dP$$

定义。Girsanov 定理及其后的推论 (c) 说明, 过程

$$\beta_t := B_t - \int_0^t b(s, B_s) ds$$

是 Q 下的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。

换一种说法: 在概率测度 Q 下, 存在 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动 β , 使得过程 $X = B$ 满足随机微分方程

$$dX_t = d\beta_t + b(t, X_t) dt.$$

这类方程将在第 7 章研究; 与该章的结果不同, 这里没有对 b 作任何正则性假设。Girsanov 定理能够在系数不具正则性的情况下构造随机微分方程的解, 这是一个值得注意的事实。

阅读提示。 这里构造的是随机微分方程的弱解: 布朗运动和解所在的概率测度 Q 也是构造的一部分, 并非预先固定。

Cameron–Martin 公式。 现在把上述讨论限制到 $b(t, x)$ 不依赖 x 的情形。设

$$b(t, x) = g(t), \quad g \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt),$$

并对每个 $t \geq 0$ 定义

$$h(t) = \int_0^t g(s) ds.$$

所有能够写成这种形式的函数 h 构成的集合 $\mathbf{H}$ 称为 Cameron–Martin 空间。若 $h \in \mathbf{H}$ ，有时写 $\dot{h} = g$ ，其中 $\dot{h}$ 是 h 的分布意义导数。

由前面的特殊情形，在由下式定义的概率测度 Q 下：

$$\frac{dQ}{dP} = D_\infty = \exp\left(\int_0^\infty g(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s)^2 ds\right),$$

过程 $\beta_t := B_t - h(t)$ 是布朗运动。因此，对路径空间 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 上任意非负可测函数 Φ ，

$$\begin{aligned} E_P[D_\infty \Phi((B_t)_{t \geq 0})] &= E_Q[\Phi((B_t)_{t \geq 0})] \\ &= E_Q[\Phi((\beta_t + h(t))_{t \geq 0})] \\ &= E_P[\Phi((B_t + h(t))_{t \geq 0})]. \end{aligned}$$

首尾两项的等式就是 Cameron–Martin 公式。下面把它写成 Wiener 空间上布朗运动的典范构造形式（见第 2.2 节末尾）。

命题 5.24 (Cameron–Martin 公式)。 设 $W(dw)$ 是 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 上的 Wiener 测度，且 $h \in \mathbf{H}$ 。则对路径空间上任意非负可测函数 Φ ，

$$\int W(dw) \Phi(w + h) = \int W(dw) \exp\left(\int_0^\infty \dot{h}(s) dw(s) - \frac{1}{2} \int_0^\infty \dot{h}(s)^2 ds\right) \Phi(w).$$

注。 积分 $\int_0^\infty \dot{h}(s) dw(s)$ 是关于 $w(s)$ 的随机积分；在 Wiener 测度 $W(dw)$ 下， $w(s)$ 是布朗运动。由于 $\dot{h}(s)$ 是确定性函数，它也可以看作 Wiener 积分。Cameron–Martin 公式还可以只用高斯计算证明，而无须随机积分或 Girsanov 定理（例如见 [62, 第 1 章]）；不过，把它看作 Girsanov 定理的特例很有启发性。

Cameron–Martin 公式表明 Wiener 测度在 Cameron–Martin 空间中的函数平移下具有“拟不变性”：映射 $w \mapsto w + h$ 所诱导的 Wiener 测度像测度关于 $W(dw)$ 有密度，这一密度就是与鞅

$$\int_0^t \dot{h}(s) dw(s)$$

对应的指数鞅的终值。

带漂移布朗运动的首达时分布。 设 B 是满足 $B_0 = 0$ 的实布朗运动。对每个 $a > 0$ ，令

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}.$$

给定 $c \in \mathbb{R}$ ，我们要计算停时

$$U_a = \inf\{t \geq 0 : B_t + ct = a\}$$

的分布。当 $c = 0$ 时， $U_a = T_a$ ，其分布已由推论 2.22 给出。Girsanov 定理——更准确地说，Cameron–Martin 公式——可以由这一特例推出任意 c 的情形。

固定 $t > 0$, 在 Cameron–Martin 公式中取

$$\dot{h}(s) = c1_{\{s \leq t\}}, \quad h(s) = c(s \wedge t),$$

并对每个 $w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 取

$$\Phi(w) = 1_{\{\max_{0 \leq s \leq t} w(s) \geq a\}}.$$

于是

$$\begin{aligned} P(U_a \leq t) &= E[\Phi(B + h)] \\ &= E\left[\Phi(B) \exp\left(cB_t - \frac{c^2}{2}t\right)\right] \\ &= E\left[1_{\{T_a \leq t\}} \exp\left(cB_t - \frac{c^2}{2}t\right)\right] \\ &= E\left[1_{\{T_a \leq t\}} \exp\left(cB_{t \wedge T_a} - \frac{c^2}{2}(t \wedge T_a)\right)\right] \\ &= E\left[1_{\{T_a \leq t\}} \exp\left(ca - \frac{c^2}{2}T_a\right)\right] \\ &= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2s} + ca - \frac{c^2}{2}s\right) ds \\ &= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{(a - cs)^2}{2s}\right) ds. \end{aligned}$$

第四个等号使用了可选停时定理 (推论 3.23):

$$E\left[\exp\left(cB_t - \frac{c^2}{2}t\right) \middle| \mathcal{F}_{t \wedge T_a}\right] = \exp\left(cB_{t \wedge T_a} - \frac{c^2}{2}(t \wedge T_a)\right).$$

倒数第二个等号还使用了推论 2.22 给出的 T_a 的显式密度。由此可知, U_a 在 $\mathbb{R}_+$ 上的密度为

$$\rho(s) = \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{(a - cs)^2}{2s}\right), \quad s > 0.$$

对该密度积分可得

$$P(U_a < \infty) = \begin{cases} 1, & c \geq 0, \\ e^{2ca}, & c < 0. \end{cases}$$

这一结论也可更直接地对连续鞅

$$\exp(-2c(B_t + ct))$$

应用可选停时定理得到。

练习

以下练习中的过程都定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上, 并配备完备滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty]}$ 。

练习 5.25。 设 B 是满足 $B_0 = 0$ 的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, H 是具有连续样本路径的适应过程。证明: 当 $t \downarrow 0$ 时,

$$\frac{1}{B_t} \int_0^t H_s dB_s$$

依概率收敛, 并求出其极限。

解答 5.25。 写成

$$\frac{1}{B_t} \int_0^t H_s dB_s = H_0 + \frac{R_t}{B_t}, \quad R_t = \int_0^t (H_s - H_0) dB_s.$$

先假设 H 有界。给定 $\delta, \eta > 0$, 由 Itô 等距式,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{R_t}{B_t}\right| > \eta\right) &\leq P(|B_t| \leq \delta\sqrt{t}) + P(|R_t| > \eta\delta\sqrt{t}) \\ &\leq P(|N| \leq \delta) + \frac{1}{\eta^2\delta^2} E\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |H_s - H_0|^2\right], \end{aligned}$$

其中 $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 。连续性与控制收敛定理说明第二项在 $t \downarrow 0$ 时趋于 0; 随后令 $\delta \downarrow 0$, 使得 $R_t/B_t \rightarrow 0$ 依概率成立。

一般情形以 $\tau_n = \inf\{s : |H_s| + |H_0| \geq n\}$ 局部化。对每个 n , 上述结论适用于 H^{τ_n} , 而 $P(\tau_n \leq t) \rightarrow 0$ (先令 $t \downarrow 0$, 再令 $n \rightarrow \infty$)。因此

$$\boxed{\frac{1}{B_t} \int_0^t H_s dB_s \xrightarrow[t \downarrow 0]{P} H_0}.$$

□

练习 5.26。

1. 设 B 是满足 $B_0 = 0$ 的一维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, f 是 $\mathbb{R}$ 上的二次连续可微函数, g 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数。验证过程

$$X_t = f(B_t) \exp\left(-\int_0^t g(B_s) ds\right)$$

是半鞅, 并写出它作为连续局部鞅与有限变差过程之和的分解。

2. 证明: X 是连续局部鞅, 当且仅当 f 满足微分方程

$$f'' = 2gf.$$

3. 以下进一步假设 $g \geq 0$, 并且 g 在 $(0, \infty)$ 的某个紧子区间之外恒为零。说明方程 $f'' = 2gf$ 存在唯一解 f_1 , 满足

$$f_1(0) = 1, \quad f_1'(0) = 0.$$

设 $a > 0$, 并令 $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ 。证明

$$E\left[\exp\left(-\int_0^{T_a} g(B_s) ds\right)\right] = \frac{1}{f_1(a)}.$$

解答 5.26。 记 $G_t = \int_0^t g(B_s) ds$ 。

1. 对 $F(x, y) = f(x)e^{-y}$ 使用 Itô 公式:

$$X_t = f(0) + \int_0^t e^{-G_s} f'(B_s) dB_s + \int_0^t e^{-G_s} \left(\frac{1}{2} f''(B_s) - g(B_s) f(B_s)\right) ds.$$

前一积分是连续局部鞅, 后一积分是连续有限变差过程。

2. 由半鞅典范分解的唯一性, X 为局部鞅当且仅当最后一个积分恒为 0。由于被积函数连

续，而布朗运动能以正概率访问任意开区间，这等价于

$$\frac{1}{2}f'' - gf \equiv 0, \quad \text{即} \quad f'' = 2gf.$$

3. 取 $0 < \alpha < \beta$, 使 g 在 $[\alpha, \beta]$ 外恒为零。在该区间以初值 $f_1(\alpha) = 1, f_1'(\alpha) = 0$ 解 $f_1'' = 2gf_1$, 再在左侧延拓为常数 1, 在右侧作仿射延拓。常微分方程的存在唯一性定理给出所需唯一解; 又因 $g \geq 0$, 有 $f_1 \geq 1$ 于 $[0, \infty)$ 。

由前两问, $M_t = f_1(B_t)e^{-G_t}$ 是连续局部鞅。停止于 $T_a \wedge n$ 后它是真鞅。由于 f_1 在 $(-\infty, a]$ 上有界、 $e^{-G_t} \leq 1$, 且 $T_a < \infty$ a.s., 控制收敛给出

$$1 = E \left[f_1(a) \exp \left(- \int_0^{T_a} g(B_s) ds \right) \right].$$

因而

$$E \left[e^{-\int_0^{T_a} g(B_s) ds} \right] = \frac{1}{f_1(a)}.$$

□

练习 5.27 (上确界的随机微积分)。

预备问题。 设 $m: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且 $m(0) = 0$, 并定义单调不减函数

$$s(t) = \sup_{0 \leq r \leq t} m(r).$$

证明: 对 $\mathbb{R}$ 上任意有界 Borel 函数 h 及任意 $t > 0$,

$$\int_0^t (s(r) - m(r))h(r) ds(r) = 0.$$

(可以先注意: 若开区间 I 与集合 $\{r \geq 0: s(r) = m(r)\}$ 不相交, 则 $\int 1_I(r) ds(r) = 0$ 。)

1. 设 M 是满足 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅, 并对每个 $t \geq 0$ 令

$$S_t = \sup_{0 \leq r \leq t} M_r.$$

设 $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 二次连续可微。说明

$$\varphi(S_t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(S_s) dS_s.$$

2. 证明

$$(S_t - M_t)\varphi(S_t) = \Phi(S_t) - \int_0^t \varphi(S_s) dM_s,$$

其中对每个 $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(y) dy.$$

3. 推出: 对每个 $\lambda > 0$, 过程

$$e^{-\lambda S_t} + \lambda(S_t - M_t)e^{-\lambda S_t}$$

是连续局部鞅。

4. 设 $a > 0$, 并令

$$T = \inf\{t \geq 0: S_t - M_t = a\}.$$

假设 $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$, a.s. 证明 $T < \infty$, a.s., 并且 S_T 服从参数为 $1/a$ 的指数分布。

解答 5.27. 预备问题中, Stieltjes 测度 ds 集中在闭集 $\{r : s(r) = m(r)\}$ 上。因此 $(s-m)h = 0$, ds -a.e., 所给积分为 0。

1. S 连续且递增, 普通变量代换公式给出

$$\varphi(S_t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(S_s) dS_s.$$

2. 对 $(S - M)\varphi(S)$ 作分部积分。由于 dS 集中在 $\{S = M\}$ 上,

$$d((S - M)\varphi(S)) = d\Phi(S) - \varphi(S) dM.$$

积分即得题中等式。

3. 取 $\varphi(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, 于是 $\Phi(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, 从而

$$e^{-\lambda S_t} + \lambda(S_t - M_t)e^{-\lambda S_t} = 1 - \lambda \int_0^t e^{-\lambda S_s} dM_s,$$

这是连续局部鞅。

4. 由 Dambis–Dubins–Schwarz 定理, $M_t = W_{\langle M \rangle_t}$ 。因 $\langle M \rangle_\infty = \infty$, 布朗运动的回撤最终达到任意给定高度, 故 $T < \infty$ a.s. 停止前 $0 \leq S - M \leq a$ 且 $S \geq 0$, 所以第 3 问中的停止局部鞅有界, 是真鞅。令 $t \rightarrow \infty$, 得到

$$1 = E[e^{-\lambda S_T}(1 + \lambda a)], \quad E[e^{-\lambda S_T}] = \frac{1}{1 + \lambda a}.$$

这是均值为 a 的指数分布的 Laplace 变换, 故

$$S_T \sim \text{Exp}(1/a).$$

□

练习 5.28. 设 B 是从 1 出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。固定 $\varepsilon \in (0, 1)$, 令

$$T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : B_t = \varepsilon\}.$$

另取 $\lambda > 0$ 与 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 。

1. 证明

$$Z_t = (B_{t \wedge T_\varepsilon})^\alpha$$

是半鞅, 并写出它作为连续局部鞅与有限变差过程之和的典范分解。

2. 证明: 若 α, λ 满足一个需要确定的多项式方程, 则过程

$$\tilde{Z}_t = (B_{t \wedge T_\varepsilon})^\alpha \exp\left(-\lambda \int_0^{t \wedge T_\varepsilon} \frac{ds}{B_s^2}\right)$$

是连续局部鞅。

3. 计算

$$E\left[\exp\left(-\lambda \int_0^{T_\varepsilon} \frac{ds}{B_s^2}\right)\right].$$

解答 5.28。

1. 在 $t \wedge T_\varepsilon$ 之前 $B \geq \varepsilon$ 。Itô 公式给出

$$(B_{t \wedge T_\varepsilon})^\alpha = 1 + \alpha \int_0^{t \wedge T_\varepsilon} B_s^{\alpha-1} dB_s + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \int_0^{t \wedge T_\varepsilon} B_s^{\alpha-2} ds.$$

2. 对乘积使用 Itô 公式，有限变差项恰在

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} - \lambda = 0$$

时消失。因此所求方程为 $\alpha(\alpha-1) = 2\lambda$ 。

3. 选取负根

$$\alpha_- = \frac{1 - \sqrt{1 + 8\lambda}}{2} < 0.$$

此时 $\tilde{Z}_{t \wedge T_\varepsilon}$ 有界，故为真鞅。又 $T_\varepsilon < \infty$ a.s., 令 $t \rightarrow \infty$ 得

$$1 = \varepsilon^{\alpha_-} E \left[\exp \left(-\lambda \int_0^{T_\varepsilon} \frac{ds}{B_s^2} \right) \right].$$

所以

$$E \left[e^{-\lambda \int_0^{T_\varepsilon} B_s^{-2} ds} \right] = \varepsilon^{(\sqrt{1+8\lambda}-1)/2}.$$

□

练习 5.29。 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是半鞅。假设存在从 0 出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动 $(B_t)_{t \geq 0}$ 和连续函数 $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得

$$X_t = B_t + \int_0^t b(X_s) ds.$$

1. 设 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 二次连续可微。求一个二阶微分方程，使得 F 满足该方程时， $F(X_t)$ 是连续局部鞅。
2. 求该方程满足 $F(0) = 0$ 、 $F'(0) = 1$ 的解。下文始终以 F 表示这个特定解；它可以写成

$$F(x) = \int_0^x e^{-2\beta(y)} dy,$$

其中函数 β 要用 b 表示出来。

3. 仅在本问中，进一步假设 b 可积，即

$$\int_{\mathbb{R}} |b(x)| dx < \infty.$$

- (a) 证明连续局部鞅 $M_t = F(X_t)$ 是真鞅。
- (b) 证明 $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$, a.s.
- (c) 推出

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = +\infty, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty, \quad \text{a.s.}$$

4. 回到一般情形。设 $c < 0 < d$, 并令

$$T_c = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq c\}, \quad T_d = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq d\}.$$

证明：在事件 $\{T_c \wedge T_d = \infty\}$ 上，对所有整数 $n \geq 0$ ，随机变量 $|B_{n+1} - B_n|$ 都被某个与 n 无关的确定性常数控制。推出

$$P(T_c \wedge T_d = \infty) = 0.$$

5. 用 $F(c)$ 与 $F(d)$ 表示 $P(T_c < T_d)$ 。

6. 假设 b 在 $(-\infty, 0]$ 上恒为零，并且存在常数 $\alpha > 1/2$ ，使得对每个 $x \geq 1$ ，

$$b(x) \geq \frac{\alpha}{x}.$$

证明：对每个 $\varepsilon > 0$ ，可以选取 $c < 0$ ，使得

$$P(T_n < T_c, \text{ 对每个 } n \geq 1) \geq 1 - \varepsilon.$$

推出 $X_t \rightarrow +\infty$ 当 $t \rightarrow \infty$, a.s. (提示：注意连续局部鞅 M^{T_c} 有界。)

7. 现在设对每个 $x \geq 1$, $b(x) = 1/(2x)$ 。证明

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty, \quad \text{a.s.}$$

解答 5.29。

1. Itô 公式给出

$$dF(X_t) = F'(X_t) dB_t + \left(\frac{1}{2} F''(X_t) + b(X_t) F'(X_t) \right) dt.$$

因而所求方程为 $F'' + 2bF' = 0$ 。

2. 令 $\beta(x) = \int_0^x b(z) dz$ 。由初值条件，

$$F'(x) = e^{-2\beta(x)}, \quad \boxed{F(x) = \int_0^x e^{-2\beta(y)} dy}.$$

3. 若 $b \in L^1(\mathbb{R})$ ，则 β 有界，故存在 $0 < c < C < \infty$ 使 $c \leq F' \leq C$ 。于是

$$M_t = F(X_t) = \int_0^t F'(X_s) dB_s$$

在有限时间区间上平方可积，因而是真鞅；并且

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t F'(X_s)^2 ds \geq c^2 t \rightarrow \infty.$$

时间变换定理说明 M a.s. 上下无界。又 F 严格递增且 $F(\pm\infty) = \pm\infty$ ，所以 X 的上极限为 $+\infty$ ，下极限为 $-\infty$, a.s.

4. 在 $\{T_c \wedge T_d = \infty\}$ 上， $X_s \in (c, d)$ 。令 $K = \sup_{[c,d]} |b|$ ，则

$$|B_{n+1} - B_n| \leq |X_{n+1} - X_n| + \int_n^{n+1} |b(X_s)| ds \leq d - c + K.$$

但独立同分布的增量 $B_{n+1} - B_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 不可能全部被同一常数控制，因此 $P(T_c \wedge T_d = \infty) = 0$ 。

5. 对 $T = T_c \wedge T_d$, 有界鞅 $F(X_{t \wedge T})$ 的可选停时定理给出

$$0 = F(c)P(T_c < T_d) + F(d)P(T_d < T_c).$$

故

$$P(T_c < T_d) = \frac{F(d)}{F(d) - F(c)}.$$

6. 由假设, 对充分大的 y , $\beta(y) \geq C + \alpha \log y$. 因 $2\alpha > 1$, $F(\infty) =: \ell < \infty$; 而 $F(c) = c$ 对 $c \leq 0$ 成立. 第 5 问给出

$$P(T_n < T_c) = \frac{-F(c)}{F(n) - F(c)}.$$

令 $n \rightarrow \infty$,

$$P(T_n < T_c \text{ 对所有 } n \geq 1) = \frac{-F(c)}{\ell - F(c)} \xrightarrow{c \rightarrow -\infty} 1.$$

在这一事件上, 有界鞅 M^{T_c} 收敛; 同时 $M_{T_n} = F(n) \rightarrow \ell$. 若 X_t 不趋于 $+\infty$, 便有一列 $t_k \rightarrow \infty$ 及常数 K 使 $X_{t_k} \leq K$, 从而 $M_{t_k} \leq F(K) < \ell$, 矛盾. 让上述概率任意接近 1, 即得 $X_t \rightarrow +\infty$ a.s.

7. 当 $x \geq 1$ 时 $b(x) = 1/(2x)$, 故 $F'(x) = C/x$, 于是 $F(d) \rightarrow \infty$. 第 5 问给出

$$P(T_c < \infty) = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{F(d)}{F(d) - F(c)} = 1.$$

对 $c = -n$ 求可数交, 得到

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty \quad \text{a.s.}$$

□

练习 5.30 (Lévy 面积). 设 $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ 是从 0 出发的二维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动. 对每个 $t \geq 0$, 令

$$A_t = \int_0^t X_s dY_s - \int_0^t Y_s dX_s \quad (\text{Lévy 面积}).$$

1. 计算 $\langle A, A \rangle_t$, 并推出 $(A_t)_{t \geq 0}$ 是平方可积的真鞅.
2. 设 $\lambda > 0$. 说明

$$E[e^{i\lambda A_t}] = E[\cos(\lambda A_t)].$$

3. 设 f 是 $\mathbb{R}_+$ 上的二次连续可微函数. 写出半鞅

$$Z_t = \cos(\lambda A_t), \quad W_t = -\frac{f'(t)}{2}(X_t^2 + Y_t^2) + f(t)$$

的典范分解, 并验证 $\langle Z, W \rangle_t = 0$.

4. 证明: 为使过程 $Z_t e^{W_t}$ 成为连续局部鞅, 只需 f 满足

$$f''(t) = f'(t)^2 - \lambda^2.$$

5. 设 $r > 0$. 验证函数

$$f(t) = -\log \cosh(\lambda(r - t))$$

满足第 4 问中的微分方程, 并推出

$$E[e^{i\lambda A_r}] = \frac{1}{\cosh(\lambda r)}.$$

解答 5.30。 令 $R_t = X_t^2 + Y_t^2$ 。

1. 由二维布朗运动各坐标的独立性，

$$\langle A \rangle_t = \int_0^t R_s ds, \quad E[\langle A \rangle_t] = \int_0^t 2s ds = t^2 < \infty.$$

因此 A 是平方可积真鞅。

2. 变换 $(X, Y) \mapsto (X, -Y)$ 保持二维布朗运动的分布，却把 A 变成 $-A$ 。故 A_t 的分布关于 0 对称， $E[e^{i\lambda A_t}] = E[\cos(\lambda A_t)]$ 。

3. Itô 公式给出

$$\begin{aligned} dZ_t &= -\lambda \sin(\lambda A_t) dA_t - \frac{\lambda^2}{2} R_t \cos(\lambda A_t) dt, \\ dW_t &= -f'(t)(X_t dX_t + Y_t dY_t) - \frac{1}{2} f''(t) R_t dt. \end{aligned}$$

两个鞅部分的协变差密度为 $\lambda f'(t) \sin(\lambda A_t)(-X_t Y_t + X_t Y_t) = 0$ 。

4. 又 $d\langle W \rangle_t = f'(t)^2 R_t dt$ 。对 $Z_t e^{W_t}$ 使用乘积公式，其有限变差部分为

$$\frac{1}{2} e^{W_t} R_t Z_t (f'(t)^2 - f''(t) - \lambda^2) dt.$$

所以 $f'' = f'^2 - \lambda^2$ 足以使该过程成为连续局部鞅。

5. 对 $f(t) = -\log \cosh(\lambda(r-t))$ ，直接计算可得 $f'' = f'^2 - \lambda^2$ 。在 $0 \leq t \leq r$ 上， $f \leq 0$ ， $f' \geq 0$ ，故 $Z_t e^{W_t}$ 有界，因而是真鞅。又

$$W_0 = -\log \cosh(\lambda r), \quad W_r = 0,$$

所以

$$E[e^{i\lambda A_r}] = E[\cos(\lambda A_r)] = \frac{1}{\cosh(\lambda r)}.$$

□

练习 5.31 (平方 Bessel 过程)。 设 B 是从 0 出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动， X 是取值于 $\mathbb{R}_+$ 的连续半鞅，并且对每个 $t \geq 0$ ，

$$X_t = x + 2 \int_0^t \sqrt{X_s} dB_s + \alpha t,$$

其中 x, α 是非负实数。

1. 设 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 连续， φ 是 $\mathbb{R}_+$ 上取严格正值的二次连续可微函数，满足

$$\varphi'' = 2f\varphi, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(1) = 0.$$

注意，此时 φ 在 $[0, 1]$ 上必单调不减。对每个 $t \geq 0$ ，令

$$u(t) = \frac{\varphi'(t)}{2\varphi(t)}.$$

验证

$$u'(t) + 2u(t)^2 = f(t),$$

然后证明：对每个 $t \geq 0$ ，

$$u(t)X_t - \int_0^t f(s)X_s ds = u(0)x + \int_0^t u(s) dX_s - 2 \int_0^t u(s)^2 X_s ds.$$

记

$$Y_t = u(t)X_t - \int_0^t f(s)X_s ds.$$

2. 证明: 对每个 $t \geq 0$,

$$\varphi(t)^{-\alpha/2} e^{Y_t} = \mathcal{E}(N)_t,$$

其中 $\mathcal{E}(N)_t = \exp(N_t - \frac{1}{2}\langle N, N \rangle_t)$, 且

$$N_t = u(0)x + 2 \int_0^t u(s) \sqrt{X_s} dB_s.$$

3. 由上一问推出

$$E \left[\exp \left(- \int_0^1 f(s)X_s ds \right) \right] = \varphi(1)^{\alpha/2} \exp \left(\frac{x}{2} \varphi'(0) \right).$$

4. 设 $\lambda > 0$. 证明

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left(-\lambda \int_0^1 X_s ds \right) \right] &= (\cosh(\sqrt{2\lambda}))^{-\alpha/2} \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{x}{2} \sqrt{2\lambda} \tanh(\sqrt{2\lambda}) \right). \end{aligned}$$

5. 设 $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$ 是从 y 出发的实布朗运动。证明: 对每个 $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left(-\lambda \int_0^1 \beta_s^2 ds \right) \right] &= (\cosh(\sqrt{2\lambda}))^{-1/2} \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{y^2}{2} \sqrt{2\lambda} \tanh(\sqrt{2\lambda}) \right). \end{aligned}$$

解答 5.31。

1. 由 $u = \varphi'/(2\varphi)$ 及 $\varphi'' = 2f\varphi$,

$$u' + 2u^2 = f.$$

对 $u(t)X_t$ 作分部积分, 并代入此恒等式, 得到

$$u(t)X_t - \int_0^t f(s)X_s ds = u(0)x + \int_0^t u(s) dX_s - 2 \int_0^t u(s)^2 X_s ds.$$

2. 令 $\tilde{N}_t = 2 \int_0^t u(s) \sqrt{X_s} dB_s$, 则 $\langle \tilde{N} \rangle_t = 4 \int_0^t u(s)^2 X_s ds$, 且

$$Y_t = u(0)x + \tilde{N}_t - \frac{1}{2} \langle \tilde{N} \rangle_t + \alpha \int_0^t u(s) ds.$$

因 $\int_0^t u(s) ds = \frac{1}{2} \log \varphi(t)$,

$$\varphi(t)^{-\alpha/2} e^{Y_t} = \exp \left(u(0)x + \tilde{N}_t - \frac{1}{2} \langle \tilde{N} \rangle_t \right),$$

这正是题中记号所表示的随机指数。

3. 在 $[0, 1]$ 上 $\varphi' \leq 0$, 故 $u \leq 0$. 于是 $Y_t \leq 0$, 而 φ 在该区间上有正的下界; 上一问的局部鞅因而有界, 是真鞅。注意 $u(1) = 0$, 在 $t = 1$ 取期望得

$$E \left[e^{-\int_0^1 f(s)X_s ds} \right] = \varphi(1)^{\alpha/2} \exp \left(\frac{x}{2} \varphi'(0) \right).$$

4. 对 $f \equiv \lambda$, 令 $k = \sqrt{2\lambda}$, 取

$$\varphi(t) = \frac{\cosh(k(1-t))}{\cosh k}.$$

则 $\varphi(1) = 1/\cosh k$ 且 $\varphi'(0) = -k \tanh k$. 代入第 3 问即得

$$E\left[e^{-\lambda \int_0^1 X_s ds}\right] = (\cosh \sqrt{2\lambda})^{-\alpha/2} \exp\left(-\frac{x}{2} \sqrt{2\lambda} \tanh \sqrt{2\lambda}\right).$$

5. 对从 y 出发的布朗运动 β , Itô 公式给出

$$\beta_t^2 = y^2 + 2 \int_0^t |\beta_s| d\tilde{B}_s + t, \quad \tilde{B}_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s) d\beta_s,$$

其中 $\tilde{B}$ 是布朗运动。因此 $X = \beta^2$ 对应 $x = y^2, \alpha = 1$, 代入第 4 问便得到题中公式。□

练习 5.32 (Tanaka 公式与局部时)。 设 B 是从 0 出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。对每个 $\varepsilon > 0$, 定义函数

$$g_\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. 证明

$$g_\varepsilon(B_t) = g_\varepsilon(0) + M_t^\varepsilon + A_t^\varepsilon,$$

其中 M^ε 是平方可积连续鞅; 请把它写成随机积分的形式, 并说明 A^ε 是递增过程。

2. 对每个 $x \in \mathbb{R}$, 令

$$\operatorname{sgn}(x) = 1_{\{x>0\}} - 1_{\{x<0\}}.$$

证明: 对每个 $t \geq 0$,

$$M_t^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{L^2} \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s.$$

推出存在递增过程 L , 使得对每个 $t \geq 0$,

$$|B_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s + L_t.$$

3. 注意到 $A_t^\varepsilon \rightarrow L_t$ 当 $\varepsilon \downarrow 0$. 证明: 对每个 $\delta > 0$ 以及每个 $0 < u < v$, 若 a.s. 对所有 $t \in [u, v]$ 都有 $|B_t| \geq \delta$, 则 $L_v = L_u$. 推出: a.s., 函数 $t \mapsto L_t$ 在开集 $\{t \geq 0 : B_t \neq 0\}$ 的每个连通分支上都是常数。

4. 对每个 $t \geq 0$, 令

$$\beta_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s.$$

证明 $(\beta_t)_{t \geq 0}$ 是从 0 出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。

5. 证明

$$L_t = \sup_{s \leq t} (-\beta_s), \quad \text{a.s.}$$

(为证明 $L_t \leq \sup_{s \leq t} (-\beta_s)$, 可以考察时刻 t 之前 B 的最后一个零点, 并使用第 3 问。) 求 L_t 的分布。

6. 对每个 $\varepsilon > 0$, 如下定义两列停时 $(S_n^\varepsilon)_{n \geq 1}$ 与 $(T_n^\varepsilon)_{n \geq 1}$:

$$S_1^\varepsilon = 0, \quad T_1^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = \varepsilon\},$$

并递归定义

$$\begin{aligned} S_{n+1}^\varepsilon &= \inf\{t \geq T_n^\varepsilon : B_t = 0\}, \\ T_{n+1}^\varepsilon &= \inf\{t \geq S_{n+1}^\varepsilon : |B_t| = \varepsilon\}. \end{aligned}$$

对每个 $t \geq 0$, 令

$$N_t^\varepsilon = \sup\{n \geq 1 : T_n^\varepsilon \leq t\}, \quad \sup \emptyset = 0.$$

证明

$$\varepsilon N_t^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{L^2} L_t.$$

(可以注意到

$$L_t + \int_0^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{[S_n^\varepsilon, T_n^\varepsilon]}(s) \right) \operatorname{sgn}(B_s) dB_s = \varepsilon N_t^\varepsilon + r_t^\varepsilon,$$

其中余项满足 $|r_t^\varepsilon| \leq \varepsilon$.)

7. 证明: 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{N_t^1}{\sqrt{t}} \xrightarrow{\text{law}} |U|,$$

其中 $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 。

本练习的许多结论将在第 8 章重新证明并推广。

解答 5.32。

1. 因

$$g'_\varepsilon(x) = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon + x^2}}, \quad g''_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + x^2)^{3/2}},$$

Itô 公式给出

$$M_t^\varepsilon = \int_0^t \frac{B_s}{\sqrt{\varepsilon + B_s^2}} dB_s, \quad A_t^\varepsilon = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + B_s^2)^{3/2}} ds.$$

前一积分的被积函数绝对值不超过 1, 故 M^ε 平方可积; A^ε 递增。

2. 被积函数逐点收敛到 $\operatorname{sgn}(B_s)$, 且绝对值不超过 1. Itô 等距式与控制收敛定理给出

$$M_t^\varepsilon \longrightarrow \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s \quad \text{于 } L^2.$$

令

$$L_t = |B_t| - \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s.$$

由 $A_t^\varepsilon \rightarrow L_t$ 及连续版本的标准对角线论证, L 可取为连续递增过程。

3. 若在 $[u, v]$ 上 $|B_s| \geq \delta$, 则

$$0 \leq A_v^\varepsilon - A_u^\varepsilon \leq \frac{\varepsilon(v-u)}{2\delta^3} \longrightarrow 0.$$

因此 $L_v = L_u$, 所以 dL 只由零点集承载, 且 L 在其补集的每个连通分支上为常数。

4. 令 $\beta_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s$ 。布朗运动的零点集 a.s. 具有 Lebesgue 测度 0, 故

$$\langle \beta \rangle_t = \int_0^t 1_{\{B_s \neq 0\}} ds = t.$$

Lévy 刻画定理说明 β 是布朗运动。

5. 等式 $|B| = \beta + L$ 、非负性、 $L_0 = 0$ ，以及 dL 只在 $|B| = 0$ 时增加，正是 Skorokhod 反射引理的条件。因此

$$L_t = \sup_{s \leq t} (-\beta_s).$$

由反射原理，

$$L_t \stackrel{d}{=} \sup_{s \leq t} \beta_s \stackrel{d}{=} |\beta_t| \stackrel{d}{=} \sqrt{t} |U|, \quad U \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

6. 采用题中提示，记相应随机积分为 K_t^ε 。其被积函数只在 $|B_s| \leq \varepsilon$ 时可能非零，故

$$E[(K_t^\varepsilon)^2] \leq \int_0^t P(|B_s| \leq \varepsilon) ds \rightarrow 0.$$

又 $|r_t^\varepsilon| \leq \varepsilon$ ，所以

$$\varepsilon N_t^\varepsilon - L_t = K_t^\varepsilon - r_t^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{L^2} 0.$$

7. 由布朗缩放， $N_t^1 \stackrel{d}{=} N_1^{1/\sqrt{t}}$ 。令 $\varepsilon = t^{-1/2}$ ，第 6 问给出

$$\frac{N_t^1}{\sqrt{t}} \stackrel{d}{=} \varepsilon N_1^\varepsilon \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{law}} L_1 \stackrel{d}{=} |U|.$$

□

练习 5.33 (多维布朗运动的研究)。设

$$B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^N)$$

是从 $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ 出发的 N 维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动，并假设 $N \geq 2$ 。

1. 验证 $|B_t|^2$ 是连续半鞅，并且 $|B_t|^2$ 的鞅部分是真鞅。
2. 令

$$\beta_t = \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i,$$

并约定当 $|B_s| = 0$ 时， $B_s^i/|B_s| = 0$ 。说明上述随机积分都有定义，并证明 $(\beta_t)_{t \geq 0}$ 是从 0 出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。

3. 证明

$$|B_t|^2 = |x|^2 + 2 \int_0^t |B_s| d\beta_s + Nt.$$

4. 以下假设 $x \neq 0$ 。设 $\varepsilon \in (0, |x|)$ ，并令

$$T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \leq \varepsilon\}.$$

对每个 $a > 0$ ，当 $N = 2$ 时令 $f(a) = \log a$ ，当 $N \geq 3$ 时令 $f(a) = a^{2-N}$ 。验证

$$f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|)$$

是连续局部鞅。

5. 设 $R > |x|$ ，并令

$$S_R = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq R\}.$$

证明

$$P(T_\varepsilon < S_R) = \frac{f(R) - f(|x|)}{f(R) - f(\varepsilon)}.$$

注意当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时 $P(T_\varepsilon < S_R) \rightarrow 0$, 并据此证明

$$P(B_t \neq 0 \text{ 对所有 } t \geq 0) = 1.$$

6. 证明: a.s. 对每个 $t \geq 0$,

$$|B_t| = |x| + \beta_t + \frac{N-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|B_s|}.$$

7. 假设 $N \geq 3$. 证明当 $t \rightarrow \infty$ 时

$$|B_t| \rightarrow \infty, \quad \text{a.s.}$$

(提示: 注意 $|B_t|^{2-N}$ 是非负上鞅.)

8. 假设 $N = 3$. 利用高斯密度的形式, 验证随机变量族 $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$ 在 L^2 中有界. 证明 $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$ 是连续局部鞅, 但不是真鞅.

第 7 章将用略有不同的方法处理本练习的结果, 尤其见命题 7.16.

解答 5.33.

1. Itô 公式给出

$$|B_t|^2 = |x|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \int_0^t B_s^i dB_s^i + Nt.$$

每个随机积分在有限时间区间上平方可积, 故鞅部分是真鞅.

2. 各被积函数有界, 故积分有定义. 又对每个 $s > 0$, $P(B_s = 0) = 0$, Fubini 定理给出零点集的 Lebesgue 测度 a.s. 为 0. 因此

$$\langle \beta \rangle_t = \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(B_s^i)^2}{|B_s|^2} ds = t.$$

由 Lévy 刻画, β 是布朗运动.

3. 将 $\sum_i B_s^i dB_s^i = |B_s| d\beta_s$ 代入第 1 问, 得到

$$|B_t|^2 = |x|^2 + 2 \int_0^t |B_s| d\beta_s + Nt.$$

4. 函数 $z \mapsto f(|z|)$ 在 $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 上调和. 停止于 T_ε 后其一、二阶导数有界, 故 Itô 公式的漂移项为零.

5. 对 $T = T_\varepsilon \wedge S_R$ 应用可选停时定理:

$$f(|x|) = f(\varepsilon)P(T_\varepsilon < S_R) + f(R)P(S_R < T_\varepsilon).$$

因而

$$P(T_\varepsilon < S_R) = \frac{f(R) - f(|x|)}{f(R) - f(\varepsilon)}.$$

右端在 $\varepsilon \downarrow 0$ 时趋于 0. 对每个整数 $R > |x|$, 在到达半径 R 前击中原点的概率为 0; 再对 R 求可数并, 得到 $B_t \neq 0$ 对所有 $t \geq 0$ a.s. 成立.

6. 对 $z \mapsto |z|$ 使用 Itô 公式 (先停止于 T_ε , 再令 $\varepsilon \downarrow 0$):

$$|B_t| = |x| + \beta_t + \frac{N-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|B_s|}.$$

7. 当 $N \geq 3$ 时, $|B_t|^{2-N}$ 是非负局部鞅, 故为上鞅并 a.s. 收敛. 任一坐标布朗运动 a.s. 无界, 因此沿某列时刻 $|B_t| \rightarrow \infty$, 相应 $|B_t|^{2-N} \rightarrow 0$. 上鞅极限只能为 0, 故 $|B_t| \rightarrow \infty$ a.s.
8. 现在 $N = 3$. 令 $\delta = |x|/2$. 在 $|y| \geq \delta$ 上有 $|y|^{-2} \leq \delta^{-2}$; 在 $|y| < \delta$ 上有 $|y - x| \geq |x|/2$, 且 $\int_{|y| < \delta} |y|^{-2} dy < \infty$. 结合高斯密度可得

$$\sup_{t \geq 0} E[|B_t|^{-2}] < \infty.$$

第 4 问的计算说明 $|B_t|^{-1}$ 是连续局部鞅. 若它是真鞅, 上述 L^2 有界性使其一致可积; 但第 7 问给出 $|B_t|^{-1} \rightarrow 0$ a.s., 这将推出 $E[|B_0|^{-1}] = 0$, 矛盾. 因此它不是真鞅.

