



Rapport d'étude : Spectres des valeurs propres des matrices aléatoires pour les réseaux neuronaux

Yuguang Xiao

M2 Probabilité et Modèles aléatoires (PMA)

Sorbonne Université

yuguang.xiao@etu.sorbonne-universite.fr

Encadrant : Michèle Thieullen

Laboratoire de Probabilités Statistique et Modélisation (LPSM)

Sorbonne Université

michele.thieullen@sorbonne-universite.fr

26 mars 2026

Résumé

Ce rapport d'étude présente une reproduction détaillée et une analyse mathématique approfondie de l'article séminal « *Eigenvalue Spectra of Random Matrices for Neural Networks* » publié par K. Rajan et L. F. Abbott dans *Physical Review Letters* (2006) [RA06]. L'application de la théorie classique des matrices aléatoires aux réseaux de neurones biologiques se heurte à des contraintes structurelles fortes, telles que le principe de Dale, qui impose une séparation stricte entre les synapses excitatrices et inhibitrices. Ces contraintes engendrent des matrices de connectivité avec des moyennes et des variances hétérogènes, invalidant ainsi les théorèmes standard comme la loi du cercle de Girko.

L'objectif principal de ce travail est de fournir une dérivation mathématique explicite, rigoureuse et pas-à-pas des résultats originaux, dont les étapes analytiques intermédiaires sont largement condensées, voire omises, dans la publication initiale. Dans un premier temps, nous démontrons algébriquement que l'imposition d'une contrainte d'équilibre synaptique local (où la somme des poids synaptiques reçus par chaque neurone s'annule) permet de neutraliser intégralement les valeurs propres aberrantes (*outliers*) générées par l'asymétrie des moyennes.

Dans un second temps, pour appréhender l'hétérogénéité des variances synaptiques, nous détaillons l'ensemble du formalisme complexe issu de la physique statistique. Nous explicitons notamment l'analogie avec le potentiel électrostatique bidimensionnel, le calcul rigoureux d'intégrales gaussiennes multidimensionnelles par changement de variables complexes et complétion du carré, ainsi que la résolution du système asymptotique par le principe des grandes déviations (ou méthode de Laplace) dans la limite asymptotique ($N \rightarrow \infty$).

Ces développements analytiques prouvent que des variances asymétriques brisent l'uniformité du spectre : les valeurs propres se concentrent massivement vers l'origine du plan complexe, et le carré du rayon spectral maximal est strictement défini par la moyenne pondérée des variances. Enfin, l'ensemble de ces dérivations théoriques est systématiquement corroboré par nos propres simulations numériques, confirmant le rôle critique de la variance synaptique, plutôt que de la moyenne, dans le contrôle de la stabilité dynamique des réseaux corticaux.

Mots-clés : Matrices aléatoires, Réseaux de neurones, Principe de Dale, Loi du cercle de Girko, Intégrales gaussiennes complexes, Principe des grandes déviations, Théorie des probabilités, Physique statistique.

Table des matières

Résumé	i
1 Introduction	1
2 Effet des moyennes : équilibre local et neutralisation des valeurs aberrantes	3

3	Effet des variances : hétérogénéité et dérivation analytique de la densité	6
3.1	Approche par la résolvante pour des variances hétérogènes	6
3.2	Analogie électrostatique et équation de Poisson complexe	7
3.3	Intégration matricielle et paramétrisation de la fonctionnelle de taux	11
3.4	Limite asymptotique et principe des grandes déviations	14
3.5	Bifurcation du système asymptotique et densité spectrale radiale	16
4	Conclusion	18
	Références	22

1 Introduction

Définition 1 (Matrice de Connectivité Synaptique). *Soit un réseau de N neurones. La matrice de connectivité synaptique est une matrice carrée $W \in \mathbb{R}^{N \times N}$ où chaque élément W_{ij} représente la force de la synapse allant du neurone pré-synaptique j vers le neurone post-synaptique i .*

Cette matrice respecte généralement les contraintes suivantes :

- **Connectivité éparsse (Sparsity)** : *Si aucune synapse n'existe du neurone j vers le neurone i , alors $W_{ij} = 0$.*
- **Caractère excitateur** : *Si le neurone j est excitateur, alors $W_{ij} \geq 0$.*
- **Caractère inhibiteur** : *Si le neurone j est inhibiteur, alors $W_{ij} \leq 0$.*