□

练习 5.34 (Cameron–Martin 公式的应用). 设 B 是从 0 出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, 并对每个 $t \geq 0$ 令

$$B_t^* = \sup\{|B_s| : s \leq t\}.$$

1. 令

$$U_1 = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = 1\}, \quad V_1 = \inf\{t \geq U_1 : B_t = 0\}.$$

说明

$$P(B_{V_1}^* < 2) = \frac{1}{2},$$

然后证明存在常数 $\alpha > 0$ 与 $\gamma > 0$, 使得

$$P(V_1 \geq \alpha, B_{V_1}^* < 2) = \gamma > 0.$$

2. 证明: 对每个整数 $n \geq 1$,

$$P(B_{n\alpha}^* < 2) \geq \gamma^n.$$

(提示: 构造适当的停时列 $V_1, V_2, \dots$, 使得对每个 $n \geq 2$,

$$P(V_n \geq n\alpha, B_{V_n}^* < 2) \geq \gamma P(V_{n-1} \geq (n-1)\alpha, B_{V_{n-1}}^* < 2).$$

) 推出: 对每个 $\varepsilon > 0$ 与 $t \geq 0$,

$$P(B_t^* \leq \varepsilon) > 0.$$

3. 设 h 是 $\mathbb{R}_+$ 上的二次连续可微函数, $h(0) = 0$, 并取 $K > 0$. 适当使用 Itô 公式, 证明存在常数 A , 使得对每个 $\varepsilon > 0$, 在事件 $\{B_K^* \leq \varepsilon\}$ 上 a.s. 有

$$\left| \int_0^K h'(s) dB_s \right| \leq A\varepsilon.$$

4. 令

$$X_t = B_t - h(t), \quad X_t^* = \sup\{|X_s| : s \leq t\}.$$

由第 3 问推出

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{P(X_K^* \leq \varepsilon)}{P(B_K^* \leq \varepsilon)} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^K h'(s)^2 ds\right).$$

注记与评论

希望进一步学习本章内容的读者，可参阅 Karatzas 与 Shreve [49]、Revuz 与 Yor [70] 以及 Rogers 与 Williams [72] 的优秀著作。Chung 与 Williams [10] 还给出了更简洁的随机积分导论。

关于布朗运动的随机积分由 Itô [36] 于 1944 年引入；他的动机是严格处理支配扩散过程的随机微分方程。Doob [15] 建议把随机积分作为鞅来研究。此后，Kunita 与 Watanabe [50]、Meyer [60] 等多位作者推动了这一理论的发展。本章只讨论关于连续半鞅的随机积分。对带跳半鞅的一般理论感兴趣的读者，可参阅 Dellacherie 与 Meyer [14] 的专著，以及 Protter [63] 或 Jacod 与 Shiryaev [44] 的较新著作。

Itô 公式最初在 [40] 中针对布朗运动随机积分型过程导出；在本章的一般框架中，它出现于 Kunita 与 Watanabe [50] 的工作。定理 5.12 至少在 $d = 1$ 时通常归功于 Lévy，尽管在 Lévy 的著作中很难找到完全相同的表述（不过可参见 [54，第 III 章]）。把任意连续鞅写成时间变换后布朗运动的定理 5.13 由 Dambis [11] 与 Dubins–Schwarz [17] 得到。Burkholder–Davis–Gundy 不等式见 [7]；关于这些著名不等式的历史，还可参阅 Burkholder 的综述 [6]。

定理 5.18 可追溯到 Itô [39]，当时采用的是 Wiener 泛函混沌分解这一不同形式；它是随机积分理论的一项重大成果。该定理及其大量推广在数理金融中有许多应用。Girsanov 定理发表于 1960 年的 [29]，Cameron–Martin 公式则可追溯到 1944 年的 [8]。Stroock 与 Varadhan 的著作 [77] 系统发展了 Girsanov 定理在随机微分方程中的应用。练习 5.30 研究平面布朗运动的所谓 Lévy 面积；Lévy [53,54] 曾用不同定义研究这一对象。练习 5.31 受 Pitman 与 Yor [67] 的工作启发。

第六章 马尔可夫过程的一般理论

本章简要介绍连续时间马尔可夫过程理论的主要思想。马尔可夫过程是随机过程中的一个基本类别，在数学之外的实际问题中也有许多应用。它之所以如此重要，根本原因在于所谓的马尔可夫性质：这一性质使许多对一般随机过程无法处理的计算变得显式可行。马尔可夫过程理论虽然不是本书的中心主题，却会在后续各章，特别是在随机微分方程的讨论中发挥重要作用。事实上，Itô 随机微积分的创立，正是由研究随机微分方程解所给出的马尔可夫过程所推动的；这些过程也称为扩散过程。

本章大体独立于前面各章，不过仍会把布朗运动作为基本例子，并且第 3 章建立的鞅理论将在这里发挥重要作用。先介绍一般定义与存在性问题；然后集中讨论 Feller 过程，并在该框架中引入生成元这一核心概念。我们从上鞅的相应结果推出 Feller 过程样本路径的正则性，再讨论强马尔可夫性质，最后介绍三类重要的马尔可夫过程。

6.1 一般定义与存在性问题

设 $(E, \mathcal{E})$ 是可测空间。从 E 到 E 的马尔可夫转移核是映射

$$Q : E \times \mathcal{E} \longrightarrow [0, 1],$$

并满足：

- (i) 对每个 $x \in E$ ，映射 $\mathcal{E} \ni A \mapsto Q(x, A)$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的概率测度；
- (ii) 对每个 $A \in \mathcal{E}$ ，映射 $E \ni x \mapsto Q(x, A)$ 是 $\mathcal{E}$ -可测的。

下文简称为转移核。

注。 若 E 有限或可数，并赋予由其所有子集组成的 σ -代数，则 Q 完全由“矩阵”

$$(Q(x, \{y\}))_{x, y \in E}$$

确定。

若 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 有界可测（分别地，非负可测），定义

$$Qf(x) = \int_E Q(x, dy)f(y).$$

则 Qf 也是 E 上的有界可测函数（分别地，非负可测函数）。当 f 是示性函数时，可测性正是上面的性质 (ii)；一般情形由标准逼近论证得到。

定义 6.1。 若 E 上的一族转移核 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 满足下列三个条件，就称它为转移半群：

- (i) 对每个 $x \in E$,

$$Q_0(x, dy) = \delta_x(dy);$$

- (ii) 对每个 $s, t \geq 0$ 及 $A \in \mathcal{E}$,

$$Q_{t+s}(x, A) = \int_E Q_t(x, dy)Q_s(y, A)$$

(Chapman–Kolmogorov 恒等式);

(iii) 对每个 $A \in \mathcal{E}$, 函数

$$(t, x) \mapsto Q_t(x, A)$$

关于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$ 可测。

以 $B(E)$ 表示 E 上所有有界实值可测函数组成的向量空间, 并赋予范数

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in E\}.$$

线性映射 $f \mapsto Q_t f$ 是 $B(E)$ 上的压缩算子。从这一角度看, Chapman–Kolmogorov 恒等式等价于

$$Q_{t+s} = Q_t Q_s, \quad s, t \geq 0.$$

因此, $(Q_t)_{t \geq 0}$ 可以看成 $B(E)$ 上的压缩算子半群。

现在考虑滤过概率空间

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty]}, P).$$

定义 6.2. 设 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是 E 上的转移半群。若取值于 E 的 $(\mathcal{F}_t)$ -适应过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 满足: 对每个 $s, t \geq 0$ 及 $f \in B(E)$,

$$E[f(X_{s+t}) | \mathcal{F}_s] = Q_t f(X_s),$$

就称 X 是关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 、转移半群为 (Q_t) 的马尔可夫过程。

注. 若只说 X 是马尔可夫过程而不指定滤过, 默认定义中的性质对其自然滤过

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_r : 0 \leq r \leq t)$$

成立。还要注意: 若 X 关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 是马尔可夫过程, 则它自动也关于 $(\mathcal{F}_t^X)$ 是具有同一半群的马尔可夫过程。

定义 6.2 可以作如下解释。取 $f = 1_A$, 得到

$$P(X_{s+t} \in A | \mathcal{F}_s) = Q_t(X_s, A),$$

特别地,

$$P(X_{s+t} \in A | X_r, 0 \leq r \leq s) = Q_t(X_s, A).$$

因此, 在已知时刻 s 以前“过去” $(X_r, 0 \leq r \leq s)$ 的条件下, X_{s+t} 的条件分布是 $Q_t(X_s, \cdot)$, 只依赖“现在”状态 X_s 。这就是马尔可夫性质。非正式地说, 要预测时刻 s 以后的未来, 过去直到 s 为止所提供的信息并不多于当前状态 X_s 本身。

推论 (定义 6.2 的直接推论). 设 $\nu(dx)$ 是 X_0 的分布。若

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p$$

且 $A_0, A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$, 则

$$\begin{aligned} & P(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_p} \in A_p) \\ &= \int_{A_0} \nu(dx_0) \int_{A_1} Q_{t_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} Q_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \cdots \int_{A_p} Q_{t_p-t_{p-1}}(x_{p-1}, dx_p). \end{aligned}$$

更一般地, 若 $f_0, f_1, \dots, f_p \in B(E)$, 则

$$\begin{aligned} & E[f_0(X_0)f_1(X_{t_1}) \cdots f_p(X_{t_p})] \\ &= \int_E \nu(dx_0) f_0(x_0) \int_E Q_{t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \int_E Q_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) f_2(x_2) \cdots \\ & \quad \times \int_E Q_{t_p-t_{p-1}}(x_{p-1}, dx_p) f_p(x_p). \end{aligned}$$

后一公式可由定义对 p 归纳得到。反过来, 若它对任意 $0 < t_1 < \cdots < t_p$ 和 $f_0, \dots, f_p \in B(E)$ 都成立, 则 $(X_t)_{t \geq 0}$ 关于自然滤过 $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_r : 0 \leq r \leq t)$ 是半群为 (Q_t) 的马尔可夫过程。这里用单调类论证把上述公式推广到定义所需的条件期望性质; 参见附录 A1。

由这些公式可见, 过程 X 的有限维边缘分布完全由半群 (Q_t) 与初始分布 $\mathcal{L}(X_0)$ 确定。

例。 取 $E = \mathbb{R}^d$ 。对每个 $t > 0$ 及 $x \in \mathbb{R}^d$, 令

$$Q_t(x, dy) = p_t(y - x) dy,$$

其中

$$p_t(z) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|z|^2}{2t}\right), \quad z \in \mathbb{R}^d,$$

是协方差矩阵为 tI_d 的 d 维高斯向量密度。容易验证, 这给出 $\mathbb{R}^d$ 上的转移半群, 相应的马尔可夫过程就是 d 维布朗运动。严格地说, 此时只能称为“预布朗运动”, 因为我们尚未说明样本路径的任何性质。当 $d = 1$ 时, 可与推论 2.4 比较。

下面讨论具有给定半群的马尔可夫过程是否存在。为此, 需要随机过程的一般构造定理, 即 Kolmogorov 扩张定理。这里只陈述所需的特殊情形而不证明; 更一般框架中的证明见 [64, 第 III 章], 还可参见 [47, 第 VII 章], 而 $E = \mathbb{R}$ 的特殊情形见 [49, 第 2.2 节]。

令

$$\Omega^* = E^{\mathbb{R}_+}$$

为所有映射 $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ 组成的空间, 并赋予由坐标映射 $\omega \mapsto \omega(t)$ ($t \in \mathbb{R}_+$) 生成的 σ -代数 $\mathcal{F}^*$ 。以 $\mathfrak{F}(\mathbb{R}_+)$ 表示 $\mathbb{R}_+$ 的所有有限子集组成的集合。对每个 $U \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_+)$, 令

$$\pi_U : \Omega^* \longrightarrow E^U$$

把 ω 映到它在 U 上的限制。若 $U, V \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_+)$ 且 $U \subset V$, 同样用

$$\pi_U^V : E^V \longrightarrow E^U$$

表示自然的限制映射。

回顾: 若拓扑空间的拓扑可分, 并且可以由某个完备度量诱导, 就称它为 *Polish* 空间。

定理 6.3 (Kolmogorov 扩张定理)。 设 E 是 Polish 空间, 并赋予其 Borel σ -代数 $\mathcal{E}$ 。对每个 $U \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_+)$, 设 μ_U 是 E^U 上的概率测度。假设这一族测度满足如下相容性: 若 $U \subset V$, 则 μ_U 是 μ_V 在映射 π_U^V 下的像测度。则在 $(\Omega^*, \mathcal{F}^*)$ 上存在唯一概率测度 μ , 使得对每个 $U \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_+)$,

$$(\pi_U)_\# \mu = \mu_U.$$

注。 测度 μ 的唯一性是单调类引理的直接推论; 参见附录 A1。

Kolmogorov 扩张定理可以构造具有指定有限维边缘分布的随机过程。为说明这一点，考虑 Ω^* 上的典范过程

$$X_t(\omega) = \omega(t), \quad t \geq 0.$$

若 μ 是 Ω^* 上的概率测度，且 $U = \{t_1, \dots, t_p\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_+)$ ，其中 $t_1 < \dots < t_p$ ，就借助

$$\omega \mapsto (\omega(t_1), \dots, \omega(t_p))$$

把 E^U 与 E^p 认同。此时 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_p})$ 在 μ 下的分布就是 $(\pi_U)_\# \mu$ 。因此，定理 6.3 也可以表述为：任给满足相容条件的有限维边缘分布族 (μ_U) ，都能在 Ω^* 上构造概率测度 μ ，使典范过程 X 的各有限维边缘分布恰为 μ_U 。这一相容条件显然也是必要的。

推论 6.4. 设 E 满足定理 6.3 的假设， $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是 E 上的转移半群， ν 是 E 上的概率测度。则在 Ω^* 上存在唯一概率测度 P ，使得在 P 下，典范过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是转移半群为 (Q_t) 的马尔可夫过程，并且 X_0 的分布为 ν 。

证明. 取 $U = \{t_1, \dots, t_p\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_+)$ ，其中 $0 \leq t_1 < \dots < t_p$ 。在上述 $E^U \simeq E^p$ 的认同下，定义概率测度 P_U ：对每个可测集 $A \subset E^U$ ，令

$$\begin{aligned} P_U(A) &= \int_E \nu(dx_0) \int_E Q_{t_1}(x_0, dx_1) \int_E Q_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \cdots \\ &\quad \times \int_E Q_{t_p-t_{p-1}}(x_{p-1}, dx_p) 1_A(x_1, \dots, x_p). \end{aligned}$$

利用 Chapman-Kolmogorov 关系可以验证， (P_U) 满足相容条件。由 Kolmogorov 扩张定理，在 Ω^* 上存在唯一概率测度 P ，其有限维边缘分布为 P_U 。根据前面关于有限维分布公式的逆向观察，这说明在 P 下， $(X_t)_{t \geq 0}$ 关于自然滤过是半群为 (Q_t) 的马尔可夫过程，且初始分布为 ν 。□

对每个 $x \in E$ ，把推论 6.4 中取 $\nu = \delta_x$ 时所得的测度记为 P_x 。映射 $x \mapsto P_x$ 是可测的，意思是：对每个 $A \in \mathcal{F}^*$ ，函数 $x \mapsto P_x(A)$ 可测。事实上，当 A 只依赖有限个坐标时， $P_x(A)$ 有显式公式；一般情形再由单调类论证得到。并且，对 E 上任意概率测度 ν ，由

$$P^{(\nu)}(A) = \int_E \nu(dx) P_x(A)$$

定义的测度，正是使典范过程具有半群 (Q_t) 和初始分布 ν 的唯一概率测度。

综上，在对 E 作适当拓扑假设后，推论 6.4 可以构造具有指定半群与初始分布的马尔可夫过程。更精确地说，我们得到一族可测的概率测度 $(P_x)_{x \in E}$ ，使得在 P_x 下过程从 x 出发。不过，这种方法的缺点是没有给出 X 的样本路径正则性；目前甚至不能断言样本路径可测。稍后我们会在对半群加入附加条件后回到这个问题。

本节最后引入重要的预解算子概念。

定义 6.5. 设 $\lambda > 0$ 。转移半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 的 λ -预解算子 (λ -resolvent) 是线性算子

$$R_\lambda : B(E) \longrightarrow B(E),$$

其定义为：对 $f \in B(E)$ 及 $x \in E$ ，

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t f(x) dt.$$

注. 转移半群定义中的性质 (iii) 保证 $t \mapsto Q_t f(x)$ 可测，从而上式中的积分有意义。

预解算子的性质。

- (i) $\|R_\lambda f\| \leq \lambda^{-1} \|f\|$;
(ii) 若 $0 \leq f \leq 1$, 则 $0 \leq \lambda R_\lambda f \leq 1$;
(iii) 若 $\lambda, \mu > 0$, 则

$$R_\lambda - R_\mu + (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu = 0$$

(预解方程)。

证明。性质 (i)、(ii) 直接由定义得到。只证明 (iii), 并可设 $\lambda \neq \mu$ 。由 Tonelli-Fubini 定理和半群性质,

$$\begin{aligned} R_\lambda(R_\mu f)(x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} Q_s \left(\int_0^\infty e^{-\mu t} Q_t f dt \right) (x) ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda s - \mu t} Q_{s+t} f(x) dt ds \\ &= \int_0^\infty e^{-(\lambda - \mu)s} \left(\int_s^\infty e^{-\mu r} Q_r f(x) dr \right) ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\mu r} Q_r f(x) \left(\int_0^r e^{-(\lambda - \mu)s} ds \right) dr \\ &= \frac{R_\mu f(x) - R_\lambda f(x)}{\lambda - \mu}. \end{aligned}$$

移项即得所需预解方程。 □

例。对实布朗运动, 可以验证

$$R_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}} r_\lambda(y - x) f(y) dy,$$

其中

$$\begin{aligned} r_\lambda(y - x) &= \int_0^\infty (2\pi t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{|y - x|^2}{2t} - \lambda t\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \exp\left(-|y - x| \sqrt{2\lambda}\right). \end{aligned}$$

得到最后一个等式的一种简洁方法, 是使用从 0 出发的实布朗运动首次到达 $a > 0$ 的时刻 T_a 的 Laplace 变换

$$E[e^{-\lambda T_a}] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$$

(见公式 (3.7))。对 λ 求导得到

$$E[T_a e^{-\lambda T_a}] = \frac{a}{\sqrt{2\lambda}} e^{-a\sqrt{2\lambda}}.$$

再用推论 2.22 给出的 T_a 密度重写左端, 就恰好得到计算 $r_\lambda(y - x)$ 时出现的积分。

引入预解算子的一个关键动机, 是它可以构造与马尔可夫过程相联系的某些上鞅。

引理 6.6。设 X 是关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 、转移半群为 (Q_t) 的马尔可夫过程。若 $h \in B(E)$ 非负, 且 $\lambda > 0$, 则过程

$$e^{-\lambda t} R_\lambda h(X_t)$$

是 $(\mathcal{F}_t)$ -上鞅。

证明。随机变量 $e^{-\lambda t} R_\lambda h(X_t)$ 有界, 因而可积。对每个 $s \geq 0$,

$$Q_s R_\lambda h = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_{s+t} h dt.$$

于是

$$\begin{aligned} e^{-\lambda s} Q_s R_\lambda h &= \int_0^\infty e^{-\lambda(s+t)} Q_{s+t} h \, dt \\ &= \int_s^\infty e^{-\lambda r} Q_r h \, dr \leq R_\lambda h. \end{aligned}$$

因此, 对每个 $s, t \geq 0$, 由马尔可夫性质,

$$\begin{aligned} E[e^{-\lambda(t+s)} R_\lambda h(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t] &= e^{-\lambda(t+s)} Q_s R_\lambda h(X_t) \\ &\leq e^{-\lambda t} R_\lambda h(X_t), \end{aligned}$$

这就是所需的上鞅性质。 □

6.2 Feller 半群

从本节起, 假设 E 是可度量的局部紧拓扑空间, 并且 E 在无穷远处可数, 即 E 是可数个紧集的并 (也就是说, E 是 σ -紧的)。空间 E 赋予其 Borel σ -代数。在这些假设下, 众所周知 E 是 Polish 空间。此外, 可以找到一列递增的紧子集 $(K_n)_{n \geq 1}$, 使 E 的任意紧子集都包含在某个 K_n 中。

若函数 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 满足: 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset E$, 使得对所有 $x \in E \setminus K$ 都有 $|f(x)| \leq \varepsilon$, 就称 f 在无穷远处趋于零。这等价于要求

$$\sup_{x \in E \setminus K_n} |f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

以 $C_0(E)$ 表示 E 上所有在无穷远处趋于零的连续实函数组成的集合。对上确界范数

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|,$$

空间 $C_0(E)$ 是 Banach 空间。

定义 6.7. 设 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是 E 上的转移半群。若满足:

- (i) 对每个 $f \in C_0(E)$, 都有 $Q_t f \in C_0(E)$;
- (ii) 对每个 $f \in C_0(E)$, 当 $t \rightarrow 0$ 时,

$$\|Q_t f - f\| \rightarrow 0,$$

就称 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 为 Feller 半群。若一个取值于 E 的马尔可夫过程的转移半群是 Feller 半群, 就称该过程为 Feller 过程。

注. 可以证明 (例如见 [70, 命题 III.2.4]), 条件 (ii) 可以由下面这个看似较弱的性质代替:

$$\text{对每个 } f \in C_0(E) \text{ 及 } x \in E, \quad Q_t f(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(x).$$

除本章末尾的一个特殊例子外, 我们不会用到这一事实。

条件 (ii) 推出: 对每个 $s \geq 0$,

$$\lim_{t \downarrow 0} \|Q_{s+t} f - Q_s f\| = \lim_{t \downarrow 0} \|Q_s(Q_t f - f)\| = 0,$$

因为 Q_s 是 $C_0(E)$ 上的压缩算子。这里的收敛关于 $s \in \mathbb{R}_+$ 一致。因此，对每个固定的 $f \in C_0(E)$ ，映射

$$t \mapsto Q_t f$$

从 $\mathbb{R}_+$ 到 $C_0(E)$ 一致连续。

以下固定 E 上的一个 Feller 半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 。由定义的性质 (i) 和控制收敛定理容易验证：对每个 $f \in C_0(E)$ 及 $\lambda > 0$ ，都有 $R_\lambda f \in C_0(E)$ 。

命题 6.8。 固定 $\lambda > 0$ ，并令

$$\mathcal{R} = \{R_\lambda f : f \in C_0(E)\}.$$

则 $\mathcal{R}$ 不依赖于 $\lambda > 0$ 的选择，而且 $\mathcal{R}$ 是 $C_0(E)$ 的稠密线性子空间。

证明。 若 $\lambda \neq \mu$ ，由预解方程，

$$R_\lambda f = R_\mu(f + (\mu - \lambda)R_\lambda f).$$

因此，凡能写成 $R_\lambda f$ （其中 $f \in C_0(E)$ ）的函数，也能写成 $R_\mu g$ （其中 $g \in C_0(E)$ ）的形式。交换 λ, μ 即得第一个结论。

显然， $\mathcal{R}$ 是 $C_0(E)$ 的线性子空间。为证明它稠密，只需注意：对每个 $f \in C_0(E)$ ，

$$\lambda R_\lambda f = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t f dt = \int_0^\infty e^{-t} Q_{t/\lambda} f dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} f \text{ 于 } C_0(E),$$

这里使用了 Feller 半群定义的性质 (ii) 和控制收敛定理。 □

定义 6.9。 令

$$D(L) = \left\{ f \in C_0(E) : \frac{Q_t f - f}{t} \text{ 当 } t \downarrow 0 \text{ 时在 } C_0(E) \text{ 中收敛} \right\},$$

并对每个 $f \in D(L)$ 定义

$$Lf = \lim_{t \downarrow 0} \frac{Q_t f - f}{t}.$$

于是， $D(L)$ 是 $C_0(E)$ 的线性子空间，而

$$L : D(L) \longrightarrow C_0(E)$$

是线性算子，称为半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 的生成元；子空间 $D(L)$ 称为 L 的定义域。

先给出生成元的两个简单性质。

命题 6.10。 若 $f \in D(L)$ 且 $s > 0$ ，则 $Q_s f \in D(L)$ ，并且

$$L(Q_s f) = Q_s(Lf).$$

证明。 写成

$$\frac{Q_t(Q_s f) - Q_s f}{t} = Q_s \left(\frac{Q_t f - f}{t} \right),$$

再利用 Q_s 是 $C_0(E)$ 上的压缩算子，就得到左端在 $t \downarrow 0$ 时收敛到 $Q_s(Lf)$ ，从而得到结论。 □

命题 6.11. 若 $f \in D(L)$, 则对每个 $t \geq 0$,

$$Q_t f = f + \int_0^t Q_s(Lf) ds = f + \int_0^t L(Q_s f) ds.$$

证明. 设 $f \in D(L)$. 对每个 $t \geq 0$,

$$\varepsilon^{-1}(Q_{t+\varepsilon}f - Q_t f) = Q_t(\varepsilon^{-1}(Q_\varepsilon f - f)) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} Q_t(Lf).$$

而且, 前面的收敛关于 $t \in \mathbb{R}_+$ 一致. 这说明, 对每个 $x \in E$, 函数 $t \mapsto Q_t f(x)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上可微, 其导数为连续函数 $t \mapsto Q_t(Lf)(x)$. 由微积分基本定理以及命题 6.10, 得到所需公式. $\square$

下面的命题利用预解算子 R_λ 刻画定义域 $D(L)$.

命题 6.12. 设 $\lambda > 0$.

(i) 对每个 $g \in C_0(E)$, 都有 $R_\lambda g \in D(L)$, 并且

$$(\lambda - L)R_\lambda g = g;$$

(ii) 若 $f \in D(L)$, 则

$$R_\lambda(\lambda - L)f = f.$$

因此 $D(L) = \mathcal{R}$, 并且算子

$$R_\lambda : C_0(E) \longrightarrow \mathcal{R}, \quad \lambda - L : D(L) \longrightarrow C_0(E)$$

互为逆算子。

证明. 先证 (i). 若 $g \in C_0(E)$, 则对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}(Q_\varepsilon R_\lambda g - R_\lambda g) &= \varepsilon^{-1} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_{\varepsilon+t} g dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t g dt \right) \\ &= \varepsilon^{-1}(1 - e^{-\lambda \varepsilon}) \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_{\varepsilon+t} g dt - \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon e^{-\lambda t} Q_t g dt \\ &\xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \lambda R_\lambda g - g \quad \text{于 } C_0(E). \end{aligned}$$

这里用了 Feller 半群定义的性质 (ii), 以及由该性质推出的映射 $t \mapsto Q_t g$ 从 $\mathbb{R}_+$ 到 $C_0(E)$ 的连续性. 因此 $R_\lambda g \in D(L)$, 且 $L(R_\lambda g) = \lambda R_\lambda g - g$.

再证 (ii). 若 $f \in D(L)$, 由命题 6.11,

$$Q_t f = f + \int_0^t Q_s(Lf) ds.$$

于是, 对每个 $x \in E$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t f(x) dt &= \frac{f(x)}{\lambda} + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_0^t Q_s(Lf)(x) ds \right) dt \\ &= \frac{f(x)}{\lambda} + \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda} Q_s(Lf)(x) ds. \end{aligned}$$

因此

$$\lambda R_\lambda f = f + R_\lambda Lf,$$

这正给出 (ii)。

最后, (i) 说明 $\mathcal{R} \subset D(L)$, (ii) 给出反向包含; 而 (i)、(ii) 中的恒等式同时说明 R_λ 与 $\lambda - L$ 互为逆算子。□

推论 6.13. 半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 由其生成元 L 唯一确定; 这里生成元的数据也包括定义域 $D(L)$ 。

证明. 设 $f \in C_0(E)$ 非负。函数 $R_\lambda f$ 是 $D(L)$ 中满足

$$(\lambda - L)R_\lambda f = f$$

的唯一元素。另一方面, 对每个 $\lambda > 0$, 知道

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t f(x) dt$$

就由 Laplace 变换的唯一性确定了连续函数 $t \mapsto Q_t f(x)$ 。最后注意, 算子 Q_t 由它在所有非负函数 $f \in C_0(E)$ 上的取值唯一确定。□

例. 容易验证, 实布朗运动的半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是 Feller 半群。下面计算其生成元 L 。前面已经得到: 对每个 $\lambda > 0$ 及 $f \in C_0(\mathbb{R})$,

$$R_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \exp(-\sqrt{2\lambda}|y-x|) f(y) dy.$$

若 $h \in D(L)$, 则存在 $f \in C_0(\mathbb{R})$ 使 $h = R_\lambda f$ 。取 $\lambda = \frac{1}{2}$, 便有

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|y-x|} f(y) dy.$$

在积分号下求导 (其严格论证留给读者), 得到 h 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 且

$$h'(x) = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(y-x) e^{-|y-x|} f(y) dy,$$

其中

$$\operatorname{sgn}(z) = 1_{\{z>0\}} - 1_{\{z<0\}};$$

$\operatorname{sgn}(0)$ 的取值无关紧要。再证明 h' 在 $\mathbb{R}$ 上可微。若 $x > x_0$, 则

$$\begin{aligned} h'(x) - h'(x_0) &= \int_{x_0}^x (-e^{-|y-x|} - e^{-|y-x_0|}) f(y) dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R} \setminus [x_0, x]} \operatorname{sgn}(y-x_0) (e^{-|y-x|} - e^{-|y-x_0|}) f(y) dy. \end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{h'(x) - h'(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \downarrow x_0} -2f(x_0) + h(x_0).$$

当 $x \uparrow x_0$ 时得到同一极限, 所以 h 二阶可微, 并且

$$h'' = -2f + h.$$

另一方面, 因 $h = R_{1/2}f$, 命题 6.12 给出

$$\left(\frac{1}{2} - L\right)h = f,$$

从而

$$Lh = -f + \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}h''.$$

综上, 已经得到

$$D(L) \subset \{h \in C^2(\mathbb{R}) : h \text{ 与 } h'' \text{ 都属于 } C_0(\mathbb{R})\},$$

并且对 $h \in D(L)$, 有 $Lh = \frac{1}{2}h''$.

事实上, 上面的包含关系是等式。若 g 二阶可微, 并且 $g, g'' \in C_0(\mathbb{R})$, 令

$$f = \frac{1}{2}(g - g'') \in C_0(\mathbb{R}), \quad h = R_{1/2}f \in D(L).$$

由前面的论证, h 二阶可微且 $h'' = -2f + h$, 故

$$(h - g)'' = h - g.$$

函数 $h - g$ 属于 $C_0(\mathbb{R})$, 因而只能恒等于零。于是 $g = h \in D(L)$ 。

注。 一般来说, 要确定生成元的精确定义域非常困难。下面的定理常常使我们能够借助与半群为 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 的马尔可夫过程相联系的鞅, 识别生成元定义域中的元素。

仍考虑一般的 Feller 半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 。假设在某个概率空间上, 对每个 $x \in E$, 都给定一个关于滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 、半群为 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 的马尔可夫过程 $(X_t^x)_{t \geq 0}$, 并且

$$P(X_0^x = x) = 1.$$

为使下面出现的积分有意义, 还假设 $(X_t^x)_{t \geq 0}$ 的样本路径右连续且有左极限 (càdlàg)。下一节将说明, 这一假设并不构成实质限制。

定理 6.14。 设 $h, g \in C_0(E)$ 。下列两个条件等价:

- (i) $h \in D(L)$, 且 $Lh = g$;
- (ii) 对每个 $x \in E$, 过程

$$h(X_t^x) - \int_0^t g(X_s^x) ds$$

关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 是鞅。

证明。 先证 (i) 推出 (ii)。设 $h \in D(L)$ 且 $g = Lh$ 。由命题 6.11, 对每个 $s \geq 0$,

$$Q_s h = h + \int_0^s Q_r g dr.$$

于是, 对 $s, t \geq 0$,

$$E[h(X_{t+s}^x) | \mathcal{F}_t] = Q_s h(X_t^x) = h(X_t^x) + \int_0^s Q_r g(X_t^x) dr.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} E \left[\int_t^{t+s} g(X_r^x) dr \middle| \mathcal{F}_t \right] &= \int_t^{t+s} E[g(X_r^x) | \mathcal{F}_t] dr \\ &= \int_t^{t+s} Q_{r-t} g(X_t^x) dr = \int_0^s Q_r g(X_t^x) dr. \end{aligned}$$

第一行交换条件期望与积分, 可以直接用条件期望的刻画性质说明其合理性。结合最后两个等式, 得到

$$E \left[h(X_{t+s}^x) - \int_0^{t+s} g(X_r^x) dr \middle| \mathcal{F}_t \right] = h(X_t^x) - \int_0^t g(X_r^x) dr,$$

这就是 (ii)。

反过来, 假设 (ii) 成立。则对每个 $t \geq 0$,

$$E \left[h(X_t^x) - \int_0^t g(X_r^x) dr \right] = h(x).$$

另一方面, 由马尔可夫过程的定义, 左端等于

$$Q_t h(x) - \int_0^t Q_r g(x) dr.$$

因此

$$\frac{Q_t h - h}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t Q_r g dr \xrightarrow[t \downarrow 0]{} g \quad \text{于 } C_0(E),$$

这里使用了 Feller 半群定义的性质 (ii)。所以 $h \in D(L)$, 且 $Lh = g$ 。 $\square$

例。 对 d 维布朗运动, Itô 公式说明: 若 $h \in C^2(\mathbb{R}^d)$, 则

$$h(X_t) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta h(X_s) ds$$

是连续局部鞅。若进一步假设 $h, \Delta h \in C_0(\mathbb{R}^d)$ (因而二者有界), 这个连续局部鞅就是鞅。于是由定理 6.14,

$$h \in D(L), \quad Lh = \frac{1}{2} \Delta h.$$

回顾一下: 当 $d = 1$ 时, 我们已经通过直接计算 L 得到了这一结论; 事实上, 那里的结论更精确, 因为此处只能断言

$$D(L) \supset \{h \in C^2(\mathbb{R}^d) : h \text{ 与 } \Delta h \text{ 都属于 } C_0(\mathbb{R}^d)\},$$

而 $d = 1$ 时等号成立。

6.3 样本路径的正则性

本节的目标是说明: 可以把 Feller 过程构造得具有右连续且有左极限的样本路径。设 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是拓扑空间 E 上的 Feller 半群; 与上一节一样, 假设 E 可度量、局部紧且 σ -紧。

定理 6.15。 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是关于滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty]}$ 、半群为 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 的马尔可夫过程。令 $\tilde{\mathcal{F}}_\infty = \mathcal{F}_\infty$, 并对每个 $t \geq 0$ 定义

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t+} \vee \sigma(\mathcal{N}),$$

其中 $\mathcal{N}$ 表示所有 $\mathcal{F}_\infty$ -可测零概率集合组成的类。

则 $(X_t)_{t \geq 0}$ 有一个适应于滤过 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 的 càdlàg 修正 $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ 。此外, $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ 关于滤过 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, \infty]}$ 仍是半群为 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 的马尔可夫过程。

注。 滤过 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 是右连续的, 因为 $(\mathcal{F}_{t+})$ 右连续, 而加入零集类 $\mathcal{N}$ 后仍保持右连续性。

证明。 令

$$E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$$

为 E 的 Alexandroff 单点紧化, 即给 E 添加一个无穷远点 Δ ; 按定义, Δ 的邻域就是 E 中紧集的补集。约定把每个 $f \in C_0(E)$ 延拓为 E_Δ 上的连续函数, 并令 $f(\Delta) = 0$ 。

以 $C_0^+(E)$ 表示 $C_0(E)$ 中所有非负函数组成的集合。可以在 $C_0^+(E)$ 中找到一列函数 $(f_n)_{n \geq 0}$ ，它能够分离 E_Δ 中的点：若 $x, y \in E_\Delta$ 且 $x \neq y$ ，则存在整数 n 使 $f_n(x) \neq f_n(y)$ 。于是

$$\mathcal{H} = \{R_p f_n : p \geq 1, n \geq 0\}$$

也是 $C_0^+(E)$ 的一个可数子集，并且能够分离 E_Δ 中的点。这里使用了

$$\|pR_p f - f\| \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty).$$

若 $h \in \mathcal{H}$ ，引理 6.6 说明，存在整数 $p \geq 1$ ，使

$$e^{-pt} h(X_t)$$

是上鞅。取 $\mathbb{R}_+$ 的一个可数稠密子集 D 。由定理 3.17 (i)，在某个 $\mathcal{F}_\infty$ -可测零概率事件 N_h 之外，对每个 $t \in \mathbb{R}_+$ ，极限

$$\lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in D}} h(X_s), \quad \lim_{\substack{s \uparrow t \\ s \in D}} h(X_s)$$

同时存在；第二个极限只在 $t > 0$ 时考虑。事实上，与定理 3.17 的证明相同，可以把 N_h^c 定义为所有满足下述性质的 $\omega \in \Omega$ 组成的集合：对每个有理数 $a < b$ ，函数

$$D \ni s \mapsto e^{-ps} h(X_s)$$

在任意有限时间区间内对区间 $[a, b]$ 只有有限次上穿。令

$$N = \bigcup_{h \in \mathcal{H}} N_h,$$

则仍有 $N \in \mathcal{N}$ 。

若 $\omega \notin N$ ，则对每个 $t \geq 0$ ，极限

$$\lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in D}} X_s(\omega), \quad \lim_{\substack{s \uparrow t \\ s \in D}} X_s(\omega)$$

都在 E_Δ 中存在；第二个极限仍只在 $t > 0$ 时考虑。事实上，由紧性至少存在聚点；若在 $s \downarrow t$ 时 $X_s(\omega)$ 有两个不同的聚点，就可取一个 $h \in \mathcal{H}$ 分离这两个点，从而与 $h(X_s)$ 的极限存在相矛盾。左极限同理。因此，对每个 $\omega \notin N$ 及 $t \geq 0$ ，可定义

$$\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in D}} X_s(\omega).$$

若 $\omega \in N$ ，则对所有 $t \geq 0$ 令 $\tilde{X}_t(\omega) = x_0$ ，其中 x_0 是 E 中预先固定的一点。于是，对每个 $t \geq 0$ ， $\tilde{X}_t$ 是取值于 E_Δ 的 $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -可测随机变量。此外，由引理 3.16，对每个 $\omega \in \Omega$ ，映射 $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega)$ 作为 E_Δ -值映射是 càdlàg 的。具体地说，该引理说明，对每个 $h \in \mathcal{H}$ ，函数 $t \mapsto h(\tilde{X}_t(\omega))$ 都是 càdlàg 的；由于 $\mathcal{H}$ 能够分离 E_Δ 中的点，这已经足够。

下面证明：对每个固定的 $t \geq 0$ ，

$$P(X_t = \tilde{X}_t) = 1.$$

取 $f, g \in C_0(E)$ ，并取 D 中严格递减到 t 的序列 (t_n) 。则

$$\begin{aligned} E[f(X_t)g(\tilde{X}_t)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[f(X_t)g(X_{t_n})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[f(X_t)Q_{t_n-t}g(X_t)] \\ &= E[f(X_t)g(X_t)], \end{aligned}$$

因为由 Feller 半群的定义,

$$Q_{t_n-t}g \longrightarrow g \quad \text{于 } C_0(E).$$

上述等式说明, 随机向量 $(X_t, \tilde{X}_t)$ 与 (X_t, X_t) 具有相同分布, 所以 $P(X_t = \tilde{X}_t) = 1$ 。

接着验证 $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ 关于滤过 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 是半群为 (Q_t) 的马尔可夫过程。只需证明: 对每个 $s \geq 0$, $t > 0$, $A \in \tilde{\mathcal{F}}_s$ 及 $f \in C_0(E)$,

$$E[1_A f(\tilde{X}_{s+t})] = E[1_A Q_t f(\tilde{X}_s)].$$

由于 $\tilde{X}_s = X_s$ 及 $\tilde{X}_{s+t} = X_{s+t}$ 几乎处处成立, 这等价于

$$E[1_A f(X_{s+t})] = E[1_A Q_t f(X_s)].$$

集合 A 几乎处处等于 $\mathcal{F}_{s+}$ 中的某个集合, 故不妨设 $A \in \mathcal{F}_{s+}$ 。取 D 中递减到 s 的序列 (s_n) , 于是对每个 n , 都有 $A \in \mathcal{F}_{s_n}$ 。当 $s_n \leq s+t$ 时, 由马尔可夫性质,

$$\begin{aligned} E[1_A f(X_{s+t})] &= E[1_A E[f(X_{s+t}) | \mathcal{F}_{s_n}]] \\ &= E[1_A Q_{s+t-s_n} f(X_{s_n})]. \end{aligned}$$

由 Feller 半群的性质,

$$Q_{s+t-s_n} f \longrightarrow Q_t f$$

一致收敛; 而且 $X_{s_n} = \tilde{X}_{s_n}$ 几乎处处成立, 并且

$$X_{s_n} \longrightarrow \tilde{X}_s = X_s \quad \text{几乎处处.}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 便得到所需结论。

还需验证样本路径 $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega)$ 作为 E -值映射而不只是 E_Δ -值映射是 càdlàg 的。虽然已经知道, 对每个固定的 $t \geq 0$, $\tilde{X}_t = X_t$ 几乎处处, 因而以概率 1 属于 E , 但这并不能保证整条样本路径及其左极限都留在 E 中。

取 $g \in C_0^+(E)$, 使得对每个 $x \in E$ 都有 $g(x) > 0$ 。函数

$$h = R_1 g$$

也具有同样的性质。对每个 $t \geq 0$, 令

$$Y_t = e^{-t} h(\tilde{X}_t).$$

由引理 6.6, $(Y_t)_{t \geq 0}$ 关于滤过 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 是非负上鞅。此外, (Y_t) 的样本路径是 càdlàg 的; 这里仍按约定令 $h(\Delta) = 0$ 。

对每个整数 $n \geq 1$, 令

$$T_{(n)} = \inf\{t \geq 0 : Y_t < 1/n\}.$$

于是 $T_{(n)}$ 是滤过 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 的停时。事实上, $T_{(n)}$ 是适应 càdlàg 过程首次到达开集的时刻, 而滤过 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 右连续, 所以可以应用命题 3.9。因而

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow T_{(n)}$$

也是停时。只要证明

$$P(T < \infty) = 0,$$

所需结论便成立。事实上, 对每个 $t \in [0, T_{(n)})$, 显然有 $\tilde{X}_t \in E$ 且 $\tilde{X}_{t-} \in E$; 而在零概率事件 $\{T < \infty\} \in \mathcal{N}$ 上, 可以把所有 $t \geq 0$ 的 $\tilde{X}_t(\omega)$ 重新定义为 x_0 。

为验证 $P(T < \infty) = 0$ ，对上鞅 $Z = Y$ 以及停时

$$U = T_{(n)}, \quad V = T + q$$

应用定理 3.25 及其后的注，其中 $q > 0$ 是有理数。得到

$$E[Y_{T+q}1_{\{T < \infty\}}] \leq E[Y_{T_{(n)}}1_{\{T_{(n)} < \infty\}}] \leq \frac{1}{n}.$$

令 $n \rightarrow \infty$ ，便有

$$E[Y_{T+q}1_{\{T < \infty\}}] = 0,$$

从而在 $\{T < \infty\}$ 上， $Y_{T+q} = 0$ 几乎处处。再利用 Y 的样本路径右连续，得到：在 $\{T < \infty\}$ 上，几乎处处有

$$Y_t = 0, \quad t \in [T, \infty).$$

但另一方面，对每个整数 $k \geq 0$ ，由于 $\tilde{X}_k \in E$ 几乎处处，故

$$Y_k = e^{-k}h(\tilde{X}_k) > 0 \quad \text{几乎处处}.$$

这就推出 $P(T < \infty) = 0$ 。 □

注。 略作修改，前面的证明也适用于下面这种设置。设给定过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 和一族概率测度 $(P_x)_{x \in E}$ ，使得在 P_x 下， $(X_t)_{t \geq 0}$ 是关于滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty]}$ 、半群为 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 的马尔可夫过程，且 $P_x(X_0 = x) = 1$ 。第 6.1 节已经说明：若从半群 (Q_t) 出发，利用 Kolmogorov 扩张定理在空间 $\Omega^* = E^{\mathbb{R}_+}$ 上构造测度 P_x ，那么典范过程 (X_t) 就满足这些性质。

在这一设置下，可定义滤过 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, \infty]}$ ：

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t+} \vee \sigma(\mathcal{N}'),$$

其中 $\mathcal{N}'$ 表示所有对每个 $x \in E$ 都具有零 P_x -概率的 $\mathcal{F}_\infty$ -可测集合组成的类。沿用前面证明中的论证，可以构造一个适应于 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 、具有 càdlàg 样本路径的过程 $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ ，使得对每个 $x \in E$ ，

$$P_x(\tilde{X}_t = X_t) = 1, \quad t \geq 0.$$

并且在 P_x 下， $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ 关于滤过 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, \infty]}$ 是半群为 (Q_t) 的马尔可夫过程，且

$$P_x(\tilde{X}_0 = x) = 1.$$

6.4 强马尔可夫性质

本节前半部分回到第 6.1 节的一般框架： $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是 E 上不一定为 Feller 的转移半群。这里假设 E 是度量空间并赋予其 Borel σ -代数；还假设对每个 $x \in E$ ，都能构造一个半群为 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 的马尔可夫过程 $(X_t^x)_{t \geq 0}$ ，使得 $X_0^x = x$ 几乎处处，并且 X^x 的样本路径是 càdlàg 的。当 (Q_t) 是 Feller 半群时，这种过程的存在性由推论 6.4 和定理 6.15 得到。

以 $D(E)$ 表示所有 càdlàg 路径

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$$

组成的空间，并赋予由坐标映射 $f \mapsto f(t)$ 生成的 σ -代数 $\mathcal{D}$ 。对每个 $x \in E$ ，以 P_x 表示 $D(E)$ 上的概率测度，它是随机路径 $(X_t^x)_{t \geq 0}$ 的分布。注意， P_x 不依赖于 X^x 的具体选取，也不依赖于承载 X^x 的概率空间：这是因为马尔可夫过程的有限维边缘分布由其半群和初始分布唯一确定。

先给出简单马尔可夫性质的一个版本，它只是马尔可夫过程定义的直接推广。下文用 E_x 表示关于 P_x 的期望。

定理 6.16 (简单马尔可夫性质)。设 $(Y_t)_{t \geq 0}$ 是关于滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 、半群为 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 的马尔可夫过程，并假设 Y 的样本路径是 càdlàg 的。设 $s \geq 0$ ，并令

$$\Phi : D(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

为可测函数。则

$$E[\Phi((Y_{s+t})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_s] = E_{Y_s}[\Phi].$$

注。 上式右端是 Y_s 与映射 $y \mapsto E_y[\Phi]$ 的复合。为验证后一映射可测，只需考虑 $\Phi = 1_A$ 、 $A \in \mathcal{D}$ 的情形。当 A 只依赖有限个坐标时，有显式公式；再应用单调类引理即可完成论证。

证明。 与上面的注相同，只需考虑 $\Phi = 1_A$ ，其中

$$A = \{f \in D(E) : f(t_1) \in B_1, \dots, f(t_p) \in B_p\},$$

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_p,$$

而 $B_1, \dots, B_p$ 是 E 的可测子集。此时要验证

$$\begin{aligned} & P(Y_{s+t_1} \in B_1, \dots, Y_{s+t_p} \in B_p | \mathcal{F}_s) \\ &= \int_{B_1} Q_{t_1}(Y_s, dx_1) \int_{B_2} Q_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \cdots \int_{B_p} Q_{t_p-t_{p-1}}(x_{p-1}, dx_p). \end{aligned}$$

更一般地，若 $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in B(E)$ ，则

$$\begin{aligned} & E[\varphi_1(Y_{s+t_1}) \cdots \varphi_p(Y_{s+t_p}) | \mathcal{F}_s] \\ &= \int_E Q_{t_1}(Y_s, dx_1) \varphi_1(x_1) \int_E Q_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \varphi_2(x_2) \cdots \\ & \quad \times \int_E Q_{t_p-t_{p-1}}(x_{p-1}, dx_p) \varphi_p(x_p). \end{aligned}$$

当 $p = 1$ 时，这就是马尔可夫过程的定义。一般情形对 p 归纳。事实上，

$$\begin{aligned} & E[\varphi_1(Y_{s+t_1}) \cdots \varphi_p(Y_{s+t_p}) | \mathcal{F}_s] \\ &= E[\varphi_1(Y_{s+t_1}) \cdots \varphi_{p-1}(Y_{s+t_{p-1}}) E[\varphi_p(Y_{s+t_p}) | \mathcal{F}_{s+t_{p-1}}] | \mathcal{F}_s] \\ &= E[\varphi_1(Y_{s+t_1}) \cdots \varphi_{p-1}(Y_{s+t_{p-1}}) Q_{t_p-t_{p-1}} \varphi_p(Y_{s+t_{p-1}}) | \mathcal{F}_s], \end{aligned}$$

所需结论随即由归纳假设得到。 □

现在讨论强马尔可夫性质。

定理 6.17 (强马尔可夫性质)。保留定理 6.16 的假设，并进一步假设 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是 Feller 半群；特别地， E 可度量、局部紧且 σ -紧。设 T 是滤过 $(\mathcal{F}_{t+})$ 的停时，并令

$$\Phi : D(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

为可测函数。则

$$E[1_{\{T < \infty\}} \Phi((Y_{T+t})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_T] = 1_{\{T < \infty\}} E_{Y_T}[\Phi].$$

校订注。 英文原文在结论前多出“对每个 $x \in E$ ”一句，但本定理中的过程 Y 已在给定概率空间上固定，结论也不含自由变量 x ；该短语在此没有数学含义，故删去。

注。 这里允许 T 是 $(\mathcal{F}_{t+})$ 的停时，这比要求 T 是 $(\mathcal{F}_t)$ 的停时稍微一般一些。

证明。 先注意，上式右端是 $\mathcal{F}_T$ -可测的：在 $\{T < \infty\}$ 上，映射 $\omega \mapsto Y_T(\omega)$ 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的（定理 3.7），而函数 $y \mapsto E_y[\Phi]$ 可测。因此，只需对固定的 $A \in \mathcal{F}_T$ 证明

$$E[1_{A \cap \{T < \infty\}} \Phi((Y_{T+t})_{t \geq 0})] = E[1_{A \cap \{T < \infty\}} E_{Y_T}[\Phi]].$$

与上面一样，可以只考虑

$$\Phi(f) = \varphi_1(f(t_1)) \cdots \varphi_p(f(t_p)),$$

其中

$$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_p, \quad \varphi_1, \dots, \varphi_p \in B(E).$$

事实上，只需证明 $p = 1$ 的情形。若该情形成立，就可归纳写成

$$\begin{aligned} & E[1_{A \cap \{T < \infty\}} \varphi_1(Y_{T+t_1}) \cdots \varphi_p(Y_{T+t_p})] \\ &= E[1_{A \cap \{T < \infty\}} \varphi_1(Y_{T+t_1}) \cdots \varphi_{p-1}(Y_{T+t_{p-1}}) E[\varphi_p(Y_{T+t_p}) \mid \mathcal{F}_{T+t_{p-1}}]] \\ &= E[1_{A \cap \{T < \infty\}} \varphi_1(Y_{T+t_1}) \cdots \varphi_{p-1}(Y_{T+t_{p-1}}) Q_{t_p-t_{p-1}} \varphi_p(Y_{T+t_{p-1}})]. \end{aligned}$$

因此，固定 $t \geq 0$ 和 $\varphi \in B(E)$ ，目标是证明

$$E[1_{A \cap \{T < \infty\}} \varphi(Y_{T+t})] = E[1_{A \cap \{T < \infty\}} Q_t \varphi(Y_T)].$$

可以假设 $\varphi \in C_0(E)$ ，因为有限测度由它在 $C_0(E)$ 中函数上的积分唯一确定。

在事件 $\{T < \infty\}$ 上，以 $[T]_n$ 表示严格大于 T 的、形如 $i2^{-n}$ ($i \in \mathbb{Z}_+$) 的最小实数。于是

$$\begin{aligned} E[1_{A \cap \{T < \infty\}} \varphi(Y_{T+t})] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[1_{A \cap \{T < \infty\}} \varphi(Y_{[T]_n+t})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} E[1_{A \cap \{(i-1)2^{-n} \leq T < i2^{-n}\}} \varphi(Y_{i2^{-n}+t})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} E[1_{A \cap \{(i-1)2^{-n} \leq T < i2^{-n}\}} Q_t \varphi(Y_{i2^{-n}})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[1_{A \cap \{T < \infty\}} Q_t \varphi(Y_{[T]_n})] \\ &= E[1_{A \cap \{T < \infty\}} Q_t \varphi(Y_T)]. \end{aligned}$$

第一个和最后一个等式使用了样本路径的右连续性。第三个等式中，事件

$$A \cap \{(i-1)2^{-n} \leq T < i2^{-n}\}$$

属于 $\mathcal{F}_{i2^{-n}}$ ：这是因为 $A \in \mathcal{F}_T$ ，而 T 是滤过 $(\mathcal{F}_{t+})$ 的停时（使用命题 3.6）。最后也是最关键的一点是，末行还用到 $Q_t \varphi$ 连续；这来自 $\varphi \in C_0(E)$ 以及半群的 Feller 性质。□

注。 在一维布朗运动这一特殊情形，定理 6.17 与第 2 章的定理 2.20 本质等价。定理 2.20 的表述看起来不同，是因为布朗运动具有平稳且独立的增量，而这一性质在这里的一般框架中当然不再成立。即使对布朗运动，定理 6.17 的表述在许多场合也更合适；下一章命题 7.7 (ii) 的证明就是一个有说服力的例子。

6.5 三类重要的 Feller 过程

6.5.1 有限状态空间上的跳过程

本小节假设状态空间 E 有限，并赋予离散拓扑。注意，每个 càdlàg 函数 $f \in D(E)$ 必须具有如下形式：存在 $t_1 \in (0, \infty]$ ，使得对所有 $t \in [0, t_1)$ ，都有 $f(t) = f(0)$ ；若 $t_1 < \infty$ ，则存在 $t_2 \in (t_1, \infty]$ ，使得对所有 $t \in [t_1, t_2)$ ，都有

$$f(t) = f(t_1) \neq f(0),$$

依此类推。

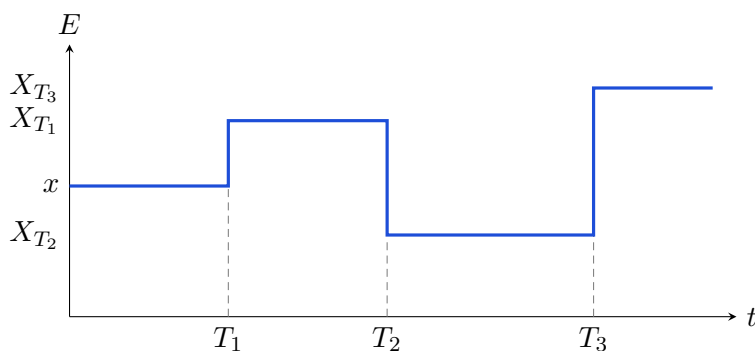


图 6.1: P_x 下跳过程 X 的一条样本路径

考虑 E 上的一个 Feller 半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 。由第 6.3 节末尾的注，可以在一个配备右连续滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty]}$ 的概率空间 Ω 上，构造一族概率测度 $(P_x)_{x \in E}$ 和一个具有 càdlàg 样本路径的过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ ，使得在 P_x 下， X 关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 是半群为 (Q_t) 的马尔可夫过程，且 $P_x(X_0 = x) = 1$ 。与前面一样， E_x 表示关于 P_x 的期望。

由于 X 的样本路径是 càdlàg 的，对每个 $\omega \in \Omega$ ，都存在一个序列

$$T_0(\omega) = 0 < T_1(\omega) \leq T_2(\omega) \leq T_3(\omega) \leq \cdots \leq \infty,$$

使得对每个 $t \in [0, T_1(\omega))$ ，都有 $X_t(\omega) = X_0(\omega)$ ；并且对每个整数 $i \geq 1$ ，若 $T_i(\omega) < \infty$ ，则

$$T_i(\omega) < T_{i+1}(\omega), \quad X_{T_i(\omega)}(\omega) \neq X_{T_{i-1}(\omega)}(\omega),$$

且对每个 $t \in [T_i(\omega), T_{i+1}(\omega))$ ，

$$X_t(\omega) = X_{T_i(\omega)}(\omega).$$

此外，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $T_n(\omega) \uparrow \infty$ 。见图 6.1。

不难验证 $T_0, T_1, T_2, \dots$ 都是停时。例如，

$$\{T_1 < t\} = \bigcup_{q \in [0, t) \cap \mathbb{Q}} \{X_q \neq X_0\} \in \mathcal{F}_t.$$

回顾：若正随机变量 U 满足

$$P(U > r) = e^{-\lambda r}, \quad r \geq 0,$$

则称 U 服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布。下文约定：参数为 0 的指数随机变量几乎处处等于 $+\infty$ 。

引理 6.18. 设 $x \in E$ 。存在实数 $q(x) \geq 0$ ，使得在 P_x 下，随机变量 T_1 服从参数为 $q(x)$ 的指数分布。此外，若 $q(x) > 0$ ，则在 P_x 下， T_1 与 X_{T_1} 相互独立。

证明. 设 $s, t \geq 0$ 。有

$$P_x(T_1 > s + t) = E_x[1_{\{T_1 > s\}} \Phi((X_{s+r})_{r \geq 0})],$$

其中，对 $f \in D(E)$ ，

$$\Phi(f) = 1_{\{f(r)=f(0), \forall r \in [0, t]\}}.$$

由简单马尔可夫性质（定理 6.16），

$$\begin{aligned} P_x(T_1 > s + t) &= E_x[1_{\{T_1 > s\}} E_{X_s}[\Phi((X_r)_{r \geq 0})]] \\ &= E_x[1_{\{T_1 > s\}} P_x(T_1 > t)] \\ &= P_x(T_1 > s) P_x(T_1 > t). \end{aligned}$$

这说明 T_1 在 P_x 下服从某个参数为 $q(x) \geq 0$ 的指数分布。

再设 $q(x) > 0$ ，于是 $T_1 < \infty$ 在 P_x 下几乎处处成立。对每个 $t \geq 0$ 及 $y \in E$ ，

$$P_x(T_1 > t, X_{T_1} = y) = E_x[1_{\{T_1 > t\}} \Psi((X_{t+r})_{r \geq 0})],$$

其中，对 $f \in D(E)$ ，若 f 为常值函数，就令 $\Psi(f) = 0$ ；否则令

$$\Psi(f) = 1_{\{\xi_1(f)=y\}},$$

$\xi_1(f)$ 表示 f 第一次跳跃后的取值。再次使用简单马尔可夫性质，

$$\begin{aligned} P_x(T_1 > t, X_{T_1} = y) &= E_x[1_{\{T_1 > t\}} E_{X_t}[\Psi((X_r)_{r \geq 0})]] \\ &= E_x[1_{\{T_1 > t\}} P_x(X_{T_1} = y)] \\ &= P_x(T_1 > t) P_x(X_{T_1} = y), \end{aligned}$$

这就给出所需的独立性。 □

满足 $q(x) = 0$ 的点 x 是该马尔可夫过程的吸收态，即

$$P_x(X_t = x, \forall t \geq 0) = 1.$$

对每个满足 $q(x) > 0$ 的 $x \in E$ 以及每个 $y \in E$ ，令

$$\Pi(x, y) = P_x(X_{T_1} = y).$$

于是 $\Pi(x, \cdot)$ 是 E 上的概率测度，并且 $\Pi(x, x) = 0$ 。

命题 6.19. 设 L 是 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 的生成元。则

$$D(L) = C_0(E) = B(E).$$

对每个 $\varphi \in B(E)$ 及 $x \in E$ ，有：

- 若 $q(x) = 0$ ，则 $L\varphi(x) = 0$ ；
- 若 $q(x) > 0$ ，则

$$L\varphi(x) = q(x) \sum_{\substack{y \in E \\ y \neq x}} \Pi(x, y) (\varphi(y) - \varphi(x)) = \sum_{y \in E} L(x, y) \varphi(y),$$

其中

$$L(x, y) = \begin{cases} q(x)\Pi(x, y), & y \neq x, \\ -q(x), & y = x. \end{cases}$$

证明。 取 $\varphi \in B(E)$ 和 $x \in E$ 。若 $q(x) = 0$ ，显然 $Q_t\varphi(x) = \varphi(x)$ ，从而

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{Q_t\varphi(x) - \varphi(x)}{t} = 0.$$

以下设 $q(x) > 0$ 。先观察到，当 $t \rightarrow 0$ 时，

$$P_x(T_2 \leq t) = O(t^2). \quad (6.1)$$

事实上，在停时 T_1 处使用强马尔可夫性质，

$$\begin{aligned} P_x(T_2 \leq t) &\leq P_x(T_1 \leq t, T_2 \leq T_1 + t) \\ &= E_x[1_{\{T_1 \leq t\}} P_{X_{T_1}}(T_1 \leq t)]. \end{aligned}$$

并且

$$P_{X_{T_1}}(T_1 \leq t) \leq \sup_{y \in E} P_y(T_1 \leq t) \leq t \sup_{y \in E} q(y).$$

再结合 $P_x(T_1 \leq t) \leq q(x)t$ ，便得到 (6.1)。

由 (6.1)、 T_1 与 X_{T_1} 的独立性以及 $\Pi(x, y)$ 的定义，

$$\begin{aligned} Q_t\varphi(x) &= E_x[\varphi(X_t)] \\ &= E_x[\varphi(X_t)1_{\{t < T_1\}}] + E_x[\varphi(X_{T_1})1_{\{T_1 \leq t\}}] + O(t^2) \\ &= \varphi(x)e^{-q(x)t} + (1 - e^{-q(x)t}) \sum_{\substack{y \in E \\ y \neq x}} \Pi(x, y)\varphi(y) + O(t^2). \end{aligned}$$

因此

$$\frac{Q_t\varphi(x) - \varphi(x)}{t} \xrightarrow{t \downarrow 0} -q(x)\varphi(x) + q(x) \sum_{\substack{y \in E \\ y \neq x}} \Pi(x, y)\varphi(y).$$

由于 E 有限，上述收敛关于 $x \in E$ 一致，故它是在 $C_0(E)$ 中的收敛，这就完成了证明。 $\square$

特别地，取 $\varphi = 1_{\{y\}}$ 。当 $y \neq x$ 时，

$$L(x, y) = \left. \frac{d}{dt} P_x(X_t = y) \right|_{t=0},$$

所以 $L(x, y)$ 可以解释为从 x 跳到 y 的瞬时转移率。

下面的命题完整描述 P_x 下 X 的样本路径。为简化表述，假设没有吸收态；读者不难把结论推广到一般情形。

命题 6.20。 假设对每个 $y \in E$ ，都有 $q(y) > 0$ 。设 $x \in E$ 。则在 P_x 下几乎处处，跳跃时刻

$$T_1 < T_2 < T_3 < \cdots$$

全都有限，而且序列

$$X_0, X_{T_1}, X_{T_2}, \dots$$

在 P_x 下是从 x 出发、转移核为 Π 的离散时间马尔可夫链。此外，在给定 $(X_0, X_{T_1}, X_{T_2}, \dots)$ 的条件下，随机变量

$$T_1 - T_0, T_2 - T_1, \dots$$

相互独立；并且对每个整数 $i \geq 0$ ， $T_{i+1} - T_i$ 的条件分布是参数为 $q(X_{T_i})$ 的指数分布。

证明。 应用强马尔可夫性质可知，所有停时 $T_1, T_2, \dots$ 在 P_x 下几乎处处有限。取 $y, z \in E$ 及 $f_1, f_2 \in B(\mathbb{R}_+)$ 。在停时 T_1 处使用强马尔可夫性质，得到

$$\begin{aligned} & E_x[1_{\{X_{T_1}=y\}} f_1(T_1) 1_{\{X_{T_2}=z\}} f_2(T_2 - T_1)] \\ &= E_x[1_{\{X_{T_1}=y\}} f_1(T_1) E_{X_{T_1}}[1_{\{X_{T_1}=z\}} f_2(T_1)]] \\ &= \Pi(x, y) \Pi(y, z) \left(\int_0^\infty q(x) e^{-q(x)s_1} f_1(s_1) ds_1 \right) \left(\int_0^\infty q(y) e^{-q(y)s_2} f_2(s_2) ds_2 \right). \end{aligned}$$

归纳可得：对每个 $y_1, \dots, y_p \in E$ 及 $f_1, \dots, f_p \in B(\mathbb{R}_+)$ ，

$$\begin{aligned} & E_x \left[\prod_{i=1}^p 1_{\{X_{T_i}=y_i\}} f_1(T_1) f_2(T_2 - T_1) \cdots f_p(T_p - T_{p-1}) \right] \\ &= \Pi(x, y_1) \Pi(y_1, y_2) \cdots \Pi(y_{p-1}, y_p) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^p \left(\int_0^\infty q(y_{i-1}) e^{-q(y_{i-1})s} f_i(s) ds \right), \end{aligned}$$

其中约定 $y_0 = x$ 。命题的各项结论立即得到。 $\square$

校订注。 英文原文在命题 6.20 证明的两个积分公式中漏写了指数分布密度的因子 $q(x)$ 、 $q(y)$ （一般式中为 $q(y_{i-1})$ ）。若缺少这些因子，令 $f_i \equiv 1$ 时右端不能归一化为概率；上文已补入。

跳过程在应用概率的许多模型中都很重要，尤其是在可靠性理论和排队论中。在这些应用里，通常从过程的转移率出发。因此，一个重要问题是：给定一族非负实数 $(q(x))_{x \in E}$ ，并且对每个满足 $q(x) > 0$ 的 x ，给定 E 上的概率测度 $\Pi(x, \cdot)$ ，且 $\Pi(x, x) = 0$ ，是否存在相应的 Feller 半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ ，从而存在相应的马尔可夫过程？答案是肯定的，可以给出两种论证。

- **概率方法。** 利用命题 6.20 的描述（或它在存在吸收态时的推广），从任意 $x \in E$ 出发构造过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ ，再由

$$Q_t \varphi(x) = E_x[\varphi(X_t)]$$

定义半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 。

- **解析方法。** 用命题 6.19 的公式定义生成元 L 。若半群 (Q_t) 存在，由命题 6.11，它必须满足微分方程

$$\frac{d}{dt} Q_t(x, y) = (Q_t L)(x, y).$$

这导出

$$Q_t = \exp(tL),$$

这里右端是矩阵指数。若 $\lambda > 0$ 足够大，则 $\lambda I + L$ 的所有矩阵元非负。由

$$\exp(tL) = e^{-\lambda t} \exp(t(\lambda I + L))$$

立即看出 Q_t 的所有矩阵元非负。以 $\mathbf{1}$ 表示向量 $(1, 1, \dots, 1)$ ，由 $L\mathbf{1} = 0$ 得 $Q_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ，所以 $(Q_t(x, \cdot))_{x \in E}$ 定义了转移核。最后，

$$\exp((s+t)L) = \exp(sL) \exp(tL)$$

给出 Chapman–Kolmogorov 性质。因此 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是 E 上的转移半群，其 Feller 性质也显然成立。

前面的许多结果都能推广到可数状态空间 E 上的 Feller 马尔可夫过程。不过，给定转移率后过程的存在性会遇到一些困难。事实上，若从命题 6.20 的概率描述出发，就必须排除跳跃在有限时间区间内聚集的可能；当转移率族

$$(q(y) : y \in E)$$

无界时，这种现象可能发生。当然，当 E 有限时不会出现这一问题。

6.5.2 Lévy 过程

考虑满足下列三个假设的实值过程 $(Y_t)_{t \geq 0}$ ：

- (i) $Y_0 = 0$ 几乎处处；
- (ii) 对每个 $0 \leq s \leq t$ ，随机变量 $Y_t - Y_s$ 与 $(Y_r : 0 \leq r \leq s)$ 独立，并且与 Y_{t-s} 同分布；
- (iii) 当 $t \downarrow 0$ 时， Y_t 依概率收敛到 0。

两个特殊例子是从 0 出发的实布朗运动，以及实布朗运动到达各水平的时刻所组成的过程 $(T_a)_{a \geq 0}$ (参见练习 2.26)。

注意，这里没有假设 Y 的样本路径是 càdlàg 的，而只作了较弱的正则性假设 (iii)。前面建立的理论将使我们能够找到 Y 的一个 càdlàg 修正。

对每个 $t \geq 0$ ，把 Y_t 的分布记为 $Q_t(0, dy)$ ；对每个 $x \in \mathbb{R}$ ，令 $Q_t(x, dy)$ 为 $Q_t(0, dy)$ 在平移

$$y \mapsto x + y$$

下的像测度。

命题 6.21. $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Feller 半群。此外， $(Y_t)_{t \geq 0}$ 是半群为 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 的马尔可夫过程。

证明. 先证明 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是转移半群。设 $\varphi \in B(\mathbb{R})$ 、 $s, t \geq 0$ 且 $x \in \mathbb{R}$ 。性质 (ii) 说明，随机向量

$$(Y_t, Y_{t+s} - Y_t)$$

的分布是乘积概率测度 $Q_t(0, \cdot) \otimes Q_s(0, \cdot)$ 。因此

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} Q_t(x, dy) \int_{\mathbb{R}} Q_s(y, dz) \varphi(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q_t(0, dy) \int_{\mathbb{R}} Q_s(0, dz) \varphi(x + y + z) \\ &= E[\varphi(x + Y_t + (Y_{t+s} - Y_t))] \\ &= E[\varphi(x + Y_{t+s})] \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q_{t+s}(x, dz) \varphi(z), \end{aligned}$$

这就给出 Chapman–Kolmogorov 关系。还应验证映射

$$(t, x) \mapsto Q_t(x, A)$$

的可测性；这可由下面为验证 Feller 性质而建立的更强连续性得到。

先验证 Feller 半群定义中的性质 (i)。若 $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ ，则由控制收敛定理，映射

$$x \mapsto Q_t \varphi(x) = E[\varphi(x + Y_t)]$$

连续；再次使用控制收敛定理，有

$$E[\varphi(x + Y_t)] \longrightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty).$$

所以 $Q_t\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ 。其次，由性质 (iii)，

$$Q_t\varphi(x) = E[\varphi(x + Y_t)] \xrightarrow[t \downarrow 0]{} \varphi(x).$$

φ 的一致连续性还说明，这一收敛关于 x 一致。于是命题的第一个结论得证。

为证明第二个结论，对每个 $s, t \geq 0$ 及 $\varphi \in B(\mathbb{R})$ ，由性质 (ii) 以及 $Q_t(0, \cdot)$ 的定义，

$$\begin{aligned} E[\varphi(Y_{s+t}) \mid Y_r, 0 \leq r \leq s] &= E[\varphi(Y_s + (Y_{s+t} - Y_s)) \mid Y_r, 0 \leq r \leq s] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(Y_s + y) Q_t(0, dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) Q_t(Y_s, dy). \end{aligned}$$

这正是马尔可夫性质。 □

由定理 6.15, $(Y_t)_{t \geq 0}$ 存在一个具有 càdlàg 样本路径的修正。显然，这一修正仍满足性质 (i)、(ii)。

所谓 Lévy 过程，就是满足上面性质 (i)、(ii) 并具有 càdlàg 样本路径的过程；后一个条件蕴含性质 (iii)。关于 Lévy 过程理论的完整论述，可参见 [3]。

6.5.3 连续状态分枝过程

取值于 $E = \mathbb{R}_+$ 的马尔可夫过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ ，若其半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 满足：对每个 $x, y \in \mathbb{R}_+$ 及 $t \geq 0$ ，

$$Q_t(x, \cdot) * Q_t(y, \cdot) = Q_t(x + y, \cdot),$$

就称为连续状态分枝过程。这里 $\mu * \nu$ 表示 $\mathbb{R}_+$ 上概率测度 μ, ν 的卷积。注意，这一性质蕴含

$$Q_t(0, \cdot) = \delta_0, \quad t \geq 0.$$

练习。 设 X 与 X' 是两个相互独立、具有同一半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 的连续状态分枝过程。验证 $(X_t + X'_t)_{t \geq 0}$ 也是半群为 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 的马尔可夫过程。这就是所谓的分枝性质；可与离散时间 Galton–Watson 过程比较。

固定一个连续状态分枝过程的半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ ，并假设：

(i) 对每个 $x > 0$ 及 $t > 0$,

$$Q_t(x, \{0\}) < 1;$$

(ii) 当 $t \rightarrow 0$ 时，

$$Q_t(x, \cdot) \Longrightarrow \delta_x$$

(概率测度的弱收敛)。

命题 6.22。 在上述假设下，半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是 Feller 半群。此外，对每个 $\lambda > 0$ 及 $x \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} Q_t(x, dy) e^{-\lambda y} = e^{-x\psi_t(\lambda)},$$

其中函数

$$\psi_t : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$$

对每个 $s, t \geq 0$ 满足

$$\psi_t \circ \psi_s = \psi_{t+s}.$$

证明。先证明第二个结论。若 $x, y > 0$, 等式

$$Q_t(x, \cdot) * Q_t(y, \cdot) = Q_t(x + y, \cdot)$$

蕴含

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} Q_t(x, dz) e^{-\lambda z} \right) \left(\int_{\mathbb{R}_+} Q_t(y, dz) e^{-\lambda z} \right) = \int_{\mathbb{R}_+} Q_t(x + y, dz) e^{-\lambda z}.$$

所以函数

$$x \longmapsto -\log \left(\int_{\mathbb{R}_+} Q_t(x, dz) e^{-\lambda z} \right)$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上非减且可加, 因而必为

$$x\psi_t(\lambda)$$

的形式, 其中 $\psi_t(\lambda) > 0$; 假设 (i) 排除了 $\psi_t(\lambda) = 0$ 的情形。为得到 $\psi_t \circ \psi_s = \psi_{t+s}$, 写成

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} Q_{t+s}(x, dz) e^{-\lambda z} &= \int_{\mathbb{R}_+} Q_t(x, dy) \int_{\mathbb{R}_+} Q_s(y, dz) e^{-\lambda z} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} Q_t(x, dy) e^{-y\psi_s(\lambda)} \\ &= e^{-x\psi_t(\psi_s(\lambda))}. \end{aligned}$$

还需证明该半群是 Feller 半群。对每个 $\lambda > 0$, 令

$$\varphi_\lambda(x) = e^{-\lambda x}.$$

则

$$Q_t \varphi_\lambda = \varphi_{\psi_t(\lambda)} \in C_0(\mathbb{R}_+).$$

由 Stone–Weierstrass 定理, 函数族

$$\{\varphi_\lambda : \lambda > 0\}$$

张成的向量空间在 $C_0(\mathbb{R}_+)$ 中稠密。因此容易推出: 对每个 $\varphi \in C_0(\mathbb{R}_+)$, 都有

$$Q_t \varphi \in C_0(\mathbb{R}_+).$$

最后, 由假设 (ii), 对每个 $x \geq 0$,

$$Q_t \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}_+} Q_t(x, dy) \varphi(y) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \varphi(x).$$

利用定义 6.7 后的注, 这已经足以推出

$$\|Q_t \varphi - \varphi\| \longrightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0),$$

从而完成证明。 □

例。 对每个 $t > 0$ 及 $x \geq 0$, 定义 $Q_t(x, dy)$ 为随机变量

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_N$$

的分布, 其中 $e_1, e_2, \dots$ 相互独立, 且都服从参数为 $1/t$ 的指数分布; N 服从参数为 x/t 的 Poisson 分布, 并与序列 (e_i) 独立。简单计算得到

$$\int_{\mathbb{R}_+} Q_t(x, dy) e^{-\lambda y} = e^{-x\psi_t(\lambda)},$$

其中

$$\psi_t(\lambda) = \frac{\lambda}{1 + \lambda t}.$$

注意到

$$\psi_t \circ \psi_s = \psi_{t+s},$$

便知 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 满足 Chapman–Kolmogorov 恒等式, 从而是某个连续状态分枝过程的转移半群。此外, (Q_t) 满足前面的假设 (i)、(ii), 因而是 Feller 半群, 并且可以构造一个具有 càdlàg 样本路径的相应马尔可夫过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 。事实上, 可以证明 (X_t) 的样本路径连续; 这个过程称为 Feller 分枝扩散, 参见第 8.4.3 节。

练习

练习 6.23 (反射布朗运动)。 考虑配备滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty]}$ 的概率空间。设 $a \geq 0$, 并令 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ 是满足 $B_0 = a$ 的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。对每个 $t > 0$ 及 $z \in \mathbb{R}$, 令

$$p_t(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{2t}\right).$$

1. 对每个 $t \geq 0$, 令 $X_t = |B_t|$ 。验证: 对每个 $s, t \geq 0$ 以及每个有界可测函数 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$E[f(X_{s+t}) | \mathcal{F}_s] = Q_t f(X_s),$$

其中 $Q_0 f = f$, 而对每个 $t > 0$ 及 $x \geq 0$,

$$Q_t f(x) = \int_0^\infty (p_t(y-x) + p_t(y+x)) f(y) dy.$$

2. 推出 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是转移半群, 再推出 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 、取值于 $E = \mathbb{R}_+$ 、半群为 (Q_t) 的马尔可夫过程。
3. 验证 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是 Feller 半群。以 L 表示其生成元。
4. 设 f 是 $\mathbb{R}_+$ 上的二阶连续可微函数, 并且 $f, f'' \in C_0(\mathbb{R}_+)$ 。证明: 若 $f'(0) = 0$, 则 $f \in D(L)$, 且

$$Lf = \frac{1}{2} f''.$$

(提示: 可以注意到, 由 $g(y) = f(|y|)$ 定义的函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 此时在 $\mathbb{R}$ 上二阶连续可微。) 反过来证明: 若 $f'(0) \neq 0$, 则 $f \notin D(L)$ 。

解答 6.23。

1. 对 $g(z) = f(|z|)$, 布朗运动的马尔可夫性给出

$$E[f(X_{s+t}) | \mathcal{F}_s] = E[g(B_{s+t}) | \mathcal{F}_s] = \int_{\mathbb{R}} p_t(y - B_s) f(|y|) dy.$$

分别在正、负半轴积分并在后一项作代换 $y \mapsto -y$, 便得到 $Q_t f(|B_s|) = Q_t f(X_s)$ 。

2. 对任意有界可测 f , 有 $Q_t f(|z|) = P_t g(z)$, 其中 P_t 是实布朗运动半群。因此由 $P_{t+s} = P_t P_s$ 得 $Q_{t+s} = Q_t Q_s$; 第 1 问正是 X 关于该半群的马尔可夫性质。

3. 若 $f \in C_0(\mathbb{R}_+)$, 则 $g(z) = f(|z|) \in C_0(\mathbb{R})$, 且

$$\|Q_t f - f\|_{\infty} \leq \|P_t g - g\|_{\infty} \rightarrow 0.$$

同时 $Q_t f \in C_0(\mathbb{R}_+)$, 故 (Q_t) 是 Feller 半群。

4. 若 $f'(0) = 0$, 则偶延拓 $g(z) = f(|z|)$ 属于 $C^2(\mathbb{R})$, 并有 $g''(z) = f''(|z|)$ 。因此

$$\frac{Q_t f - f}{t} = \frac{P_t g - g}{t} \Big|_{\mathbb{R}_+} \xrightarrow[t \downarrow 0]{\|\cdot\|_{\infty}} \frac{1}{2} f'',$$

即 $f \in D(L)$ 且 $Lf = f''/2$ 。

反之, 若 $f'(0) \neq 0$, 令 $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 。Taylor 展开给出

$$\frac{Q_t f(0) - f(0)}{t} = \frac{E[f(\sqrt{t}|N|)] - f(0)}{t} = \frac{f'(0)E|N|}{\sqrt{t}} + O(1),$$

该式无有限极限, 故 $f \notin D(L)$ 。

□

练习 6.24。 设 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是可测空间 E 上的转移半群, π 是从 E 到另一可测空间 F 的满射可测映射。假设: 对 F 的任意可测子集 A , 任取满足 $\pi(x) = \pi(y)$ 的 $x, y \in E$, 对每个 $t > 0$ 都有

$$Q_t(x, \pi^{-1}(A)) = Q_t(y, \pi^{-1}(A)).$$

于是, 对 $z \in F$ 、 F 的可测子集 A 及 $t > 0$, 定义

$$Q'_t(z, A) = Q_t(x, \pi^{-1}(A)),$$

其中 x 是任意满足 $\pi(x) = z$ 的 E 中点; 并令

$$Q'_0(z, A) = 1_A(z).$$

再假设: 对每个固定的 A , 映射

$$(t, z) \mapsto Q'_t(z, A)$$

在 $\mathbb{R}_+ \times F$ 上可测。

1. 验证 $(Q'_t)_{t \geq 0}$ 构成 F 上的转移半群。

2. 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是关于滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 、取值于 E 、转移半群为 (Q_t) 的马尔可夫过程。对每个 $t \geq 0$, 令 $Y_t = \pi(X_t)$ 。验证 $(Y_t)_{t \geq 0}$ 是关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 、取值于 F 、转移半群为 (Q'_t) 的马尔可夫过程。

3. 设 $(B_t)_{t \geq 0}$ 是 d 维布朗运动, 并令 $R_t = |B_t|$ 。验证 $(R_t)_{t \geq 0}$ 是马尔可夫过程, 并给出其转移半群的公式。($d = 1$ 的情形已在练习 6.23 中用另一种方法处理。)

解答 6.24。

1. 若 f 是 F 上的有界可测函数, 令 $g = f \circ \pi$ 。由定义,

$$(Q'_t f)(\pi(x)) = Q_t g(x).$$

因而

$$(Q'_{t+s} f)(\pi(x)) = Q_{t+s} g(x) = Q_t(Q_s g)(x) = (Q'_t Q'_s f)(\pi(x)).$$

加上题设的可测性及 $Q'_t 1 = 1$, 可知 (Q'_t) 是转移半群。

2. 由上一恒等式及 X 的马尔可夫性,

$$E[f(Y_{s+t}) | \mathcal{F}_s] = E[g(X_{s+t}) | \mathcal{F}_s] = Q_t g(X_s) = Q'_t f(Y_s).$$

3. 取 $\pi(z) = |z|$ 。若 $|x| = |y|$, 存在正交矩阵 O 使 $x = Oy$; 高斯核及 Lebesgue 测度在正交变换下不变, 故题设的纤维不变性成立。因此 $R_t = |B_t|$ 是马尔可夫过程。把代表点取为 $(r, 0, \dots, 0)$, 其半群为

$$Q'_t f(r) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp \left[-\frac{(z_1 - r)^2 + \sum_{k=2}^d z_k^2}{2t} \right] f(|z|) dz.$$

□

以下各题统一采用如下记号。设 (E, d) 是局部紧且 σ -紧的度量空间, $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是 E 上的 Feller 半群。考虑一个具有 càdlàg 样本路径的 E -值过程 $(X_t)_{t \geq 0}$, 以及一族概率测度 $(P_x)_{x \in E}$, 使得在 P_x 下, (X_t) 关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 是半群为 (Q_t) 的马尔可夫过程, 并且 $P_x(X_0 = x) = 1$ 。以 L 表示 (Q_t) 的生成元, 以 $D(L)$ 表示 L 的定义域; 对每个 $\lambda > 0$, 以 R_λ 表示 λ -预解算子。

练习 6.25 (尺度函数)。 本题假设 $E = \mathbb{R}_+$, 且 X 的样本路径连续。对每个 $x \in \mathbb{R}_+$, 令

$$T_x = \inf\{t \geq 0 : X_t = x\},$$

并令

$$\varphi(x) = P_x(T_0 < \infty).$$

1. 证明: 若 $0 \leq x \leq y$, 则

$$\varphi(y) = \varphi(x) P_y(T_x < \infty).$$

2. 假设对每个 $x > 0$, 都有

$$\varphi(x) < 1, \quad P_x \left(\sup_{t \geq 0} X_t = +\infty \right) = 1.$$

证明: 若 $0 < x \leq y$, 则

$$P_x(T_0 < T_y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{1 - \varphi(y)}.$$

解答 6.25。

1. 从 $y \geq x$ 出发, 连续路径在到达 0 之前必先到达 x 。强马尔可夫性质于是给出

$$\varphi(y) = E_y[1_{\{T_x < \infty\}} P_{X_{T_x}}(T_0 < \infty)] = P_y(T_x < \infty) \varphi(x).$$

2. 题设的无界性和路径连续性给出 $P_x(T_y < \infty) = 1$ 。按先到达 0 或 y 分解, 再在 T_y 使用强马尔可夫性质:

$$\varphi(x) = P_x(T_0 < T_y) + P_x(T_y < T_0)\varphi(y).$$

又 $P_x(T_0 < T_y) + P_x(T_y < T_0) = 1$, 故

$$P_x(T_0 < T_y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{1 - \varphi(y)}.$$

□

练习 6.26 (Feynman–Kac 公式)。设 v 是 $C_0(E)$ 中的非负函数。对每个 $x \in E$, $t \geq 0$ 及 $\varphi \in B(E)$, 定义

$$Q_t^v \varphi(x) = E_x \left[\varphi(X_t) \exp \left(- \int_0^t v(X_s) ds \right) \right].$$

1. 证明: 对每个 $\varphi \in B(E)$ 及 $s, t \geq 0$,

$$Q_{t+s}^v \varphi = Q_t^v (Q_s^v \varphi).$$

2. 先注意到

$$1 - \exp \left(- \int_0^t v(X_s) ds \right) = \int_0^t v(X_s) \exp \left(- \int_s^t v(X_r) dr \right) ds,$$

再证明: 对每个 $\varphi \in B(E)$,

$$Q_t \varphi - Q_t^v \varphi = \int_0^t Q_s (v Q_{t-s}^v \varphi) ds.$$

3. 假设 $\varphi \in D(L)$ 。证明

$$\left. \frac{d}{dt} Q_t^v \varphi \right|_{t=0} = L\varphi - v\varphi.$$

解答 6.26。

1. 将 $\int_0^{t+s} v(X_r) dr$ 在 t 处分开, 并在时刻 t 使用马尔可夫性质, 得到

$$Q_{t+s}^v \varphi(x) = E_x \left[e^{-\int_0^t v(X_r) dr} Q_s^v \varphi(X_t) \right] = Q_t^v (Q_s^v \varphi)(x).$$

2. 将题给恒等式乘以 $\varphi(X_t)$, 取期望并用 Fubini 定理:

$$\begin{aligned} Q_t \varphi(x) - Q_t^v \varphi(x) &= \int_0^t E_x \left[v(X_s) \varphi(X_t) e^{-\int_s^t v(X_r) dr} \right] ds \\ &= \int_0^t Q_s (v Q_{t-s}^v \varphi)(x) ds. \end{aligned}$$

3. 由上一问,

$$\frac{Q_t^v \varphi - \varphi}{t} = \frac{Q_t \varphi - \varphi}{t} - \frac{1}{t} \int_0^t Q_s (v Q_{t-s}^v \varphi) ds.$$

当 $\varphi \in D(L)$ 时, 第一项在 $C_0(E)$ 中趋于 $L\varphi$; Feller 强连续性、 $v \in C_0(E)$ 及 $Q_u^v \varphi \rightarrow \varphi$

说明第二项趋于 $v\varphi$ 。所以

$$\left. \frac{d}{dt} Q_t^v \varphi \right|_{t=0} = L\varphi - v\varphi.$$

□

练习 6.27 (拟左连续性)。 本题始终固定起点 $x \in E$ 。对每个 $t > 0$ ，以 $X_{t-}(\omega)$ 表示样本路径 $s \mapsto X_s(\omega)$ 在 t 处的左极限。

设 $(T_n)_{n \geq 1}$ 是严格递增的停时序列，并令

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow T_n.$$

假设存在常数 $C < \infty$ 使 $T \leq C$ 。本题目标是验证

$$X_{T-} = X_T, \quad P_x\text{-几乎处处}.$$

1. 设 $f \in D(L)$ 且 $h = Lf$ 。证明：对每个 $n \geq 1$,

$$E_x[f(X_T) \mid \mathcal{F}_{T_n}] = f(X_{T_n}) + E_x \left[\int_{T_n}^T h(X_s) ds \mid \mathcal{F}_{T_n} \right].$$

2. 回顾离散时间鞅理论中的结论：

$$E_x[f(X_T) \mid \mathcal{F}_{T_n}] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{几乎处处且于 } L^1} E_x[f(X_T) \mid \tilde{\mathcal{F}}_T],$$

其中

$$\tilde{\mathcal{F}}_T = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{T_n}.$$

由第 1 问推出

$$E_x[f(X_T) \mid \tilde{\mathcal{F}}_T] = f(X_{T-}).$$

3. 证明：若只假设 $f \in C_0(E)$ ，第 2 问的结论仍然成立。继而推出：对任意 $f, g \in C_0(E)$,

$$E_x[f(X_T)g(X_{T-})] = E_x[f(X_{T-})g(X_{T-})].$$

最后证明 $X_{T-} = X_T$ 在 P_x 下几乎处处成立。

解答 6.27。

1. 对 $f \in D(L)$ 及 $h = Lf$ ，过程

$$M_t = f(X_t) - \int_0^t h(X_s) ds$$

是鞅。因 $T_n \leq T \leq C$ ，可选停时定理给出

$$E_x[f(X_T) \mid \mathcal{F}_{T_n}] = f(X_{T_n}) + E_x \left[\int_{T_n}^T h(X_s) ds \mid \mathcal{F}_{T_n} \right].$$

2. càdlàg 性与 $T_n \uparrow T$ 且 $T_n < T$ 给出 $X_{T_n} \rightarrow X_{T-}$ 。又

$$E_x \left[\int_{T_n}^T |h(X_s)| ds \right] \leq \|h\|_{\infty} E_x[T - T_n] \rightarrow 0.$$

因而第 1 问右端在 L^1 中趋于 $f(X_{T-})$ 。与题给的离散鞅收敛比较, 得到

$$E_x[f(X_T) | \tilde{\mathcal{F}}_T] = f(X_{T-}).$$

3. $D(L)$ 在 $C_0(E)$ 中稠密。对 $f \in C_0(E)$ 取 $f_k \in D(L)$ 使 $\|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0$, 条件期望的收缩性便将上一等式推广到所有 $f \in C_0(E)$ 。又 $g(X_{T-})$ 对 $\tilde{\mathcal{F}}_T$ 可测, 故

$$E_x[f(X_T)g(X_{T-})] = E_x[f(X_{T-})g(X_{T-})].$$

E 是可分的局部紧度量空间, $C_0(E)$ 含有可数个分离点的函数; 由单调类定理, 上式确定了 (X_T, X_{T-}) 的分布集中在对角线上。因此

$$X_T = X_{T-} \quad P_x\text{-a.s.}$$

□

练习 6.28 (杀死操作)。本题假设 X 的样本路径连续。设 A 是 E 的紧子集, 并令

$$T_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}.$$

1. 对每个 $t \geq 0$ 和 E 上的有界可测函数 φ , 令

$$Q_t^* \varphi(x) = E_x[\varphi(X_t) 1_{\{t < T_A\}}], \quad x \in E.$$

验证: 对每个 $s, t > 0$,

$$Q_{t+s}^* \varphi = Q_t^*(Q_s^* \varphi).$$

2. 令

$$\bar{E} = (E \setminus A) \cup \{\Delta\},$$

其中 Δ 是作为孤立点添加到 $E \setminus A$ 的一点。对 $\bar{E}$ 上的任意有界可测函数 φ 及 $t \geq 0$, 定义: 若 $x \in E \setminus A$, 则

$$\bar{Q}_t \varphi(x) = E_x[\varphi(X_t) 1_{\{t < T_A\}}] + P_x(T_A \leq t) \varphi(\Delta),$$

并令

$$\bar{Q}_t \varphi(\Delta) = \varphi(\Delta).$$

验证 $(\bar{Q}_t)_{t \geq 0}$ 是 $\bar{E}$ 上的转移半群。(映射 $(t, x) \mapsto \bar{Q}_t \varphi(x)$ 的可测性证明从略。)

3. 证明: 在概率测度 P_x 下, 由

$$\bar{X}_t = \begin{cases} X_t, & t < T_A, \\ \Delta, & t \geq T_A \end{cases}$$

定义的过程 $\bar{X}$, 关于其自然滤过是半群为 $(\bar{Q}_t)_{t \geq 0}$ 的马尔可夫过程。

4. 承认半群 $(\bar{Q}_t)_{t \geq 0}$ 是 Feller 半群, 并以 $\bar{L}$ 表示其生成元。设 $f \in D(L)$, 且 f 与 Lf 都在某个包含 A 的开集上为零。以 $\bar{f}$ 表示 f 在 $E \setminus A$ 上的限制, 并令

$$\bar{f}(\Delta) = 0,$$

从而把 $\bar{f}$ 看成 $\bar{E}$ 上的函数。证明

$$\bar{f} \in D(\bar{L}), \quad \bar{L} \bar{f}(x) = Lf(x), \quad x \in E \setminus A.$$

解答 6.28。

1. 在 $\{t < T_A\}$ 上于时刻 t 使用马尔可夫性质:

$$Q_t^* Q_s^* \varphi(x) = E_x[1_{\{t < T_A\}} Q_s^* \varphi(X_t)] = E_x[\varphi(X_{t+s}) 1_{\{t+s < T_A\}}] = Q_{t+s}^* \varphi(x).$$

2. Δ 为吸收态。若 $x \neq \Delta$, 把在时刻 t 前已经被杀死与尚未被杀死两种情形分开, 并在后一情形使用第 1 问, 即得 $\bar{Q}_t \bar{Q}_s = \bar{Q}_{t+s}$; 显然 $\bar{Q}_t 1 = 1$ 且 $\bar{Q}_0 = I$, 所以它是转移半群。
 3. 对有界可测 φ , 在事件 $\{s < T_A\}$ 上使用 X 的马尔可夫性质, 在 $\{s \geq T_A\}$ 上利用 Δ 的吸收性, 得到

$$E_x[\varphi(\bar{X}_{s+t}) | \mathcal{F}_s] = \bar{Q}_t \varphi(\bar{X}_s).$$

因而 $\bar{X}$ 是所述马尔可夫过程。

4. 定义

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} Lf(x), & x \in E \setminus A, \\ 0, & x = \Delta. \end{cases}$$

由于 f, Lf 在 A 的某个邻域内为零, $\bar{f}, \bar{h} \in C_0(\bar{E})$ 。原过程的鞅 $f(X_t) - \int_0^t Lf(X_s) ds$ 停止于 T_A 后仍为鞅, 并且

$$\bar{f}(\bar{X}_t) - \int_0^t \bar{h}(\bar{X}_s) ds = f(X_{t \wedge T_A}) - \int_0^{t \wedge T_A} Lf(X_s) ds.$$

由生成元的鞅刻画, $\bar{f} \in D(\bar{L})$ 且

$$\bar{L} \bar{f} = \bar{h}, \quad \bar{L} \bar{f}(x) = Lf(x) \quad (x \in E \setminus A).$$

□

练习 6.29 (Dynkin 公式)。

1. 设 $g \in C_0(E)$ 、 $x \in E$, 并设 T 是停时。说明下式成立:

$$\begin{aligned} E_x \left[1_{\{T < \infty\}} e^{-\lambda T} \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(X_{T+t}) dt \right] \\ = E_x [1_{\{T < \infty\}} e^{-\lambda T} R_\lambda g(X_T)]. \end{aligned}$$

2. 推出

$$R_\lambda g(x) = E_x \left[\int_0^T e^{-\lambda t} g(X_t) dt \right] + E_x [1_{\{T < \infty\}} e^{-\lambda T} R_\lambda g(X_T)].$$

3. 证明: 若 $f \in D(L)$, 则

$$\begin{aligned} f(x) = E_x \left[\int_0^T e^{-\lambda t} (\lambda f - Lf)(X_t) dt \right] \\ + E_x [1_{\{T < \infty\}} e^{-\lambda T} f(X_T)]. \end{aligned}$$

4. 假设 $E_x[T] < \infty$ 。由上一问推出

$$E_x \left[\int_0^T Lf(X_t) dt \right] = E_x[f(X_T)] - f(x).$$

这个公式还可以怎样更直接地证明?

5. 对每个 $\varepsilon > 0$, 令

$$T_{\varepsilon, x} = \inf\{t \geq 0 : d(x, X_t) > \varepsilon\}.$$

假设对所有充分小的 ε , 都有 $E_x[T_{\varepsilon, x}] < \infty$. 证明: 在仍假设 $f \in D(L)$ 时,

$$Lf(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{E_x[f(X_{T_{\varepsilon, x}})] - f(x)}{E_x[T_{\varepsilon, x}]}.$$

6. 证明: 若 x 不是吸收点, 即存在 $t > 0$ 使

$$Q_t(x, \{x\}) < 1,$$

则对每个充分小的 ε , 假设 $E_x[T_{\varepsilon, x}] < \infty$ 自动成立.

提示. 注意存在非负函数 $h \in C_0(E)$, 它在以 x 为中心的某个球上为零, 且 $Q_t h(x) > 0$. 由此推出可以选取 $\alpha > 0$ 和 $\eta \in (0, 1)$, 使得对每个整数 $n \geq 1$,

$$P_x(T_{\alpha, x} > nt) \leq (1 - \eta)^n.$$

解答 6.29.

1. Fubini 定理和停时 T 处的强马尔可夫性质给出

$$\begin{aligned} & E_x \left[1_{\{T < \infty\}} e^{-\lambda T} \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(X_{T+t}) dt \right] \\ &= E_x \left[1_{\{T < \infty\}} e^{-\lambda T} \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t g(X_T) dt \right] = E_x[1_{\{T < \infty\}} e^{-\lambda T} R_\lambda g(X_T)]. \end{aligned}$$

2. 将 $\int_0^\infty$ 分成 $[0, T]$ 与 $[T, \infty)$, 再用第 1 问处理后一段, 便得到题中预解分解公式.

3. 若 $f \in D(L)$, 取 $g = (\lambda - L)f$. 预解恒等式给出 $f = R_\lambda g$, 将其代入第 2 问即得结论.

4. 令 $\lambda \downarrow 0$. 由于 f, Lf 有界且 $E_x T < \infty$, 控制收敛定理给出

$$E_x \left[\int_0^T Lf(X_t) dt \right] = E_x[f(X_T)] - f(x).$$

也可直接对鞅 $f(X_t) - \int_0^t Lf(X_s) ds$ 使用 $T \wedge n$ 的可选停时定理, 再令 $n \rightarrow \infty$.

5. 在 $0 \leq t \leq T_{\varepsilon, x}$ 上, X_t 留在 x 的 ε -邻域内. Dynkin 公式给出

$$\frac{E_x[f(X_{T_{\varepsilon, x}})] - f(x)}{E_x[T_{\varepsilon, x}]} = \frac{E_x[\int_0^{T_{\varepsilon, x}} Lf(X_t) dt]}{E_x[T_{\varepsilon, x}]}.$$

Lf 在 x 连续, 故右端与 $Lf(x)$ 的差不超过 $\sup_{d(x, y) \leq \varepsilon} |Lf(y) - Lf(x)|$, 从而趋于 0.

6. 非吸收性给出某个 $r, t > 0$, 使 $Q_t(x, B(x, r)^c) > 0$. 可取 $0 \leq h \leq 1, h \in C_0(E)$, 使 $h = 0$ 于 x 的一个邻域且 $Q_t h(x) > 0$. 由 Feller 性, 存在 $\alpha > 0, \eta > 0$, 使 $Q_t h(y) \geq \eta$ 对所有 $y \in B(x, \alpha)$ 成立. 因此在尚未离开 $B(x, \alpha)$ 时, 每经过长度 t 的一步, 继续留在该球内的条件概率至多为 $1 - \eta$. 马尔可夫性递推给出

$$P_x(T_{\alpha, x} > nt) \leq (1 - \eta)^n.$$

所以

$$E_x[T_{\alpha, x}] = \int_0^\infty P_x(T_{\alpha, x} > s) ds \leq t \sum_{n=0}^\infty (1 - \eta)^n < \infty.$$

若 $0 < \varepsilon < \alpha$, 则 $T_{\varepsilon, x} \leq T_{\alpha, x}$, 故其期望也有限.