Remarque 1. 1. *En raison de l'absence d'auto-rétroaction, on a $W_{ii} = 0$, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.*

2. **Principe de Dale** : *La nature d'un neurone détermine le signe de ses sorties synaptiques. Ainsi, pour toute colonne $j \in \{1, \dots, N\}$, les éléments de la famille $\{W_{ij} : i \in \{1, \dots, N\}\}$ sont tous de même signe.*

Face à un réseau cortical réel, on compte des dizaines de milliers de neurones reliés par des millions de synapses. Face à cette immense complexité, modéliser le réseau soulève un défi conceptuel majeur : **pourquoi utiliser des mathématiques aléatoires (des probabilités) pour décrire un organe biologique aussi structuré ?**

Il y a deux raisons fondamentales à ce choix de modélisation :

- **Une limite expérimentale évidente** : Il est technologiquement impossible de mesurer avec précision la force exacte de chaque connexion synaptique dans un cerveau vivant.
- **L'hétérogénéité biologique intrinsèque** : Contrairement à un circuit électronique fabriqué en usine où chaque composant est identique, la biologie est naturellement "bruitée". Même entre deux neurones du même type, la force de la synapse varie énormément en fonction de facteurs locaux (taille de la synapse, neurochimie, historique d'apprentissage). À l'échelle microscopique, ces variations ressemblent à un véritable désordre.

C'est ici qu'intervient une idée très élégante empruntée à la **physique statistique**. De la même manière qu'un physicien n'a pas besoin de connaître la vitesse et la trajectoire de *chaque* molécule de gaz pour calculer la température d'une pièce, les neuroscientifiques ont compris qu'il **n'est pas nécessaire de connaître chaque poids synaptique individuel pour comprendre la dynamique globale du réseau**.

Ce qui dicte le comportement macroscopique du cerveau (comme sa stabilité ou l'émergence d'ondes cérébrales), ce ne sont pas les valeurs microscopiques exactes, mais les **propriétés statistiques globales** de ces connexions (leur moyenne, leur variance, leur probabilité d'existence).

Par conséquent, plutôt que d'essayer de construire une matrice déterministe figée et introuvable, nous allons modéliser les forces synaptiques comme des **variables aléatoires** [SCS88 ;

CS06]. En tirant ces éléments au hasard à partir de distributions statistiques qui respectent strictement les règles biologiques (comme le principe de Dale), nous générons une matrice qui capture fidèlement la complexité et l'hétérogénéité des vrais réseaux neuronaux. Cette approche nous ouvre alors les portes d'un outil mathématique surpuissant : la **Théorie des Matrices Aléatoires (Random Matrix Theory)** [Meh67; Bro+81].

Afin de concilier cette réalité biologique avec les outils mathématiques, on décompose donc la matrice globale sous la forme :

$$W = J + M$$

où J est une matrice aléatoire de moyenne nulle qui donne la partie "désordonnée" (les fluctuations) de la connectivité, tandis que M est une matrice déterministe de rang 1 qui encode les décalages de moyenne liés au fait que les neurones sont soit excitateurs soit inhibiteurs.

Pour comprendre et analyser la dynamique de ces réseaux aléatoires (comme la stabilité ou l'émergence d'une activité spontanée), l'outil mathématique central est l'analyse spectrale [SCS88; CS06; WC72; SHS03; VRA05].

Définition 2 (Le spectre des valeurs propres). *Le spectre des valeurs propres d'une matrice carrée (comme W ou J) est l'ensemble de toutes ses valeurs propres complexes $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ tracées dans le plan complexe.*

Dans le cadre classique de la théorie des matrices aléatoires, si l'on considère une matrice non symétrique $N \times N$ dont les éléments sont tirés d'une distribution avec une moyenne strictement nulle et une variance de $1/N$, le spectre de ses valeurs propres remplit uniformément le disque unité du plan complexe lorsque $N \rightarrow \infty$. Ce résultat fondamental est connu sous le nom de **loi du cercle de Girko (Girko's Circle Law)** [Gir84; TV10].