□

注释与评述

马尔可夫过程理论是概率论中极其重要的领域。马尔可夫过程有着漫长的历史，不可能在此作简短概述。Dynkin 和 Feller 对该理论的发展起了重要作用，特别可参见 Dynkin 的著作 [20, 21]。本章只介绍后续研究随机微分方程所需的最少材料。关于 Feller 过程的处理受到 [70]、[71] 相应章节的启发。我们选择集中讨论 Feller 半群，是因为这一特殊情形既便于介绍生成元等核心概念，又包含本书所考虑的主要例子。

对更一般的马尔可夫过程理论感兴趣的读者，可以参阅 Blumenthal 与 Gettoor [5]、Meyer [59] 以及 Sharpe [73] 的经典著作。用一族相关鞅来刻画马尔可夫过程的思想（与定理 6.14 的精神一致）发展出了鞅问题理论；可参阅 Stroock 与 Varadhan 的经典著作 [77]。Ethier 与 Kurtz 的著作 [24] 也讨论了鞅问题，该书着重研究马尔可夫过程的刻画与收敛问题，并包含许多例子和应用。Stroock 较新的著作 [76] 在讨论其他主题的同时，也处理了可数状态空间上的马尔可夫过程。关于 Lévy 过程理论的现代论述，可参阅 Bertoin 的专著 [3]。

第七章 布朗运动与偏微分方程

本章利用前两章的结果讨论布朗运动与偏微分方程之间的联系。简要讨论热方程后，我们将重点研究 Laplace 方程

$$\Delta u = 0$$

以及布朗运动同 $\mathbb{R}^d$ 中区域上的调和函数之间的关系。特别地，我们将给出边界满足外锥条件的有界区域上经典 Dirichlet 问题的概率解。当区域为球时，解可由 Poisson 核显式表示；Poisson 核正是布朗运动离开该球时退出位置分布的密度。随后讨论 d 维布朗运动的常返性与暂留性，并把第 5 章的结果用于证明平面布朗运动的共形不变性。共形不变性的一个重要应用是平面布朗运动的所谓斜积表示；我们将由此导出若干渐近律，其中包括著名的平面布朗运动绕数的 Spitzer 定理。

7.1 布朗运动与热方程

本章始终以 B 表示 d 维布朗运动：对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ ，在概率测度 P_x 下， B 从 x 出发。可以使用第 2.2 节的典范构造，即把 Wiener 测度 $W(dw)$ 在平移映射 $w \mapsto x + w$ 下的像定义为 P_x 。于是 $(B_t)_{t \geq 0}$ 是 Feller 过程，其半群为

$$Q_t \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) \varphi(y) dy, \quad \varphi \in B(\mathbb{R}^d).$$

以 L 表示这一 Feller 过程的生成元。若 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上二阶连续可微的函数，并且 $f, \Delta f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ ，则

$$f \in D(L), \quad Lf = \frac{1}{2} \Delta f$$

(见第 6.2 节末尾)。

若 $\varphi \in B(\mathbb{R}^d)$ ，则对每个固定的 $t > 0$ ， $Q_t \varphi$ 可看成 φ 与光滑函数

$$p_t(x) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$$

的卷积，因而 $Q_t \varphi$ 也是光滑函数。进一步，若 $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ ，则在积分号下求导可知， $Q_t \varphi$ 的各阶导数也都属于 $C_0(\mathbb{R}^d)$ 。所以对每个 $t > 0$ ，

$$Q_t \varphi \in D(L), \quad L(Q_t \varphi) = \frac{1}{2} \Delta(Q_t \varphi).$$

定理 7.1. 设 $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ 。对每个 $t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$ ，令

$$u_t(x) = Q_t \varphi(x) = E_x[\varphi(B_t)].$$

则函数族 $(u_t(x))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$ 在 $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ 上满足偏微分方程

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u_t.$$

此外, 对每个 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{\substack{s \downarrow 0 \\ y \rightarrow x}} u_s(y) = \varphi(x).$$

证明. 由定理前的讨论, 对每个 $t > 0$, u_t 是光滑函数、 $u_t \in D(L)$, 并且 $Lu_t = \frac{1}{2}\Delta u_t$. 固定 $\varepsilon > 0$. 把命题 6.11 用于 $f = u_\varepsilon$, 对每个 $t \geq \varepsilon$ 得到

$$u_t = u_\varepsilon + \int_0^{t-\varepsilon} L(Q_s u_\varepsilon) ds = u_\varepsilon + \int_\varepsilon^t Lu_s ds.$$

因为

$$Lu_s = Q_{s-\varepsilon}(Lu_\varepsilon)$$

关于 $s \in [\varepsilon, \infty)$ 连续, 所以对 $t \geq \varepsilon$,

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = Lu_t = \frac{1}{2}\Delta u_t.$$

最后一个结论就是 $Q_s \varphi \rightarrow \varphi$ ($s \downarrow 0$) 这一事实。□

注. 也可以从 $Q_t \varphi$ 的显式表达式直接计算来证明定理 7.1; 这种计算还表明, 只要假设 φ 有界连续, 结论仍然成立。不过, 上面的证明揭示了该结论同第 6 章马尔可夫过程一般理论之间的关系; 它也说明, 对于更一般的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au,$$

只要 A 能解释为某个适当马尔可夫过程的生成元, 通常也会有类似结论。

布朗运动还能在许多其他抛物型偏微分方程的解提供概率表示。特别地, 若 v 是 $\mathbb{R}^d$ 上的非负函数, 则形如

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u - vu$$

的方程可由所谓 Feynman-Kac 公式表示; 精确表述见练习 7.28。

7.2 布朗运动与调和函数

现在转向布朗运动同 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 之间的联系。先给出经典定义。

定义 7.2. 设 D 是 $\mathbb{R}^d$ 中的区域。函数 $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ 称为在 D 上调和, 如果 u 二阶连续可微并且

$$\Delta u = 0 \quad \text{在 } D \text{ 上.}$$

设 D' 是 D 的子区域, 且 $\overline{D'} \subset D$. 考虑停时

$$T := \inf\{t \geq 0 : B_t \notin D'\}.$$

若 u 在 D 上调和, 则 Itô 公式 (其适用性由命题 5.11 前的注保证) 说明: 对每个 $x \in D'$, 在 P_x 下, 过程

$$u(B_{t \wedge T}) = u(B_0) + \int_0^{t \wedge T} \nabla u(B_s) \cdot dB_s \quad (7.1)$$

是局部鞅。这里以及下文在应用第 5 章的随机微积分结果时, 都以 $(\mathcal{F}_t)$ 表示 B 的自然滤过在 P_x 下的完备化。

粗略地说, 调和函数正是与布朗运动复合后产生 (局部) 鞅的函数。

命题 7.3. 设 u 在区域 D 上调和, D' 是 D 的有界子区域且 $\overline{D'} \subset D$, 并令

$$T := \inf\{t \geq 0 : B_t \notin D'\}.$$

则对每个 $x \in D'$,

$$u(x) = E_x[u(B_T)].$$

证明. 由于 $\overline{D'}$ 是 D 的紧子集, u 和 ∇u 在 $\overline{D'}$ 上都有界; 并且对每个 $x \in D'$, 都有 $P_x(T < \infty) = 1$. 由 (7.1), $u(B_{t \wedge T})$ 实际上是真鞅, 特别地,

$$u(x) = E_x[u(B_{t \wedge T})]$$

对每个 $t \geq 0$ 成立. 令 $t \rightarrow \infty$, 再用控制收敛定理即得

$$u(x) = E_x[u(B_T)].$$

□

上述命题很容易推出调和函数的平均值性质. 为陈述这一性质, 先回忆: 单位球面上的均匀概率测度记为 $\sigma_1(dy)$, 它是球面

$$\{y \in \mathbb{R}^d : |y| = 1\}$$

上在所有向量空间等距变换下不变的唯一概率测度. 对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $r > 0$, 以 $\sigma_{x,r}(dy)$ 表示 $\sigma_1(dy)$ 在映射 $y \mapsto x + ry$ 下的像.

命题 7.4 (平均值性质). 设 u 在区域 D 上调和. 若 $x \in D$, $r > 0$, 且以 x 为中心、半径为 r 的闭球包含于 D , 则

$$u(x) = \int \sigma_{x,r}(dy) u(y).$$

证明. 先令

$$T_1 = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = 1\}.$$

由第 2 章末尾所述布朗运动的不变性, 在 P_0 下, B_{T_1} 的分布在 $\mathbb{R}^d$ 的所有向量空间等距变换下不变, 因而就是 $\sigma_1(dy)$. 由尺度不变性和平移不变性, 对每个 $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$, 若

$$T_{x,r} = \inf\{t \geq 0 : |B_t - x| = r\},$$

则在 P_x 下, $B_{T_{x,r}}$ 的分布为 $\sigma_{x,r}$. 另一方面, 在命题的条件下, 命题 7.3 给出

$$u(x) = E_x[u(B_{T_{x,r}})].$$

结论随即成立. □

若 D 上的局部有界可测函数 u 满足命题 7.4 的结论, 就称 u 满足 平均值性质. 这一性质事实上刻画了调和函数.

引理 7.5. 设 u 是 D 上满足平均值性质的局部有界可测函数, 则 u 在 D 上调和.

证明. 固定 $r_0 > 0$, 令 D_0 为 D 中到 D^c 的距离大于 r_0 的点组成的开集. 只需证明 u 在 D_0 上二阶连续可微且 $\Delta u = 0$. 取一个非恒为零的 C^∞ 函数 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, 其紧支集包含于 $(0, r_0)$. 对每个 $x \in D_0$ 和 $r \in (0, r_0)$, 有

$$u(x) = \int \sigma_{x,r}(dy) u(y).$$

等式两边乘以 $r^{d-1}h(r)$, 再关于 Lebesgue 测度 dr 在 $(0, r_0)$ 上积分. 使用极坐标积分公式, 并约定在 D^c 上令 $u = 0$, 得到: 对每个 $x \in D_0$,

$$cu(x) = \int_{\{|y| < r_0\}} h(|y|)u(x+y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} h(|z-x|)u(z) dz,$$

其中 $c > 0$ 是常数; 这里还使用了当 $|z-x| \geq r_0$ 时 $h(|z-x|) = 0$. 因为 $z \mapsto h(|z|)$ 是 C^∞ 函数, 最后一个积分中的卷积在 D_0 上也定义了 C^∞ 函数.

还需验证 $\Delta u = 0$. 这里采用概率论证 (解析论证也很容易). 对 $x \in D_0$, $r \in (0, r_0)$, 在 P_x 下把 Itô 公式用于 $u(B_t)$, 得到

$$E_x[u(B_{t \wedge T_{x,r}})] = u(x) + \frac{1}{2} E_x \left[\int_0^{t \wedge T_{x,r}} \Delta u(B_s) ds \right].$$

令 $t \rightarrow \infty$, 并注意 $E_x[T_{x,r}] < \infty$ (参见推论 3.24 后的例 (b)), 可得

$$E_x[u(B_{T_{x,r}})] = u(x) + \frac{1}{2} E_x \left[\int_0^{T_{x,r}} \Delta u(B_s) ds \right].$$

平均值性质恰好说明 $E_x[u(B_{T_{x,r}})] = u(x)$, 所以

$$E_x \left[\int_0^{T_{x,r}} \Delta u(B_s) ds \right] = 0.$$

这对所有 $r \in (0, r_0)$ 都成立; 令 $r \downarrow 0$, 利用 Δu 的连续性便有 $\Delta u(x) = 0$. $\square$

校订注. 英文原文在本证明两次应用 Itô 公式时, 都把漂移项写成 $E_x[\int \Delta u(B_s) ds]$, 漏掉了系数 $1/2$. 本书前文已经确定布朗运动的生成元为 $\frac{1}{2}\Delta$, 故正确项应为 $\frac{1}{2}E_x[\int \Delta u(B_s) ds]$, 现已改正. 由于随后令该积分等于零, 这一漏因子不影响原证明的结论.

从现在起, 假设区域 D 有界.

定义 7.6 (经典 Dirichlet 问题). 设 g 是 ∂D 上的连续函数. 如果函数 $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ 在 D 上调和, 并且具有边界值 g , 即对每个 $y \in \partial D$,

$$u(x) \longrightarrow g(y) \quad (x \rightarrow y, x \in D),$$

就称 u 解出了区域 D 上边界条件为 g 的 Dirichlet 问题.

回忆 $\bar{D}$ 表示 D 的闭包. 若 u 解出了边界条件为 g 的 Dirichlet 问题, 则在 $\bar{D}$ 上定义

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in D, \\ g(x), & x \in \partial D, \end{cases}$$

所得函数连续, 因而在 $\bar{D}$ 上有界.

命题 7.7. 设 D 是有界区域, 并记

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin D\}$$

为布朗运动离开 D 的时刻.

(i) 设 g 是 ∂D 上的连续函数, 且 u 是边界条件为 g 的 Dirichlet 问题的解. 则对每个 $x \in D$,

$$u(x) = E_x[g(B_T)].$$

(ii) 设 g 是 ∂D 上的有界可测函数, 则函数

$$u(x) = E_x[g(B_T)], \quad x \in D,$$

在 D 上调和。

注。 断言 (i) 表明: 只要边界条件为 g 的 Dirichlet 问题有解, 其解就唯一。利用平均值性质也很容易证明这一点。

证明。

(i) 固定 $x \in D$, 并取 $\varepsilon_0 > 0$, 使以 x 为中心、半径为 ε_0 的球包含于 D 。对每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, 令 D_ε 为开集

$$\{z \in D : \text{dist}(z, D^c) > \varepsilon\}$$

中包含 x 的连通分支。若

$$T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin D_\varepsilon\},$$

则命题 7.3 给出

$$u(x) = E_x[u(B_{T_\varepsilon})].$$

注意当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时, $T_\varepsilon \uparrow T$ 。事实上, 若 T' 是这一递增极限, 则 $T' \leq T$, 而样本路径的连续性又给出 $B_{T'} \in \partial D$, 故 $T' = T$ 。由控制收敛定理, $E_x[u(B_{T_\varepsilon})]$ 在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时收敛到 $E_x[g(B_T)]$ 。

(ii) 由引理 7.5, 只需验证函数 $u(x) = E_x[g(B_T)]$ 满足平均值性质。固定 $x \in D$ 与 $r > 0$, 使以 x 为中心、半径为 r 的闭球包含于 D 。把定理 6.17 的强马尔可夫性质用于停时 $T_{x,r}$ 。依该定理的记号, 对满足 $w(0) \in D$ 的 $w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, 令 $\Phi(w)$ 为路径 w 首次离开 D 的位置处的 g 值; 若 w 从不离开 D , 则令 $\Phi(w) = 0$ 。有

$$g(B_T) = \Phi((B_t)_{t \geq 0}) = \Phi((B_{T_{x,r}+t})_{t \geq 0}), \quad P_x\text{-a.s.},$$

因为两条路径在 D 上的退出位置相同。因此

$$\begin{aligned} u(x) &= E_x[g(B_T)] \\ &= E_x[\Phi((B_{T_{x,r}+t})_{t \geq 0})] \\ &= E_x[E_{B_{T_{x,r}}}[\Phi((B_t)_{t \geq 0})]] \\ &= E_x[u(B_{T_{x,r}})]. \end{aligned}$$

又因在 P_x 下 $B_{T_{x,r}}$ 的分布为 $\sigma_{x,r}$, 平均值性质得证。

□

校订注。 英文原文在上述 (ii) 的最后两行三次把停时下标 x 误排为 ε , 写成 $T_{\varepsilon,r}$ 。该停时在证明中从未定义, 而且本段固定的是中心 x 与半径 r ; 依强马尔可夫性质与平均值性质, 三处均应为 $T_{x,r}$, 现已改正。

命题 7.7 (i) 告诉我们: 若边界条件为 g 的 Dirichlet 问题有解, 则它必由概率公式

$$u(x) = E_x[g(B_T)]$$

给出。另一方面, 不论在 ∂D 上如何选取有界可测函数 g , 断言 (ii) 都说明该概率公式给出一个在 D 上调和的函数。可是, 即使 g 连续, 也还不能由此看出 u 具有边界值 g ; 一般而言这甚至可能不成立 (Dirichlet 问题无解的例子见练习 7.24 和 7.25)。下面的定理给出一个部分答案。

若 $y \in \partial D$ ，并且存在一个顶点为 y 的非空开锥 $\mathcal{C}$ 和实数 $r > 0$ ，使 $\mathcal{C}$ 与以 y 为中心、半径为 r 的开球之交包含于 D^c ，就称 D 在 y 处满足外锥条件。例如，凸区域在其每个边界点都满足外锥条件。

定理 7.8 (Dirichlet 问题的解)。设 D 是 $\mathbb{R}^d$ 中的有界区域，并假设 D 在每个 $y \in \partial D$ 处都满足外锥条件。则对 ∂D 上的每个连续函数 g ，公式

$$u(x) = E_x[g(B_T)], \quad T = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin D\},$$

给出边界条件为 g 的 Dirichlet 问题的唯一解。

证明。由命题 7.7 (ii)，只需对每个固定的 $y \in \partial D$ 验证

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in D}} u(x) = g(y). \quad (7.2)$$

固定 $\varepsilon > 0$ 。由于 g 连续，可取 $\delta > 0$ ，使得只要 $z \in \partial D$ 且 $|z - y| < \delta$ ，便有

$$|g(z) - g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

再取 $M > 0$ ，使 $|g(z)| \leq M$ 对所有 $z \in \partial D$ 成立。于是对每个 $\eta > 0$ ，

$$\begin{aligned} |u(x) - g(y)| &\leq E_x[|g(B_T) - g(y)|1_{\{T \leq \eta\}}] + E_x[|g(B_T) - g(y)|1_{\{T > \eta\}}] \\ &\leq E_x\left[|g(B_T) - g(y)|1_{\{T \leq \eta\}}1_{\{\sup_{t \leq \eta} |B_t - x| \leq \delta/2\}}\right] \\ &\quad + 2MP_x\left(\sup_{t \leq \eta} |B_t - x| > \frac{\delta}{2}\right) + 2MP_x(T > \eta). \end{aligned}$$

把最右端三个量依次记为 A_1, A_2, A_3 ，并假设 $|y - x| < \delta/2$ 。

在事件

$$\{T \leq \eta\} \cap \left\{ \sup_{t \leq \eta} |B_t - x| \leq \frac{\delta}{2} \right\}$$

上，

$$|B_T - y| \leq |B_T - x| + |y - x| < \delta,$$

所以由 δ 的选择， $A_1 \leq \varepsilon/3$ 。其次，由平移不变性，

$$A_2 = 2MP_0\left(\sup_{t \leq \eta} |B_t| > \frac{\delta}{2}\right),$$

它由样本路径的连续性在 $\eta \downarrow 0$ 时趋于零。故可固定 $\eta > 0$ ，使 $A_2 < \varepsilon/3$ 。最后，我们声称可以取足够小的 $\alpha \in (0, \delta/2]$ ，使只要 $|x - y| < \alpha$ ，就有

$$A_3 = 2MP_x(T > \eta) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是 $|x - y| < \alpha$ 时 $|u(x) - g(y)| < \varepsilon$ ，这便证明了 (7.2)。下面的引理证明上述断言。 $\square$

引理 7.9。在外锥条件下，对每个 $y \in \partial D$ 和每个 $\eta > 0$ ，都有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in D}} P_x(T > \eta) = 0.$$

证明。对每个满足 $|u| = 1$ 的 $u \in \mathbb{R}^d$ 以及每个 $\gamma \in (0, 1)$, 考虑圆锥

$$\mathcal{C}(u, \gamma) := \{z \in \mathbb{R}^d : z \cdot u > (1 - \gamma)|z|\},$$

其中点号表示通常的标量积。固定 $y \in \partial D$ 。外锥条件意味着可以固定 $r > 0$ 、 u 和 γ , 使

$$y + (\mathcal{C}(u, \gamma) \cap B_r) \subset D^c,$$

其中 B_r 表示以 0 为中心、半径为 r 的开球。简记

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(u, \gamma) \cap B_r, \quad \mathcal{C}' = \mathcal{C}(u, \gamma/2) \cap B_{r/2}.$$

对 $\mathbb{R}^d$ 的每个开集 F , 记

$$T_F = \inf\{t \geq 0 : B_t \in F\}.$$

沿命题 2.14 (i) 证明中的思路应用 Blumenthal 零一律 (定理 2.13, 准确地说是它到 d 维布朗运动的直接推广), 可得

$$P_0(T_{\mathcal{C}(u, \gamma/2)} = 0) = 1,$$

再由样本路径连续性得到 $P_0(T_{\mathcal{C}'} = 0) = 1$ 。对 $a \in (0, r/2)$, 令

$$\mathcal{C}'_a = \{z \in \mathcal{C}' : |z| > a\}.$$

当 $a \downarrow 0$ 时, 集合 $\mathcal{C}'_a$ 递增到 $\mathcal{C}'$, 所以

$$T_{\mathcal{C}'_a} \downarrow T_{\mathcal{C}'} = 0, \quad P_0\text{-a.s.}$$

给定任意 $\beta > 0$, 可以固定足够小的 a , 使

$$P_0(T_{\mathcal{C}'_a} \leq \eta) \geq 1 - \beta.$$

又因 $y + \mathcal{C} \subset D^c$,

$$P_x(T \leq \eta) \geq P_x(T_{y+\mathcal{C}} \leq \eta) = P_0(T_{y-x+\mathcal{C}} \leq \eta).$$

一个简单的几何论证表明: 只要 $|y - x|$ 足够小, 平移后的锥 $y - x + \mathcal{C}$ 就包含 $\mathcal{C}'_a$ 。因而

$$P_x(T \leq \eta) \geq P_0(T_{\mathcal{C}'_a} \leq \eta) \geq 1 - \beta.$$

由于 β 任意, 结论成立。 □

注。外锥条件只是 Dirichlet 问题存在唯一解的一个充分条件。保证每个连续边界值都存在解的充要条件可参见文献 [69]。

7.3 球内的调和函数与 Poisson 核

再考虑一个有界区域 D 以及 ∂D 上的连续函数 g 。令

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin D\}$$

为布朗运动离开 D 的时刻。命题 7.7 (i) 说明: 若 D 上边界条件为 g 的 Dirichlet 问题有解 (在定理 7.8 的假设下确实如此), 则

$$u(x) = E_x[g(B_T)] = \int_{\partial D} \omega(x, dy)g(y),$$

其中对每个 $x \in D$, $\omega(x, dy)$ 表示在 P_x 下 B_T 的分布。概率测度 $\omega(x, dy)$ 称为 D 关于 x 的调和测度。一般而言, 想求出这些测度的显式表达式是不现实的; 不过当 D 是球时, 确实有显式表达式, 从而 Dirichlet 问题解的表示也变得具体。

以下设 $D = B_1$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的开单位球, 并假设 $d \geq 2$ 以避免平凡情形; 其边界 ∂B_1 是 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球面。

定义 7.10. (单位球的) *Poisson* 核是在 $B_1 \times \partial B_1$ 上定义的函数

$$K(x, y) = \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^d}, \quad x \in B_1, y \in \partial B_1.$$

引理 7.11. 对每个固定的 $y \in \partial B_1$, 函数 $x \mapsto K(x, y)$ 在 B_1 上调和。

证明. 对 $x \in B_1$ 令 $K_y(x) = K(x, y)$. 则 K_y 是 B_1 上的 C^∞ 函数。一个略显冗长的直接计算给出 $\Delta K_y = 0$; 计算留给读者。□

为导出 *Poisson* 核的进一步性质, 需要下面关于径向调和函数的引理。

引理 7.12. 设 $0 \leq r_1 < r_2$, 并令 $h : (r_1, r_2) \rightarrow \mathbb{R}$ 为可测函数。函数 $u(x) = h(|x|)$ 在区域

$$\{x \in \mathbb{R}^d : r_1 < |x| < r_2\}$$

上调和, 当且仅当存在常数 a, b , 使得

$$h(r) = \begin{cases} a + b \log r, & d = 2, \\ a + br^{2-d}, & d \geq 3. \end{cases}$$

证明. 若 $u(x) = h(|x|)$ 在上述区域调和, 则 u 二阶连续可微, 因而 h 也如此。由径向函数的 Laplace 算子公式, $\Delta u = 0$ 当且仅当

$$h''(r) + \frac{d-1}{r}h'(r) = 0, \quad r \in (r_1, r_2).$$

这一二阶线性微分方程的解恰为命题中给出的形式, 反向结论也由直接代入得到。□

仍以 $\sigma_1(dy)$ 表示单位球面 ∂B_1 上的均匀概率测度。

引理 7.13. 对每个 $x \in B_1$,

$$\int_{\partial B_1} K(x, y) \sigma_1(dy) = 1.$$

证明. 对每个 $x \in B_1$, 令

$$F(x) = \int_{\partial B_1} K(x, y) \sigma_1(dy).$$

由引理 7.11, F 在 B_1 上调和。事实上, 若 $x \in B_1$ 且 $r < 1 - |x|$, 则由引理 7.11 和平均值性质, 对每个 $y \in \partial B_1$,

$$K(x, y) = \int K(z, y) \sigma_{x,r}(dz).$$

因此由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} \int F(z) \sigma_{x,r}(dz) &= \int \left(\int K(z, y) \sigma_1(dy) \right) \sigma_{x,r}(dz) \\ &= \int \left(\int K(z, y) \sigma_{x,r}(dz) \right) \sigma_1(dy) \\ &= \int K(x, y) \sigma_1(dy) = F(x), \end{aligned}$$

即 F 满足平均值性质。

若 R 是 $\mathbb{R}^d$ 的向量空间等距变换, 则

$$K(Rx, Ry) = K(x, y),$$

而 $\sigma_1(dy)$ 在 R 下不变, 所以 $F(Rx) = F(x)$ 。故 F 是径向调和函数。由引理 7.12 以及 F 在 0 的邻域有界这一事实, F 必为常数。又 $F(0) = 1$, 结论成立。□

定理 7.14。 设 g 是 ∂B_1 上的连续函数。 B_1 上边界条件为 g 的 Dirichlet 问题的唯一解为

$$u(x) = \int_{\partial B_1} g(y) K(x, y) \sigma_1(dy), \quad x \in B_1.$$

证明。 与引理 7.13 证明开头完全相同的论证说明 u 在 B_1 上调和。为验证边界条件, 固定 $y_0 \in \partial B_1$ 。对每个 $\delta > 0$, Poisson 核的显式表达式表明: 若 $x \in B_1$ 、 $y \in \partial B_1$, 且 $|x - y_0| < \delta/2$ 、 $|y - y_0| > \delta$, 则

$$K(x, y) \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^d (1 - |x|^2).$$

由此, 对每个 $\delta > 0$,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y_0 \\ x \in B_1}} \int_{\{|y - y_0| > \delta\}} K(x, y) \sigma_1(dy) = 0. \quad (7.3)$$

给定 $\varepsilon > 0$, 可以取足够小的 $\delta > 0$, 使得只要 $y \in \partial B_1$ 且 $|y - y_0| \leq \delta$, 便有 $|g(y) - g(y_0)| \leq \varepsilon$ 。令

$$M = \sup\{|g(y)| : y \in \partial B_1\}.$$

利用引理 7.13, 得到

$$\begin{aligned} |u(x) - g(y_0)| &= \left| \int K(x, y) (g(y) - g(y_0)) \sigma_1(dy) \right| \\ &\leq 2M \int_{\{|y - y_0| > \delta\}} K(x, y) \sigma_1(dy) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由 (7.3),

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow y_0 \\ x \in B_1}} |u(x) - g(y_0)| \leq \varepsilon.$$

由于 ε 任意, 所需边界条件成立。□

上述定理还确定了单位球的调和测度。

推论 7.15。 令

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin B_1\}.$$

对每个 $x \in B_1$, 在 P_x 下 B_T 的分布关于 $\sigma_1(dy)$ 的密度为 $K(x, y)$ 。

事实上, 把命题 7.7 (i) 与定理 7.14 结合起来, 对 ∂B_1 上任意连续函数 g 都有

$$E_x[g(B_T)] = \int_{\partial B_1} g(y) K(x, y) \sigma_1(dy), \quad x \in B_1,$$

因而结论立即成立。

7.4 布朗运动的暂留性与常返性

再次考虑 d 维布朗运动 $(B_t)_{t \geq 0}$: 在概率测度 P_x 下, 它从 x 出发。仍假设 $d \geq 2$, 因为 $d = 1$ 的相应结果已在前几章得到。

对每个 $a \geq 0$, 引入停时

$$U_a = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a\},$$

并照例约定 $\inf \emptyset = \infty$ 。

命题 7.16. 设 $x \neq 0$, 并取 ε, R 使 $0 < \varepsilon < |x| < R$ 。则

$$P_x(U_\varepsilon < U_R) = \begin{cases} \frac{\log R - \log |x|}{\log R - \log \varepsilon}, & d = 2, \\ \frac{R^{2-d} - |x|^{2-d}}{R^{2-d} - \varepsilon^{2-d}}, & d \geq 3. \end{cases} \quad (7.4)$$

因此

$$P_x(U_0 < \infty) = 0,$$

而且对每个 $\varepsilon \in (0, |x|)$,

$$P_x(U_\varepsilon < \infty) = \begin{cases} 1, & d = 2, \\ \left(\frac{\varepsilon}{|x|}\right)^{d-2}, & d \geq 3. \end{cases}$$

证明. 记

$$D_{\varepsilon, R} = \{y \in \mathbb{R}^d : \varepsilon < |y| < R\}.$$

对 $x \in D_{\varepsilon, R}$, 令 $u(x)$ 为 (7.4) 右端的函数。由引理 7.12, u 在 $D_{\varepsilon, R}$ 上调和; 而且显然, u 解出了该环域上边界条件

$$g(y) = \begin{cases} 0, & |y| = R, \\ 1, & |y| = \varepsilon \end{cases}$$

的 Dirichlet 问题。若 $T_{\varepsilon, R}$ 是离开 $D_{\varepsilon, R}$ 的时刻, 则命题 7.7 给出

$$u(x) = E_x[g(B_{T_{\varepsilon, R}})] = P_x(U_\varepsilon < U_R),$$

从而得到 (7.4)。

固定 $R > |x|$ 。对每个 $0 < \varepsilon < |x|$, 事件 $\{U_0 < U_R\}$ 在 P_x -a.s. 意义下包含于 $\{U_\varepsilon < U_R\}$ 。令 $\varepsilon \downarrow 0$, 由 (7.4) 右端的极限得到

$$P_x(U_0 < U_R) = 0.$$

又因当 $R \uparrow \infty$ 时 $U_R \uparrow \infty$, 故 $P_x(U_0 < \infty) = 0$ 。最后,

$$P_x(U_\varepsilon < \infty) = \lim_{R \rightarrow \infty} P_x(U_\varepsilon < U_R),$$

再令 $R \rightarrow \infty$ 即得所述公式。 □

注. 可以把公式 (7.4) 与第 3 章得到的一维布朗运动退出区间的位置分布 (推论 3.24 后的例 (a)) 比较。也可以仿照一维情形来证明它: 对局部鞅 $\log |B_t|$ ($d = 2$) 或 $|B_t|^{2-d}$ ($d \geq 3$) 应用可选停时定理; 参见练习 5.33。

对每个 $y \in \mathbb{R}^d$, 令

$$\tau_y = \inf\{t \geq 0 : B_t = y\},$$

特别地 $\tau_0 = U_0$ 。当 $x \neq 0$ 时, $P_x(\tau_0 < \infty) = 0$; 由平移不变性, 只要 $y \neq x$, 就有

$$P_x(\tau_y < \infty) = 0.$$

这说明布朗运动以零概率访问其起点以外的任一固定点。换言之, 当 $d \geq 2$ 时, 单点对 d 维布朗运动是极集 (关于极集的更多内容见练习 7.25)。

若 m 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度, 则由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} E_x[m(\{B_t : t \geq 0\})] &= E_x \left[\int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{\tau_y < \infty\}} dy \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} P_x(\tau_y < \infty) dy = 0. \end{aligned}$$

因此

$$m(\{B_t : t \geq 0\}) = 0, \quad P_x\text{-a.s.}$$

不过可以证明, 在每个维数 $d \geq 2$ 中, 曲线 $\{B_t : t \geq 0\}$ 的 Hausdorff 维数都等于 2 (例如见 [62])。从某种意义上说, 这表明平面布朗曲线离具有正 Lebesgue 测度“并不太远”。

定理 7.17。

(i) 当 $d = 2$ 时, 布朗运动是常返的: 几乎处处地, 对 $\mathbb{R}^d$ 的每个非空开集 O , 集合

$$\{t \geq 0 : B_t \in O\}$$

都无界。

(ii) 当 $d \geq 3$ 时, 布朗运动是暂留的:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |B_t| = \infty, \quad \text{a.s.}$$

证明。

(i) 只需对以有理坐标点为中心、有理数为半径的开球证明结论, 因为这类球组成 $\mathbb{R}^2$ 拓扑的可数基。因此固定一个开球 B ; 由平移不变性, 可设它以 0 为中心, 并可设布朗运动的起点为 $x \neq 0$ 。命题 7.16 表明, 布朗运动永不击中 0; 特别地, 对每个 $t \geq 0$,

$$\inf\{|B_r| : 0 \leq r \leq t\} > 0, \quad \text{a.s.}$$

但它仍会以概率 1 击中任意以 0 为中心的开球。对每个整数 n , 在时刻 n 使用马尔可夫性质并再次应用命题 7.16, 可知在 n 以后还会击中 B , 其条件概率为 1。对 n 取可数交, 得到 B 在任意大的时刻访问 B 。

(ii) 同样可设起点 $x \neq 0$ 。函数 $y \mapsto |y|^{2-d}$ 在 $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 上调和, 而前面已经看到 B 不会击中 0, 故 $|B_t|^{2-d}$ 是局部鞅, 从而由命题 4.7 是上鞅。定理 3.19 以及“非负上鞅自动在 L^1 中有界”这一事实说明, $|B_t|^{2-d}$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时几乎处处收敛。其极限必为 0: 否则布朗曲线 $\{B_t : t \geq 0\}$ 将有界, 而布朗运动的坐标过程不可能全部有界。于是 $|B_t| \rightarrow \infty$ 。

□

注。 在 $d = 2$ 时, 还可稍微加强常返性: 几乎处处地, 对 $\mathbb{R}^2$ 的每个非空开集 O , 集合 $\{t \geq 0 : B_t \in O\}$ 的 Lebesgue 测度为无穷。这可由强马尔可夫性质直接推出, 细节从略。

7.5 平面布朗运动与全纯函数

本节专门讨论平面情形 $d = 2$ ，并把二维布朗运动写成

$$B_t = (X_t, Y_t).$$

把 $\mathbb{R}^2$ 与复平面 $\mathbb{C}$ 等同是方便的；于是

$$B_t = X_t + iY_t,$$

有时称 B 为复布朗运动。同前，对每个 $z \in \mathbb{C}$ ，在 P_z 下 B 从 z 出发。

若 $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是全纯函数，则 Φ 的实部和虚部都是调和函数，所以 $\Phi(B_t)$ 的实部与虚部都是连续局部鞅。事实上还有更强的结论。

定理 7.18. 设 $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是非常值全纯函数，并对每个 $t \geq 0$ 令

$$C_t = \int_0^t |\Phi'(B_s)|^2 ds.$$

固定 $z \in \mathbb{C}$ 。在 P_z 下，存在一个从 $\Phi(z)$ 出发的复布朗运动 Γ ，使得

$$\Phi(B_t) = \Gamma_{C_t}, \quad \text{对每个 } t \geq 0, \text{quad} P_z\text{-a.s.}$$

换言之，复布朗运动在全纯函数下的像是一个经过时间变换的复布朗运动。这就是平面布朗运动的共形不变性。定理 7.18 可以推广到 Φ 只在复平面的区域 D 上定义并全纯、且 $z \in D$ 的情形；这时类似表示在 B 首次离开 D 以前成立（例如见 [18]）。这一推广对许多应用很有用。

证明。 以 g 和 h 分别表示 Φ 的实部和虚部。由于 g, h 调和，Itô 公式在 P_z 下给出

$$g(B_t) = g(z) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(B_s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial y}(B_s) dY_s,$$

以及

$$h(B_t) = h(z) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial x}(B_s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial y}(B_s) dY_s.$$

故 $M_t = g(B_t)$ 与 $N_t = h(B_t)$ 都是局部鞅。Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

进一步给出

$$\langle M, N \rangle_t = 0$$

以及

$$\langle M, M \rangle_t = \langle N, N \rangle_t = \int_0^t |\Phi'(B_s)|^2 ds = C_t.$$

平面布朗运动的常返性说明 $C_\infty = \infty$ a.s.: 取一个球 $\mathcal{B}$ ，使 $|\Phi'|$ 在该球上有正的下界，再注意 B 在 $\mathcal{B}$ 中停留的总时间几乎处处为无穷。于是可以在 P_z 下把命题 5.15 用于 $M_t - g(z)$ 与 $N_t - h(z)$ ，得到两个从 0 出发的相互独立的一维布朗运动 β, γ ，使对每个 $t \geq 0$ ，

$$M_t = g(z) + \beta_{C_t}, \quad N_t = h(z) + \gamma_{C_t}, \quad \text{a.s.}$$

令

$$\Gamma_t = \Phi(z) + \beta_t + i\gamma_t,$$

即得结论。 □

下面把平面布朗运动的共形不变性用于它的极坐标分解，这一分解称为斜积表示。

定理 7.19 (斜积表示)。设 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 并写成

$$z = \exp(r + i\theta), \quad r \in \mathbb{R}, \text{quad} \theta \in (-\pi, \pi].$$

在 P_z 下, 存在两个相互独立的一维布朗运动 β, γ , 它们分别从 r 和 θ 出发, 并且几乎处处地, 对每个 $t \geq 0$,

$$B_t = \exp(\beta_{H_t} + i\gamma_{H_t}),$$

其中

$$H_t = \int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2}.$$

证明。证明定理 7.19 的“自然”做法, 是把定理 7.18 的推广应用于复对数的一个适当连续分支; 不过这会带来一些技术困难, 所以下面采用另一种论证。

可以先设 $z = 1$, 从而 $r = \theta = 0$; 一般情形可由布朗运动的尺度不变性与旋转不变性化归到这一情形。设

$$\Gamma_t = \Gamma_t^1 + i\Gamma_t^2$$

是从 0 出发的复布朗运动。由定理 7.18, 几乎处处地, 对每个 $t \geq 0$,

$$\exp(\Gamma_t) = Z_{C_t}, \quad (7.5)$$

其中 Z 是从 1 出发的复布朗运动, 并且

$$C_t = \int_0^t \exp(2\Gamma_s^1) ds.$$

令 $(H_s)_{s \geq 0}$ 为 $(C_t)_{t \geq 0}$ 的反函数。由反函数的求导公式,

$$H_s = \int_0^s \exp(-2\Gamma_{H_u}^1) du = \int_0^s \frac{du}{|Z_u|^2},$$

最后一个等号使用了

$$\exp(\Gamma_{H_u}^1) = |Z_u|.$$

在 (7.5) 中取 $t = H_s$, 得到

$$Z_s = \exp(\Gamma_{H_s}^1 + i\Gamma_{H_s}^2).$$

因为 Γ^1, Γ^2 是两个相互独立、从 0 出发的一维布朗运动, 这已经给出所需结论, 只不过得到的是证明过程中引入的复布朗运动 Z , 而不是原先的 B 。

为完成证明, 记 $\arg B_t$ 为满足 $\arg B_0 = 0$ 的 B_t 辐角的连续选取; 这是有意义的, 因为 B 几乎处处不访问 0。定理 7.19 在 $z = 1$ 时等价于: 若令

$$\begin{aligned} \beta_t &= \log \left| B_{\inf\{s \geq 0: \int_0^s |B_u|^{-2} du > t\}} \right|, \\ \gamma_t &= \arg B_{\inf\{s \geq 0: \int_0^s |B_u|^{-2} du > t\}}, \end{aligned}$$

则 β, γ 是两个相互独立、从 0 出发的一维布朗运动。注意 β, γ 都是 B 的确定性函数, 因此把 B 换成复布朗运动 Z 时, 它们的分布不变。由前一段对 Z 得到的表示, 结论成立。□

下面简要说明斜积表示。把 H_t 写成其反函数的反函数, 得到

$$H_t = \inf \left\{ s \geq 0 : \int_0^s \exp(2\beta_u) du > t \right\}, \quad (7.6)$$

因而

$$\log |B_t| = \beta_{\inf\{s \geq 0: \int_0^s \exp(2\beta_u) du > t\}}.$$

这说明 $|B|$ 完全由一维布朗运动 β 决定。它与以下事实有关： $|B_t|$ 是马尔可夫过程，准确地说是二维 Bessel 过程（参见练习 6.24；Bessel 过程还将在第 8.4.3 节简要讨论）。

另一方面，令

$$\theta_t = \arg B_t = \gamma_{H_t}.$$

过程 θ 不是马尔可夫过程。至少从直观上看，这是因为 θ 在时刻 t 以前的历史包含关于当前 $|B_t|$ 的信息：例如，若 θ 在 t 以前振荡得很快，就说明 $|B_t|$ 应当很小；而 $|B_t|$ 的当前值又影响 θ 的未来演化。

7.6 平面布朗运动的渐近律

本节把斜积表示用于平面布朗运动的若干渐近结果。固定起点 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ （常取 $z = 1$ ），为简便起见把 P_z 记为 P 。仍以

$$\theta_t = \arg B_t$$

表示 B_t 辐角的一个连续选取。虽然 θ 不是马尔可夫过程，但它可写成一个一维布朗运动在独立递增过程下的时间变换；这一事实使我们能够获得许多样本路径性质。例如，因为 $H_t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$)，命题 2.14 立即给出：几乎处处地，

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \theta_t = +\infty, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \theta_t = -\infty.$$

接下来可以问：当 t 很大时， θ_t 的典型大小是多少？答案是著名的平面布朗运动绕数的 Spitzer 定理。

定理 7.20 (Spitzer 定理)。设 $(\theta_t)_{t \geq 0}$ 是从 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 出发的复布朗运动 B 的辐角的连续选取。则当 $t \rightarrow \infty$ 时，

$$\frac{2}{\log t} \theta_t$$

依分布收敛到标准对称 Cauchy 分布。换言之，对每个 $x \in \mathbb{R}$ ，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\frac{2}{\log t} \theta_t \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{dy}{\pi(1+y^2)}.$$

证明定理前，先建立一个关键引理。不失一般性，可设 $z = 1$ 、 $\theta_0 = 0$ 。采用定理 7.19 的记号，使 β, γ 是两个相互独立、从 0 出发的一维布朗运动。

引理 7.21。对每个 $\lambda > 0$ ，定义缩放布朗运动

$$\beta_t^{(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \beta_{\lambda^2 t}, \quad t \geq 0,$$

并令

$$T_1^{(\lambda)} = \inf\{t \geq 0 : \beta_t^{(\lambda)} = 1\}.$$

则当 $t \rightarrow \infty$ 时，

$$\frac{4}{(\log t)^2} H_t - T_1^{((\log t)/2)} \longrightarrow 0$$

依概率成立。

注。 特别地，这表明 $4(\log t)^{-2}H_t$ 依分布收敛到从 0 出发的一维布朗运动击中 1 的時刻的分布。

证明。 对每个 $a > 0$ ，令

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : \beta_t = a\}, \quad T_a^{(\lambda)} = \inf\{t \geq 0 : \beta_t^{(\lambda)} = a\}.$$

为简化记号，在整个证明中令

$$\lambda_t = \frac{\log t}{2},$$

并始终假设 $t > 1$ 。先验证：对每个 $\varepsilon > 0$ ，

$$P\left((\lambda_t)^{-2}H_t > T_{1+\varepsilon}^{(\lambda_t)}\right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0. \quad (7.7)$$

由公式 (7.6)，

$$\begin{aligned} \{(\lambda_t)^{-2}H_t > T_{1+\varepsilon}^{(\lambda_t)}\} &= \left\{ \int_0^{(\lambda_t)^2 T_{1+\varepsilon}^{(\lambda_t)}} \exp(2\beta_u) du < t \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2\lambda_t} \log \int_0^{(\lambda_t)^2 T_{1+\varepsilon}^{(\lambda_t)}} \exp(2\beta_u) du < 1 \right\}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

因为 $2\lambda_t = \log t$ 。在积分中作变量替换 $u = (\lambda_t)^2 v$ ，得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda_t} \log \int_0^{(\lambda_t)^2 T_{1+\varepsilon}^{(\lambda_t)}} \exp(2\beta_u) du \\ = \frac{\log \lambda_t}{\lambda_t} + \frac{1}{2\lambda_t} \log \int_0^{T_{1+\varepsilon}^{(\lambda_t)}} \exp(2\lambda_t \beta_v^{(\lambda_t)}) dv. \end{aligned}$$

对每个固定的 $t > 1$ ，右端与

$$\frac{\log \lambda_t}{\lambda_t} + \frac{1}{2\lambda_t} \log \int_0^{T_{1+\varepsilon}} \exp(2\lambda_t \beta_v) dv \quad (7.9)$$

同分布，因为对任意 $\lambda > 0$ ，缩放布朗运动 $(\beta_t^{(\lambda)})_{t \geq 0}$ 与 $(\beta_t)_{t \geq 0}$ 同分布。

现在使用一个简单的解析事实：对任意连续函数 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 和任意 $s > 0$ ，

$$\frac{1}{2\lambda} \log \int_0^s \exp(2\lambda f(v)) dv \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} \sup_{0 \leq r \leq s} f(r).$$

其证明留给读者。由此，

$$\frac{1}{2\lambda} \log \int_0^{T_{1+\varepsilon}} \exp(2\lambda \beta_v) dv \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} \sup_{0 \leq r \leq T_{1+\varepsilon}} \beta_r = 1 + \varepsilon, \quad \text{a.s.}$$

所以 (7.9) 在 $t \rightarrow \infty$ 时几乎处处收敛到 $1 + \varepsilon$ 。因此

$$\frac{1}{2\lambda_t} \log \int_0^{(\lambda_t)^2 T_{1+\varepsilon}^{(\lambda_t)}} \exp(2\beta_u) du \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1 + \varepsilon$$

依概率成立。故 (7.8) 右端事件的概率趋于 0，从而证明 (7.7)。

完全相同的论证表明，对每个 $\varepsilon \in (0, 1)$ ，

$$P\left((\lambda_t)^{-2}H_t < T_{1-\varepsilon}^{(\lambda_t)}\right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

注意

$$T_{1-\varepsilon}^{(\lambda_t)} < T_1^{(\lambda_t)} < T_{1+\varepsilon}^{(\lambda_t)},$$

并且

$$T_{1+\varepsilon}^{(\lambda_t)} - T_{1-\varepsilon}^{(\lambda_t)}$$

与 $T_{1+\varepsilon} - T_{1-\varepsilon}$ 同分布。当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时, 后一个差依概率趋于 0: 显然 $T_{1-\varepsilon} \uparrow T_1$; 另一方面, 由时刻 T_1 处的强马尔可夫性质和命题 2.14 (i), 有 $T_{1+\varepsilon} \downarrow T_1$ a.s.。引理得证。□

定理 7.20 的证明。 保留上一证明的记号, 并对每个 $\lambda > 0$ 定义缩放布朗运动

$$\gamma_t^{(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \gamma_{\lambda^2 t}.$$

对 $t > 1$, 仍令 $\lambda_t = (\log t)/2$, 则

$$\frac{2}{\log t} \theta_t = \frac{1}{\lambda_t} \gamma_{H_t}^{(\lambda_t)} = \gamma_{(\lambda_t)^{-2} H_t}^{(\lambda_t)}.$$

由引理 7.21, 并利用所有一维布朗运动 $\gamma^{(\lambda)}$ 都同分布这一事实,

$$\frac{2}{\log t} \theta_t - \gamma_{T_1^{(\lambda_t)}}^{(\lambda_t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

依概率成立。

只需再注意: 对每个固定的 $\lambda > 0$, 随机变量 $\gamma_{T_1^{(\lambda)}}^{(\lambda)}$ 服从标准对称 Cauchy 分布。事实上, $(\beta^{(\lambda)}, \gamma^{(\lambda)})$ 是一对相互独立、从 0 出发的一维布朗运动, 所以该随机变量与 γ_{T_1} 同分布。先关于 T_1 条件化, 再利用推论 3.24 后例 (c) 中 T_1 的 Laplace 变换, 得到

$$E[\exp(i\xi \gamma_{T_1})] = E\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2 T_1\right)\right] = \exp(-|\xi|),$$

这正是标准对称 Cauchy 分布的特征函数。□

斜积表示和引理 7.21 还可用于导出其他渐近律。我们知道, 从 $z \neq 0$ 出发的平面布朗运动 B 几乎处处不击中 0; 另一方面, 常返性保证

$$\min\{|B_s| : 0 \leq s \leq t\} \longrightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

因此可以问: 当 t 很大时, 这个最小距离的典型大小是多少? 换言之, 平面布朗运动以怎样的速度接近一个不同于起点的给定点?