Cependant, dans une matrice de connectivité synaptique réaliste W , les neurones sont soit excitateurs soit inhibiteurs (principe de Dale), ce qui signifie que les éléments sont tirés de distributions avec des moyennes différentes selon les colonnes. Même si le réseau est globalement équilibré (moyenne totale nulle), cette hétérogénéité des moyennes par colonne (*encodée dans la matrice M*) agit comme une perturbation de rang faible. La loi classique de Girko ne s'applique plus directement et certaines valeurs propres se détachent violemment du disque unité; nous appelons ces points isolés des **valeurs aberrantes (outliers)**.

Dans cet article, nous proposons d'étudier et de prouver une méthode dite d'« équilibre ligne par ligne » (*row-wise balance*), définie par (avec u le vecteur de tous les uns) :

$$\sum_j J_{ij} = 0 \quad (\text{c'est-à-dire vectoriellement } Ju = \mathbf{0})$$

ce qui modélise la condition biologique selon laquelle les fluctuations des entrées excitatrices et inhibitrices reçues par chaque neurone se compensent localement [SN94; TM97]. Nous montrerons qu'une fois cette contrainte imposée, l'effet déstabilisant de la matrice M est totalement neutralisé : les valeurs propres aberrantes disparaissent et le spectre revient à l'intérieur du disque.

En outre, pour la force des neurones excitateurs et inhibiteurs, nous allons introduire des paramètres μ_E et μ_I pour modéliser les décalages de moyenne. Nous allons surtout introduire des paramètres σ_E et σ_I pour modéliser l'hétérogénéité des variances selon le type de neurone. Le cœur de ce rapport consistera à dériver analytiquement l'impact de ces variances différentes sur la distribution spectrale, puis à vérifier numériquement ces résultats en reproduisant les travaux de Rajan et Abbott.

2 Effet des moyennes : équilibre local et neutralisation des valeurs aberrantes

Comme introduit précédemment, nous décomposons la matrice de connectivité W de la manière suivante :

$$W = J + M$$

Pour la matrice déterministe M : comme l'intensité de connexion moyenne émanant d'un même type de neurone est identique (quelle que soit la colonne de la matrice cible), chaque ligne de la matrice M est rigoureusement identique. Mathématiquement, dès lors que toutes les lignes d'une matrice sont identiques, celle-ci peut être factorisée comme le produit extérieur d'un vecteur colonne et d'un vecteur ligne (il s'agit donc d'une matrice de rang 1).

Soit u un vecteur colonne de taille N composé uniquement de 1 : $u = (1, 1, 1, \dots, 1)^T$. Soit m^T un vecteur ligne contenant les valeurs moyennes de la ligne, noté $m^T = (\mu_E, \dots, \mu_E, \mu_I, \dots, \mu_I)$. Il contient fN composantes égales à μ_E (neurones excitateurs) et $(1 - f)N$ composantes égales à μ_I (neurones inhibiteurs). Dès lors, la matrice des moyennes M peut être exprimée rigoureusement par :

$$M = \frac{1}{\sqrt{N}} u m^T$$

Concernant la matrice aléatoire J , nous considérons dans un premier temps le cas le plus simple : une matrice dont chaque élément possède une espérance nulle et une variance de $1/N$. La matrice M , quant à elle, est une matrice de rang 1 représentant les décalages de moyenne selon les colonnes. Nous allons démontrer que, dans ces conditions, si la contrainte d'« équilibre ligne par ligne » est respectée (c'est-à-dire $Ju = \mathbf{0}$, ce qui signifie que la somme des éléments de chaque ligne est nulle), l'impact de M sur la distribution spectrale sera totalement neutralisé, et le spectre regagnera l'intérieur du disque unité.

Procédons à la démonstration mathématique :

Définition 3 (Vecteurs propres à droite et à gauche). *Soit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ une matrice non symétrique.*

— *Soit x un vecteur propre à droite de A (couramment appelé vecteur propre), de valeur*

propre associée λ :

$$Ax = \lambda x$$

— Soit y^T un vecteur propre à gauche de A (un vecteur ligne), de valeur propre associée μ :

$$y^T A = \mu y^T$$

Proposition 1 (Orthogonalité des vecteurs propres à gauche et à droite). *Soit A une matrice non symétrique de taille $N \times N$. Soient x un vecteur propre à droite de A associé à la valeur propre λ , et y^T un vecteur propre à gauche de A associé à la valeur propre μ . Si $\lambda \neq \mu$, alors y^T est orthogonal à x (i.e., $y^T x = 0$).*