命题 7.22。 设平面布朗运动 B 从 $z \neq 0$ 出发。则对每个 $a > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\min_{0 \leq s \leq t} |B_s| \leq t^{-a/2}\right) = \frac{1}{1+a}.$$

例如, 从非零点出发的布朗运动在时刻 t 以前到达距原点不超过 $1/t$ 的位置的概率, 在 $t \rightarrow \infty$ 时趋于 $1/3$; 这并不是一个容易猜到的结果。

证明。 不失一般性, 取 $z = 1$, 并保留引理 7.21 与定理 7.20 的证明中的记号。注意

$$\log\left(\min_{0 \leq s \leq t} |B_s|\right) = \min_{0 \leq s \leq t} \beta_{H_s} = \min_{0 \leq s \leq H_t} \beta_s.$$

因此

$$\frac{2}{\log t} \log\left(\min_{0 \leq s \leq t} |B_s|\right) = \frac{1}{\lambda_t} \min_{0 \leq s \leq H_t} \beta_s = \min_{0 \leq s \leq (\lambda_t)^{-2} H_t} \beta_s^{(\lambda_t)}.$$

由引理 7.21,

$$\min_{0 \leq s \leq (\lambda_t)^{-2} H_t} \beta_s^{(\lambda_t)} - \min_{0 \leq s \leq T_1^{(\lambda_t)}} \beta_s^{(\lambda_t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

依概率成立。因而有依分布收敛

$$\frac{2}{\log t} \log \left(\min_{0 \leq s \leq t} |B_s| \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \min_{0 \leq s \leq T_1} \beta_s,$$

其中 β 是从 0 出发的一维布朗运动, 而 $T_1 = \inf\{s \geq 0 : \beta_s = 1\}$ 。若

$$T_{-a} = \inf\{s \geq 0 : \beta_s = -a\},$$

则

$$P\left(\min_{0 \leq s \leq T_1} \beta_s \leq -a\right) = P(T_{-a} < T_1) = \frac{1}{1+a}$$

(参见第 3.4 节), 结论随即成立。 $\square$

作为斜积表示的最后一个应用, 下面陈述布朗运动在球内停留时间的 Kallianpur–Robbins 渐近律; 这里起点可以任意。

定理 7.23 (Kallianpur–Robbins 渐近律)。 设 $z \in \mathbb{C}$ 、 $R > 0$ 。在 P_z 下, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{2}{\log t} \int_0^t 1_{\{|B_s| < R\}} ds$$

依分布收敛到均值为 R^2 的指数分布。

定理 7.23 的证明部分依赖第 9 章建立的局部时理论, 因此推迟到第 9 章末尾。

练习

以下各题中, $(B_t)_{t \geq 0}$ 是 d 维布朗运动, 在概率测度 P_x 下从 x 出发。除练习 7.28 外, 始终假设 $d \geq 2$ 。

练习 7.24。 设 B_1 是 $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) 中的开单位球, 并令

$$B_1^* = B_1 \setminus \{0\}.$$

在 ∂B_1^* 上定义连续函数 g : 当 $|x| = 1$ 时令 $g(x) = 0$, 并令 $g(0) = 1$ 。证明: B_1^* 上边界条件为 g 的 Dirichlet 问题无解。

解答 7.24。 反设存在解 u 。它在紧集 $\bar{B}_1$ 上连续, 故有界。对 $0 < \varepsilon < |x| < 1$, 令

$$U_r = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = r\}.$$

在环域 $\{\varepsilon < |y| < 1\}$ 上使用布朗运动的 Dirichlet 表示:

$$u(x) = E_x[u(B_{U_\varepsilon}) 1_{\{U_\varepsilon < U_1\}}],$$

因为外球面上的边值为 0。而

$$P_x(U_\varepsilon < U_1) = \begin{cases} \frac{\log|x|}{\log\varepsilon}, & d=2, \\ \frac{1-|x|^{2-d}}{1-\varepsilon^{2-d}}, & d \geq 3, \end{cases} \rightarrow 0.$$

由 u 有界可知 $u(x) = 0$ 对所有 $x \in B_1^*$ 成立。这与 $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = g(0) = 1$ 矛盾，故该 Dirichlet 问题无解。□

练习 7.25 (极集)。 本题始终设 K 是 $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) 中的非空紧集，并令

$$T_K = \inf\{t \geq 0 : B_t \in K\}.$$

若存在 $x \in K^c$ 使 $P_x(T_K < \infty) = 0$ ，就称 K 为极集。

1. 仿照命题 7.7 (ii) 的证明使用强马尔可夫性质，证明函数

$$x \mapsto P_x(T_K < \infty)$$

在 K^c 的每个连通分支上调和。

2. 从本问起直到第 4 问，假设 K 是极集。证明 K^c 连通，并且对每个 $x \in K^c$ ，都有 $P_x(T_K < \infty) = 0$ 。

提示。 注意集合

$$\{x \in K^c : P_x(T_K < \infty) = 0\}$$

在 K^c 中既开又闭。

3. 设 D 是包含 K 的有界区域，并令 $D' = D \setminus K$ 。证明： D' 上的任意有界调和函数 h 都可延拓成 D 上的调和函数。若把“有界”改为“正”，结论是否仍成立？

4. 对 $x \in \partial D$ 令 $g(x) = 0$ ，对 $x \in \partial D' \setminus \partial D$ 令 $g(x) = 1$ 。证明： D' 上边界条件为 g 的 Dirichlet 问题无解。（这推广了练习 7.24。）

5. 若 $\alpha \in (0, d]$ ，称紧集 K 的 α 维 Hausdorff 测度为零，如果对每个 $\varepsilon > 0$ ，都存在整数 $N_\varepsilon \geq 1$ 以及 N_ε 个开球

$$B^{(1)}, \dots, B^{(N_\varepsilon)},$$

其半径分别为 $r^{(1)}, \dots, r^{(N_\varepsilon)}$ ，使 K 包含于这些球的并集，且

$$\sum_{j=1}^{N_\varepsilon} (r^{(j)})^\alpha \leq \varepsilon.$$

证明：若 $d \geq 3$ ，且 K 的 $(d-2)$ 维 Hausdorff 测度为零，则 K 是极集。

解答 7.25。 记 $\phi(x) = P_x(T_K < \infty)$ 。

1. 若 $\overline{B}(x, r) \subset K^c$ ，令 $\tau = \inf\{t : |B_t - x| = r\}$ 。强马尔可夫性质给出

$$\phi(x) = E_x[\phi(B_\tau)] = \int_{\partial B(x, r)} \phi(y) \sigma_{x, r}(dy).$$

因而 ϕ 在 K^c 的每个连通分支上满足球面平均值性质，故调和。

2. 若 K^c 有两个不同的连通分支，从其中任一点出发去击中另一分支内的一个小球，连续路径必先穿过 K ；而布朗运动击中该小球的概率为正。这将使每个分支上的 ϕ 都严格为

正, 与 K 为极集矛盾。因此 K^c 连通。又 $\phi \geq 0$ 调和, 且在某一点为 0, 强极小值原理给出

$$\phi \equiv 0 \quad \text{于 } K^c.$$

3. 取包含 K 的相对紧光滑区域递增列 $G_n \uparrow D$ 。对 $z \in K$ 定义

$$\tilde{h}(z) = E_z[h(B_{\tau_n})], \quad \tau_n = \inf\{t : B_t \notin G_n\}.$$

强马尔可夫性质及 K 的极性说明右端与充分大的 n 无关; 对 $z \in D \setminus K$, 同一公式等于 $h(z)$ 。球面平均值性质表明 $\tilde{h}$ 在 D 上调和, 故给出所需延拓。

把“有界”仅改成“正”时结论不成立。例如 $K = \{0\}$, 在穿孔球中

$$h(x) = \begin{cases} -\log|x|, & d=2, \\ |x|^{2-d}, & d \geq 3 \end{cases}$$

是正调和函数, 却不能调和地延拓到 0。

4. 若该 Dirichlet 问题有解, 则解在 $\bar{D}'$ 上有界。由于 $P_x(T_K < \infty) = 0$, 布朗运动从 D' 出发只会从 ∂D 离开; Dirichlet 表示于是给出 $u(x) = 0$ 。这与趋近 $\partial D' \setminus \partial D$ 时边值应趋于 1 矛盾。

5. 固定 $x \in K^c$, 令 $\rho = d(x, K) > 0$ 。用题设中的球覆盖 K , 并把每个中心移到 K 中、半径至多扩大为原来的两倍。若 ε 足够小, 可令各球半径 $r_j < \rho/2$ 。在 $d \geq 3$ 时,

$$P_x(T_{\bar{B}(c_j, r_j)} < \infty) = \left(\frac{r_j}{|x - c_j|}\right)^{d-2} \leq \left(\frac{2r_j}{\rho}\right)^{d-2}.$$

由并集上界,

$$P_x(T_K < \infty) \leq \frac{2^{d-2}}{\rho^{d-2}} \sum_j r_j^{d-2} \leq \frac{2^{d-2}}{\rho^{d-2}} \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 得到 $P_x(T_K < \infty) = 0$, 故 K 为极集。

□

练习 7.26. 本题设 $d \geq 3$ 。令 K 是 $\mathbb{R}^d$ 的开单位球内的紧集, 并记

$$T_K = \inf\{t \geq 0 : B_t \in K\}.$$

假设 $D = \mathbb{R}^d \setminus K$ 连通, 并设 g 是 K 上的连续函数。本题目标是确定所有满足下列性质的函数 $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$:

(P) u 有界且在 $\bar{D}$ 上连续, 在 D 上调和, 并且当 $y \in \partial D$ 时 $u(y) = g(y)$ 。

这是 D 上的 Dirichlet 问题, 但与第 7.2 节不同, D 在这里无界。固定一个递增实数列 $(R_n)_{n \geq 1}$, 其中 $R_1 \geq 1$, 并且 $R_n \uparrow \infty$ 。对每个 $n \geq 1$, 令

$$T^{(n)} = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq R_n\}.$$

1. 假设 u 满足 (P)。证明: 对每个 $n \geq 1$ 以及满足 $x \in D$ 、 $|x| < R_n$ 的每个 x ,

$$\begin{aligned} u(x) &= E_x[g(B_{T_K})1_{\{T_K \leq T^{(n)}\}}] \\ &\quad + E_x[u(B_{T^{(n)}})1_{\{T^{(n)} < T_K\}}]. \end{aligned}$$

2. 证明: 必要时把 $(R_n)_{n \geq 1}$ 换成一个子列后, 可以假设存在常数 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得对每个 $x \in D$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_x[u(B_{T(n)})] = \alpha;$$

并且此时

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = \alpha.$$

3. 证明: 对每个 $x \in D$,

$$u(x) = E_x[g(B_{T_K})1_{\{T_K < \infty\}}] + \alpha P_x(T_K = \infty).$$

4. 假设 D 在每个 $y \in \partial D$ 处满足外锥条件 (定义与有界区域时相同)。证明: 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 第 3 问的公式都给出问题 (P) 的一个解。

解答 7.26. 令 $M = \|u\|_\infty$ 。

1. 在有界区域 $B(0, R_n) \setminus K$ 上应用 Dirichlet 表示, 边界的两部分分别为 K 与 $\partial B(0, R_n)$, 立即得到

$$u(x) = E_x[g(B_{T_K})1_{\{T_K \leq T(n)\}}] + E_x[u(B_{T(n)})1_{\{T(n) < T_K\}}].$$

2. 令

$$f_n(x) = E_x[u(B_{T(n)})], \quad |x| < R_n.$$

f_n 在 $B(0, R_n)$ 上调和且 $|f_n| \leq M$ 。调和函数的内点梯度估计与 Arzelà–Ascoli 定理, 配合对有理球的对角线抽取, 给出一子列 f_{n_k} 在每个紧集上一致收敛到有界整调和函数 f 。Liouville 定理说明 $f \equiv \alpha$ 。

还需辨认无穷远处的极限。因 $K \subset B(0, 1)$, 当 $1 < |x| < R_{n_k}$ 时

$$P_x(T_K < T^{(n_k)}) \leq P_x(T_{\bar{B}(0,1)} < T^{(n_k)}) = \frac{R_{n_k}^{2-d} - |x|^{2-d}}{R_{n_k}^{2-d} - 1}.$$

给定 $\varepsilon > 0$, 先取 $|x|$ 足够大, 再取 k 足够大, 使右端及 $|f_{n_k}(x) - \alpha|$ 都小于 ε 。第 1 问与 f_{n_k} 的定义给出

$$|u(x) - f_{n_k}(x)| \leq 2M P_x(T_K < T^{(n_k)}),$$

因而 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = \alpha$ 。

3. 令 $k \rightarrow \infty$ 。当 $d \geq 3$ 时 $|B_t| \rightarrow \infty$ a.s.; 在 $\{T_K = \infty\}$ 上, $u(B_{T(n_k)}) \rightarrow \alpha$, 而在 $\{T_K < \infty\}$ 上第二项最终消失。控制收敛于是给出

$$u(x) = E_x[g(B_{T_K})1_{\{T_K < \infty\}}] + \alpha P_x(T_K = \infty).$$

4. 反过来, 用上式定义 u 。强马尔可夫性质给出球面平均值性质, 故 u 在 D 上调和; 显然它有界, 且第 2 问中的击中概率估计给出 $u(x) \rightarrow \alpha$ 当 $|x| \rightarrow \infty$ 。外锥条件保证每个边界点对布朗运动都是正则点, 所以当 $x \rightarrow y \in \partial D$ 时 $T_K \rightarrow 0$ (依概率), 结合 g 的连续性得 $u(x) \rightarrow g(y)$ 。因此任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都产生一个满足 (P) 的解。

□

练习 7.27. 设 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是非常值全纯函数。利用平面布朗运动证明集合

$$\{f(z) : z \in \mathbb{C}\}$$

在 $\mathbb{C}$ 中稠密。Picard 小定理给出更强的结论：上述集合在 $\mathbb{C}$ 中的补集至多含一个点。这也可用布朗运动证明，但论证更复杂，参见 [12]。

解答 7.27。 反设 $f(\mathbb{C})$ 不稠密，则存在开圆盘 U 与 $f(\mathbb{C})$ 不相交。令 B 为从 0 出发的平面布朗运动。平面布朗运动的共形不变性给出另一平面布朗运动 Γ ，使

$$f(B_t) = \Gamma_{C_t}, \quad C_t = \int_0^t |f'(B_s)|^2 ds,$$

其中 $\Gamma_0 = f(0)$ 。因 f 非常值，存在开球 V 及 $c > 0$ ，使 $|f'| \geq c$ 于 V 。平面布朗运动反复访问 V ，且在 V 中的总占用时间 a.s. 无穷，故 $C_\infty = \infty$ a.s.

另一方面，平面布朗运动 Γ a.s. 击中非空开圆盘 U 。时间变换遍历 $[0, \infty)$ ，于是 $f(B_t) = \Gamma_{C_t}$ 必在某时进入 U ，这与 $U \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$ 矛盾。因此 $f(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}$ 中稠密。 $\square$

练习 7.28 (布朗运动的 Feynman-Kac 公式)。 这是第 6 章练习 6.26 的继续。沿用该题记号，假设 $E = \mathbb{R}^d$ 、 $X_t = B_t$ 。设 $v \in C_0(\mathbb{R}^d)$ 非负，并假设 v 连续可微且一阶偏导数有界。同练习 6.26，对每个 $\varphi \in B(\mathbb{R}^d)$ ，令

$$Q_t^v \varphi(x) = E_x \left[\varphi(X_t) \exp \left(- \int_0^t v(X_s) ds \right) \right].$$

1. 利用练习 6.26 第 2 问的公式证明：对每个 $t > 0$ 和每个 $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ ，函数 $Q_t^v \varphi$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上二阶连续可微，并且它及其不超过二阶的各阶偏导数都属于 $C_0(\mathbb{R}^d)$ 。由此推出 $Q_t^v \varphi \in D(L)$ 。
2. 设 $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ ，并对每个 $t > 0$ 、 $x \in \mathbb{R}^d$ 令 $u_t(x) = Q_t^v \varphi(x)$ 。利用练习 6.26 第 3 问证明：对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ ，函数 $t \mapsto u_t(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上连续可微，并且

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u_t - v u_t.$$

解答 7.28。 以 P_t 表示热半群，并写 $u_t = Q_t^v \varphi$ 。

1. 练习 6.26 给出 Duhamel 公式

$$u_t = P_t \varphi - \int_0^t P_s(v u_{t-s}) ds. \quad (1)$$

设 k_s 为热核。则

$$\|\partial_i P_s h\|_\infty \leq C s^{-1/2} \|h\|_\infty, \quad \|\partial_i k_s\|_{L^1} = C s^{-1/2}. \quad (2)$$

由于 $s^{-1/2}$ 在 0 附近可积，对 (1) 在积分号下求一次导数是合法的，并得 $\partial_i u_t \in C_0$ 。再利用

$$\partial_j \partial_i P_s(v u_{t-s}) = (\partial_j(v u_{t-s})) * \partial_i k_s$$

以及由第一次求导得到的估计

$$\|\nabla u_r\|_\infty \leq C_t(1 + r^{-1/2}), \quad 0 < r \leq t,$$

可知二次求导的控制函数至多是常数倍的 $s^{-1/2}(1 + (t-s)^{-1/2})$ ，它在 $(0, t)$ 上可积。因此 $u_t \in C^2(\mathbb{R}^d)$ ，且 u_t 及其不超过二阶的偏导数都属于 $C_0(\mathbb{R}^d)$ 。特别地 $u_t, \Delta u_t \in C_0$ ，故 $u_t \in D(L)$ 且 $Lu_t = \frac{1}{2} \Delta u_t$ 。

2. 由练习 6.26 的半群性质,

$$u_{t+h} = Q_h^v u_t.$$

第 1 问说明 $u_t \in D(L)$, 而练习 6.26 第 3 问给出

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{u_{t+h} - u_t}{h} = Lu_t - vu_t = \frac{1}{2} \Delta u_t - vu_t.$$

对左导数作同样的半群论证; (1)、(2) 及控制收敛还说明右端随 $t > 0$ 连续。因此

$$\boxed{\frac{\partial u_t}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u_t - vu_t, \quad t > 0.}$$

□

练习 7.29。 本题设 $d = 2$, 并把 $\mathbb{R}^2$ 与复平面 $\mathbb{C}$ 等同。取 $\alpha \in (0, \pi)$, 考虑开锥

$$C_\alpha = \{re^{i\theta} : r > 0, \theta \in (-\alpha, \alpha)\}.$$

令

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin C_\alpha\}.$$

1. 证明: 在 P_1 下, $\log |B_T|$ 的分布等于

$$\beta_{\inf\{t \geq 0 : |\gamma_t| = \alpha\}}$$

的分布, 其中 β, γ 是两个相互独立、从 0 出发的一维布朗运动。

2. 验证: 对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$E_1[\exp(i\lambda \log |B_T|)] = \frac{1}{\cosh(\alpha\lambda)}.$$

解答 7.29。

1. 由平面布朗运动的斜积分分解, 存在相互独立的实布朗运动 β, γ , 使

$$B_t = \exp(\beta_{H_t} + i\gamma_{H_t}), \quad H_t = \int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2}.$$

H 连续递增且 $H_\infty = \infty$ 。若 $S = \inf\{s \geq 0 : |\gamma_s| = \alpha\}$, 则 $H_T = S$, 从而

$$\log |B_T| = \beta_{H_T} = \beta_S.$$

2. 在给定 γ 后, S 已确定, 且

$$E[e^{i\lambda\beta_S} \mid \gamma] = e^{-\lambda^2 S/2}.$$

对停止于 S 的指数鞅 $\exp(\lambda\gamma_t - \lambda^2 t/2)$ 使用可选停时定理, 并利用 $\gamma_S = \pm\alpha$ 的对称性:

$$1 = E[e^{\lambda\gamma_S - \lambda^2 S/2}] = \cosh(\alpha\lambda) E[e^{-\lambda^2 S/2}].$$

所以

$$\boxed{E_1[e^{i\lambda \log |B_T|}] = \frac{1}{\cosh(\alpha\lambda)}}.$$

□

注释与评述

布朗运动与偏微分方程之间的联系由来已久，并且正是这些联系推动了对这一随机过程的研究。Durrett 的著作 [18, 第 8 章] 综述了可以用布朗运动求解的偏微分方程。定理 7.1 的表示（写成高斯密度的形式）可追溯至十九世纪 Fourier 和 Laplace 的工作¹；相关文献见 [49]。布朗运动与调和函数之间的优美联系由 Kakutani [45, 46] 发现并研究，后来 Hunt [33, 34] 研究了位势论同暂留马尔可夫过程之间的联系（关于这一主题的更多内容见 Blumenthal–Gettoor 的著作 [5]）。Port 与 Stone [69] 以及 Doob [16] 的著作对布朗运动与经典位势论的联系作了出色阐述；另见 Itô 与 McKean [42]、Chung [9] 以及 [62] 的第 3、8 章。

平面布朗运动的共形不变性由 Lévy [54] 提出，但他只给出了非常简略的证明。Davis 的论文 [12] 很好地综述了平面布朗运动与解析函数之间的联系；另见 Durrett 的著作 [18]，以及 Gettoor 与 Sharpe 的论文 [28]。后者引入了共形鞅的概念，它在鞅论中扮演着类似于解析函数的角色。Spitzer 定理由经典论文 [75] 得到，Kallianpur–Robbins 律则在 [48] 中导出。早在 1940 年，Lévy [53] 就已经观察到平面布朗运动的许多非凡性质。关于平面布朗运动渐近律的系统研究可参见 Pitman 与 Yor [68]。本章的叙述紧随 [52]，该文还给出了斜积表示的其他应用。

¹校订注：英文原文误作 “ninetieth century”（九十世纪），显然应为 “nineteenth century”（十九世纪）。

第八章 随机微分方程

本章讨论随机微分方程；Itô 正是为研究这类方程而构造了随机积分。给出一般定义以后，我们将详细处理 Lipschitz 情形；在这一情形下，解的强存在性与唯一性都成立。仍在 Lipschitz 情形下，我们证明随机微分方程的解是具有 Feller 半群的马尔可夫过程，其生成元是一个二阶微分算子。由第 6 章的结果，Feller 性质立即给出随机微分方程解的强马尔可夫性质。最后一节介绍几个重要例子。本章可以不依赖第 7 章而独立阅读。

8.1 动机与一般定义

随机微分方程的目标，是为受到随机噪声扰动的微分方程建立模型。先考虑常微分方程

$$y'(t) = b(y(t)),$$

或用微分形式写成

$$dy_t = b(y_t) dt.$$

这类方程可用于刻画物理系统的演化。若把系统受到的随机扰动考虑在内，就加入一个噪声项；典型形式是 σdB_t ，其中 B 是布朗运动，常数 σ 表示噪声强度。这里采用布朗运动，是因为它具有独立增量性质；这一性质对应于假设不相交时间区间内的随机扰动相互独立。

于是得到形如

$$dy_t = b(y_t) dt + \sigma dB_t$$

的随机微分方程。只有它的积分形式

$$y_t = y_0 + \int_0^t b(y_s) ds + \sigma B_t$$

具有严格的数学意义。

还可允许 σ 依赖于系统在时刻 t 的状态，得到

$$dy_t = b(y_t) dt + \sigma(y_t) dB_t,$$

或其积分形式

$$y_t = y_0 + \int_0^t b(y_s) ds + \int_0^t \sigma(y_s) dB_s.$$

由于含有关于 dB_s 的积分，上一方程只有借助第 5 章建立的随机积分理论才有意义。进一步允许 σ, b 依赖时间参数 t ，便得到下面的定义。

定义 8.1。 设 d, m 为正整数， σ, b 是定义在 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上的局部有界可测函数，分别取值于 $\mathcal{M}_{d \times m}(\mathbb{R})$ 和 $\mathbb{R}^d$ ，其中 $\mathcal{M}_{d \times m}(\mathbb{R})$ 是所有 $d \times m$ 实矩阵组成的集合。记

$$\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m}, \quad b = (b_i)_{1 \leq i \leq d}.$$

随机微分方程

$$E(\sigma, b) : \quad dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t + b(t, X_t) dt$$

的一个解由下列对象组成：

- 滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty]}, P)$ ，其中总假设滤过完备；
- 从 0 出发的 m 维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动 $B = (B^1, \dots, B^m)$ ；
- 取值于 $\mathbb{R}^d$ 、具有连续样本路径的 $(\mathcal{F}_t)$ -适应过程 $X = (X^1, \dots, X^d)$ ，满足

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s) ds.$$

最后一个等式的含义是：对每个 $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$X_t^i = X_0^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s) dB_s^j + \int_0^t b_i(s, X_s) ds.$$

若还满足 $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$ ，就称 X 是 $E_x(\sigma, b)$ 的一个解。

谈论 $E(\sigma, b)$ 的解时，并不预先固定滤过概率空间和布朗运动 B 。若这些对象已经固定，我们会明确说明。随机微分方程有若干种存在性与唯一性概念。

定义 8.2. 对方程 $E(\sigma, b)$ ，称：

- 弱存在性成立，如果对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ ， $E_x(\sigma, b)$ 都至少有一个解；
- 弱存在性与弱唯一性成立，如果还对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ ， $E_x(\sigma, b)$ 的所有解都具有同一分布；
- 路径唯一性成立，如果在固定滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 与固定 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动 B 后，任意两个满足 $X_0 = X'_0$ a.s. 的解 X, X' 都不可分辨。

此外，若 $E_x(\sigma, b)$ 的解 X 关于 B 的完备自然滤过适应，就称 X 为强解。

注。 弱存在性和弱唯一性可能同时成立，而路径唯一性却不成立。举一个简单例子：设 β 是从 $\beta_0 = y$ 出发的一维布朗运动，并令

$$B_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s) d\beta_s,$$

其中当 $x > 0$ 时 $\operatorname{sgn}(x) = 1$ ，当 $x \leq 0$ 时 $\operatorname{sgn}(x) = -1$ 。由随机积分的结合律立即得到

$$\beta_t = y + \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s) dB_s.$$

另一方面， B 是二次变差满足 $\langle B, B \rangle_t = t$ 的连续鞅，故定理 5.12 说明 B 是从 0 出发的布朗运动。因此 β 解出了

$$dX_t = \operatorname{sgn}(X_t) dB_t, \quad X_0 = y,$$

从而该方程具有弱存在性。再次使用定理 5.12 可知，该方程的任何其他解都必为布朗运动，所以弱唯一性也成立。

但是路径唯一性不成立。事实上，在上述构造中取 $y = 0$ ，很容易看出 β 与 $-\beta$ 都以同一个布朗运动 B 和同一初值 0 解出该方程；这里使用了

$$\int_0^t 1_{\{\beta_s=0\}} ds = 0, \quad \int_0^t 1_{\{\beta_s=0\}} dB_s = 0.$$

还可以证明 β 不是强解： B 的自然滤过与 $|\beta|$ 的自然滤过相同，而后者严格小于 β 的自然滤过。证明从略；它是第 9 章公式 (9.18) 的简单应用。

下面的定理联系了不同的存在性与唯一性概念。

定理 (Yamada–Watanabe)。若弱存在性与路径唯一性都成立，则弱唯一性也成立。此外，对任意滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 和任意 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动 B ，对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ ， $E_x(\sigma, b)$ 都存在唯一强解。

证明可参见 Yamada 与 Watanabe [83]，这里从略，因为后文不需要这一结果。在我们将研究的 Lipschitz 情形中，会直接建立 Yamada–Watanabe 定理所给出的性质。

8.2 Lipschitz 情形

本节始终作如下假设。

假设。函数 σ, b 在 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上连续，并且关于变量 x 满足 Lipschitz 条件：存在常数 K ，使对每个 $t \geq 0$ 及 $x, y \in \mathbb{R}^d$ ，

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|, \quad |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|.$$

定理 8.3。在上述假设下，方程 $E(\sigma, b)$ 具有路径唯一性；并且，对任意滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 和任意 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动 B ，对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ ， $E_x(\sigma, b)$ 都存在唯一强解。

特别地，该定理蕴含 $E(\sigma, b)$ 的弱存在性。弱唯一性将由下一个定理得到；也可结合路径唯一性与 Yamada–Watanabe 定理推出它。

注。可以把 σ, b 的 Lipschitz 假设“局部化”，即允许常数 K 依赖于参数 t, x, y 所处的紧集。不过这时必须保留形如

$$|\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|), \quad |b(t, x)| \leq K(1 + |x|)$$

的线性增长条件。这类条件用于防止解在有限时间爆破，在常微分方程中也已经出现。

证明。为简化记号，只证明 $d = m = 1$ 的情形。一般情形的论证完全相同，只是记号更繁重。

先证明路径唯一性。在同一滤过概率空间上、关于同一个布朗运动 B ，考虑两个满足 $X_0 = X'_0$ 的解 X, X' 。固定 $M > 0$ ，并令

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq M \text{ 或 } |X'_t| \geq M\}.$$

对每个 $t \geq 0$,

$$X_{t \wedge \tau} = X_0 + \int_0^{t \wedge \tau} \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^{t \wedge \tau} b(s, X_s) ds,$$

而 $X'_{t \wedge \tau}$ 满足类似方程。固定 $T > 0$ 。对两式作差，并使用估计 (5.14)，对 $t \in [0, T]$ 得

$$\begin{aligned} E[(X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau})^2] &\leq 2E \left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)) dB_s \right)^2 \right] \\ &\quad + 2E \left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s)) ds \right)^2 \right] \\ &\leq 2E \left[\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s))^2 ds \right] \\ &\quad + 2TE \left[\int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s))^2 ds \right] \\ &\leq 2K^2(1+T)E \left[\int_0^{t \wedge \tau} (X_s - X'_s)^2 ds \right] \\ &\leq 2K^2(1+T)E \left[\int_0^t (X_{s \wedge \tau} - X'_{s \wedge \tau})^2 ds \right]. \end{aligned}$$

因此函数

$$h(t) = E[(X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau})^2]$$

满足

$$h(t) \leq C \int_0^t h(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

其中 $C = 2K^2(1+T)$ 。

引理 8.4 (Gronwall 引理)。 设 $T > 0$, g 是 $[0, T]$ 上非负、有界、可测的函数。假设存在常数 $a, b \geq 0$, 使对每个 $t \in [0, T]$,

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds.$$

则对每个 $t \in [0, T]$,

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

引理的证明。 反复使用对 g 的假设，得到：对每个 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} g(t) &\leq a + a(bt) + b^2 \int_0^t ds \int_0^s dr g(r) \\ &\leq a + a(bt) + a \frac{(bt)^2}{2} + \cdots + a \frac{(bt)^n}{n!} \\ &\quad + b^{n+1} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_n} ds_{n+1} g(s_{n+1}). \end{aligned}$$

若 $0 \leq g \leq A$, 则最右端最后一项不超过 $A(bt)^{n+1}/(n+1)!$, 因而当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 0。结论随即成立。 $\square$

回到定理的证明。函数 h 不超过 $4M^2$, 而引理的假设以 $a = 0, b = C$ 成立，故 $h = 0$, 从而 $X_{t \wedge \tau} = X'_{t \wedge \tau}$ 。令 $M \rightarrow \infty$, 得到 $X_t = X'_t$, 路径唯一性得证。

为证明第二个断言, 使用 Picard 逐次逼近法构造解. 归纳定义

$$\begin{aligned} X_t^0 &= x, \\ X_t^1 &= x + \int_0^t \sigma(s, x) dB_s + \int_0^t b(s, x) ds, \\ X_t^n &= x + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

由归纳可知, 每个 X^n 都适应且具有连续样本路径, 因此这些随机积分均有定义.

只需证明: 对每个 $T > 0$, $E_x(\sigma, b)$ 在 $[0, T]$ 上有强解. 事实上, 唯一性随后会把不同 T 上的解拼接成 $\mathbb{R}_+$ 上的唯一强解, 并且它在 $[0, T]$ 上与该区间内构造的解一致.

固定 $T > 0$. 对每个 $n \geq 1$ 和 $t \in [0, T]$, 令

$$g_n(t) = E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^n - X_s^{n-1}|^2 \right].$$

下面归纳估计 g_n ; 目前甚至还不能断言这些函数有限. 函数 $\sigma(\cdot, x)$ 与 $b(\cdot, x)$ 在 $[0, T]$ 上连续, 因而有界. 对随机积分项使用 L^2 中的 Doob 不等式, 可知存在常数 C'_T , 使

$$g_1(t) \leq C'_T, \quad t \in [0, T].$$

又

$$\begin{aligned} X_t^{n+1} - X_t^n &= \int_0^t [\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})] dB_s \\ &\quad + \int_0^t [b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})] ds. \end{aligned}$$

对第一项使用 $p = 2$ 的 Burkholder–Davis–Gundy 不等式, 并以 $C(2)$ 表示该不等式中的常数, 得到

$$\begin{aligned} E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right] &\leq 2C(2) E \left[\int_0^t (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))^2 du \right] \\ &\quad + 2TE \left[\int_0^t (b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1}))^2 du \right] \\ &\leq 2(C(2) + T)K^2 E \left[\int_0^t |X_u^n - X_u^{n-1}|^2 du \right] \\ &\leq C_T E \left[\int_0^t \sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2 du \right], \end{aligned}$$

其中 $C_T = 2(C(2) + T)K^2$. 所以对每个 $n \geq 1$,

$$g_{n+1}(t) \leq C_T \int_0^t g_n(u) du. \quad (8.1)$$

由 $g_1(t) \leq C'_T$ 与 (8.1) 归纳得到: 对每个 $n \geq 1$, $t \in [0, T]$,

$$g_n(t) \leq C'_T (C_T)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

特别地,

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(T)^{1/2} < \infty,$$

这蕴含

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n| < \infty, \quad \text{a.s.}$$

因此 $(X_t^n)_{0 \leq t \leq T}$ 几乎处处在 $[0, T]$ 上一致收敛到一个具有连续样本路径的极限过程 $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ 。归纳还可验证，每个 X^n 都关于 B 的完备自然滤过适应，故 X 也如此。

最后，由 σ, b 关于 x 的 Lipschitz 性，对每个 $t \in [0, T]$,

$$\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s - \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

以及

$$\int_0^t b(s, X_s) ds - \int_0^t b(s, X_s^n) ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

都依概率成立。处理随机积分时可使用命题 5.8，并注意

$$|X_s^n - X_s| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{0 \leq r \leq s} |X_r^{k+1} - X_r^k|.$$

在定义 X^n 的递推方程中令 $n \rightarrow \infty$ ，便知 X 在 $[0, T]$ 上解出 $E_x(\sigma, b)$ 。定理得证。 $\square$

下面以 $W(dw)$ 表示典范空间 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ 上的 Wiener 测度；该空间由所有从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的连续函数组成。换言之，若 B 是从 0 出发的 m 维布朗运动，则 $W(dw)$ 是 $(B_t)_{t \geq 0}$ 的分布。

定理 8.5. 在定理 8.3 的假设下，对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ ，存在映射

$$F_x : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m) \longrightarrow C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d),$$

当定义域赋予由所有 W -零测集完备化的 Borel σ -代数、值域赋予 Borel σ -代数时，该映射可测；并且满足：

- (i) 对每个 $t \geq 0$ ， $F_x(w)_t$ 在 $W(dw)$ -a.s. 意义下等于 $(w(r))_{0 \leq r \leq t}$ 的某个可测函数；
- (ii) 对每个 $w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ ，映射 $x \mapsto F_x(w)$ 连续；
- (iii) 对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ ，任取完备滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 和满足 $B_0 = 0$ 的 m 维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动 B ，由

$$X_t = F_x(B)_t$$

定义的过程 X 是 $E_x(\sigma, b)$ 的唯一解。此外，若 U 是 $\mathcal{F}_0$ -可测的 $\mathbb{R}^d$ -值随机变量，则 $F_U(B)_t$ 是初值 $X_0 = U$ 的唯一解。

校订注。 英文原文在定理首句把 $x \in \mathbb{R}^d$ 误写为 $x \in \mathbb{R}$ ，又在 (iii) 中把一般维初值 U 误称为“实随机变量”。但同一定理的映射值域、(iii) 的 $x \in \mathbb{R}^d$ 以及方程本身都明确是 d 维的，故两处应分别为 $x \in \mathbb{R}^d$ 和“ $\mathbb{R}^d$ -值随机变量”，现已改正。

注。 断言 (iii) 特别蕴含 $E(\sigma, b)$ 的弱唯一性： $E_x(\sigma, b)$ 的任何解都必为 $F_x(B)$ 的形式，因而其分布唯一地等于 $W(dw)$ 在 F_x 下的像。

证明。 仍只证明 $d = m = 1$ 的情形。令 $\mathcal{N}$ 为 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 中所有 W -零测集组成的类，并对 $t \in [0, \infty]$ 令

$$\mathcal{G}_t = \sigma(w(s) : 0 \leq s \leq t) \vee \mathcal{N}.$$

对每个 $x \in \mathbb{R}$ ，以 X^x 表示在滤过概率空间

$$(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{G}_\infty, (\mathcal{G}_t), W)$$

上、关于典范布朗运动 $B_t(w) = w(t)$ 的 $E_x(\sigma, b)$ 的解。由定理 8.3, 该解存在且在不可分辨意义下唯一; 这里 $(\mathcal{G}_t)$ 按构造完备。

取 $x, y \in \mathbb{R}$, 并令

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |X_t^x| \geq n \text{ 或 } |X_t^y| \geq n\}.$$

取 $p \geq 2, T \geq 1$ 。先用 Burkholder–Davis–Gundy 不等式, 再用 Hölder 不等式; 对 $t \in [0, T]$, 得到

$$\begin{aligned} & E \left[\sup_{s \leq t} |X_{s \wedge T_n}^x - X_{s \wedge T_n}^y|^p \right] \\ & \leq C_p \left(|x - y|^p + E \left[\sup_{s \leq t} \left| \int_0^{s \wedge T_n} (\sigma(r, X_r^x) - \sigma(r, X_r^y)) dB_r \right|^p \right] \right. \\ & \quad \left. + E \left[\sup_{s \leq t} \left| \int_0^{s \wedge T_n} (b(r, X_r^x) - b(r, X_r^y)) dr \right|^p \right] \right) \\ & \leq C'_p \left(|x - y|^p + E \left[\left(\int_0^{t \wedge T_n} (\sigma(r, X_r^x) - \sigma(r, X_r^y))^2 dr \right)^{p/2} \right] \right. \\ & \quad \left. + E \left[\left(\int_0^{t \wedge T_n} |b(r, X_r^x) - b(r, X_r^y)| dr \right)^p \right] \right) \\ & \leq C''_p \left(|x - y|^p + T^p \int_0^t E[|X_{r \wedge T_n}^x - X_{r \wedge T_n}^y|^p], dr \right). \end{aligned}$$

常数 $C_p, C'_p, C''_p < \infty$ 只依赖于 p (以及 Lipschitz 常数 K), 而不依赖 n, x, y, T 。因为

$$t \mapsto E \left[\sup_{s \leq t} |X_{s \wedge T_n}^x - X_{s \wedge T_n}^y|^p \right]$$

有界, 由引理 8.4, 对 $t \in [0, T]$,

$$E \left[\sup_{s \leq t} |X_{s \wedge T_n}^x - X_{s \wedge T_n}^y|^p \right] \leq C''_p |x - y|^p \exp(C''_p T^p t).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$E \left[\sup_{s \leq t} |X_s^x - X_s^y|^p \right] \leq C''_p |x - y|^p \exp(C''_p T^p t).$$

空间 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 的拓扑可由距离

$$d(w, w') = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\sup_{s \leq k} |w(s) - w'(s)| \wedge 1 \right)$$

定义; 只要正数列 (α_k) 的级数收敛, 就可任意选取它。可以选择这些系数使

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \exp(C''_p k^{p+1}) < \infty.$$

把每个 X^x 看成取值于 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 的随机变量。上面的估计和 Jensen 不等式给出

$$\begin{aligned} E[d(X^x, X^y)^p] & \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \right)^{p-1} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k E \left[\sup_{s \leq k} |X_s^x - X_s^y|^p \right] \\ & \leq \tilde{C}_p |x - y|^p, \end{aligned}$$

其中 $\tilde{C}_p$ 与 x, y 无关。对取值于度量空间 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 的过程 $(X^x)_{x \in \mathbb{R}}$ 应用 Kolmogorov 引理 (定理 2.9), 得到一个关于参数 x 具有连续样本路径的修正, 记为 $(\tilde{X}^x)_{x \in \mathbb{R}}$ 。令

$$F_x(w) = \tilde{X}^x(w) = (\tilde{X}_t^x(w))_{t \geq 0}.$$

性质 (ii) 立即成立。

映射 $w \mapsto F_x(w)$ 从赋予 $\mathcal{G}_\infty$ 的 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 到赋予 Borel σ -代数

$$\mathcal{C} = \sigma(w(s) : s \geq 0)$$

的同一空间可测。此外, 对每个 $t \geq 0$, $F_x(w)_t = \tilde{X}_t^x(w) = X_t^x(w)$ a.s., 而 X_t^x 是 $\mathcal{G}_t$ -可测的, 故它在 $W(dw)$ -a.s. 意义下等于 $(w(s))_{0 \leq s \leq t}$ 的某个可测函数。这就证明了 (i)。

下面证明 (iii) 的第一部分。固定滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 与 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动 B 。过程 $(F_x(B)_t)_{t \geq 0}$ 显然具有连续样本路径; 由 (i) 和滤过的完备性, 它也适应。另一方面, 由 F_x 的构造以及 $\tilde{X}^x = X^x$ a.s., 对每个 $t \geq 0$, 在 $W(dw)$ -a.s. 意义下,

$$F_x(w)_t = x + \int_0^t \sigma(s, F_x(w)_s) dw(s) + \int_0^t b(s, F_x(w)_s) ds.$$

这里的随机积分可沿一个适当子列 (n_k) 定义为

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sigma(s, F_x(w)_s) dw(s) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{2^{n_k}-1} \sigma\left(\frac{it}{2^{n_k}}, F_x(w)_{it/2^{n_k}}\right) \left(w\left(\frac{(i+1)t}{2^{n_k}}\right) - w\left(\frac{it}{2^{n_k}}\right)\right), \end{aligned}$$

其中使用了命题 5.9。现在把 w 换成分布为 $W(dw)$ 的 B , 又由命题 5.9, 几乎处处地,

$$\begin{aligned} F_x(B)_t &= x + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{2^{n_k}-1} \sigma\left(\frac{it}{2^{n_k}}, F_x(B)_{it/2^{n_k}}\right) (B_{(i+1)t/2^{n_k}} - B_{it/2^{n_k}}) \\ &\quad + \int_0^t b(s, F_x(B)_s) ds \\ &= x + \int_0^t \sigma(s, F_x(B)_s) dB_s + \int_0^t b(s, F_x(B)_s) ds. \end{aligned}$$

故 $F_x(B)$ 是所需的解。

还需证明 (iii) 的第二部分。仍固定上述概率空间和布朗运动, 设 U 是 $\mathcal{F}_0$ -可测随机变量。若在 $F_x(B)$ 满足的随机积分方程中形式地以 U 代替 x , 就会得到 $F_U(B)$ 是初值为 U 的解; 但这一代换需要仔细论证。

先注意, 对每个固定 t , 映射

$$(x, \omega) \mapsto F_x(B(\omega))_t$$

对固定 ω 关于 x 连续, 对固定 x 关于 ω 为 $\mathcal{F}_t$ -可测, 因而关于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_t$ 可测。由于 U 是 $\mathcal{F}_0$ -可测的, $F_U(B)_t$ 为 $\mathcal{F}_t$ -可测, 所以过程 $F_U(B)$ 适应。

对 $x \in \mathbb{R}$ 、 $w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, 定义 $G(x, w) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$:

$$G(x, w)_t = \int_0^t b(s, F_x(w)_s) ds,$$

并令

$$H(x, w) = F_x(w) - x - G(x, w).$$

前面已经看到, 对每个 $x \in \mathbb{R}$, 在 $W(dw)$ -a.s. 意义下,

$$H(x, w)_t = \int_0^t \sigma(s, F_x(w)_s) dw(s).$$

令

$$H_n(x, w)_t = \sum_{i=0}^{2^n-1} \sigma\left(\frac{it}{2^n}, F_x(w)_{it/2^n}\right) \left(w\left(\frac{(i+1)t}{2^n}\right) - w\left(\frac{it}{2^n}\right)\right).$$

由命题 5.9, 对每个 $x \in \mathbb{R}$, 在 $W(dw)$ 下依概率有

$$H(x, w)_t = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(x, w)_t.$$

因为 U 是 $\mathcal{F}_0$ -可测而 B 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, U 与 B 独立。由上述收敛推出

$$H(U, B)_t = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(U, B)_t$$

依概率成立。再次使用命题 5.9, 右端极限必为

$$\int_0^t \sigma(s, F_U(B)_s) dB_s.$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^t \sigma(s, F_U(B)_s) dB_s &= H(U, B)_t \\ &= F_U(B)_t - U - \int_0^t b(s, F_U(B)_s) ds. \end{aligned}$$