Démonstration. D'une part, par associativité de la multiplication matricielle et par définition du vecteur propre à droite, nous avons :

$$y^T(Ax) = y^T(\lambda x) = \lambda(y^T x)$$

D'autre part, en utilisant la définition du vecteur propre à gauche, nous obtenons :

$$(y^T A)x = (\mu y^T)x = \mu(y^T x)$$

Puisque l'associativité garantit que $y^T(Ax) = (y^T A)x$, on en déduit l'égalité suivante :

$$\lambda(y^T x) = \mu(y^T x) \iff (\lambda - \mu)(y^T x) = 0$$

Par hypothèse, $\lambda \neq \mu$, donc $\lambda - \mu \neq 0$. L'unique possibilité pour que cette équation soit vérifiée est par conséquent :

$$y^T x = 0$$

□

Cette proposition constituera l'outil algébrique central de notre démonstration. Nous allons maintenant prouver que, sous la condition d'équilibre ($Ju = \mathbf{0}$), l'influence de la matrice M sur la distribution spectrale est parfaitement neutralisée.

Soit L_a un vecteur propre à gauche de la matrice J associé à une valeur propre **non nulle** λ_a , on a alors par proposition d'orthogonalité :

$$L_a u = 0$$

car u est un vecteur propre à droite de J associé à la valeur propre 0 (en raison de la condition d'équilibre), et $\lambda_a \neq 0$ par hypothèse.

Cela signifie que pour toute valeur propre non nulle de J , le vecteur propre à gauche associé L_a est rigoureusement orthogonal au vecteur constant u .

Évaluons à présent l'action de ce vecteur L_a sur la matrice des moyennes M . En remplaçant M par son expression $M = \frac{1}{\sqrt{N}}um^T$, nous obtenons :

$$L_a M = L_a \left(\frac{1}{\sqrt{N}}um^T \right)$$

En réorganisant les termes (le produit scalaire $L_a u$ étant un scalaire (un nombre) que l'on peut isoler), cela s'écrit :

$$L_a M = \frac{1}{\sqrt{N}}(L_a u)m^T$$

Puisque nous venons de démontrer que $L_a u = 0$, ce terme s'annule complètement :

$$L_a M = \mathbf{0}$$

Ce résultat montre que pour chaque valeur propre non nulle de J , l'action de la matrice M sur le vecteur propre à gauche correspondant est nulle (la matrice de rang 1 devient mathématiquement "invisible" dans ce sous-espace).

Enfin, appliquons ce vecteur propre L_a à la matrice synaptique globale W :

$$L_a W = L_a(J + M) = L_a J + L_a M$$

En injectant les deux propriétés que nous venons d'établir ($L_a J = \lambda_a L_a$ et $L_a M = \mathbf{0}$), on aboutit à :

$$L_a W = \lambda_a L_a + \mathbf{0} = \lambda_a L_a$$

Cette dernière équation est la clé de voûte de notre méthode. Elle démontre algébriquement que pour toute valeur propre **non nulle** λ_a de la matrice des fluctuations J , le vecteur L_a est **également** un vecteur propre de la matrice totale W , avec **exactement la même valeur propre**. Autrement dit, l'ajout de la matrice des moyennes M n'a absolument pas modifié le spectre principal de J .

Pour conclure sur la forme géométrique du spectre, il suffit de se rappeler la nature de la matrice résiduelle J . Par construction, J est une matrice aléatoire pure dont les éléments ont une **espérance strictement nulle** et une variance de $1/N$. Or, nous avons vu dans l'introduction que d'après la célèbre **loi du cercle de Girko**, le spectre d'une telle matrice de moyenne nulle remplit uniformément le **disque unité** (un cercle de rayon 1) dans le plan complexe.

Puisque les valeurs propres non nulles de la matrice réaliste W sont rigoureusement identiques à celles de J , **le spectre de W hérite de cette même géométrie et reste confiné à l'intérieur du disque unité**. L'effet perturbateur de M , qui générerait les valeurs aberrantes (*outliers*), a été intégralement neutralisé par la contrainte d'équilibre local $Ju = \mathbf{0}$.

Afin d'illustrer ces dérivations analytiques, nous présentons ci-dessous les résultats de nos simulations numériques (voir le code en Annexe).

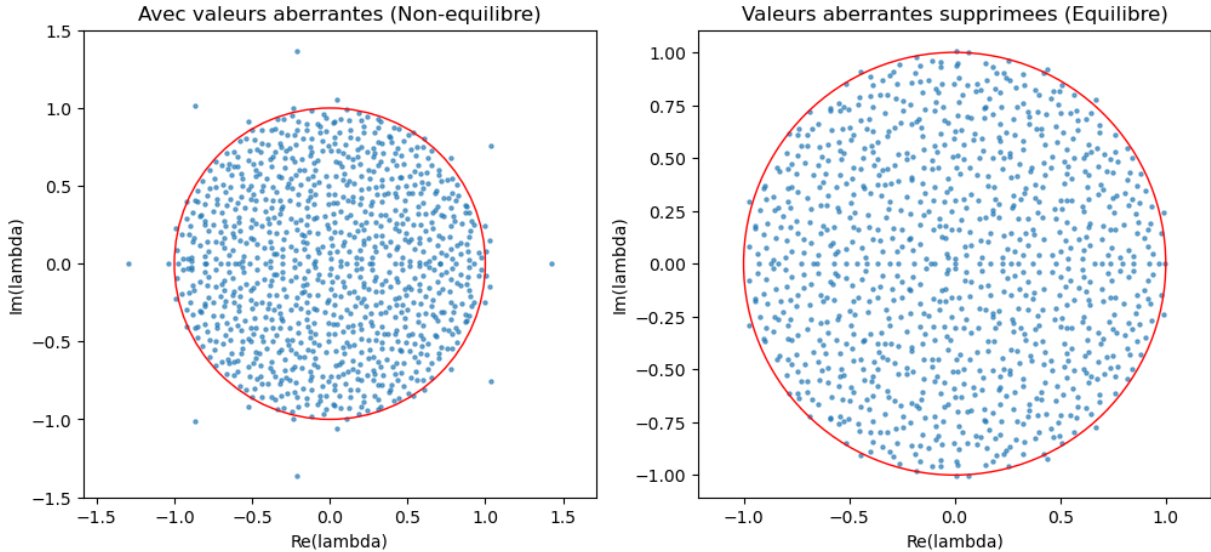


FIGURE 1 – Spectre des valeurs propres dans le plan complexe pour $N = 1000$ avec la fraction est égale à 0,5 (i.e $f = 0,5$), $\mu_E = 3.0$ et $\mu_I = -3.0$. **À gauche** : Sans ajout de la condition d'équilibre, ce qui génère des valeurs aberrantes en dehors du disque unité. **À droite** : L'application de l'équilibre des lignes ($Ju = 0$) ramène toutes les valeurs propres à l'intérieur du disque unité.

3 Effet des variances : hétérogénéité et dérivation analytique de la densité

3.1 Approche par la résolvante pour des variances hétérogènes

Dans ce qui suit, nous considérons un cas plus général et biologiquement plus réaliste : pour la matrice aléatoire des fluctuations J , bien que l'espérance de chaque élément demeure strictement nulle, sa variance n'est plus uniformément fixée à $1/N$. Afin de prendre en compte l'hétérogénéité intrinsèque entre les neurones excitateurs et inhibiteurs, nous introduisons des variances distinctes. Plus précisément, nous définissons la variance des connexions excitatrices par $\sigma_E^2 = \frac{1}{N\alpha}$ (où α est un paramètre contrôlant cette asymétrie) et celle des connexions inhibitrices par $\sigma_I^2 = \frac{1}{N}$.

Nous allons démontrer que, sous réserve que la condition d'équilibre ligne par ligne ($Ju = \mathbf{0}$) soit respectée, l'impact perturbateur de la matrice des moyennes M sur la distribution spectrale est à nouveau totalement neutralisé. Les valeurs propres aberrantes disparaissent et le spectre regagne l'intérieur d'un domaine circulaire délimité (**dont le rayon ne sera plus nécessairement égal à 1**).

En outre, nous analyserons analytiquement l'influence de la fraction de neurones excitateurs

(f) ainsi que du degré d'asymétrie des variances (α) sur la densité de cette distribution spectrale. Enfin, nous présenterons une série de simulations numériques afin de valider empiriquement nos prédictions théoriques.