这证明了 $F_U(B)$ 解出初值为 U 的 $E(\sigma, b)$ 。□

定理 8.5, 特别是性质 (ii), 还给出解关于初值的连续性。给定滤过概率空间与布朗运动 B , 可以对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ 构造 $E_x(\sigma, b)$ 的解 X^x , 使对每个 $\omega \in \Omega$, 映射 $x \mapsto X^x(\omega)$ 连续。更精确地, 上一证明的论证给出: 对每个 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和任意常数 $A, T > 0$, 存在随机常数 $C_{\varepsilon, A, T}(\omega)$, 使当 $|x|, |y| \leq A$ 时,

$$\sup_{t \leq T} |X_t^x(\omega) - X_t^y(\omega)| \leq C_{\varepsilon, A, T}(\omega) |x - y|^{1-\varepsilon}.$$

严格地说, 定理 2.9 中的 Kolmogorov 引理版本只在 $d = 1$ 时直接给出这一结论; 多维参数过程有相应的 Kolmogorov 引理, 见 [70, 定理 I.2.1]。

8.3 随机微分方程的解作为马尔可夫过程

本节考虑齐次情形

$$\sigma(t, y) = \sigma(y), \quad b(t, y) = b(y).$$

同上一节一样, 假设 σ, b 满足 Lipschitz 条件: 存在常数 K , 使对每个 $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|, \quad |b(x) - b(y)| \leq K|x - y|.$$

固定 $x \in \mathbb{R}^d$, 令 X^x 是 $E_x(\sigma, b)$ 的一个解。由于弱唯一性成立, 对每个 $t \geq 0$, X_t^x 的分布不依赖解的选择。事实上, 这一分布是 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ 上的 Wiener 测度在映射 $w \mapsto F_x(w)_t$ 下的像, 其中 F_x 由定理 8.5 给出。该定理还说明 X_t^x 的分布连续地依赖于 (x, t) 。

定理 8.6. 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是在完备滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 上的 $E(\sigma, b)$ 的解。则 $(X_t)_{t \geq 0}$ 关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 是马尔可夫过程，其半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 由

$$Q_t f(x) = E[f(X_t^x)]$$

定义，其中 X^x 是 $E_x(\sigma, b)$ 的任意一个解。

注。 沿用定理 8.5 的记号，还有

$$Q_t f(x) = \int f(F_x(w)_t) W(dw). \quad (8.2)$$

证明。 先验证：对 $\mathbb{R}^d$ 上任意有界可测函数 f 及任意 $s, t \geq 0$,

$$E[f(X_{s+t}) | \mathcal{F}_s] = Q_t f(X_s),$$

其中 $Q_t f$ 由 (8.2) 定义。固定 $s \geq 0$ 。对每个 $t \geq 0$ ，写成

$$X_{s+t} = X_s + \int_s^{s+t} \sigma(X_r) dB_r + \int_s^{s+t} b(X_r) dr, \quad (8.3)$$

其中 B 是从 0 出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。令

$$X'_t = X_{s+t}, \quad \mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_{s+t}, \quad B'_t = B_{s+t} - B_s.$$

滤过 $(\mathcal{F}'_t)$ 完备， X' 对它适应，并且 B' 是 m 维 $(\mathcal{F}'_t)$ -布朗运动。利用连续适应过程随机积分的逼近结果（命题 5.9），容易验证：几乎处处地，对每个 $t \geq 0$,

$$\int_s^{s+t} \sigma(X_r) dB_r = \int_0^t \sigma(X'_u) dB'_u,$$

右端随机积分在滤过 $(\mathcal{F}'_t)$ 中计算。故由 (8.3)，

$$X'_t = X_s + \int_0^t \sigma(X'_u) dB'_u + \int_0^t b(X'_u) du.$$

因此，在空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}'_t), P)$ 上，关于布朗运动 B' ， X' 解出了初值 $X'_0 = X_s$ 的 $E(\sigma, b)$ ；注意 X_s 是 $\mathcal{F}'_0$ -可测的。由定理 8.5 的最后一个断言，

$$X' = F_{X_s}(B'), \quad \text{a.s.}$$

于是对每个 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} E[f(X_{s+t}) | \mathcal{F}_s] &= E[f(X'_t) | \mathcal{F}_s] \\ &= E[f(F_{X_s}(B')_t) | \mathcal{F}_s] \\ &= \int f(F_{X_s}(w)_t) W(dw) \\ &= Q_t f(X_s). \end{aligned}$$

第三个等式使用了： B' 与 $\mathcal{F}_s$ 独立且分布为 $W(dw)$ ，而 X_s 是 $\mathcal{F}_s$ -可测的。

还需验证 (Q_t) 是转移半群。定义中的性质 (i) 和 (iii) 立即成立；验证 (iii) 时使用了 X_t^x 的分布连续依赖于 (x, t) 这一事实。对 Chapman–Kolmogorov 关系，把上面的结论用于 X^x ，得到

$$\begin{aligned} Q_{t+s} f(x) &= E[f(X_{s+t}^x)] = E[E[f(X_{s+t}^x) | \mathcal{F}_s]] \\ &= E[Q_t f(X_s^x)] = \int Q_s(x, dy) Q_t f(y). \end{aligned}$$

证明完成。 □

以 $C_c^2(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上所有具有紧支集的二阶连续可微函数组成的空间。

定理 8.7. 半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是 Feller 半群。此外，其生成元 L 满足

$$C_c^2(\mathbb{R}^d) \subset D(L),$$

并且对每个 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$,

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma \sigma^*)_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

其中 σ^* 表示矩阵 σ 的转置。

证明. 为简化起见，只证明 σ, b 有界的情形。固定 $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ ，先验证 $Q_t f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ 。映射 $x \mapsto F_x(w)$ 连续，所以公式 (8.2) 与控制收敛定理说明 $Q_t f$ 连续。另一方面，

$$X_t^x = x + \int_0^t \sigma(X_s^x) dB_s + \int_0^t b(X_s^x) ds.$$

由 σ, b 有界，存在不依赖 t, x 的常数 C ，使

$$E[|X_t^x - x|^2] \leq C(t + t^2). \quad (8.4)$$

马尔可夫不等式于是给出：对每个 $t \geq 0$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} P(|X_t^x - x| > A) \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0.$$

并且

$$\begin{aligned} |Q_t f(x)| &\leq |E[f(X_t^x) 1_{\{|X_t^x - x| \leq A\}}]| \\ &\quad + \|f\| P(|X_t^x - x| > A). \end{aligned}$$

由于 $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$,

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |Q_t f(x)| \leq \|f\| \sup_{x \in \mathbb{R}^d} P(|X_t^x - x| > A).$$

令 $A \rightarrow \infty$ ，得到 $Q_t f(x) \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$)，从而 $Q_t f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ 。

类似地验证 $Q_t f \rightarrow f$ ($t \downarrow 0$)。对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |E[f(X_t^x)] - f(x)| &\leq \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^d \\ |x - y| \leq \varepsilon}} |f(x) - f(y)| \\ &\quad + 2\|f\| \sup_{x \in \mathbb{R}^d} P(|X_t^x - x| > \varepsilon). \end{aligned}$$

由 (8.4) 和马尔可夫不等式，第二项在 $t \downarrow 0$ 时趋于零；第一项可通过取小的 ε 任意逼近零。因此 $\|Q_t f - f\| \rightarrow 0$ ，Feller 性质得证。

证明生成元的结论。取 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ ，对 $f(X_t^x)$ 使用 Itô 公式。若 $X_t^x = (X_t^{x,1}, \dots, X_t^{x,d})$ ，则

$$X_t^{x,i} = x_i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(X_s^x) dB_s^j + \int_0^t b_i(X_s^x) ds.$$

所以

$$\begin{aligned} f(X_t^x) &= f(x) + M_t + \sum_{i=1}^d \int_0^t b_i(X_s^x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s^x) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,i'=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i'}}(X_s^x) d\langle X^{x,i}, X^{x,i'} \rangle_s, \end{aligned}$$

其中 M 是连续局部鞅。而

$$d\langle X^{x,i}, X^{x,i'} \rangle_s = \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(X_s^x) \sigma_{i'j}(X_s^x) ds = (\sigma \sigma^*)_{ii'}(X_s^x) ds.$$

令

$$g(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,i'=1}^d (\sigma \sigma^*)_{ii'}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i'}}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

则

$$M_t = f(X_t^x) - f(x) - \int_0^t g(X_s^x) ds$$

是连续局部鞅。因为 f, g 有界，命题 4.7 (ii) 说明 M 是鞅。由定理 6.14, $f \in D(L)$ 且 $Lf = g$ 。□

推论 8.8. 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是某个滤过概率空间上的 $E(\sigma, b)$ 的解，则 X 满足强马尔可夫性质：若 T 是停时，且 $\Phi : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是 Borel 可测函数，则

$$E[1_{\{T < \infty\}} \Phi((X_{T+t})_{t \geq 0}) \mid \mathcal{F}_T] = 1_{\{T < \infty\}} E_{X_T}[\Phi],$$

其中对每个 $x \in \mathbb{R}^d$, P_x 表示 $E_x(\sigma, b)$ 任一解在 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ 上的分布。

证明。 应用定理 6.17 即可。也可以仿照定理 8.6 的证明，把停时 T 放在该证明中确定性时刻 s 的位置，再使用布朗运动的强马尔可夫性质。□

由随机微分方程的解得到的、具有连续样本路径的马尔可夫过程，有时称为扩散过程。有些作者把 $\mathbb{R}^d$ 或流形上任何具有连续样本路径的强马尔可夫过程都称为扩散过程。注意，即使在这里的 Lipschitz 框架内，定理 8.7 也没有完全确定生成元 L ，而只给出它在定义域 $D(L)$ 的一个子集上的作用。正如第 6 章已经提到的，完整描述生成元的定义域通常十分困难。不过在许多情形中，像定理 8.7 这样对生成元的部分了解已经足以刻画过程的分布。这一观察是强大的鞅问题理论的核心；该理论系统展开于 Stroock 与 Varadhan 的经典著作 [77]。

至少限制在 $C_c^2(\mathbb{R}^d)$ 上时，生成元 L 是二阶微分算子。随机微分方程 $E(\sigma, b)$ 为关于这一微分算子的许多解析结果提供了概率方法与概率解释；其精神与上一章所述布朗运动同 Laplace 算子之间的联系相同。关于随机微分方程与偏微分方程的更多联系，可参见 Durrett [18, 第 9 章] 和 Friedman [26, 27]。概率与分析之间的这些联系，是定义并研究随机微分方程的重要动机。

8.4 随机微分方程的几个例子

本节简要讨论三个重要的一维例子。前两个例子的解有显式公式；一般的随机微分方程当然并非如此。

8.4.1 Ornstein–Uhlenbeck 过程

设 $\lambda > 0$ 。一维 Ornstein–Uhlenbeck 过程是随机微分方程

$$dX_t = dB_t - \lambda X_t dt$$

的解。对 $e^{\lambda t} X_t$ 使用 Itô 公式，得到

$$X_t = X_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s.$$

这里的随机积分是 Wiener 积分，因为被积函数是确定性的；所以它属于 B 生成的高斯空间。

先设 $X_0 = x \in \mathbb{R}$ 。由上式， X 是非中心高斯过程，其均值函数为

$$m(t) = E[X_t] = x e^{-\lambda t},$$

协方差函数为

$$K(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t) = \frac{e^{-\lambda|t-s|} - e^{-\lambda(t+s)}}{2\lambda}.$$

初值服从 $\mathcal{N}(0, (2\lambda)^{-1})$ 的情形也很有意义。此时 X 是中心高斯过程，协方差函数为

$$\frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|t-s|}.$$

这是平稳协方差函数。因此在这种情形下，Ornstein–Uhlenbeck 过程既是以 $\mathbb{R}_+$ 为指标集的平稳高斯过程，又是马尔可夫过程。

8.4.2 几何布朗运动

设 $\sigma > 0, r \in \mathbb{R}$ 。参数为 σ, r 的几何布朗运动是方程

$$dX_t = \sigma X_t dB_t + r X_t dt$$

的解。对 $\log X_t$ 使用 Itô 公式（例如先设 $X_0 > 0$ ），得到

$$X_t = X_0 \exp\left(\sigma B_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right).$$

特别地，若初值严格为正，则解在每个时刻 $t \geq 0$ 仍严格为正。

几何布朗运动用于金融数学中著名的 Black–Scholes 模型。使用它的理由来自一项经济假设：对应于互不相交时间区间的连续收益率

$$\frac{X_{t_2} - X_{t_1}}{X_{t_1}}, \quad \frac{X_{t_3} - X_{t_2}}{X_{t_2}}, \quad \dots, \quad \frac{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}{X_{t_{n-1}}}$$

相互独立。由 X_t 的显式公式可见，这恰好来自布朗运动的独立增量性质。

8.4.3 Bessel 过程

设 $m \geq 0$ 为实数。 m 维平方 Bessel 过程是取非负实值并解出

$$dX_t = 2\sqrt{X_t} dB_t + m dt \tag{8.5}$$

的过程。这个方程不属于本章研究的 Lipschitz 框架, 因为 $\sigma(x) = 2\sqrt{x}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上不满足 Lipschitz 条件。还可注意到该函数只定义在 $\mathbb{R}_+$ 而非整个 $\mathbb{R}$ 上; 这只是次要问题, 因为可以把它替换为 $2\sqrt{|x|}$, 再事后验证从非负初值出发的解始终非负。不过, 存在一些弱于 Lipschitz 连续性的判别准则, 特别在一维时, 它们适用于 (8.5) 并给出解的存在性与路径唯一性。练习 8.14 给出一个可用于该方程的路径唯一性判别准则。

研究 Bessel 过程的一个主要原因如下。若整数 $d \geq 1$, 且 $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^d)$ 是 d 维布朗运动, 则 Itô 公式说明

$$|\beta_t|^2 = (\beta_t^1)^2 + \dots + (\beta_t^d)^2$$

是 d 维平方 Bessel 过程; 参见练习 5.33。还可验证, 当 $m = 0$ 时, 过程 $(\frac{1}{2}X_t)_{t \geq 0}$ 与第 6 章末尾讨论的 Feller 分枝扩散同分布 (见练习 8.11)。

以下设 $m > 0$, $X_0 = x > 0$ 。对每个 $r \geq 0$, 令

$$T_r = \inf\{t \geq 0 : X_t = r\}.$$

若 $r > x$, 则 $P(T_r < \infty) = 1$ 。事实上, 由 (8.5),

$$X_{t \wedge T_r} = x + m(t \wedge T_r) + Y_{t \wedge T_r}, \quad E[(Y_{t \wedge T_r})^2] \leq 4rt.$$

由马尔可夫不等式,

$$P(Y_{t \wedge T_r} > t^{3/4}) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

若 $P(T_r = \infty) > 0$, 则上一表示在该事件上与 $X_t < r$ 矛盾, 故断言成立。

对每个 $t \in [0, T_0)$, 令

$$M_t = \begin{cases} X_t^{1-m/2}, & m \neq 2, \\ \log X_t, & m = 2. \end{cases}$$

Itô 公式说明, 对每个 $\varepsilon \in (0, x)$, $M_{t \wedge T_\varepsilon}$ 是连续局部鞅。对每个 $A > x$, 它在时间区间 $[0, T_\varepsilon \wedge T_A]$ 上有界; 再使用 $T_A < \infty$ a.s. 并应用可选停时定理, 若 $m \neq 2$, 得到

$$P(T_\varepsilon < T_A) = \frac{A^{1-m/2} - x^{1-m/2}}{A^{1-m/2} - \varepsilon^{1-m/2}},$$

而当 $m = 2$ 时,

$$P(T_\varepsilon < T_A) = \frac{\log A - \log x}{\log A - \log \varepsilon}.$$

当 $m = d$ 是整数时, 这就重新得到命题 7.16 的公式。

最后集中讨论 $m \geq 2$ 。在上述公式中令 $\varepsilon \downarrow 0$, 得到

$$P(T_0 < \infty) = 0.$$

再令 $A \rightarrow \infty$, 还得到: 当 $m = 2$ 时 $P(T_\varepsilon < \infty) = 1$, 正如第 7 章已经看到的; 当 $m > 2$ 时,

$$P(T_\varepsilon < \infty) = \left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{m/2-1}.$$

由 $P(T_0 < \infty) = 0$, 过程 M 对每个 $t \geq 0$ 都有定义且是连续局部鞅。当 $m > 2$ 时, M 取非负值, 故由命题 4.7 (i) 是上鞅, 并由命题 3.19 在 $t \rightarrow \infty$ 时几乎处处收敛。其极限必为 0, 因为前面已经看到, 对每个 $A > x$, 都有 $P(T_A < \infty) = 1$ 。所以当 $m > 2$ 时,

$$X_t \rightarrow \infty, \quad \text{a.s.}$$

可以证明连续局部鞅 M 不是真鞅; 当 $m = 3$ 时参见练习 5.33 的第 8 问。

第 5 章练习 5.31 给出了许多与平方 Bessel 过程有关的重要计算。关于这一类过程的深入研究, 可参见 [70, 第 XI 章]。

注。 m 维 Bessel 过程当然由

$$Y_t = \sqrt{X_t}$$

得到。当 $m = d$ 是正整数时，它就是 d 维布朗运动的模。若 $m > 1$ ，过程 Y 也满足一个随机微分方程，不过该方程没有 (8.5) 那样便于处理；见练习 8.13。

练习

练习 8.9 (时间变换法)。 考虑随机微分方程

$$E(\sigma, 0) \quad dX_t = \sigma(X_t) dB_t,$$

其中函数 $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续，并且存在常数 $\varepsilon > 0$ 与 M ，使得

$$\varepsilon \leq \sigma \leq M.$$

1. 在本问及下一问中，设 X 是 $E(\sigma, 0)$ 的一个解，且 $X_0 = x$ 。对每个 $t \geq 0$ ，令

$$A_t = \int_0^t \sigma(X_s)^2 ds, \quad \tau_t = \inf\{s \geq 0 : A_s > t\}.$$

证明

$$\tau_t = \int_0^t \frac{dr}{\sigma(X_{\tau_r})^2}, \quad A_t = \inf\left\{s \geq 0 : \int_0^s \frac{dr}{\sigma(X_{\tau_r})^2} > t\right\}.$$

2. 证明：存在从 x 出发的一维布朗运动 $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$ ，使得几乎处处地，对每个 $t \geq 0$ ，

$$X_t = \beta_{\inf\{s \geq 0 : \int_0^s \sigma(\beta_r)^{-2} dr > t\}}.$$

3. 证明 $E(\sigma, 0)$ 具有弱存在性与弱唯一性。

提示。 关于存在性，注意若由一个布朗运动 β 按第 2 问的公式定义 X ，则 X （关于适当的滤过）是连续局部鞅，并且

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t \sigma(X_s)^2 ds.$$

解答 8.9。

1. A 连续、严格递增且 $A_t \geq \varepsilon^2 t$ ，故其逆函数就是 τ ，并且 $A_{\tau_t} = t$ 。由逆函数求导公式，

$$\tau'_t = \frac{1}{A'_{\tau_t}} = \frac{1}{\sigma(X_{\tau_t})^2}.$$

积分即得第一式；第二式只是 $A = \tau^{-1}$ 的广义逆表达。

2. X 是从 x 出发的连续局部鞅，且

$$\langle X \rangle_t = A_t, \quad A_\infty = \infty.$$

Dambis–Dubins–Schwarz 定理给出从 x 出发的布朗运动 β ，使 $X_t = \beta_{A_t}$ 。于是 $X_{\tau_r} = \beta_r$ ，第 1 问给出

$$X_t = \beta_{\inf\{s \geq 0 : \int_0^s \sigma(\beta_r)^{-2} dr > t\}}.$$

3. 反过来, 从布朗运动 β 出发, 令

$$C_s = \int_0^s \sigma(\beta_r)^{-2} dr, \quad \theta_t = \inf\{s : C_s > t\}, \quad X_t = \beta_{\theta_t}.$$

关于时间变换后的滤过, X 是连续局部鞅, 且

$$\langle X \rangle_t = \theta_t = \int_0^t \sigma(X_s)^2 ds.$$

因而 $B_t = \int_0^t \sigma(X_s)^{-1} dX_s$ 的二次变差为 t , 由 Lévy 刻画它是布朗运动, 且 $dX_t = \sigma(X_t)dB_t$. 这证明弱存在性。

任意弱解都具有第 2 问的表示, 而右端是布朗路径的同一个可测泛函; 故所有有限维分布相同, 弱唯一性成立。

□

练习 8.10. 考虑随机微分方程

$$E(\sigma, b) \quad dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt,$$

其中函数 $\sigma, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 有界且连续, 并满足

$$\int_{\mathbb{R}} |b(x)| dx < \infty, \quad \sigma \geq \varepsilon$$

(这里 $\varepsilon > 0$ 为常数)。

1. 设 X 是 $E(\sigma, b)$ 的一个解。证明: 存在单调递增的二阶连续可微函数 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使 $F(X_t)$ 为鞅。请用 σ 与 b 写出 F 的一个显式公式。
2. 证明过程 $Y_t = F(X_t)$ 解出形如

$$dY_t = \sigma'(Y_t)dB_t$$

的随机微分方程, 并确定函数 σ' 。

3. 利用上一题, 证明 $E(\sigma, b)$ 具有弱存在性与弱唯一性。进一步证明: 若 σ 是 Lipschitz 的, 则路径唯一性也成立。

解答 8.10.

1. 令

$$F(x) = \int_0^x \exp\left(-\int_0^y \frac{2b(z)}{\sigma(z)^2} dz\right) dy.$$

则 $F' > 0$, 并且

$$\frac{1}{2}\sigma^2 F'' + bF' = 0.$$

Itô 公式于是给出

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\sigma(X_s)dB_s.$$

因 $b \in L^1$ 、 $\sigma \geq \varepsilon$, 函数 F' 有正的上下界; 随机积分在每个有限时间区间上平方可积, 故 $F(X)$ 是真鞅。

2. 上述界还说明 $F(\pm\infty) = \pm\infty$, 所以 F 是 $\mathbb{R}$ 到自身的 C^2 严格递增双射。若 $Y = F(X)$,

则

$$dY_t = \hat{\sigma}(Y_t) dB_t, \quad \boxed{\hat{\sigma}(y) = F'(F^{-1}(y)) \sigma(F^{-1}(y))}.$$

3. $\hat{\sigma}$ 连续、有界且有严格正的下界。因此练习 8.9 给出 Y 方程的弱存在性与弱唯一性；用 $X = F^{-1}(Y)$ 变换回来，即得 $E(\sigma, b)$ 的弱存在性与弱唯一性。

若 σ 是 Lipschitz 的，则 b 有界、 $\sigma \geq \varepsilon$ 说明 $F'' = -2bF'/\sigma^2$ 有界，故 F' 与 F^{-1} 都是 Lipschitz 的。于是 $\hat{\sigma}$ 也是 Lipschitz 的， Y 方程具有路径唯一性；再由 $X = F^{-1}(Y)$ 得到原方程的路径唯一性。

□

练习 8.11. 假设对每个 $x \in \mathbb{R}_+$ ，都能在同一滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 上构造一个取非负值的过程 X^x ，它解出

$$\begin{cases} dX_t = \sqrt{2X_t} dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

并且诸过程 X^x 关于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 都是取值于 $\mathbb{R}_+$ 的马尔可夫过程，具有同一个半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 。（这当然与定理 8.6 很接近；但函数 $x \mapsto \sqrt{2x}$ 不是 Lipschitz 的，故不能直接应用该定理。）

1. 固定 $x \in \mathbb{R}_+$ 、 $T > 0$ 与 $\lambda \geq 0$ 。对每个 $t \in [0, T]$ ，令

$$M_t = \exp\left(-\frac{\lambda X_t^x}{1 + \lambda(T-t)}\right).$$

证明过程 $(M_{t \wedge T})_{t \geq 0}$ 是鞅。

^a

2. 证明 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 是 Feller 分枝扩散的半群（见第 6 章末尾）。

^a**校订注：**英文原文在本问中使用参数 λ ，却没有声明其取值范围；这里补为 $\lambda \geq 0$ ，这也是后续 Laplace 变换计算所需的范围。

解答 8.11.

1. 令

$$a(t) = \frac{\lambda}{1 + \lambda(T-t)}.$$

则 $a' = a^2$ 。对 $e^{-a(t)X_t^x}$ 使用 Itô 公式，并利用 $d\langle X^x \rangle_t = 2X_t^x dt$ ，其漂移项为

$$(-a'(t)X_t^x + a(t)^2 X_t^x) e^{-a(t)X_t^x} dt = 0.$$

因 $0 < M_t \leq 1$ ，该局部鞅是真鞅。

2. 在 $t = T$ 与 $t = 0$ 比较期望，得到

$$Q_T(e^{-\lambda \cdot})(x) = E[e^{-\lambda X_T^x}] = \exp\left(-x \frac{\lambda}{1 + \lambda T}\right).$$

即

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda y} Q_T(x, dy) = e^{-x \psi_T(\lambda)}, \quad \psi_T(\lambda) = \frac{\lambda}{1 + T\lambda}.$$

这正是第 6 章末尾 Feller 分枝扩散半群的 Laplace 变换；Laplace 变换唯一确定 $\mathbb{R}_+$ 上的概率测度，故 (Q_t) 就是该半群。

□

练习 8.12。 考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的两列实函数 $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ 与 $(b_n)_{n \geq 1}$ 。假设：

(i) 存在常数 $C > 0$ ，使得对每个 $n \geq 1$ 及 $x \in \mathbb{R}$ ，

$$|\sigma_n(x)| \leq C, \quad |b_n(x)| \leq C.$$

(ii) 存在常数 $K > 0$ ，使得对每个 $n \geq 1$ 及 $x, y \in \mathbb{R}$ ，

$$|\sigma_n(x) - \sigma_n(y)| \leq K|x - y|, \quad |b_n(x) - b_n(y)| \leq K|x - y|.$$

设 B 是一个 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动；对每个 $n \geq 1$ ，令 X^n 为满足

$$X_t^n = \int_0^t \sigma_n(X_s^n) dB_s + \int_0^t b_n(X_s^n) ds$$

的唯一适应过程。

1. 设 $T > 0$ 。证明：存在常数 $A > 0$ ，使得对每个 $M > 0$ 及 $n \geq 1$ ，

$$P\left(\sup_{t \leq T} |X_t^n| \geq M\right) \leq \frac{A}{M^2}.$$

2. 进一步假设 (σ_n) 与 (b_n) 分别在 $\mathbb{R}$ 的每个紧子集上一致收敛到函数 σ 与 b 。说明存在一个具有连续样本路径的适应过程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ，使得

$$X_t = \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds.$$

然后证明：存在常数 $A' > 0$ ，使得对每个 $M > 0$ 、 $t \in [0, T]$ 及 $n \geq 1$ ，

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{s \leq t} (X_s^n - X_s)^2\right] &\leq 4(4+T)K^2 \int_0^t E[(X_s^n - X_s)^2] ds + \frac{A'}{M^2} \\ &\quad + 4T \left(4 \sup_{|x| \leq M} (\sigma_n(x) - \sigma(x))^2 + T \sup_{|x| \leq M} (b_n(x) - b(x))^2\right). \end{aligned}$$

3. 由上一问推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\sup_{s \leq T} (X_s^n - X_s)^2\right] = 0.$$

解答 8.12。

1. Doob 不等式、Itô 等距式及 Cauchy-Schwarz 不等式给出

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{t \leq T} |X_t^n|^2\right] &\leq 2E\left[\sup_{t \leq T} \left|\int_0^t \sigma_n(X_s^n) dB_s\right|^2\right] + 2TE \int_0^T |b_n(X_s^n)|^2 ds \\ &\leq 8C^2T + 2C^2T^2 =: A. \end{aligned}$$

Markov 不等式即得题中概率上界。

2. 局部一致极限 σ, b 仍满足同样的有界性与 Lipschitz 条件，因而相应方程存在唯一适应连续解 X 。写

$$X_t^n - X_t = \int_0^t (\sigma_n(X_s^n) - \sigma(X_s)) dB_s + \int_0^t (b_n(X_s^n) - b(X_s)) ds.$$

将每个系数差拆成“自变量差”与“函数差”，对前者使用 Lipschitz 界，对后者在事件 $\{\sup_{s \leq T} (|X_s^n| \vee |X_s|) \leq M\}$ 上使用紧集一致范数；补事件则由第 1 问及 X 的同样估计控制。Doob 与 Cauchy-Schwarz 不等式整理后得到

$$E \left[\sup_{s \leq t} (X_s^n - X_s)^2 \right] \leq 4(4+T)K^2 \int_0^t E[(X_s^n - X_s)^2] ds + \frac{A'}{M^2} \\ + 4T \left(4 \sup_{|x| \leq M} |\sigma_n(x) - \sigma(x)|^2 + T \sup_{|x| \leq M} |b_n(x) - b(x)|^2 \right),$$

其中 A' 与 n, M, t 无关。

3. 对第 2 问的不等式使用 Gronwall 引理。固定 M 后，两个紧集一致范数在 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 0，故

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E \left[\sup_{s \leq T} (X_s^n - X_s)^2 \right] \leq \frac{A'e^{4(4+T)K^2T}}{M^2}.$$

再令 $M \rightarrow \infty$ ，得到所需 L^2 收敛。

□

练习 8.13. 设 $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$ 是从 0 出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。固定实参数 α, r ，其中 $\alpha > 1/2$ 、 $r > 0$ 。对每个整数 $n \geq 1$ 及 $x \in \mathbb{R}$ ，令

$$f_n(x) = \frac{1}{|x|} \wedge n.$$

1. 设 $n \geq 1$ 。说明存在唯一的半鞅 Z^n 解出

$$Z_t^n = r + \beta_t + \alpha \int_0^t f_n(Z_s^n) ds.$$

2. 令

$$S_n = \inf\{t \geq 0 : Z_t^n \leq 1/n\}.$$

先注意到，当 $t \leq S_n \wedge S_{n+1}$ 时，

$$Z_t^{n+1} - Z_t^n = \alpha \int_0^t \left(\frac{1}{Z_s^{n+1}} - \frac{1}{Z_s^n} \right) ds.$$

证明几乎处处地，对每个 $t \in [0, S_n \wedge S_{n+1}]$ ，都有 $Z_t^{n+1} = Z_t^n$ ；并由此推出 $S_{n+1} \geq S_n$ 。

3. 设 g 是 $\mathbb{R}$ 上的二阶连续可微函数。证明过程

$$g(Z_t^n) - g(r) - \int_0^t \left(\alpha g'(Z_s^n) f_n(Z_s^n) + \frac{1}{2} g''(Z_s^n) \right) ds$$

是连续局部鞅。

4. 对每个 $x > 0$ ，令 $h(x) = x^{1-2\alpha}$ 。证明：对每个整数 $n \geq 1$ ， $h(Z_{t \wedge S_n}^n)$ 是有界鞅。由此推出：对每个 $t \geq 0$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时 $P(S_n \leq t) \rightarrow 0$ ，因而 $S_n \rightarrow \infty$ a.s.
5. 由第 2、4 问推出：存在唯一的正半鞅 Z ，使得对每个 $t \geq 0$ ，

$$Z_t = r + \beta_t + \alpha \int_0^t \frac{ds}{Z_s}.$$

6. 设 $d \geq 3$, 且 B 是从 $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 出发的 d 维布朗运动。证明 $Y_t = |B_t|$ 满足第 5 问中的随机方程 (适当选取 β), 其中

$$r = |y|, \quad \alpha = \frac{d-1}{2}.$$

可以使用练习 5.33 的结果。

解答 8.13.

1. 每个 f_n 都有界且全局 Lipschitz。因此具有 Lipschitz 漂移和常数扩散系数的方程

$$dZ_t^n = d\beta_t + \alpha f_n(Z_t^n) dt, \quad Z_0^n = r$$

存在唯一强解。

2. 在 $t \leq S_n \wedge S_{n+1}$ 时两过程均为正, 且相应截断尚未生效。令 $D_t = Z_t^{n+1} - Z_t^n$, 则

$$D_t = -\alpha \int_0^t \frac{D_s}{Z_s^{n+1} Z_s^n} ds, \quad D_0 = 0.$$

线性积分方程的唯一性给出 $D \equiv 0$ 。在 S_n 时共同过程等于 $1/n > 1/(n+1)$, 故 $S_{n+1} \geq S_n$ 。

3. 直接对 $g(Z_t^n)$ 使用 Itô 公式, 减去题中有限变差部分后剩下

$$\int_0^t g'(Z_s^n) d\beta_s,$$

它是连续局部鞅。

4. 对 $h(x) = x^{1-2\alpha}$, 有

$$\frac{1}{2} h''(x) + \frac{\alpha}{x} h'(x) = 0.$$

在 S_n 前 $f_n(Z^n) = 1/Z^n$, 故第 3 问说明 $h(Z_{t \wedge S_n}^n)$ 是局部鞅; 它非负且被 $n^{2\alpha-1}$ 控制, 因而是真鞅。因此

$$r^{1-2\alpha} = E[h(Z_{t \wedge S_n}^n)] \geq n^{2\alpha-1} P(S_n \leq t),$$

即 $P(S_n \leq t) \leq (rn)^{1-2\alpha} \rightarrow 0$ 。因 $S_n \uparrow$, 得 $S_n \uparrow \infty$ a.s.

5. 由第 2 问的一致性, 在 $t \leq S_n$ 上定义 $Z_t = Z_t^n$, 第 4 问保证这对所有 t 给出唯一正连续半鞅, 且

$$Z_t = r + \beta_t + \alpha \int_0^t \frac{ds}{Z_s}.$$

若有另一正解, 则在任一有限区间上两解都有正的共同下界; 其差满足第 2 问同型的线性积分方程, 故恒为 0。

6. 练习 5.33 已证明

$$|B_t| = |y| + \beta_t + \frac{d-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|B_s|},$$

其中

$$\beta_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i$$

是一维布朗运动。因此取 $r = |y|$ 、 $\alpha = (d-1)/2$ 即得结论。

□

练习 8.14 (Yamada–Watanabe 唯一性判别准则)。本题目标是在如下条件下证明一维随机微分方程

$$dX_t = \sigma(X_t) dB_t + b(X_t) dt$$

的路径唯一性：存在常数 $K < \infty$ ，使得对每个 $x, y \in \mathbb{R}$ ，

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K\sqrt{|x - y|}, \quad |b(x) - b(y)| \leq K|x - y|.$$

1. 预备问题。设 Z 是一个半鞅，并且

$$\langle Z, Z \rangle_t = \int_0^t h_s ds, \quad 0 \leq h_s \leq C|Z_s|,$$

其中 $C < \infty$ 为常数。证明：对每个 $t \geq 0$ ，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nE \left[\int_0^t 1_{\{0 < |Z_s| \leq 1/n\}} d\langle Z, Z \rangle_s \right] = 0.$$

提示。注意对每个 $n \geq 1$ ，

$$E \left[\int_0^t |Z_s|^{-1} 1_{\{0 < |Z_s| \leq 1\}} d\langle Z, Z \rangle_s \right] \leq Ct < \infty.$$

2. 对每个整数 $n \geq 1$ ，定义函数 $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ：

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1/n, \\ 2n(1 - nx), & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 2n(1 + nx), & -1/n \leq x \leq 0. \end{cases}$$

再记 F_n 为 $\mathbb{R}$ 上满足

$$F_n(0) = F'_n(0) = 0, \quad F''_n = \varphi_n$$

的唯一二阶连续可微函数。注意对每个 $x \in \mathbb{R}$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时，

$$F_n(x) \longrightarrow |x|, \quad F'_n(x) \longrightarrow \operatorname{sgn}(x) := 1_{\{x > 0\}} - 1_{\{x < 0\}}.$$

设 X, X' 是同一滤过概率空间上由同一个布朗运动 B 驱动的 $E(\sigma, b)$ 的两个解。由第 1 问推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_0^t \varphi_n(X_s - X'_s) d\langle X - X', X - X' \rangle_s \right] = 0.$$

3. 设 T 是一个停时，使半鞅 $X_{t \wedge T} - X'_{t \wedge T}$ 有界。对 $F_n(X_{t \wedge T} - X'_{t \wedge T})$ 应用 Itô 公式，证明

$$\begin{aligned} E[|X_{t \wedge T} - X'_{t \wedge T}|] &= E[|X_0 - X'_0|] \\ &\quad + E \left[\int_0^{t \wedge T} (b(X_s) - b(X'_s)) \operatorname{sgn}(X_s - X'_s) ds \right]. \end{aligned}$$

4. 利用 Gronwall 引理证明：若 $X_0 = X'_0$ ，则几乎处处地，对每个 $t \geq 0$ ，都有 $X_t = X'_t$ 。

解答 8.14。

1. 以 $d\mu = d\langle Z \rangle$ 记随机测度。题给估计说明

$$E \int_0^t |Z_s|^{-1} 1_{\{0 < |Z_s| \leq 1\}} \mu(ds) \leq Ct.$$

又

$$n 1_{\{0 < |Z_s| \leq 1/n\}} \leq |Z_s|^{-1} 1_{\{0 < |Z_s| \leq 1\}},$$

左端逐点趋于 0。控制收敛定理即得结论。

2. 令 $Z = X - X'$ 。则

$$d\langle Z \rangle_s = (\sigma(X_s) - \sigma(X'_s))^2 ds \leq K^2 |Z_s| ds.$$

因 $0 \leq \varphi_n \leq 2n 1_{\{0 < |z| \leq 1/n\}}$ ，第 1 问给出

$$E \int_0^t \varphi_n(Z_s) d\langle Z \rangle_s \rightarrow 0.$$

3. 对 $F_n(Z_{t \wedge T})$ 使用 Itô 公式。随机积分的被积函数满足 $|F'_n| \leq 1$ ，而其二次变差由 $K^2 |Z|$ 控制；停止后的 Z 有界，故随机积分期望为 0。令 $n \rightarrow \infty$ ，利用 $F_n \rightarrow |\cdot|$ 、 $F'_n \rightarrow \operatorname{sgn}$ 、第 2 问及控制收敛，得到

$$\begin{aligned} E[|X_{t \wedge T} - X'_{t \wedge T}|] &= E[|X_0 - X'_0|] \\ &\quad + E \int_0^{t \wedge T} (b(X_s) - b(X'_s)) \operatorname{sgn}(X_s - X'_s) ds. \end{aligned}$$

4. 若 $X_0 = X'_0$ ，取 $T_m = \inf\{t : |X_t| + |X'_t| \geq m\}$ 。第 3 问及 b 的 Lipschitz 条件给出

$$g_m(t) := E|X_{t \wedge T_m} - X'_{t \wedge T_m}| \leq K \int_0^t g_m(s) ds.$$

Gronwall 引理说明 $g_m \equiv 0$ 。令 $m \rightarrow \infty$ ，再先对有理时刻求可数交并利用路径连续性，得到

$$X_t = X'_t \quad \text{对所有 } t \geq 0, \text{ a.s.}$$

□

注释与评述

如前所述，对随机微分方程的研究促使 Itô 发明了随机积分。¹ 关于这一主题的进一步阅读，可参见 Ikeda 与 Watanabe 的经典著作 [43]，以及 Stroock 与 Varadhan 的经典著作 [77]；后者结合鞅问题研究随机微分方程。Øksendal 的著作 [66] 强调随机微分方程在其他领域中的应用。Friedman 的著作 [26, 27] 则着重于随机微分方程与偏微分方程之间的联系。

本章选择集中讨论 Lipschitz 情形；在这一情形中，存在唯一性的主要结果早已由 Itô [37, 38] 得到。在一维中，保证路径唯一性的判别条件可以显著削弱（尤其参见 Yamada 与 Watanabe 的论文 [83]，练习 8.14 正受其启发），但在高维中情形不再如此。[70] 的第 XI 章包含许多关于 Bessel 过程的内容。

¹校订注：英文原文在这里把“随机积分”误写成了“随机微分方程”，从而形成“随机微分方程的研究促使 Itô 发明随机微分方程”的同义反复；依照本章开头的正确表述订正。

第九章 局部时

本章把随机分析应用于连续半鞅的局部时理论。粗略地说，半鞅 X 在水平 a 处的局部时，是一个递增过程，用来度量 X 对水平 a 的“访问次数”。我们先用经典的 Tanaka 公式构造局部时，再研究它关于空间变量的正则性。随后说明如何用局部时得到广义 Itô 公式，并建立所谓的占用时间密度公式；还将给出局部时的若干逼近。之后转向布朗运动：从一般半鞅的结果推出经典的 Trotter 定理，并证明著名的 Lévy 定理，后者刻画布朗运动在水平 0 处的局部时过程之分布。最后一节用布朗局部时证明第 7 章末尾陈述的 Kallianpur–Robbins 律。除最后一节依赖第 7 章外，本章可独立于第 6、7、8 章阅读。

9.1 Tanaka 公式与局部时的定义

本章始终在滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ 上讨论，并假设滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 完备。设 X 是连续半鞅。若 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 二阶连续可微，则 Itô 公式说明 $f(X_t)$ 仍是连续半鞅，并且

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

下面的命题把这一公式推广到凸函数。

命题 9.1. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数。则 $f(X_t)$ 是半鞅；更准确地说，存在一个递增过程 A_t^f ，使得对每个 $t \geq 0$ ，

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s) dX_s + A_t^f,$$

其中 $f'_-(x)$ 表示 f 在 x 处的左导数。

更一般地，若 f 是两个凸函数之差，则 $f(X_t)$ 是半鞅。

证明. 取非负连续函数 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得 $x \notin [0, 1]$ 时 $h(x) = 0$ ，并且

$$\int_0^1 h(x) dx = 1.$$

对每个整数 $n \geq 1$ ，令 $h_n(x) = nh(nx)$ ，再定义

$$\varphi_n(x) = (h_n * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} h_n(y) f(x - y) dy.$$

容易验证， φ_n 在 $\mathbb{R}$ 上二阶连续可微，

$$\varphi'_n = h_n * f'_-,$$

并且对每个 $x \in \mathbb{R}$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时，

$$\varphi_n(x) \rightarrow f(x), \quad \varphi'_n(x) \rightarrow f'_-(x).$$

此外， φ_n 也都是凸函数，因而 $\varphi''_n \geq 0$ 。

写出半鞅 X 的标准分解 $X = M + V$ 。固定整数 $K \geq 1$ ，引入停时

$$T_K := \inf \left\{ t \geq 0 : |X_t| + \langle M, M \rangle_t + \int_0^t |dV_s| \geq K \right\}.$$

由 Itô 公式,

$$\begin{aligned}\varphi_n(X_{t \wedge T_K}) &= \varphi_n(X_0) + \int_0^{t \wedge T_K} \varphi'_n(X_s) dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge T_K} \varphi''_n(X_s) d\langle M, M \rangle_s.\end{aligned}\quad (9.1)$$

由 T_K 的定义, $\langle M, M \rangle_{T_K} \leq K$ 。注意到诸函数 φ'_n 在每个紧区间上一致有界, 再简单应用命题 5.8, 得到

$$\int_0^{t \wedge T_K} \varphi'_n(X_s) dX_s \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \int_0^{t \wedge T_K} f'_-(X_s) dX_s. \quad (9.2)$$

对每个 $t \geq 0$, 令

$$A_t^{f,K} := f(X_{t \wedge T_K}) - f(X_0) - \int_0^{t \wedge T_K} f'_-(X_s) dX_s. \quad (9.3)$$

因为当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\varphi_n(X_0) \rightarrow f(X_0)$ 且 $\varphi_n(X_{t \wedge T_K}) \rightarrow f(X_{t \wedge T_K})$, 由 (9.2) 与 (9.1) 可得

$$\frac{1}{2} \int_0^{t \wedge T_K} \varphi''_n(X_s) d\langle M, M \rangle_s \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} A_t^{f,K}. \quad (9.4)$$

由 (9.3), 过程 $(A_t^{f,K})_{t \geq 0}$ 具有连续样本路径, 并且 $A_0^{f,K} = 0$ 。又因 $\varphi''_n \geq 0$, 收敛式 (9.4) 表明 $(A_t^{f,K})_{t \geq 0}$ 的样本路径也是不减的。因此 $A^{f,K}$ 是递增过程。最后, 由 (9.4) 还可知, 若 $K \leq K'$, 则

$$A_t^{f,K} = A_t^{f,K'}.$$

所以存在递增过程 A^f , 使得对每个 $t \geq 0$, $K \geq 1$, 都有

$$A_t^{f,K} = A_{t \wedge T_K}^f.$$

在 (9.3) 中令 $K \rightarrow \infty$, 即得命题中的公式。若 f 是两个凸函数之差, 则分别应用上述结果再相减即可。□

注。 记 f'_+ 为 f 的右导数。与上面证明相似的论证表明, 存在递增过程 $\tilde{A}^f$, 使

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_+(X_s) dX_s + \tilde{A}_t^f.$$

若 f 二阶连续可微, 则

$$A_t^f = \tilde{A}_t^f = \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

然而在一般情形下, $\tilde{A}_t^f$ 与 A_t^f 可能不同。

上一命题可以立即导出半鞅局部时的定义。对每个 $x \in \mathbb{R}$, 令

$$\text{sgn}(x) := 1_{\{x>0\}} - 1_{\{x \leq 0\}}.$$

请特别注意, 这里规定 $\text{sgn}(0) = -1$, 这一点很重要。

命题 9.2 (Tanaka 公式)。 设 X 是连续半鞅, $a \in \mathbb{R}$ 。存在递增过程 $(L_t^a(X))_{t \geq 0}$, 使下列三个恒等式成立:

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \text{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a(X), \quad (9.5)$$

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t 1_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a(X), \quad (9.6)$$

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t 1_{\{X_s \leq a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a(X). \quad (9.7)$$

递增过程 $(L_t^a(X))_{t \geq 0}$ 称为 X 在水平 a 处的局部时。此外，对每个停时 T ,

$$L_t^a(X^T) = L_{t \wedge T}^a(X).$$

以后把 (9.5)、(9.6)、(9.7) 中的任一式都称为 Tanaka 公式。

证明。 对凸函数 $f(x) = |x - a|$ 应用命题 9.1，并注意

$$f'_-(x) = \operatorname{sgn}(x - a).$$

于是，由

$$L_t^a(X) := |X_t - a| - |X_0 - a| - \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s$$

定义的过程 $(L_t^a(X))_{t \geq 0}$ 是递增过程。

还需验证另外两个公式。分别对凸函数 $f(x) = (x - a)^+$ 与 $f(x) = (x - a)^-$ 应用命题 9.1，得到两个递增过程 $A^{a,(+)}$ 、 $A^{a,-}$ ，使

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t 1_{\{X_s > a\}} dX_s + A_t^{a,(+)},$$

以及

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t 1_{\{X_s \leq a\}} dX_s + A_t^{a,-}.$$