Définition 4 (Trace de la résolvante). *Soit ω un point quelconque du plan complexe, I la matrice identité de taille N , et J une matrice aléatoire telle que définie précédemment. Nous définissons :*

$$G(\omega) = \frac{1}{N} \text{Tr} \left[\frac{1}{\omega I - J} \right] \quad (1)$$

Remarque 2. *Soit la valeur propre λ_k de la matrice J , on a donc la valeur propre de la matrice $\omega I - J$ est égale à $\omega - \lambda_k$. Pour l'inverse de la matrice $\omega I - J$, sa valeur propre est égale à $\frac{1}{\omega - \lambda_k}$. Par conséquent, la trace de l'inverse de la matrice $\omega I - J$ est égale à la somme des inverses des valeurs propres de $\omega I - J$:*

$$G(\omega) = \frac{1}{N} \text{Tr} \left[\frac{1}{\omega I - J} \right] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega - \lambda_k}$$

Lorsque N tend vers l'infini, les valeurs propres λ_k se condensent pour former un « nuage » continu. À ce stade, la somme se transforme en une intégrale double, et le terme $1/N$ devient la densité de distribution $\rho(\lambda)$ de ce nuage en un point donné :

$$G(w) = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\rho(\lambda)}{w - \lambda} d^2\lambda \quad (2)$$

3.2 Analogie électrostatique et équation de Poisson complexe

En suivant l'approche rigoureuse développée par Sommers et al. [Som+88], imaginons un plan bidimensionnel (\mathbb{R}^2). Plaçons une particule chargée au point λ et mesurons le champ électrique produit en ω .

Selon le **théorème de Gauss**, l'intensité du champ est inversement proportionnelle à la distance ($E \propto 1/r$), avec $r = |\omega - \lambda|$. En analyse complexe, le champ électrique complexe produit par la charge en λ est parfaitement décrit par :

$$E(\omega) = \frac{\rho(\lambda)}{\omega - \lambda}$$

Alors, en intégrant ce champ sur \mathbb{R}^2 , on obtient l'intensité totale du champ en ω :

$$E_{\text{total}}(\omega) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\rho(\lambda)}{\omega - \lambda} d^2\lambda \quad (3)$$

Ensuite, nous utiliserons l'équation de Poisson :

$$\Delta\phi(\omega) = 4\pi\rho(\omega)$$

où $\phi(\omega)$ est le potentiel électrostatique associé à la distribution de charges $\rho(\omega)$. En combinant les équations (2) et (3), on voit que le potentiel électrostatique $\phi(\omega)$ en fonction du champ électrique $G(\omega)$:

$$\phi = \frac{\partial G}{\partial \omega} \quad (4)$$

Remarque 3. Dans le plan complexe (ω, ω^*) , en utilisant les coordonnées ω et son conjugué ω^* , l'opérateur Laplacien s'écrit formellement $\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial \omega^*}$. De plus, avec notre définition du potentiel $\phi = \frac{1}{N} \ln |\det(\omega I - J)|^2 = \frac{2}{N} \sum \ln |\omega - \lambda_i|$, et sachant que fondamentalement $\Delta \ln |\omega| = 2\pi \delta(\omega)$, l'équation de Poisson s'écrit rigoureusement $\Delta \phi = 4\pi \rho(\omega, \omega^*)$. En combinant ces deux expressions exactes, on obtient bien :

$$4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \omega^*} = 4\pi \rho(\omega, \omega^*) \iff \rho(\omega, \omega^*) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \omega^*} \quad (5)$$

Ensuite on peut résoudre le système d'équations 1 et 4 pour trouver la densité de distribution $\rho(\omega)$ du spectre de la matrice aléatoire J .

Proposition 2.

$$\phi(\omega, \omega^*) = \frac{1}{N} \ln |\det(\omega I - J)|^2$$

Par passage à l'exponentielle, cette définition est équivalente à :

$$|\det(\omega I - J)|^2 = \exp(N\phi) \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{|\det(\omega I - J)|^2} = \exp(-N\phi) \quad (6)$$

Démonstration. On commence par résoudre une EDP :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{1}{N} \text{tr} \left((\omega I - J)^{-1} \right)$$

C'est ici qu'intervient une identité remarquable d'algèbre linéaire (issue de la formule de Jacobi). Pour une matrice inversible A paramétrée par ω , la trace de son inverse multipliée par sa dérivée correspond exactement à la dérivée du logarithme de son déterminant :

$$\text{Tr} \left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \omega} \right) = \frac{\partial}{\partial \omega} \ln(\det A)$$

En posant $A = \omega I - J$, la dérivée $\frac{\partial A}{\partial \omega}$ est simplement la matrice identité I . L'équation se simplifie alors magistralement :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{N} \ln \left(\det(\omega I - J) \right)$$

En intégrant cette équation par rapport à ω , on trouve que le potentiel électrostatique

$\phi(\omega, \omega^*)$ est égal à :

$$\phi(\omega, \omega^*) = \frac{1}{N} \ln \left(\det(\omega I - J) \right) + C(\omega^*)$$

où $C(\omega^*)$ est une fonction arbitraire de ω^* . Or, le potentiel électrostatique ϕ est une grandeur physique (une énergie liée à une densité de probabilité) : il doit impérativement être un **nombre réel**. En analyse complexe, une quantité est strictement réelle si et seulement si elle est égale à son propre conjugué ($\phi = \overline{\phi}$). Puisque nous sommes libres de choisir la fonction d'intégration $C(\omega^*)$, le choix algébrique unique garantissant que la somme soit purement réelle sur tout le plan complexe est de définir cette fonction comme le conjugué du premier terme :

$$C(\omega^*) = \overline{\left(\frac{1}{N} \ln \left(\det(\omega I - J) \right) \right)} = \frac{1}{N} \ln \left(\overline{\det(\omega I - J)} \right)$$

(L'opération de conjugaison transforme naturellement la dépendance en ω vers une dépendance en ω^ , ce qui valide parfaitement le fait que C ne dépend que de ω^*).*

En substituant cette fonction dans notre équation, on obtient la somme d'un logarithme complexe et de son conjugué :

$$\phi(\omega, \omega^*) = \frac{1}{N} \left[\ln \left(\det(\omega I - J) \right) + \ln \left(\overline{\det(\omega I - J)} \right) \right]$$

Grâce à la propriété fondamentale des logarithmes ($\ln A + \ln B = \ln(AB)$) et à celle des nombres complexes ($z \cdot \bar{z} = |z|^2$), les deux termes fusionnent magiquement pour former le module au carré :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{N} \ln \left(\det(\omega I - J) \cdot \overline{\det(\omega I - J)} \right) \\ &= \frac{1}{N} \ln \left| \det(\omega I - J) \right|^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Cet égalité est équivalente à :

$$\exp(-N\phi) = \frac{1}{\left| \det(\omega I - J) \right|^2} = \frac{1}{\det [(\omega I - J)^\dagger (\omega I - J)]} \tag{8}$$

□

Proposition 3. *Dans le plan complexe (ω, ω^*) , on a donc :*

$$\rho = \frac{1}{\pi} \left(|\omega|^2 \phi'' + \phi' \right) \tag{9}$$

avec $x = |\omega|^2 = \omega\omega^*$, la notation $\phi' = \frac{d\phi}{dx}$ et $\phi'' = \frac{d^2\phi}{dx^2}$.

Démonstration. Posons le changement de variable réel $x = |\omega|^2 = \omega\omega^*$. Le potentiel devient une

simple fonction d'une seule variable : $\phi \equiv \phi(x)$. Nous pouvons dès lors évaluer la double dérivée de l'équation (5) étape par étape :

Appliquons la règle de composition pour dériver $\phi(x)$ par rapport à ω :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial \omega}$$

Puisque $x = \omega\omega^*$, la dérivée partielle $\frac{\partial x}{\partial \omega}$ vaut simplement ω^* . On obtient donc :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \phi' \cdot \omega^*$$

Appliquons maintenant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \omega^*}$ sur ce résultat. Le terme obtenu ($\phi' \cdot \omega^*$) est un produit de deux fonctions dépendant de ω^* (en effet, ϕ' dépend de x , qui lui-même contient ω^*). Nous devons donc utiliser la règle de dérivation d'un produit ($(uv)' = u'v + uv'$) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \omega^*} = \frac{\partial}{\partial \omega^*} (\phi' \cdot \omega^*) = \underbrace{\left(\frac{\partial \phi'}{\partial \omega^*} \right)}_{\text{Terme A}} \cdot \omega^* + \phi' \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \omega^*}{\partial \omega^*} \right)}_{\text{Terme B}}$$

Évaluons ces deux termes séparément :