两式相减，立即得到 $A^{a,(+)} = A^{a,-}$ 。另一方面，把两式相加并与 (9.5) 比较，得到

$$A_t^{a,(+)} + A_t^{a,-} = L_t^a(X).$$

因此

$$A_t^{a,(+)} = A_t^{a,-} = \frac{1}{2} L_t^a(X),$$

从而得到 (9.6) 与 (9.7)。

最后一个断言直接由 (9.5) 以及随机积分的停时性质得到。 □

下面陈述局部时的关键性质。记 $d_s L_s^a(X)$ 为递增函数 $s \mapsto L_s^a(X)$ 所对应的随机测度，即

$$\int_{[0,t]} d_s L_s^a(X) = L_t^a(X).$$

命题 9.3。 设 X 是连续半鞅， $a \in \mathbb{R}$ 。则几乎处处地，随机测度 $d_s L_s^a(X)$ 的支集包含于

$$\{s \geq 0 : X_s = a\}.$$

证明。 令 $W_t = |X_t - a|$ 。由于对每个 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $|\operatorname{sgn}(x)| = 1$ ，由 (9.5) 可知

$$\langle W, W \rangle_t = \langle X, X \rangle_t.$$

对 W_t^2 应用 Itô 公式, 得到

$$\begin{aligned}(X_t - a)^2 &= W_t^2 = (X_0 - a)^2 + 2 \int_0^t (X_s - a) dX_s \\ &\quad + 2 \int_0^t |X_s - a| d_s L_s^a(X) + \langle X, X \rangle_t.\end{aligned}$$

把它同直接对 $(X_t - a)^2$ 应用 Itô 公式所得结果比较, 便有

$$\int_0^t |X_s - a| d_s L_s^a(X) = 0.$$

这就给出所需结论。 $\square$

命题 9.3 表明, 函数 $t \mapsto L_t^a(X)$ 只能在 $X_t = a$ 时增加。因此, 从某种意义上说, $L_t^a(X)$ 度量了过程 X 在时刻 t 以前对水平 a 的“访问次数”(第 9.3 节的结果会严格化这一直观说法)。这也解释了“局部时”这一名称。

9.2 局部时的连续性与广义 Itô 公式

设 X 是连续半鞅, 并写出其标准分解 $X = M + V$ 。本节首先研究局部时关于空间变量 a 的连续性。

为方便起见, 把随机连续函数 $(L_t^a(X))_{t \geq 0}$ 记为 $L^a(X)$, 并把它看成取值于空间 $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ 的随机变量。与以往一样, 该空间赋予在每个紧集上一致收敛的拓扑。

定理 9.4。 取值于 $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ 的过程 $(L^a(X), a \in \mathbb{R})$ 有一个 càdlàg 修正; 此后总取这一修正, 并仍使用记号 $(L^a(X), a \in \mathbb{R})$ 。若 $L^{a-}(X) = (L_t^{a-}(X))_{t \geq 0}$ 表示映射 $b \mapsto L^b(X)$ 在 a 处的左极限, 则对每个 $t \geq 0$,

$$L_t^a(X) - L_t^{a-}(X) = 2 \int_0^t 1_{\{X_s = a\}} dV_s. \quad (9.8)$$

特别地, 若 X 是连续局部鞅, 则过程 $(L_t^a(X))_{a \in \mathbb{R}, t \geq 0}$ 具有联合连续的样本路径。

定理的证明依赖 Tanaka 公式以及下面的技术引理。

引理 9.5。 设 $p \geq 1$ 。存在只依赖于 p 的常数 C_p , 使得对任意 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$,

$$\begin{aligned}E \left[\left(\int_0^t 1_{\{a < X_s \leq b\}} d\langle M, M \rangle_s \right)^p \right] &\leq C_p (b - a)^p \left(E[(\langle M, M \rangle_t)^{p/2}] \right. \\ &\quad \left. + E \left[\left(\int_0^t |dV_s| \right)^p \right] \right).\end{aligned}$$

对每个 $a \in \mathbb{R}$, 令 $Y^a = (Y_t^a)_{t \geq 0}$ 为取值于 $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ 的随机变量, 其中

$$Y_t^a = \int_0^t 1_{\{X_s > a\}} dM_s.$$

则过程 $(Y^a, a \in \mathbb{R})$ 有连续修正。

证明。 先证第一个断言。只需证明 $a = -u, b = u (u > 0)$ 时的估计; 一般情形可取 $u = (b - a)/2$,

并用 $X - (b + a)/2$ 代替 X 。设 f 是满足

$$f''(x) = \left(2 - \frac{|x|}{u}\right)^+, \quad f(0) = f'(0) = 0$$

的唯一二阶连续可微函数。于是对每个 $x \in \mathbb{R}$ ，都有 $|f'(x)| \leq 2u$ 。由于 $f'' \geq 0$ ，而且当 $-u \leq x \leq u$ 时 $f''(x) \geq 1$ ，故

$$\int_0^t 1_{\{-u < X_s \leq u\}} d\langle M, M \rangle_s \leq \int_0^t f''(X_s) d\langle M, M \rangle_s. \quad (9.9)$$

另一方面，由 Itô 公式，

$$\frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle M, M \rangle_s = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t f'(X_s) dX_s. \quad (9.10)$$

回忆 $|f'| \leq 2u$ ，由 Burkholder–Davis–Gundy 不等式（定理 5.16），

$$\begin{aligned} E[|f(X_t) - f(X_0)|^p] &\leq (2u)^p E[|X_t - X_0|^p] \\ &\leq (2u)^p E\left[\left(|M_t - M_0| + \int_0^t |dV_s|\right)^p\right] \\ &\leq C_p (2u)^p \left(E[(\langle M, M \rangle_t)^{p/2}] + E\left[\left(\int_0^t |dV_s|\right)^p\right]\right). \end{aligned}$$

这里以及下文中， C_p 都表示只依赖于 p 的常数，其数值可以逐行改变。又有

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) dM_s + \int_0^t f'(X_s) dV_s,$$

以及

$$E\left[\left|\int_0^t f'(X_s) dV_s\right|^p\right] \leq (2u)^p E\left[\left(\int_0^t |dV_s|\right)^p\right].$$

再次使用 Burkholder–Davis–Gundy 不等式，

$$\begin{aligned} E\left[\left|\int_0^t f'(X_s) dM_s\right|^p\right] &\leq C_p E\left[\left(\int_0^t f'(X_s)^2 d\langle M, M \rangle_s\right)^{p/2}\right] \\ &\leq C_p (2u)^p E[(\langle M, M \rangle_t)^{p/2}]. \end{aligned}$$

把上述估计与 (9.9)、(9.10) 合并，即得引理的第一个断言。

再证第二个断言。固定 $p > 2$ 。由 Burkholder–Davis–Gundy 不等式，对每个 $a < b$ 及 $t \geq 0$ ，

$$E\left[\sup_{s \leq t} |Y_s^b - Y_s^a|^p\right] \leq C_p E\left[\left(\int_0^t 1_{\{a < X_s \leq b\}} d\langle M, M \rangle_s\right)^{p/2}\right]. \quad (9.11)$$

右端可由引理的第一个断言估计。更准确地说，对每个整数 $n \geq 1$ ，引入停时

$$T_n := \inf\left\{t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t + \int_0^t |dV_s| \geq n\right\}.$$

对停住过程 X^{T_n} 应用引理的第一个断言，并把其中的指数取为 $p/2$ ，可知对每个 $t \geq 0$ ，

$$E\left[\left(\int_0^{t \wedge T_n} 1_{\{a < X_s \leq b\}} d\langle M, M \rangle_s\right)^{p/2}\right] \leq C_p (n^{p/4} + n^{p/2})(b - a)^{p/2}.$$

在 (9.11) 中也用 X^{T_n} 代替 X , 再令 $t \rightarrow \infty$, 得到

$$E \left[\sup_{s \geq 0} |Y_{s \wedge T_n}^b - Y_{s \wedge T_n}^a|^p \right] \leq C_p (n^{p/4} + n^{p/2}) (b-a)^{p/2}.$$

由于 $p > 2$, 可应用 Kolmogorov 引理 (定理 2.9), 得到取值于 $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ 的过程 $a \mapsto (Y_{s \wedge T_n}^a)_{s \geq 0}$ 的一个连续修正, 记为 $(Y_s^{(n),a})_{s \geq 0}$.

若 $1 \leq n < m$, 则对每个固定的 a , 几乎处处地, 对所有 $s \geq 0$,

$$Y_s^{(n),a} = Y_{s \wedge T_n}^{(m),a}.$$

由连续性, 在同一个概率为零的例外集之外, 这一等式对所有 $a \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ 同时成立. 因此可定义取值于 $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ 且样本路径连续的过程 $(\tilde{Y}^a, a \in \mathbb{R})$, 使得对每个 $n \geq 1$, 几乎处处地,

$$Y_s^{(n),a} = \tilde{Y}_{s \wedge T_n}^a, \quad a \in \mathbb{R}, s \geq 0.$$

过程 $(\tilde{Y}^a, a \in \mathbb{R})$ 就是所需的连续修正。□

注。 把引理 9.5 的估计应用于 X^{T_n} (其中 T_n 如上), 再令 $a \rightarrow b$, 可知对每个 $b \in \mathbb{R}$, 几乎处处地, 对每个 $t \geq 0$,

$$\int_0^t 1_{\{X_s=b\}} d\langle M, M \rangle_s = 0.$$

因此由命题 4.12, 还有

$$\int_0^t 1_{\{X_s=b\}} dM_s = 0, \quad t \geq 0, \text{ quada.s.} \quad (9.12)$$

证明。(定理 9.4 的证明) 稍微滥用记号, 仍把引理 9.5 第二个断言得到的连续修正记为 $(Y^a, a \in \mathbb{R})$. 再定义取值于 $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ 的过程 $(Z^a, a \in \mathbb{R})$:

$$Z_t^a = \int_0^t 1_{\{X_s > a\}} dV_s.$$

由 Tanaka 公式, 对每个固定的 $a \in \mathbb{R}$, 几乎处处地, 对每个 $t \geq 0$,

$$L_t^a(X) = 2((X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+ - Y_t^a - Z_t^a).$$

上一等式的右端给出了所需的 càdlàg 修正. 事实上, 过程

$$a \mapsto ((X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+ - Y_t^a)_{t \geq 0}$$

有连续样本路径, 而过程 $a \mapsto Z^a$ 有 càdlàg 样本路径. 对每个 $a_0 \in \mathbb{R}$, 控制收敛定理给出: 在每个紧时间区间上一致地,

$$\int_0^t 1_{\{X_s > a\}} dV_s \xrightarrow{a \downarrow a_0} \int_0^t 1_{\{X_s > a_0\}} dV_s,$$

以及

$$\int_0^t 1_{\{X_s > a\}} dV_s \xrightarrow[a < a_0]{a \uparrow a_0} \int_0^t 1_{\{X_s \geq a_0\}} dV_s.$$

这还说明 Z^a 在 a_0 处的跳跃为

$$Z_t^{a_0} - Z_t^{a_0-} = - \int_0^t 1_{\{X_s = a_0\}} dV_s.$$

于是得到 (9.8), 定理得证。□

从现在起, 我们只使用定理 9.4 所得到的局部时 càdlàg 修正。

注 (定理 9.4 的例示)。 令 $W_t = |X_t|$ 。由 Tanaka 公式 (9.5), W 也是半鞅。对 W_t 应用 (9.6), 有

$$\begin{aligned} W_t &= (W_t)^+ = |X_0| + \int_0^t 1_{\{|X_s|>0\}} (\operatorname{sgn}(X_s) dX_s + d_s L_s^0(X)) + \frac{1}{2} L_t^0(W) \\ &= |X_0| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) dX_s + \int_0^t 1_{\{X_s=0\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^0(W). \end{aligned}$$

这里使用了局部时的支集性质 (命题 9.3), 它给出

$$\int_0^t 1_{\{|X_s|>0\}} d_s L_s^0(X) = 0.$$

把所得公式与取 $a = 0$ 的 (9.5) 比较, 并使用 (9.8), 得到

$$L_t^0(W) = 2L_t^0(X) - 2 \int_0^t 1_{\{X_s=0\}} dX_s = L_t^0(X) + L_t^{0-}(X).$$

这是一条更一般公式的特殊情形: 对每个 $a \geq 0$,

$$L_t^a(W) = L_t^a(X) + L_t^{(-a)-}(X).$$

该式也很容易由下面的推论 9.7 导出。还要注意, 局部时的支集性质给出: 当 $a < 0$ 时 $L_t^a(W) = 0$, 特别地 $L_t^{0-}(W) = 0$ 。读者可自行验证: 对 $L_t^0(W) - L_t^{0-}(W)$ 应用 (9.8), 所得结果与上面对 $L_t^0(W)$ 的表达式相符。

下面给出 Itô 公式的推广, 这里只考虑把公式应用于单个半鞅的函数。若 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数, 则左导数 f'_- 左连续且单调不减; 存在唯一的 Radon 测度 $f''(da)$, 使得对每个 $a < b$,

$$f''([a, b)) = f'_-(b) - f'_-(a).$$

也可把 f'' 理解为 f 在分布意义下的二阶导数。若 f 二阶连续可微, 则 $f''(da) = f''(a) da$ 。若 f 是两个凸函数之差, 即 $f = f_1 - f_2$, 则对任意支集包含于某个紧区间的有界可测函数 φ , 仍可定义

$$\int f''(da) \varphi(a) := \int f_1''(da) \varphi(a) - \int f_2''(da) \varphi(a).$$

下面的定理辨认出命题 9.1 中出现的递增过程 A^f 。

定理 9.6 (广义 Itô 公式)。 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上两个凸函数之差。则对每个 $t \geq 0$,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^a(X) f''(da).$$

注。 由命题 9.2 与连续性论证, 几乎处处地,

$$L_t^a(X) = 0 \quad \text{只要} \quad a \notin \left[\min_{0 \leq s \leq t} X_s, \max_{0 \leq s \leq t} X_s \right],$$

而且函数 $a \mapsto L_t^a(X)$ 有界。结合定理前的说明可知, 积分 $\int_{\mathbb{R}} L_t^a(X) f''(da)$ 有意义。

证明。 由线性性, 只需处理 f 为凸函数的情形。进一步作简单的局部化, 可设 f'' 是支集包含于 $[-K, K]$ 的有限测度, 其中 $K > 0$ 。再给 f 加上一个仿射函数, 可设 $f = 0$ 于 $(-\infty, -K]$ 。于是容易验证, 对每个 $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} (x - a)^+ f''(da),$$

以及

$$f'_-(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_{\{a < x\}} f''(da). \quad (9.13)$$

对每个 $a \in \mathbb{R}$, Tanaka 公式给出

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + Y_t^a + Z_t^a + \frac{1}{2} L_t^a(X),$$

其中沿用定理 9.4 证明中的记号, 并回忆 $(Y^a, a \in \mathbb{R})$ 指引理 9.5 得到的连续修正。对上一等式关于有限测度 $f''(da)$ 积分, 得到

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_{\mathbb{R}} Y_t^a f''(da) + \int_{\mathbb{R}} Z_t^a f''(da) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^a(X) f''(da).$$

由 Fubini 定理与 (9.13),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} Z_t^a f''(da) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t 1_{\{X_s > a\}} dV_s \right) f''(da) \\ &= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{\{X_s > a\}} f''(da) \right) dV_s \\ &= \int_0^t f'_-(X_s) dV_s. \end{aligned}$$

因此只需再验证

$$\int_{\mathbb{R}} Y_t^a f''(da) = \int_0^t f'_-(X_s) dM_s. \quad (9.14)$$

这可看成涉及随机积分的一种 Fubini 定理。为给出严格证明, 对每个 $n \geq 1$ 引入停时

$$T_n := \inf\{s \geq 0 : \langle M, M \rangle_s \geq n\}.$$

由 (9.13), 只需证明对每个 $n \geq 1$, 几乎处处地,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{t \wedge T_n} 1_{\{X_s > a\}} dM_s \right) f''(da) = \int_0^{t \wedge T_n} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{\{X_s > a\}} f''(da) \right) dM_s. \quad (9.15)$$

其中约定: 左端使用引理 9.5 给出的 $a \mapsto \int_0^{t \wedge T_n} 1_{\{X_s > a\}} dM_s$ 的连续修正。

容易验证, (9.15) 左端定义了 $\mathcal{H}^2$ 中的鞅 M^f 。而对 $\mathcal{H}^2$ 中任意另一个鞅 N ,

$$\begin{aligned} E[\langle M^f, N \rangle_\infty] &= E[M_\infty^f N_\infty] \\ &= E \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{T_n} 1_{\{X_s > a\}} d\langle M, N \rangle_s \right) f''(da) \right] \\ &= E \left[\int_0^{T_n} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{\{X_s > a\}} f''(da) \right) d\langle M, N \rangle_s \right] \\ &= E \left[\left(\int_0^{T_n} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{\{X_s > a\}} f''(da) \right) dM_s \right) N_\infty \right]. \end{aligned}$$

由 $\mathcal{H}^2$ 中的对偶论证, 这足以说明 M^f 等于 (9.15) 右端的 $\mathcal{H}^2$ 鞅。因此 (9.14) 成立, 证明完成。□

下面的推论甚至比上一条定理更为重要。

推论 9.7 (占用时间密度公式)。 几乎处处地, 对每个 $t \geq 0$ 及 $\mathbb{R}$ 上每个非负可测函数 φ ,

$$\int_0^t \varphi(X_s) d\langle X, X \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \varphi(a) L_t^a(X) da.$$

更一般地, 几乎处处地, 对 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上任意非负可测函数 F ,

$$\int_0^\infty F(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} da \int_0^\infty F(s, a) d_s L_s^a(X).$$

证明。 固定 $t \geq 0$, 取 $\mathbb{R}$ 上非负、连续且具有紧支集的函数 φ 。令 f 是满足 $f'' = \varphi$ 的一个二阶连续可微函数。由于 $\varphi \geq 0$, 函数 f 为凸函数。比较对 $f(X_t)$ 应用的普通 Itô 公式与定理 9.6 的公式, 立即得到, 几乎处处地,

$$\int_0^t \varphi(X_s) d\langle X, X \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \varphi(a) L_t^a(X) da.$$

由连续性论证, 该公式可在同一个概率为零的例外集之外对每个 $t \geq 0$ 以及属于 $\mathbb{R}$ 上所有非负紧支连续函数的某个可数稠密子集的每个 φ 同时成立。这足以推出: 几乎处处地, 对每个 $t \geq 0$, 随机测度

$$A \mapsto \int_0^t 1_A(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

关于 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 测度的密度为 $(L_t^a(X))_{a \in \mathbb{R}}$ 。这就给出推论的第一个断言。

因此, 当

$$F(s, a) = 1_{[u, v]}(s) 1_A(a),$$

其中 $0 \leq u \leq v$, 且 A 是 $\mathbb{R}$ 的 Borel 子集时, 第二个断言中的公式成立。于是, 几乎处处地, 定义在 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上的两个 σ -有限测度

$$B \mapsto \int_0^\infty 1_B(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

和

$$B \mapsto \int_{\mathbb{R}} da \int_0^\infty 1_B(s, a) d_s L_s^a(X)$$

在所有 $B = [u, v] \times A$ 上取相同值, 故这两个测度相同。□

若 $X = M + V$ 是连续半鞅, 则占用时间密度公式立即给出: 对每个 $b \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t 1_{\{X_s=b\}} d\langle M, M \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} 1_{\{b\}}(a) L_t^a(X) da = 0.$$

这一性质已经在引理 9.5 的证明之后得到。另一方面, 可能存在某些 b 使得

$$\int_0^t 1_{\{X_s=b\}} dV_s \neq 0.$$

由定理 9.4, 这些 b 正对应于局部时关于空间变量的不连续点。

推论 9.8。 若 X 形如 $X_t = X_0 + V_t$, 其中 V 是有限变差过程, 则对所有 $a \in \mathbb{R}$ 、 $t \geq 0$,

$$L_t^a(X) = 0.$$

证明。 由占用时间密度公式以及 $\langle X, X \rangle = 0$, 对每个非负可测函数 φ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(a) L_t^a(X) da = 0.$$

所需结论随即得到。□

注。 也可直接由 Tanaka 公式推出上一推论。

9.3 局部时的逼近

第一个逼近结果是占用时间密度公式的直接推论。

命题 9.9。 设 X 是连续半鞅。则几乎处处地, 对每个 $a \in \mathbb{R}$ 、 $t \geq 0$,

$$L_t^a(X) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{\{a \leq X_s \leq a+\varepsilon\}} d\langle X, X \rangle_s.$$

证明。 由占用时间密度公式,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{\{a \leq X_s \leq a+\varepsilon\}} d\langle X, X \rangle_s = \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} L_t^b(X) db.$$

由映射 $b \mapsto L_t^b(X)$ 在 a 处右连续 (定理 9.4), 结论成立。□

注。 同样的论证给出

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{\{a-\varepsilon \leq X_s \leq a+\varepsilon\}} d\langle X, X \rangle_s = \frac{1}{2} (L_t^a(X) + L_t^{a-}(X)).$$

量

$$\tilde{L}_t^a(X) := \frac{1}{2} (L_t^a(X) + L_t^{a-}(X))$$

有时称为半鞅 X 的对称局部时。若把 $L_t^a(X)$ 换成 $\tilde{L}_t^a(X)$, 占用时间密度公式仍然成立; 事实上, 二者至多在可数多个 a 上不同。若同时把左导数 f'_- 换成 $\frac{1}{2}(f'_+ + f'_-)$, 则广义 Itô 公式 (定理 9.6) 也仍然成立。Tanaka 公式也有类似的说法。

结合上一命题与引理 9.5, 可以得到一个有用的局部时矩估计。

推论 9.10。 设 $p \geq 1$ 。存在常数 C_p , 使得对任意具有标准分解 $X = M + V$ 的连续半鞅以及每个 $a \in \mathbb{R}$ 、 $t \geq 0$,

$$E[(L_t^a(X))^p] \leq C_p \left(E[(\langle M, M \rangle_t)^{p/2}] + E \left[\left(\int_0^t |dV_s| \right)^p \right] \right).$$

证明。 使用命题 9.9 对 $L_t^a(X)$ 的逼近, 再结合引理 9.5 的估计与 Fatou 引理即可。□

下面讨论局部时的逐次上穿逼近。先引入记号。设 X 为连续半鞅, $\varepsilon > 0$ 。递归定义两列停时 $(\sigma_n^\varepsilon)_{n \geq 1}$ 与 $(\tau_n^\varepsilon)_{n \geq 1}$:

$$\sigma_1^\varepsilon := \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\}, \quad \tau_1^\varepsilon := \inf\{t \geq \sigma_1^\varepsilon : X_t = \varepsilon\},$$

并且对每个 $n \geq 1$,

$$\sigma_{n+1}^\varepsilon := \inf\{t \geq \tau_n^\varepsilon : X_t = 0\}, \quad \tau_{n+1}^\varepsilon := \inf\{t \geq \sigma_{n+1}^\varepsilon : X_t = \varepsilon\}.$$

1

¹**校订注:** 英文原文把第二个递推式中的 σ_{n+1}^ε 误写为 σ_n^ε 。照原式会导致 $\tau_{n+1}^\varepsilon = \tau_n^\varepsilon$, 无法形成逐次上穿; 这里按定义与后续证明一并订正。

定义 X 在时刻 t 以前沿区间 $[0, \varepsilon]$ 的上穿次数为

$$N_\varepsilon^X(t) = \text{Card}\{n \geq 1 : \tau_n^\varepsilon \leq t\}.$$

这一概念已经在第 3.3 节用略有不同的方式引入。

命题 9.11. 对每个 $t \geq 0$, 当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时,

$$\varepsilon N_\varepsilon^X(t) \xrightarrow{P} \frac{1}{2} L_t^0(X).$$

证明. 本证明中简记 $L_s^0 = L_s^0(X)$ 。首先由 Tanaka 公式, 对每个 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} (X_{\tau_n^\varepsilon \wedge t})^+ - (X_{\sigma_n^\varepsilon \wedge t})^+ &= \int_{\sigma_n^\varepsilon \wedge t}^{\tau_n^\varepsilon \wedge t} 1_{\{X_s > 0\}} dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2} (L_{\tau_n^\varepsilon \wedge t}^0 - L_{\sigma_n^\varepsilon \wedge t}^0). \end{aligned}$$

对所有 $n \geq 1$ 求和, 得到

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} ((X_{\tau_n^\varepsilon \wedge t})^+ - (X_{\sigma_n^\varepsilon \wedge t})^+) \\ &= \int_0^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{(\sigma_n^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon]}(s) \right) 1_{\{X_s > 0\}} dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (L_{\tau_n^\varepsilon \wedge t}^0 - L_{\sigma_n^\varepsilon \wedge t}^0). \end{aligned} \tag{9.16}$$

满足 $\tau_n^\varepsilon \leq t$ 的 n 只有有限多个。交换级数与随机积分的次序, 可先用有限和逼近, 再应用命题 5.8; 所需控制是显然的, 因为被积过程都不超过 1。

下面逐项考察 (9.16)。局部时 L^0 在形如 $[\tau_n^\varepsilon, \sigma_{n+1}^\varepsilon)$ 的区间上不增加, 在 $[0, \sigma_1^\varepsilon)$ 上也不增加, 因此

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (L_{\tau_n^\varepsilon \wedge t}^0 - L_{\sigma_n^\varepsilon \wedge t}^0) &= \sum_{n=1}^{\infty} (L_{\sigma_{n+1}^\varepsilon \wedge t}^0 - L_{\sigma_n^\varepsilon \wedge t}^0) \\ &= L_t^0. \end{aligned}$$

又注意到, 只要 $\tau_n^\varepsilon \leq t$, 就有

$$(X_{\tau_n^\varepsilon \wedge t})^+ - (X_{\sigma_n^\varepsilon \wedge t})^+ = \varepsilon.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((X_{\tau_n^\varepsilon \wedge t})^+ - (X_{\sigma_n^\varepsilon \wedge t})^+) = \varepsilon N_\varepsilon^X(t) + u(\varepsilon),$$

其中 $0 \leq u(\varepsilon) \leq \varepsilon$ 。

结合 (9.16) 与以上两式, 只需验证

$$\int_0^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{(\sigma_n^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon]}(s) \right) 1_{\{X_s > 0\}} dX_s \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{P} 0.$$

这再次是命题 5.8 的推论, 因为

$$0 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{(\sigma_n^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon]}(s) \right) 1_{\{X_s > 0\}} \leq 1_{\{0 < X_s \leq \varepsilon\}},$$

且当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时 $1_{\{0 < X_s \leq \varepsilon\}} \rightarrow 0$ 。

□

9.4 一维布朗运动的局部时

本节始终设 $(B_t)_{t \geq 0}$ 是从 0 出发的一维布朗运动, $(\mathcal{F}_t)$ 是 B 的完备自然滤过。

下面的 Trotter 定理实质上是前几节的一般结果在一维布朗运动情形下的重述; 但由于这一结果十分重要, 仍值得单独陈述。对 $\mathbb{R}_+$ 上的有限测度 μ , 记 $\text{supp}(\mu)$ 为其拓扑支集。

定理 9.12 (Trotter 定理)。 存在唯一过程

$$(L_t^a(B))_{a \in \mathbb{R}, t \geq 0},$$

其样本路径是二元变量 (a, t) 的连续函数; 对每个固定的 $a \in \mathbb{R}$, $(L_t^a(B))_{t \geq 0}$ 是递增过程; 而且几乎处处地, 对每个 $t \geq 0$ 以及 $\mathbb{R}$ 上每个非负可测函数 φ ,

$$\int_0^t \varphi(B_s) ds = \int_{\mathbb{R}} \varphi(a) L_t^a(B) da.$$

此外, 几乎处处地, 对每个 $a \in \mathbb{R}$,

$$\text{supp}(d_s L_s^a(B)) \subset \{s \geq 0 : B_s = a\}, \quad (9.17)$$

并且若 a 固定, 则这一包含关系以概率 1 为等式。

证明。 把定理 9.4 与推论 9.7 应用于 $X = B$, 并注意 $\langle B, B \rangle_t = t$, 便得到第一个断言。我们已经知道: 若 a 固定, 则 (9.17) 以概率 1 成立; 因而它几乎处处地对所有有理数 a 同时成立。连续性论证表明, 可在同一个概率为零的例外集之外使它对所有 $a \in \mathbb{R}$ 同时成立。事实上, 若对某个 $a \in \mathbb{R}$ 和 $0 \leq s < t$, 有

$$L_t^a(B) > L_s^a(B), \quad B_r \neq a \quad (r \in [s, t]),$$

则可取充分接近 a 的有理数 b , 使把 a 换成 b 后上述两个性质仍然成立, 这就产生矛盾。

最后验证: 固定 $a \in \mathbb{R}$ 时, (9.17) 几乎处处地为等式。对每个非负有理数 q , 令

$$H_q := \inf\{t \geq q : B_t = a\}.$$

只需证明: 几乎处处地, 对每个 $\varepsilon > 0$,

$$L_{H_q + \varepsilon}^a(B) > L_{H_q}^a(B).$$

在时刻 H_q 使用强马尔可夫性质, 只需证明: 若 B' 是从 a 出发的一维布朗运动, 则几乎处处地, 对每个 $\varepsilon > 0$, $L_\varepsilon^a(B') > 0$ 。显然可取 $a = 0$ 。由简单的尺度变换 (例如使用上一节的逼近式),

$$L_\varepsilon^0(B) \stackrel{(d)}{=} \sqrt{\varepsilon} L_1^0(B).$$

又由 Tanaka 公式,

$$P(L_1^0(B) > 0) > 0, \quad E[L_1^0(B)] = E[|B_1|].$$

对事件

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \{L_{2^{-n}}^0(B) > 0\} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \{L_{2^{-n}}^0(B) > 0\}$$

应用 Blumenthal 零一律 (定理 2.13), 即得结论。 $\square$

注。 对具有任意初值（初值也可随机）的布朗运动，定理 9.12 仍成立，证明相同。

下面讨论布朗局部时的分布性质。

命题 9.13。

(i) 设 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ，并令

$$T_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}.$$

则 $L_{T_a}^0(B)$ 服从均值为 $2|a|$ 的指数分布。

(ii) 设 $a > 0$ ，并令

$$U_a := \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a\}.$$

则 $L_{U_a}^0(B)$ 服从均值为 a 的指数分布。

证明。

(i) 由简单的尺度变换与对称性，只需取 $a = 1$ 。先注意

$$L_\infty^0(B) = \infty, \quad \text{a.s.}$$

事实上，上一证明中的尺度变换说明，对任意 $\lambda > 0$ ， $L_\infty^0(B)$ 与 $\lambda L_\infty^0(B)$ 同分布；并且我们已经看到 $L_\infty^0(B) > 0$ a.s.

固定 $s > 0$ ，令

$$\delta := \inf\{t \geq 0 : L_t^0(B) \geq s\}.$$

则 δ 是 $(\mathcal{F}_t)$ 的停时；由局部时的支集性质， $B_\delta = 0$ 。强马尔可夫性质表明

$$B'_t := B_{\delta+t}$$

是从 0 出发的布朗运动，并且独立于 $\mathcal{F}_\delta$ 。由命题 9.9，对每个 $t \geq 0$ ，

$$L_t^0(B') = L_{\delta+t}^0(B) - s.$$

在事件

$$\{L_{T_1}^0(B) \geq s\} = \{\delta \leq T_1\}$$

上，因有

$$L_{T_1}^0(B) - s = L_{T_1-\delta}^0(B') = L_{T'_1}^0(B'),$$

其中

$$T'_1 := \inf\{t \geq 0 : B'_t = 1\}.$$

事件 $\{\delta \leq T_1\}$ 属于 $\mathcal{F}_\delta$ ，而 B' 独立于 $\mathcal{F}_\delta$ 。因此，在已知 $L_{T_1}^0(B) \geq s$ 的条件下， $L_{T_1}^0(B) - s$ 的条件分布等于 $L_{T_1}^0(B)$ 的无条件分布。无记忆性表明 $L_{T_1}^0(B)$ 服从指数分布。

最后，由 Tanaka 公式 (9.6)，

$$\frac{1}{2} E[L_{t \wedge T_1}^0(B)] = E[(B_{t \wedge T_1})^+].$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时，左端由单调收敛趋于 $\frac{1}{2} E[L_{T_1}^0(B)]$ ；右端由控制收敛趋于 $E[(B_{T_1})^+] = 1$ ，因为 $0 \leq (B_{t \wedge T_1})^+ \leq 1$ 。故

$$E[L_{T_1}^0(B)] = 2.$$

(ii) 论证完全相同；这一次用 Tanaka 公式 (9.5) 验证

$$E[L_{U_a}^0(B)] = a.$$

□

注。 也可用随机分析给出另一种证明。例如，为证明 (ii)，由 Itô 公式可验证：对每个 $\lambda > 0$,

$$(1 + \lambda|B_t|) \exp(-\lambda L_t^0(B))$$

是连续局部鞅，并且在 $[0, U_a]$ 上有界。应用可选停时定理，得到

$$E[\exp(-\lambda L_{U_a}^0(B))] = (1 + \lambda a)^{-1}.$$

不过，上面的证明更能解释指数分布为何出现。

对每个 $t \geq 0$ ，令

$$S_t := \sup_{0 \leq s \leq t} B_s, \quad I_t := \inf_{0 \leq s \leq t} B_s.$$

定理 9.14 (Lévy 定理)。 两个过程

$$(S_t, S_t - B_t)_{t \geq 0} \quad \text{与} \quad (L_t^0(B), |B_t|)_{t \geq 0}$$

同分布。

注。 由显然的对称性，过程

$$(-I_t, B_t - I_t)_{t \geq 0}$$

也与 $(S_t, S_t - B_t)_{t \geq 0}$ 同分布。

证明。 由 Tanaka 公式，对每个 $t \geq 0$,

$$|B_t| = -\beta_t + L_t^0(B), \tag{9.18}$$

其中

$$\beta_t := - \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s.$$

由于 $\langle \beta, \beta \rangle_t = t$ ，定理 5.12 保证 β 是从 0 出发的一维布朗运动。下面断言：对每个 $t \geq 0$,

$$L_t^0(B) = \sup\{\beta_s : s \leq t\}.$$

由 (9.18)，对每个 $s \in [0, t]$,

$$L_t^0(B) \geq L_s^0(B) \geq \beta_s,$$

所以“ $\geq$ ”显然成立。反过来，记 γ_t 为 t 以前 B 最后一次取零的时刻。由局部时的支集性质，

$$L_t^0(B) = L_{\gamma_t}^0(B);$$

再在 (9.18) 中取时刻 γ_t ，得到

$$L_{\gamma_t}^0(B) = \beta_{\gamma_t} \leq \sup\{\beta_s : s \leq t\}.$$

因此几乎处处地，

$$(L_t^0(B), |B_t|)_{t \geq 0} = \left(\sup_{s \leq t} \beta_s, \sup_{s \leq t} \beta_s - \beta_t \right)_{t \geq 0}.$$

由于 $(\beta_s)_{s \geq 0}$ 与 $(B_s)_{s \geq 0}$ 同分布，右端与 $(S_t, S_t - B_t)_{t \geq 0}$ 同分布。□

定理 9.14 有若干有趣推论。对每个 $t \geq 0$ ， S_t 与 $|B_t|$ 同分布（定理 2.21），故 $L_t^0(B)$ 也具有这一分布。由 (S_t, B_t) 的密度显式公式 (2.2)，还可得到 $(L_t^0(B), |B_t|)$ 的联合密度。

对每个 $s \geq 0$, 令

$$\delta_s := \inf\{t \geq 0 : L_t^0(B) > s\}.$$

过程 $(\delta_s)_{s \geq 0}$ 称为布朗运动 B (在 0 处) 的逆局部时。按构造, 它具有 càdlàg 的递增样本路径。由 Lévy 定理 9.14,

$$(\delta_s)_{s \geq 0} \stackrel{(d)}{=} (\tilde{T}_s)_{s \geq 0},$$

其中对每个 $s \geq 0$,

$$\tilde{T}_s := \inf\{t \geq 0 : B_t > s\}.$$

容易验证, 对每个固定的 $s \geq 0$, $\tilde{T}_s = T_s$ a.s.; 但过程 $(\tilde{T}_s)_{s \geq 0}$ 具有 càdlàg 样本路径, 而 $(T_s)_{s \geq 0}$ 没有这一性质。

与命题 9.13 证明中相同地应用强马尔可夫性质, 可知 $(\delta_s)_{s \geq 0}$ 具有平稳独立增量; 可与练习 2.26 比较。此外, 由布朗运动的尺度不变性, 对每个 $\lambda > 0$,

$$(\delta_{\lambda s})_{s \geq 0} \stackrel{(d)}{=} (\lambda^2 \delta_s)_{s \geq 0}.$$

上述性质可概括为: $(\delta_s)_{s \geq 0}$ 是指数为 $1/2$ 的稳定次序过程 (subordinator), 即样本路径不减的 Lévy 过程。

研究 $(\delta_s)_{s \geq 0}$ 的意义, 部分体现在下面的命题中。

命题 9.15. 几乎处处地,

$$\{t \geq 0 : B_t = 0\} = \{\delta_s : s \geq 0\} \cup \{\delta_{s-} : s \in D\},$$

其中 D 是过程 $(\delta_s)_{s \geq 0}$ 的可数跳跃时刻集。

证明. 由 (9.17), 几乎处处地,

$$\text{supp}(d_t L_t^0(B)) \subset \{t \geq 0 : B_t = 0\}.$$

因此, 形如 $t = \delta_s$ 或 $t = \delta_{s-}$ 的任一时刻都属于 B 的零点集。反过来, 回忆对 $a = 0$, (9.17) 几乎处处地为等式。因此, 几乎处处地, 对每个满足 $B_t = 0$ 的 t , 要么对每个 $\varepsilon > 0$ 都有

$$L_{t+\varepsilon}^0(B) > L_t^0(B),$$

要么当 $t > 0$ 时, 对每个 $0 < \varepsilon \leq t$ 都有

$$L_t^0(B) > L_{t-\varepsilon}^0(B),$$

或者两者同时成立。这说明

$$t = \delta_{L_t^0(B)} \quad \text{或} \quad t = \delta_{L_t^0(B)-}.$$

□

由命题 9.15, 零点集 $\{t \geq 0 : B_t = 0\}$ 的补集的各连通分支, 恰好是

$$(\delta_{s-}, \delta_s), \quad s \in D.$$

这些连通分支称为 (离开 0 的) 游程区间。对每个 $s \in D$, 相应游程定义为

$$e_s(t) := B_{(\delta_{s-}+t) \wedge \delta_s}, \quad t \geq 0.$$

游程理论的目标, 是描述游程过程, 即族 $(e_s)_{s \in D}$ 的分布。不过这项研究超出本书范围; 特别可参见 [4, 70, 72]。

9.5 Kallianpur–Robbins 律

本节使用局部时，简短证明第 7 章末尾定理 7.23 所陈述的平面布朗运动 Kallianpur–Robbins 律。先回忆所需记号。令 B 表示复布朗运动；为简单起见，假设 $B_0 = 1$ （一般情形例如可在首次击中单位圆的时刻应用强马尔可夫性质）。由定理 7.19，

$$|B_t| = \exp(\beta_{H_t}),$$

其中 β 是从 0 出发的一维布朗运动，并且

$$H_t = \int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2} = \inf \left\{ s \geq 0 : \int_0^s \exp(2\beta_u) du > t \right\}.$$

对每个 $\lambda > 0$ ，再考虑尺度变换后的布朗运动

$$\beta_t^{(\lambda)} = \lambda^{-1} \beta_{\lambda^2 t};$$

当 $t > 1$ 时，记

$$\lambda_t = \frac{\log t}{2}.$$

我们的目标是证明：对每个 $R > 0$ ，当 $t \rightarrow \infty$ 时，

$$\frac{2}{\log t} \int_0^t 1_{\{|B_s| < R\}} ds$$

依分布收敛到均值为 R^2 的指数分布。为此，对每个固定的 $t > 1$ ，写成

$$\begin{aligned} \frac{2}{\log t} \int_0^t 1_{\{|B_s| < R\}} ds &= \frac{1}{\lambda_t} \int_0^t 1_{\{\beta_{H_s} < \log R\}} ds \\ &= \frac{1}{\lambda_t} \int_0^{H_t} 1_{\{\beta_u < \log R\}} \exp(2\beta_u) du \\ &= \lambda_t \int_0^{\lambda_t^{-2} H_t} 1_{\{\beta_u^{(\lambda_t)} < \lambda_t^{-1} \log R\}} \exp(2\lambda_t \beta_u^{(\lambda_t)}) du \\ &= \lambda_t \int_{-\infty}^{\lambda_t^{-1} \log R} \exp(2\lambda_t a) L_{\lambda_t^{-2} H_t}^a(\beta^{(\lambda_t)}) da \\ &= \int_0^R L_{\lambda_t^{-2} H_t}^{\lambda_t^{-1} \log r}(\beta^{(\lambda_t)}) r dr. \end{aligned}$$

倒数第二个等号对布朗运动 $\beta^{(\lambda_t)}$ 使用了占用时间密度公式（推论 9.7）；最后一个等号使用变量代换 $r = e^{\lambda_t a}$ 。

当 $t \rightarrow \infty$ 时，对每个 $r > 0$ ，

$$\lambda_t^{-1} \log r \rightarrow 0.$$

引理 7.21 还说明

$$\lambda_t^{-2} H_t - T_1^{(\lambda_t)} \xrightarrow{P} 0,$$

其中

$$T_1^{(\lambda)} := \inf\{s \geq 0 : \beta_s^{(\lambda)} = 1\}.$$

由布朗局部时的联合连续性（定理 9.12），对每个 $\varepsilon \in (0, R)$ ，

$$\sup_{\varepsilon \leq r \leq R} \left| L_{\lambda_t^{-2} H_t}^{\lambda_t^{-1} \log r}(\beta^{(\lambda_t)}) - L_{T_1^{(\lambda_t)}}^0(\beta^{(\lambda_t)}) \right| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.$$

结合前面的表示, 得到

$$\left| \frac{2}{\log t} \int_0^t 1_{\{|B_s| < R\}} ds - \frac{R^2}{2} L_{T_1^0}^0(\beta^{(\lambda_t)}) \right| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.$$

最后只需注意: 对任意 $\lambda > 0$,

$$L_{T_1^0}^0(\beta^{(\lambda)})$$

的分布与 λ 无关, 并且由命题 9.13, 它服从均值为 2 的指数分布。定理 7.23 因而得证。

注。 上述证明还表明, 定理 7.23 中的极限指数变量并不依赖 R 的选择: 若同时取若干个 R , 则可得到联合收敛, 并且各极限只相差相应的乘法常数。也可由 Chacon–Ornstein 遍历定理推出这一点; 该定理还说明, 对复平面 $\mathbb{C}$ 中任意紧集 K 的占用时间, 也有相同的分布极限, 只需把常数 R^2 换成 K 的 Lebesgue 测度乘以 π^{-1} 。

本节的证明方法还说明: Kallianpur–Robbins 定理中的收敛与 Spitzer 定理 (定理 7.20) 中的绕数收敛联合成立; 其联合极限分布为

$$\left(\frac{R^2}{2} L_{T_1^0}^0(\beta), \gamma_{T_1} \right)$$

的分布, 其中 β, γ 是两个相互独立、从 0 出发的一维布朗运动, 而

$$T_1 = \inf\{t \geq 0 : \beta_t = 1\}.$$

练习

练习 9.16。 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 严格单调递增, 并假设 f 是两个凸函数之差。设 X 是半鞅, 并考虑半鞅 $Y_t = f(X_t)$ 。证明: 对每个 $a \in \mathbb{R}$,

$$L_t^{f(a)}(Y) = f'_+(a) L_t^a(X), \quad L_t^{f(a)-}(Y) = f'_-(a) L_t^a(X).$$

a

特别地, 若 X 是布朗运动, 则 $f(X)$ 的局部时关于空间变量连续, 当且仅当 f 连续可微。

校订注: 英文原文把左端的水平 $f(a)$ 两处都误印为 a , 并且只假设 f 单调不减。平移函数 $f(x) = x + c$ 已可看出第一处错误; 若 f 有平坦区间, 局部时的变量变换公式也会失效。因此这里同时把假设订正为严格单调递增。

解答 9.16。 严格递增的 DC 函数 f 连续, 且左右导数处处存在; f'_+ 右连续, f'_- 左连续。连续半鞅的函数演算说明

$$d\langle Y \rangle_s = f'_-(X_s)^2 d\langle X \rangle_s.$$

固定 a, t , 并令

$$a_\varepsilon = f^{-1}(f(a) + \varepsilon).$$

由局部时的逼近式与占用密度公式,

$$\begin{aligned} L_t^{f(a)}(Y) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{\{f(a) \leq f(X_s) < f(a) + \varepsilon\}} f'_-(X_s)^2 d\langle X \rangle_s \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\int_a^{a_\varepsilon} f'_+(b)^2 L_t^b(X) db}{f(a_\varepsilon) - f(a)} = f'_+(a) L_t^a(X). \end{aligned}$$

最后一步使用 $b \mapsto f'_+(b)L_t^b(X)$ 的右连续性以及 $f(a_\varepsilon) - f(a) = \int_a^{a_\varepsilon} f'(b) db$. 从左侧作同一计算, 得到

$$L_t^{f(a)^-}(Y) = f'_-(a)L_t^{a^-}(X).$$

先对固定的有理 a, t 建立等式, 再利用局部时与导数的单侧连续性, 可取同一个概率为一的事件使两式对所有 a, t 同时成立。

若 X 是布朗运动, 则 $a \mapsto L_t^a(X)$ 连续。若 $f \in C^1$, 以上两式立即说明 $f(X)$ 的局部时在 $f(\mathbb{R})$ 内连续。反之, 布朗运动会使每个给定水平的局部时在某个时刻严格为正; 局部时的左右连续性迫使 $f'_+(a) = f'_-(a)$ 对每个 a 成立。DC 函数的导数局部有界变差, 再结合导数的 Darboux 性质, 得到 f' 连续。因此 $f \in C^1$. $\square$

练习 9.17. 设 M 是满足

$$\langle M, M \rangle_\infty = \infty, \quad \text{a.s.}$$

的连续局部鞅, 并设 B 是由 Dambis–Dubins–Schwarz 定理 (定理 5.13) 同 M 联系起来的布朗运动。证明: 几乎处处地, 对每个 $a \in \mathbb{R}, t \geq 0$,

$$L_t^a(M) = L_{\langle M, M \rangle_t}^a(B).$$

解答 9.17. 由时间变换表示 $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$. 对 M 与 B 分别使用 Tanaka 公式:

$$\begin{aligned} |M_t - a| &= |M_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(M_s - a) dM_s + L_t^a(M), \\ |B_{\langle M \rangle_t} - a| &= |M_0 - a| + \int_0^{\langle M \rangle_t} \operatorname{sgn}(B_r - a) dB_r + L_{\langle M \rangle_t}^a(B). \end{aligned}$$

随机积分的时间变换公式给出

$$\int_0^t \operatorname{sgn}(M_s - a) dM_s = \int_0^{\langle M \rangle_t} \operatorname{sgn}(B_r - a) dB_r.$$

比较两式便得

$$L_t^a(M) = L_{\langle M \rangle_t}^a(B).$$

先在有理 a, t 上取可数交, 再用 t 方向的连续性与 a 方向的右连续性, 可使该等式在同一个概率为一的事件上对所有 $a \in \mathbb{R}, t \geq 0$ 成立。 $\square$

练习 9.18. 设 X 是连续半鞅, 并假设它可写成

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(\omega, s) dB_s + \int_0^t b(\omega, s) ds,$$

其中 B 是布朗运动, σ, b 均渐进可测且局部有界。假设几乎处处地, 对 Lebesgue-a.e. 的 $s \geq 0$, 都有

$$\sigma(\omega, s) \neq 0.$$

证明局部时 $L_t^a(X)$ 关于二元变量 (a, t) 联合连续。

解答 9.18。 由占用密度公式，在同一个概率为一的事件上，对每个 t 与每个 $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t 1_{\{X_s=a\}} \sigma(\omega, s)^2 ds = 0.$$

题设说明 $\sigma(\omega, s) \neq 0$ 对 Lebesgue-a.e. 的 s 成立，故

$$\int_0^t 1_{\{X_s=a\}} ds = 0, \quad \int_0^t 1_{\{X_s=a\}} b(\omega, s) ds = 0$$

对所有 a, t 同时成立（局部化后 b 有界）。

连续半鞅局部时的连续性判别定理表明：空间变量上的跳跃恰由有限变差部分在水平集 $\{X = a\}$ 上所带的质量造成。上述积分全部为零，故空间变量的跳跃消失；而局部时本来在时间变量上连续。因而可取一个版本，使

$$(a, t) \mapsto L_t^a(X)$$

联合连续。 □

练习 9.19。 设 X 是连续半鞅。证明：在同一个概率为零的例外集之外，性质

$$\text{supp}(d_s L_s^a(X)) \subset \{s \geq 0 : X_s = a\}$$

对所有 $a \in \mathbb{R}$ 同时成立。

解答 9.19。 对每个固定的有理数 q ，局部时的基本支集性质给出

$$\text{supp}(d_s L_s^q) \subset \{s : X_s = q\}$$

在一个概率为一的事件上成立。对所有 $q \in \mathbb{Q}$ 求可数交，固定该事件。

现在任取 $a \in \mathbb{R}$ 及满足 $X_{t_0} \neq a$ 的 t_0 。由 X 连续，存在开时间区间 $I \ni t_0$ 与 $\delta > 0$ ，使 X_s 在 I 上始终位于 a 的同一侧并与 a 至少相距 δ 。取一列有理数 $q_n \downarrow a$ ，且 $|q_n - a| < \delta$ 。对每个 n ， X 在 I 上不取值 q_n ，故 L^{q_n} 在 I 上恒定。由 $q \mapsto L_t^q$ 的右连续性令 $n \rightarrow \infty$ ，得到 L^a 在 I 上也恒定。因此 $t_0 \notin \text{supp}(d_s L_s^a)$ 。

a, t_0 均为任意，所需包含关系便在同一个概率为一的事件上对所有 a 同时成立。 □

练习 9.20。 设 B 是从 0 出发的布朗运动。证明：几乎处处地，存在 $a \in \mathbb{R}$ ，使得包含关系

$$\text{supp}(d_s L_s^a(B)) \subset \{s \geq 0 : B_s = a\}$$

不是等式。

提示。 考虑 B 在 $[0, 1]$ 上的最大值。

解答 9.20。 令

$$A = \max_{0 \leq s \leq 1} B_s,$$

并令 $\tau \in (0, 1)$ 为取得该最大值的唯一时刻；这些性质 a.s. 成立。对固定样本路径，空间连续

性以及 $L_1^a(B) = 0$ 对所有 $a > A$ 成立, 给出

$$L_1^A(B) = 0.$$

因此测度 $d_s L_s^A(B)$ 在 $[0, 1]$ 上为零。特别地, 可以取一个包含 τ 且包含于 $(0, 1)$ 的开区间, 其 $d_s L_s^A$ -质量为零, 所以

$$\tau \notin \text{supp}(d_s L_s^A(B)).$$

但 $B_\tau = A$ 。故对这个随机水平 $a = A$, 题中的支集包含关系严格。 $\square$

练习 9.21。 设 B 是从 0 出发的布朗运动。注意几乎处处地,

$$\int_0^\infty 1_{\{B_s > 0\}} ds = \infty.$$

对每个 $t \geq 0$, 令

$$A_t = \int_0^t 1_{\{B_s > 0\}} ds, \quad \sigma_t = \inf\{s \geq 0 : A_s > t\}.$$

1. 验证过程

$$\gamma_t = \int_0^{\sigma_t} 1_{\{B_s > 0\}} dB_s$$

关于适当的滤过是布朗运动。

2. 证明过程

$$\Lambda_t = L_{\sigma_t}^0(B)$$

具有连续不减的样本路径, 并且测度 $d_s \Lambda_s$ 的支集包含于

$$\{s : B_{\sigma_s} = 0\}.$$

3. 证明过程 $(B_{\sigma_t})_{t \geq 0}$ 与 $(|B_t|)_{t \geq 0}$ 同分布。

解答 9.21。

1. 令

$$M_t = \int_0^t 1_{\{B_s > 0\}} dB_s.$$

则 $\langle M \rangle_t = A_t$ 。关于时间变换后的滤过, $\gamma_t = M_{\sigma_t}$ 是连续局部鞅, 且 $\langle \gamma \rangle_t = A_{\sigma_t} = t$ 。Lévy 刻画说明 γ 是布朗运动。

2. σ 连续地遍历正占用时间, 而 $t \mapsto L_t^0(B)$ 连续不减, 故 $\Lambda_t = L_{\sigma_t}^0(B)$ 也连续不减。又 $dL_s^0(B)$ 只在 $B_s = 0$ 时增加; 时间变换后,

$$\text{supp}(d\Lambda) \subset \{t : B_{\sigma_t} = 0\}.$$

3. Tanaka 公式给出

$$B_{\sigma_t}^+ = \gamma_t + \frac{1}{2} \Lambda_t.$$

时间变换删去了所有严格负的游程, 故 $B_{\sigma_t} \geq 0$, 于是左端就是 B_{σ_t} 。第 2 问说明 $\Lambda/2$ 只在该非负过程为 0 时增加。Skorokhod 反射引理因此给出

$$B_{\sigma_t} = \gamma_t - \inf_{0 \leq s \leq t} \gamma_s.$$

布朗运动的反射恒等式说明右端过程与 $(|B_t|)_{t \geq 0}$ 同分布。

□

练习 9.22 (斜布朗运动)。设 $\alpha, \beta > 0$ ，并考虑函数

$$g(x) = \alpha 1_{\{x \geq 0\}} + \beta 1_{\{x < 0\}}.$$

设 X 是满足

$$X_t = \int_0^t g(X_s) dB_s \quad (9.19)$$

的连续半鞅，其中 B 是布朗运动。

1. 令

$$\varphi(x) = \frac{x}{\alpha} 1_{\{x \geq 0\}} + \frac{x}{\beta} 1_{\{x < 0\}}, \quad Y_t = \varphi(X_t).$$

证明 Y 解出

$$Y_t = B_t + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) L_t^0(Y).$$

可使用练习 9.16 的结果。

^a

2. 用两种不同方法，把

$$L_t^0(Y) - L_t^{0-}(Y)$$

表示成 $L_t^0(Y)$ 的倍数。

3. 从满足 $\beta_0 = 0$ 的布朗运动 β 出发，令

$$A_t = \int_0^t \frac{ds}{g(\beta_s)^2}, \quad \sigma_t = \inf\{s \geq 0 : A_s > t\}.$$

验证过程 $X_t = \beta_{\sigma_t}$ 关于适当的滤过和适当的布朗运动 B 满足方程 (9.19)。

^a**校订注：**英文原文在 g 与 φ 的负半轴两项前均误印为负号。若照原式， $\varphi(X) \geq 0$ ，却要求它满足一般斜布朗运动方程，且公式中的局部时系数也不再能由广义 Itô 公式推出。这里把两处改为正号，使 φ 为单调尺度函数，并与本问公式及第 3 问的时间变换相符。

解答 9.22 (本版补写)。

1. 写成

$$\varphi(x) = \frac{x}{\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) x^+.$$

广义 Itô–Tanaka 公式及 $dX_t = g(X_t)dB_t$ 给出

$$Y_t = B_t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) L_t^0(X).$$

这里在 $\{X_t = 0\}$ 上随机积分系数的取值无关紧要，因为 g 有严格正的下界，故 X 的零点集具有 Lebesgue 测度 0。由练习 9.16，

$$L_t^0(Y) = \frac{1}{\alpha} L_t^0(X).$$

代入即得

$$Y_t = B_t + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) L_t^0(Y).$$

2. 第一种方法仍用练习 9.16:

$$L_t^0(Y) = \frac{1}{\alpha} L_t^0(X), \quad L_t^{0-}(Y) = \frac{1}{\beta} L_t^{0-}(X).$$

X 是连续局部鞅, 故 $L_t^0(X) = L_t^{0-}(X)$, 于是

$$L_t^{0-}(Y) = \frac{\alpha}{\beta} L_t^0(Y), \quad L_t^0(Y) - L_t^{0-}(Y) = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) L_t^0(Y).$$

第二种方法直接使用连续半鞅左右局部时之差的公式。第 1 问中 $Y = B + cL^0(Y)$, 其中 $c = \frac{1}{2}(1 - \alpha/\beta)$, 而 $dL^0(Y)$ 只由 $\{Y = 0\}$ 承载, 故

$$L_t^0(Y) - L_t^{0-}(Y) = 2 \int_0^t 1_{\{Y_s=0\}} c dL_s^0(Y) = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) L_t^0(Y).$$

3. A 连续严格递增, 且其导数有正的上下界; 因此 $\sigma = A^{-1}$, 并有

$$\sigma'_t = g(\beta_{\sigma_t})^2 = g(X_t)^2.$$

关于时间变换后的滤过, $X_t = \beta_{\sigma_t}$ 是连续局部鞅, 且

$$\langle X \rangle_t = \sigma_t = \int_0^t g(X_s)^2 ds.$$

令

$$B_t = \int_0^t \frac{1}{g(X_s)} dX_s.$$

则 $\langle B \rangle_t = t$, 故 B 是布朗运动; 并且

$$X_t = \int_0^t g(X_s) dB_s.$$

□

练习 9.23. 设 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是实值可积函数, 即

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx < \infty.$$

令 B 是从 0 出发的布朗运动, 并令

$$A_t = \int_0^t g(B_s) ds.$$

1. 说明定义 A_t 的积分有意义, 并验证: 对每个 $c > 0$, $u \geq 0$, $A_{c^2 u}$ 与

$$c^2 \int_0^u g(cB_s) ds$$

同分布。

2. 证明

$$\frac{1}{\sqrt{t}} A_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right) |N|,$$

其中 $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 。

解答 9.23。

1. 对 $t > 0$, 由 Fubini 定理与高斯密度,

$$\begin{aligned} E \int_0^t |g(B_s)| ds &= \int_{\mathbb{R}} |g(x)| \int_0^t \frac{e^{-x^2/(2s)}}{\sqrt{2\pi s}} ds dx \\ &\leq \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx < \infty. \end{aligned}$$

因而 A_t a.s. 有定义。布朗缩放与变量代换给出

$$A_{c^2 u} = c^2 \int_0^u g(B_{c^2 s}) ds \stackrel{d}{=} c^2 \int_0^u g(cB_s) ds.$$

2. 占用密度公式给出

$$\frac{A_t}{\sqrt{t}} = \int_{\mathbb{R}} g(a) \frac{L_t^a(B)}{\sqrt{t}} da \stackrel{d}{=} \int_{\mathbb{R}} g(a) L_1^{a/\sqrt{t}}(B) da.$$

对每条布朗路径, $a \mapsto L_1^a$ 连续、有紧支集且有界; 因此由 $g \in L^1$ 与控制收敛定理,

$$\int_{\mathbb{R}} g(a) L_1^{a/\sqrt{t}} da \longrightarrow L_1^0 \int_{\mathbb{R}} g(a) da \quad \text{a.s.}$$

Lévy 恒等式给出 $L_1^0 \stackrel{d}{=} |B_1| \stackrel{d}{=} |N|$ 。故

$$\boxed{\frac{A_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right) |N|}.$$

□

练习 9.24。 设 σ, b 是 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上两个局部有界可测函数, 考虑随机微分方程

$$E(\sigma, b) \quad dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t + b(t, X_t) dt.$$

设 X, X' 是同一滤过概率空间上由同一个布朗运动 B 驱动的 $E(\sigma, b)$ 的两个解。

1. 假设对每个 $t \geq 0$, 都有

$$L_t^0(X - X') = 0.$$

证明 $X_t \vee X'_t$ 与 $X_t \wedge X'_t$ 也都是 $E(\sigma, b)$ 的解。

提示。 写成

$$X_t \vee X'_t = X_t + (X'_t - X_t)^+,$$

并使用 Tanaka 公式。

2. 假设对每个 t, x , $\sigma(t, x) = 1$ 。证明第 1 问的假设自动成立。再假设 $E(\sigma, b)$ 具有弱唯一性。证明: 若 $X_0 = X'_0 = x \in \mathbb{R}$, 则过程 X, X' 不可区分。

解答 9.24。

1. 令 $Z = X' - X$ 。在 $Z = 0$ 时两解的漂移相同，所以左右局部时在 0 处相等；题设因而也给出 $L_t^0(Z) = 0$ 。由 Tanaka 公式，

$$(X'_t - X_t)^+ = (X'_0 - X_0)^+ + \int_0^t 1_{\{X'_s > X_s\}} d(X'_s - X_s).$$

将它代入 $X \vee X' = X + (X' - X)^+$ ，并注意在 $X = X'$ 时两个系数相同，得到

$$d(X_t \vee X'_t) = \sigma(t, X_t \vee X'_t) dB_t + b(t, X_t \vee X'_t) dt.$$

对 $X \wedge X' = X - (X - X')^+$ 作同样计算，得到极小过程也是解。

2. 若 $\sigma \equiv 1$ ，则

$$X_t - X'_t = X_0 - X'_0 + \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, X'_s)) ds$$

是有限变差过程，二次变差为零，故其所有局部时均为零。

当 $X_0 = X'_0$ 时，第 1 问给出 $U = X \vee X'$ 与 $V = X \wedge X'$ 都是同一初值的解。弱唯一性说明 U_t, V_t 同分布，而 $U_t \geq V_t$ a.s. 对任意有界严格递增函数 h ，两者期望相同，因而 $U_t = V_t$ a.s. 在所有有理 t 上取可数交并利用连续性，得到 X, X' 不可区分。

□

练习 9.25 (再论 Yamada–Watanabe 判别准则)。 设 $\rho: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 单调不减，并且对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^\varepsilon \frac{du}{\rho(u)} = \infty.$$

考虑一维随机微分方程

$$E(\sigma, b) \quad dX_t = \sigma(X_t) dB_t + b(X_t) dt,$$

并假设存在常数 $K < \infty$ ，使对每个 $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(\sigma(x) - \sigma(y))^2 \leq \rho(|x - y|), \quad |b(x) - b(y)| \leq K|x - y|.$$

本题用局部时给出 $E(\sigma, b)$ 路径唯一性的一个简短证明；它比练习 8.14 的结果略强。

1. 设 Y 是连续半鞅，并且对每个 $t > 0$ ，几乎处处地，

$$\int_0^t \frac{d\langle Y, Y \rangle_s}{\rho(|Y_s|)} < \infty.$$

证明几乎处处地，对每个 $t \geq 0$,

$$L_t^0(Y) = 0.$$

2. 设 X, X' 是同一滤过概率空间上由同一个布朗运动 B 驱动的 $E(\sigma, b)$ 的两个解。对 $Y = X - X'$ 应用第 1 问，证明几乎处处地，对每个 $t \geq 0$,

$$L_t^0(X - X') = 0,$$

因而

$$\begin{aligned} |X_t - X'_t| &= |X_0 - X'_0| + \int_0^t (\sigma(X_s) - \sigma(X'_s)) \operatorname{sgn}(X_s - X'_s) dB_s \\ &\quad + \int_0^t (b(X_s) - b(X'_s)) \operatorname{sgn}(X_s - X'_s) ds. \end{aligned}$$

3. 利用 Gronwall 引理证明：若 $X_0 = X'_0$ ，则几乎处处地，对每个 $t \geq 0$ ，都有 $X_t = X'_t$ 。

解答 9.25。

1. 固定 t 。占用密度公式给出 (在 $Y_s = 0$ 时把商定义为 0)

$$\int_0^t \frac{d\langle Y \rangle_s}{\rho(|Y_s|)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{L_t^a(Y)}{\rho(|a|)} da.$$

若 $L_t^0(Y) > 0$, 由 $a \downarrow 0$ 时 $L_t^a(Y) \rightarrow L_t^0(Y)$, 存在 $\delta, c > 0$ 使 $L_t^a(Y) \geq c$ 对 $0 < a < \delta$ 成立。于是右端至少为

$$c \int_0^\delta \frac{da}{\rho(a)} = \infty,$$

与题设矛盾。因此 $L_t^0(Y) = 0$ 。对有理 t 取可数交, 再用时间连续性, 结论对所有 $t \geq 0$ 同时成立。

2. 对 $Y = X - X'$,

$$d\langle Y \rangle_s = (\sigma(X_s) - \sigma(X'_s))^2 ds \leq \rho(|Y_s|) ds.$$

因而第 1 问中的积分不超过 t , 所以 $L_t^0(Y) = 0$ 。Tanaka 公式随即给出题中 $|X_t - X'_t|$ 的分解。

3. 若初值相同, 取 $T_m = \inf\{t : |X_t| + |X'_t| \geq m\}$ 。停止后的随机积分平方可积, 期望为 0。第 2 问及漂移的 Lipschitz 条件给出

$$E|X_{t \wedge T_m} - X'_{t \wedge T_m}| \leq K \int_0^t E|X_{s \wedge T_m} - X'_{s \wedge T_m}| ds.$$

Gronwall 引理说明左端恒为 0。令 $m \rightarrow \infty$, 再利用路径连续性, 得到 $X_t = X'_t$ 对所有 $t \geq 0$ a.s. 成立, 即路径唯一性。

□

注释与评述

Lévy [54] 最早讨论布朗运动的局部时, 并称之为“邻域测度” (*mesure du voisinage*)。1958 年, Trotter [80] 把布朗局部时看作占用测度的密度, 并建立了它的联合连续性。Tanaka [79] 在布朗运动情形得到命题 9.2 的公式。Meyer [61] 讨论了半鞅的局部时, 并在这一一般框架下导出定理 9.6 (在此之前, Tanaka [79] 已处理布朗运动情形)。此后, Yor [84] 发展了导向定理 9.4 的有力方法。

对布朗运动而言, 局部时的上穿逼近 (命题 9.11) 源于 Itô 与 McKean [42, 第 2 章]; El Karoui [22] 把它推广到半鞅。Lévy [54] 还得到了布朗局部时的其他逼近结果 (见 [42] 与 [70])。定理 9.14 实质上也源于 Lévy [54], 不过本书的证明以 Skorokhod [74] 的论证为基础; 关于半鞅框架下所谓“反射问题”的相关研究, 见 [23]。

关于局部时的更多性质, 可参见 [70] 第 V 章、[49] 第 6 章, 以及 Itô 与 McKean 的经典著作 [42]。局部时也是游程理论的关键工具; Blumenthal 的著作 [4] 在一般马尔可夫过程的框架下处理了这一理论。练习 9.22 讨论 Harrison 与 Shepp [31] 最早研究的奇异随机方程, 其解称为斜布朗运动。练习 9.23 给出 Kallianpur–Robbins 律的一维版本, 也可在 [48] 中找到。练习 9.25 取自 [51]。

英文版勘误说明

英文版原书的前置页遗漏了以下信息：

本书译自 Jean-François Le Gall 的法文版 *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*。

法文版版权 © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013。Springer International Publishing 是 Springer Science+Business Media 的组成部分。保留所有权利。

英文修订版的在线版本见 [DOI 10.1007/978-3-319-31089-3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-31089-3)。

Jean-François Le Gall
Département de Mathématiques
Université Paris-Sud
Orsay Cedex, France

附录 A1 单调类引理

单调类引理是测度论中的一个工具，在概率论的许多论证中非常有用。这里给出本书多处使用的版本。

设 E 是任意集合， $\mathcal{P}(E)$ 表示 E 的所有子集组成的集合。若 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ ，则 $\sigma(\mathcal{C})$ 表示 E 上包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ -代数；等价地，它是所有包含 $\mathcal{C}$ 的 σ -代数之交。

定义 (单调类)。 若 $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(E)$ 满足下列性质，就称 $\mathcal{M}$ 为单调类：

- (i) $E \in \mathcal{M}$;
- (ii) 若 $A, B \in \mathcal{M}$ 且 $A \subset B$ ，则 $B \setminus A \in \mathcal{M}$;
- (iii) 若 $(A_n)_{n \geq 0}$ 是递增的 E 的子集序列，并且对每个 $n \geq 0$ 都有 $A_n \in \mathcal{M}$ ，则

$$\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{M}.$$

每个 σ -代数都是单调类。同 σ -代数的情形一样，任意一族单调类之交仍是单调类。若 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{P}(E)$ 的任意子集，则由 $\mathcal{C}$ 生成的单调类记为 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ ，定义为

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ 为单调类} \\ \mathcal{C} \subset \mathcal{M}}} \mathcal{M}.$$

单调类引理。 若 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ 关于有限交稳定，则

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}).$$

证明。 由于每个 σ -代数都是单调类，显然

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C}).$$

为证明反向包含，只需验证 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 是 σ -代数。一个单调类是 σ -代数，当且仅当它关于有限交稳定：事实上，先取补集可知它关于有限并稳定，再取递增极限便得到关于可数并稳定。因此只需证明 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 关于有限交稳定。

对每个 $A \in \mathcal{C}$ ，令

$$\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}.$$

先固定 $A \in \mathcal{C}$ 。由于 $\mathcal{C}$ 关于有限交稳定， $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_A$ 。验证 $\mathcal{M}_A$ 是单调类：

- $E \in \mathcal{M}_A$ 是显然的；
- 若 $B, B' \in \mathcal{M}_A$ 且 $B \subset B'$ ，则

$$A \cap (B' \setminus B) = (A \cap B') \setminus (A \cap B) \in \mathcal{M}(\mathcal{C}),$$

因而 $B' \setminus B \in \mathcal{M}_A$ ；

- 若对每个 $n \geq 0$ ， $B_n \in \mathcal{M}_A$ ，且 $(B_n)_{n \geq 0}$ 递增，则

$$A \cap \left(\bigcup_n B_n \right) = \bigcup_n (A \cap B_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{C}),$$

因而 $\bigcup_n B_n \in \mathcal{M}_A$ 。

因为 $\mathcal{M}_A$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的单调类，它也包含 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 。所以已经得到

$$\forall A \in \mathcal{C}, \quad \forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}), \quad A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}).$$

这还不是最终结论，但可再使用一次同一思路。现在固定 $A \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ 。由上一部分， $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_A$ ；而完全相同的论证说明 $\mathcal{M}_A$ 是单调类。因此

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}_A.$$

这表明 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 关于有限交稳定，证明完成。 $\square$

下面列出本书用到的单调类引理的几个推论。

1. 设 $\mathcal{A}$ 是 E 上的 σ -代数， μ, ν 是 $(E, \mathcal{A})$ 上的两个概率测度。假设存在关于有限交稳定的类 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ ，使

$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}, \quad \mu(A) = \nu(A) \quad (A \in \mathcal{C}).$$

则 $\mu = \nu$ 。（使用

$$\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

是单调类这一事实。）

2. 设 $(X_i)_{i \in I}$ 是任意一族随机变量， $\mathcal{G}$ 是同一概率空间上的 σ -代数。为证明 $\sigma(X_i : i \in I)$ 与 $\mathcal{G}$ 独立，只需对每个有限集 $\{i_1, \dots, i_p\} \subset I$ ，验证 $(X_{i_1}, \dots, X_{i_p})$ 与 $\mathcal{G}$ 独立。（只依赖有限多个 X_i 的所有事件组成的类关于有限交稳定，并生成 $\sigma(X_i : i \in I)$ 。）
3. 设 $(X_i)_{i \in I}$ 是任意一族随机变量， Z 是有界实随机变量，固定 $i_0 \in I$ 。为验证

$$E[Z \mid X_i : i \in I] = E[Z \mid X_{i_0}],$$

只需对任意有限集 $\{i_1, \dots, i_p\} \subset I$ ，证明

$$E[Z \mid X_{i_0}, X_{i_1}, \dots, X_{i_p}] = E[Z \mid X_{i_0}].$$

（满足

$$E[1_A Z] = E[1_A E[Z \mid X_{i_0}]]$$

的所有事件 A 组成单调类。）

最后一个推论在马尔可夫过程理论中很有用。

附录 A2 离散鞅

本附录不加证明地回顾第 3 章使用的离散时间鞅与上鞅结果。下列各命题的证明可见 Neveu 的著作 [65]，以及许多讨论离散时间鞅的其他著作，特别是 Williams [82] 和 Grimmett–Stirzaker [30] 的第 XII 章。

记

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

先回顾基本定义。设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间，固定离散滤过，即 $\mathcal{F}$ 的子 σ -代数所成的递增序列 $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 。再令

$$\mathcal{G}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n$$

为包含所有 $\mathcal{G}_n$ 的最小 σ -代数。

定义（离散鞅、上鞅与下鞅）。 设 $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是可积随机变量序列，并且每个 Y_n 都 $\mathcal{G}_n$ -可测。称它为

- 鞅，如果任意 $0 \leq m < n$ 都有

$$E[Y_n | \mathcal{G}_m] = Y_m;$$

- 上鞅，如果任意 $0 \leq m < n$ 都有

$$E[Y_n | \mathcal{G}_m] \leq Y_m;$$

- 下鞅，如果任意 $0 \leq m < n$ 都有

$$E[Y_n | \mathcal{G}_m] \geq Y_m.$$

这些概念显然都依赖滤过 $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 的选择；下文固定这一滤过。

极大不等式。 若 $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是上鞅，则对每个 $\lambda > 0$ 及 $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda P \left(\sup_{n \leq k} |Y_n| > \lambda \right) \leq E[|Y_0|] + 2E[|Y_k|].$$

Doob 的 L^p 不等式。 若 $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是鞅，则对每个 $k \in \mathbb{N}$ 及 $p > 1$,

$$E \left[\sup_{0 \leq n \leq k} |Y_n|^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p E[|Y_k|^p].$$

注。 只有当 $E[|Y_k|^p] < \infty$ 时，这个不等式才提供实质信息；否则两端都是无穷。

若 $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是实数序列，且 $a < b$ ，则该序列在时刻 n 以前沿区间 $[a, b]$ 的上穿次数记为 $M_{ab}^y(n)$ ，定义为满足下述条件的最大整数 k ：存在不超过 n 的非负整数所成的严格递增有限序列

$$m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \dots < m_k < n_k,$$

并且对每个 $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$y_{m_i} \leq a, \quad y_{n_i} \geq b.$$

下文取实随机变量序列 $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$; 相应的上穿次数 $M_{ab}^Y(n)$ 是整数值随机变量。

Doob 上穿不等式。 若 $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是上鞅, 则对每个 $n \in \mathbb{N}$ 及 $a < b$,

$$E[M_{ab}^Y(n)] \leq \frac{1}{b-a} E[(Y_n - a)^-].$$

这一不等式是证明离散时间鞅与上鞅收敛定理的关键工具。下面回顾其中两个重要结论。

离散时间上鞅收敛定理。 若 $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是上鞅, 并且该序列在 L^1 中有界, 则存在 $Y_\infty \in L^1$, 使

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} Y_\infty.$$

一致可积离散时间鞅的收敛定理。 设 $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是鞅。下列条件等价:

(i) 鞅 (Y_n) 是闭鞅, 即存在 $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 使对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = E[Z \mid \mathcal{G}_n];$$

(ii) 序列 (Y_n) 几乎处处且在 L^1 中收敛;

(iii) 序列 (Y_n) 一致可积。

若这些条件成立, 则 (Y_n) 的几乎处处极限为

$$Y_\infty = E[Z \mid \mathcal{G}_\infty].$$

下面回顾离散时间可选停时定理的两个版本。称取值于 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 的随机变量 T 为 (离散) 停时, 如果对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\{T = n\} \in \mathcal{G}_n.$$

停时 T 以前的过去 σ -代数为

$$\mathcal{G}_T = \{A \in \mathcal{G}_\infty : A \cap \{T = n\} \in \mathcal{G}_n \text{ 对每个 } n \in \mathbb{N}\}.$$

一致可积离散时间鞅的可选停时定理。 设 $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一致可积鞅, Y_∞ 是 Y_n 在 $n \rightarrow \infty$ 时的几乎处处极限。若停时 S, T 满足 $S \leq T$, 则 $Y_T \in L^1$, 并且

$$Y_S = E[Y_T \mid \mathcal{G}_S].$$

这里约定在事件 $\{T = \infty\}$ 上 $Y_T = Y_\infty$, 对 Y_S 也作相同约定。

离散时间上鞅的可选停时定理 (有界情形)。 若 $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是上鞅, 而有界停时 S, T 满足 $S \leq T$, 则

$$Y_S \geq E[Y_T \mid \mathcal{G}_S].$$

最后回顾上鞅收敛定理在反向情形中的一个变体。设 $(\mathcal{H}_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ 是按负整数编号的反向滤过; 当 $n \rightarrow -\infty$ 时, σ -代数 $\mathcal{H}_n$ “越来越小”。称按负整数编号的可积随机变量序列 $(Y_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ 为反向上鞅, 如果每个 Y_n 都 $\mathcal{H}_n$ -可测, 并且对每个 $m \leq n \leq 0$,

$$E[Y_n \mid \mathcal{H}_m] \leq Y_m.$$

反向离散时间上鞅收敛定理。 若 $(Y_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ 是反向上鞅，并且该序列在 L^1 中有界，则当 $n \rightarrow -\infty$ 时， $(Y_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ 几乎处处且在 L^1 中收敛。

对第 3 章的应用而言，反向情形中的收敛同时在 L^1 中成立这一点至关重要；可与“正向”情形的类似结果比较。

参考文献

- [1] Adler, R.J.: *An Introduction to Continuity, Extrema and Related Topics for General Gaussian Processes*. Institute of Mathematical Statistics, Hayward (1990).
- [2] Bachelier, L.: Théorie de la spéculation. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **17**, 21–86 (1900).
- [3] Bertoin, J.: *Lévy Processes*. Cambridge University Press, Cambridge (1996).
- [4] Blumenthal, R.M.: *Excursions of Markov Processes*. Birkhäuser, Boston (1992).
- [5] Blumenthal, R.M., Gettoor, R.K.: *Markov Processes and Potential Theory*. Academic Press, New York (1968).
- [6] Burkholder, D.L.: Distribution function inequalities for martingales. *Ann. Probab.* **1**, 19–42 (1973).
- [7] Burkholder, D.L., Davis, B.J., Gundy, R.F.: Integral inequalities for convex functions of operators on martingales. In: *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. 2, pp. 223–240. University of California Press, Berkeley (1972).
- [8] Cameron, R.H., Martin, W.T.: Transformation of Wiener integrals under translations. *Ann. Math.* **45**, 386–396 (1944).
- [9] Chung, K.L.: *Lectures from Markov Processes to Brownian Motion*. Springer, Berlin (1982).
- [10] Chung, K.L., Williams, R.J.: *Introduction to Stochastic Integration*. Birkhäuser, Boston (1983).
- [11] Dambis, K.E.: On the decomposition of continuous martingales. *Theory Probab. Appl.* **10**, 401–410 (1965).
- [12] Davis, B.J.: Brownian motion and analytic functions. *Ann. Probab.* **7**, 913–932 (1979).
- [13] Dellacherie, C., Meyer, P.-A.: *Probabilités et potentiel, Chapitres I à IV*. Hermann, Paris (1975).
- [14] Dellacherie, C., Meyer, P.-A.: *Probabilités et potentiel, Chapitres V à VIII. Théorie des martingales*. Hermann, Paris (1980).
- [15] Doob, J.L.: *Stochastic Processes*. Wiley, New York (1953).
- [16] Doob, J.L.: *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*. Springer, Berlin (1984).
- [17] Dubins, L., Schwarz, G.: On continuous martingales. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **53**, 913–916 (1965).
- [18] Durrett, R.: *Brownian Motion and Martingales in Analysis*. Wadsworth, Belmont (1984).
- [19] Dynkin, E.B.: Inhomogeneous strong Markov processes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **113**, 261–263 (1957).
- [20] Dynkin, E.B.: *Theory of Markov Processes*. Pergamon, Oxford (1960).
- [21] Dynkin, E.B.: *Markov Processes*, 2 vols. Springer, Berlin (1965).
- [22] El Karoui, N.: Sur les montées des semimartingales. *Astérisque* **52–53**, 63–88 (1978).
- [23] El Karoui, N., Chaleyat-Maurel, M.: Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur $\mathbb{R}$, cas continu. *Astérisque* **52–53**, 117–144 (1978).
- [24] Ethier, S.N., Kurtz, T.G.: *Markov Processes: Characterization and Convergence*. Wiley, New York (1986).
- [25] Fisk, D.L.: Quasimartingales. *Trans. Am. Math. Soc.* **120**, 369–389 (1965).
- [26] Friedman, A.: *Stochastic Differential Equations and Applications*, vol. 1. Academic Press, New York (1975).

- [27] Friedman, A.: *Stochastic Differential Equations and Applications*, vol. 2. Academic Press, New York (1976).
- [28] Gettoor, R.K., Sharpe, M.J.: Conformal martingales. *Invent. Math.* **16**, 271–308 (1972).
- [29] Girsanov, I.V.: On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. *Theory Probab. Appl.* **5**, 285–301 (1960).
- [30] Grimmett, G.R., Stirzaker, D.R.: *Probability and Random Processes*. Oxford University Press, Oxford (1992).
- [31] Harrison, J.M., Shepp, L.A.: On skew Brownian motion. *Ann. Probab.* **9**, 309–313 (1981).
- [32] Hunt, G.A.: Some theorems concerning Brownian motion. *Trans. Am. Math. Soc.* **81**, 294–319 (1956).
- [33] Hunt, G.A.: Markov processes and potentials. *Ill. J. Math.* **1**, 44–93 (1957).
- [34] Hunt, G.A.: Markov processes and potentials. *Ill. J. Math.* **2**, 151–213 (1957).
- [35] Ikeda, N., Watanabe, S.: *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North-Holland, Amsterdam/New York (1981).
- [36] Itô, K.: Stochastic integral. *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20**, 518–524 (1944).
- [37] Itô, K.: On a stochastic integral equation. *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **22**, 32–35 (1946).
- [38] Itô, K.: On stochastic differential equations. *Mem. Am. Math. Soc.* **4**, 1–51 (1951).
- [39] Itô, K.: Multiple Wiener integral. *J. Math. Soc. Japan* **3**, 157–169 (1951).
- [40] Itô, K.: On a formula concerning stochastic differentials. *Nagoya Math. J.* **3**, 55–65 (1951).
- [41] Itô, K.: *Selected Papers*. Edited and with an introduction by S.R.S. Varadhan and D.W. Stroock. Springer, New York (1987).
- [42] Itô, K., McKean, H.P.: *Diffusion Processes and Their Sample Paths*. Springer, Berlin (1965).
- [43] Itô, K., Watanabe, S.: Transformation of Markov processes by multiplicative functionals. *Ann. Inst. Fourier* **15**, 15–30 (1965).
- [44] Jacod, J., Shiryaev, A.: *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer, Berlin (2003).
- [45] Kakutani, S.: On Brownian motion in n -space. *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20**, 648–652 (1944).
- [46] Kakutani, S.: Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions. *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20**, 706–714 (1944).
- [47] Kallenberg, O.: *Foundations of Modern Probability*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (2002).
- [48] Kallianpur, G., Robbins, H.: Ergodic property of Brownian motion process. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **39**, 525–533 (1953).
- [49] Karatzas, I., Shreve, S.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, Berlin (1987).
- [50] Kunita, H., Watanabe, S.: On square-integrable martingales. *Nagoya Math. J.* **36**, 1–26 (1967).
- [51] Le Gall, J.-F.: Applications du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 986, pp. 15–31. Springer, Berlin (1983).
- [52] Le Gall, J.-F.: Some properties of planar Brownian motion. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1527, pp. 111–235. Springer, Berlin (1992).
- [53] Lévy, P.: Le mouvement brownien plan. *Am. J. Math.* **62**, 487–550 (1940).
- [54] Lévy, P.: *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier-Villars, Paris (1948).
- [55] Lifshits, M.A.: *Gaussian Random Functions*. Kluwer Academic, Dordrecht (1995).
- [56] Marcus, M.B., Rosen, J.: *Markov Processes, Gaussian Processes, and Local Times*. Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [57] McKean, H.P.: *Stochastic Integrals*. Academic Press, New York (1969).

- [58] Meyer, P.-A.: A decomposition theorem for supermartingales. *Ill. J. Math.* **6**, 193–205 (1962).
- [59] Meyer, P.-A.: *Processus de Markov*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 26. Springer, Berlin (1967).
- [60] Meyer, P.-A.: Intégrales stochastiques. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 39, pp. 72–162. Springer, Berlin (1967).
- [61] Meyer, P.-A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 511, pp. 245–400. Springer, Berlin (1976).
- [62] Mörters, P., Peres, Y.: *Brownian Motion*. Cambridge University Press, Cambridge (2010).
- [63] Protter, P.: *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, Berlin (2005).
- [64] Neveu, J.: *Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*. Holden-Day, San Francisco (1965).
- [65] Neveu, J.: *Discrete-Parameter Martingales*. North-Holland, Amsterdam (1975).
- [66] Øksendal, B.: *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, Berlin (2003).
- [67] Pitman, J.W., Yor, M.: A decomposition of Bessel bridges. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **59**, 425–457 (1982).
- [68] Pitman, J.W., Yor, M.: Asymptotic laws of planar Brownian motion. *Ann. Probab.* **14**, 733–779 (1986).
- [69] Port, S.C., Stone, C.J.: *Brownian Motion and Classical Potential Theory*. Academic Press, New York (1978).
- [70] Revuz, D., Yor, M.: *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, Berlin (1991).
- [71] Rogers, L.C.G., Williams, D.: *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, vol. 1: Foundations. Wiley, New York (1994).
- [72] Rogers, L.C.G., Williams, D.: *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, vol. 2: Itô Calculus. Wiley, New York (1987).
- [73] Sharpe, M.J.: *General Theory of Markov Processes*. Academic Press, New York (1989).
- [74] Skorokhod, A.V.: Stochastic equations for diffusion processes in a bounded domain. *Theory Probab. Appl.* **6**, 264–274 (1961).
- [75] Spitzer, F.: Some theorems concerning two-dimensional Brownian motion. *Trans. Am. Math. Soc.* **87**, 187–197 (1958).
- [76] Stroock, D.W.: *An Introduction to Markov Processes*. Springer, Berlin (2005).
- [77] Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S.: *Multidimensional Diffusion Processes*. Springer, Berlin (1979).
- [78] Talagrand, M.: *The Generic Chaining*. Springer, Berlin (2005).
- [79] Tanaka, H.: Note on continuous additive functionals of the one-dimensional Brownian path. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **1**, 251–257 (1963).
- [80] Trotter, H.F.: A property of Brownian motion paths. *Ill. J. Math.* **2**, 425–433 (1958).
- [81] Wiener, N.: Differential space. *J. Math. Phys.* **2**, 132–174 (1923).
- [82] Williams, D.: *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [83] Yamada, T., Watanabe, S.: On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *J. Math. Kyoto Univ.* **11**, 155–167 (1971).
- [84] Yor, M.: Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semimartingales. *Astérisque* **52–53**, 23–36 (1978).

主题索引 (原英文版页码)

页码说明。 为便于同英文原书逐项核对, 下列页码保留原英文版的正文页码, 而不是本中文讲义的 PDF 物理页码。索引词已统一译为本讲义采用的中文术语。

- 停时以前的过去 σ -代数, 44
- 布朗运动情形, 33
- 随机积分的逼近, 112
- 反正弦律, 39
- 随机积分的结合律, 105, 110
- Bessel 过程, 145, 227
- Blumenthal 零一律, 30
- 括号过程,
 - 两个连续局部鞅的括号过程, 87
 - 两个独立布朗运动的括号过程, 88
 - 两个半鞅的括号过程, 90
- 布朗桥, 38
- 布朗运动, 27
 - 相对于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 的布朗运动, 50, 116
 - 典范构造, 29
 - 多维情形, 37, 148, 196
 - 样本路径的性质, 29
- Burkholder–Davis–Gundy 不等式, 124
- 右连续有左极限函数, 54
- 右连续有左极限的样本路径,
 - Feller 过程, 164
 - 上鞅, 55
 - 半鞅局部时, 239
- Cameron–Martin 公式, 139
- 半鞅的典范分解, 90
- 典范过程, 29
- 复布朗运动, 198
- 高斯变量的条件分布, 9
- 布朗运动的共形不变性, 198
- 鞅的常值区间, 121
- 样本路径的连续性, 24
 - 布朗局部时, 249
 - 布朗鞅, 130
 - 布朗运动, 27
- 布朗滤过的连续性, 129
- 连续半鞅, 90
- 连续状态分枝过程, 177
- 随机积分的收敛定理, 111
- 协方差函数, 10
- 柱集, 28
- Dambis–Dubins–Schwarz 定理, 121
- 占用时间密度公式, 245
- 扩散过程, 224
- Dirichlet 问题, 189
- 生成元的定义域, 159
- Doob 的 L^p 不等式, 53
 - 离散时间情形, 264
- Doob 上穿不等式, 264
- Dynkin 公式, 182
- 布朗运动的游程, 253
- 从球的出射分布, 195
- 从环域的出射分布, 196
- 指数鞅, 118
 - 布朗运动的指数鞅, 51
- 外锥条件, 191
- Feller 过程, 158
 - 随机微分方程解的情形, 222
- Feller 半群, 158
- Feller 分枝扩散, 179, 227
- Feynman–Kac 公式, 181, 187, 206
- 带滤过概率空间, 41
- 滤过, 41
 - 完备滤过, 42
 - 右连续滤过, 42
- 有限变差过程, 73
- 有限维边缘分布,

- 高斯过程, 10
- 马尔可夫过程, 153
- 布朗运动, 21
- 分部积分公式, 116
- 有限变差函数, 69
 - 全变差, 70
- 高斯过程, 7
- 高斯空间, 7
- 高斯变量, 1
- 高斯向量, 4
- 高斯白噪声, 11
- Feller 半群的生成元, 159
 - 跳过程情形, 172
 - 布朗运动情形, 161
 - 随机微分方程解的情形, 222
- 几何布朗运动, 226
- Girsanov 定理, 134
- Gronwall 引理, 213
- 调和函数, 187
 - 径向调和函数, 193
- 热方程, 185
- 集合的到达时, 48
- 高斯变量的独立性, 8
- 不可分辨, 23
- 关于有限变差过程的积分, 74
- 高斯白噪声的强度, 11
- 布朗运动的不变性, 22
- 逆局部时, 252
- Itô 公式, 113
 - 布朗运动情形, 116
 - 定义于开集上的函数, 117
 - 广义形式, 244
- 跳跃马尔可夫过程, 170
 - 转移率, 173
- Kallianpur–Robbins 定律, 205
- Kalman 滤波, 15
- Kazamaki 判别准则, 136
- Kolmogorov 扩张定理, 10, 154
- Kolmogorov 引理, 24
- Kunita–Watanabe 不等式, 88
- Lévy 面积, 144
- Lévy 过程, 175
- Lévy 对布朗运动的构造, 16
- Lévy 定理, 119
- Lévy 关于布朗局部时的定理, 252
- 布朗运动到达时的分布, 37
 - 带漂移的情形, 140
- Laplace 变换, 63
- 从区间出射点的分布, 62
- 从区间出射时刻的分布, 63, 66
- 重对数律, 39
- 局部鞅, 75
- 布朗路径的局部极大点, 39
- 局部时,
 - 关于空间变量的连续性, 239
 - 定义, 237
 - 布朗运动的局部时, 249
 - 支集性质, 238
 - 上穿逼近, 248
- 马尔可夫过程, 152
 - 典范构造, 155
 - 随机微分方程解的情形, 221
- 鞅, 49
 - 闭鞅, 59
 - 收敛定理, 59
 - 离散时间鞅, 263
 - 样本路径的正则性, 55
 - 停时处停止的鞅, 61
 - 一致可积鞅, 59
- 极大不等式, 53
 - 离散时间情形, 263
- 平均值性质, 188
- 修正, 23
- 随机积分的矩, 105, 108
- 单调类引理, 261
- 布朗路径的不可微性, 39
- Novikov 判别准则, 136
- 可选停时定理, 59
 - 离散时间情形, 265
 - 非负上鞅情形, 64
- Ornstein–Uhlenbeck 过程, 225
- 正交局部鞅, 88
- 随机微分方程的路径唯一性, 211
- 平面布朗运动, 198

- 渐近律, 201
- Poisson 核, 193
- 极集, 205
- 点的极性, 197
- 预布朗运动, 19
- 过程,
 - 适应过程, 43
 - 初等过程, 100
 - 可测过程, 42
 - 渐进过程, 43
- 独立增量过程, 50
 - 与之相伴的鞅, 50
- 渐进 σ -代数, 43, 99
- 二次变差,
 - 连续局部鞅, 79
 - 半鞅, 90
 - 停止后的局部鞅, 85
 - 布朗运动, 32, 79
- Feller 过程的拟左连续性, 181
- 随机过程, 7
- 平面布朗运动的常返性, 197
- 反射布朗运动, 179
- 反射原理, 35
- 布朗鞅的表示, 127
- 转移半群的预解算子, 156
- 随机过程的样本路径, 23
- 简单马尔可夫性质, 168
 - 布朗运动情形, 22
- 斜积表示, 199
- Spitzer 关于布朗绕数的定理, 201
- 平稳高斯过程, 11
- 涉及上确界的随机微积分, 142
- 随机微分方程, 210
 - Lipschitz 情形, 212
- 随机积分,
 - 连续局部鞅情形, 106
 - 有限变差过程情形, 74
 - 在 L^2 中有界的鞅情形, 101
 - 半鞅情形, 109
- 停止过程, 75
- 停时, 44
 - 布朗运动情形, 33
 - 连续局部鞅的约化停时, 76
- 强马尔可夫性质,
 - Feller 过程, 169
 - 布朗运动, 34
 - 随机微分方程解, 224
- 随机微分方程的强解, 211
- 下鞅, 49
 - 离散时间情形, 263
- 上鞅, 49
 - 离散时间情形, 263
- Tanaka 公式, 237
- 时间变换, 121, 198
 - 用于构造随机微分方程的解, 228
- 时间反演, 38
- 布朗运动的时间反向性质, 39
- 布朗运动的暂留性, 197
- 转移核, 152
- 转移半群, 152
- Trotter 定理, 249
- 上穿次数, 54
- 随机微分方程解的弱存在性, 211
- 随机微分方程解的弱唯一性, 211
- Wiener 积分, 22, 108
- Wiener 测度, 27
 - 拟不变性, 140
- Yamada-Watanabe 定理, 212
- Yamada-Watanabe 唯一性准则, 231
- 布朗运动的零点集, 39, 253