- **Terme B** : La dérivée de ω^* par rapport à lui-même vaut simplement 1. Ce terme se réduit donc à $\phi' \cdot 1 = \phi'$.
- **Terme A** : Nous appliquons de nouveau la règle de composition sur ϕ' :

$$\frac{\partial \phi'}{\partial \omega^*} = \frac{d\phi'}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial \omega^*} = \phi'' \cdot \omega$$

En multipliant ce résultat par le ω^* qui était en facteur à l'extérieur, le Terme A devient :

$$(\phi'' \cdot \omega) \cdot \omega^* = \phi'' \cdot (\omega\omega^*) = \phi'' \cdot |\omega|^2$$

En additionnant le Terme A et le Terme B, la double dérivée croisée du potentiel se réduit à une expression monodimensionnelle extrêmement élégante :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega \partial \omega^*} = |\omega|^2 \phi'' + \phi'$$

Enfin, en substituant ce résultat dans l'équation de Poisson (5), nous obtenons rigoureusement l'équation (3) de l'article de Rajan et Abbott :

$$\rho = \frac{1}{\pi} \left(|\omega|^2 \phi'' + \phi' \right)$$

□

3.3 Intégration matricielle et paramétrisation de la fonctionnelle de taux

Théorème 1 (Intégrale gaussienne complexe [LNV18]). *Soit $H \in \mathbb{C}^{N \times N}$ une matrice **définie positive**. L'intégrale sur l'espace complexe \mathbb{C}^N par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée est donnée par l'identité suivante :*

$$\int_{\mathbb{C}^N} \exp(-\mathbf{z}^\dagger H \mathbf{z}) \prod_{i=1}^N \frac{dz_i^* dz_i}{\pi} = \frac{1}{\det H} \quad (10)$$

Remarque 4. *Dans le cadre de l'étude de la matrice J avec des variances hétérogènes, nous paramétrons ses éléments sous la forme $J_{ij}\sigma_j$. Ainsi, la variable aléatoire J_{ij} suit une distribution gaussienne de moyenne nulle et de variance homogène $1/N$. Nous utiliserons l'identité gaussienne complexe et l'équation 8 en posant la matrice H telle que l'inverse du déterminant au carré s'écrive sous forme intégrale :*

$$\exp(-N\phi) \propto \int \left(\prod_{i=1}^N \frac{dz_i^* dz_i}{\pi} \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^N \left| \omega z_k - \sum_{j=1}^N J_{kj} \sigma_j z_j \right|^2 \right) \quad (11)$$

Comme J est une matrice aléatoire, nous devons calculer l'espérance de cette quantité par rapport à la distribution de probabilité conjointe des variables J_{ij} . La densité de J_{ij} est exprimée par :

$$f(J_{ij}) = \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \exp \left(-\frac{N}{2} J_{ij}^2 \right) \quad (12)$$

En appliquant l'opérateur d'espérance $\mathbb{E}_J[\cdot]$ et en utilisant le théorème de Fubini pour intervertir l'ordre d'intégration sur l'espace des matrices J et l'espace des vecteurs complexes z , nous regroupons tous les termes dans l'exponentielle.

Pour simplifier l'intégration et séparer le paramètre σ_j de la matrice aléatoire J_{kj} , on effectue le changement de variable complexe $z_j \rightarrow z_j/\sigma_j$. L'argument total de l'exponentielle, que l'on note $-NQ$, devient alors :

$$-NQ = - \sum_{k=1}^N \left| \frac{\omega z_k}{\sigma_k} - \sum_{j=1}^N J_{kj} z_j \right|^2 - \frac{N}{2} \sum_{i,j=1}^N J_{ij}^2 \quad (13)$$

Ensuite, on développe le module au carré dans cette expression :

$$-NQ = -\sum_k \frac{|\omega|^2 |z_k|^2}{\sigma_k^2} + \sum_{k,j} J_{kj} \left(\frac{\omega^* z_k^* z_j}{\sigma_k} + \frac{\omega z_j^* z_k}{\sigma_k} \right) - \sum_{k,i,j} J_{ki} (z_i^* z_j) J_{kj} - \frac{N}{2} \sum_{i,j} J_{ij}^2 \quad (14)$$

Pour obtenir une forme quadratique exploitable, on divise par $-N$. Puisque la sommation sur les indices i et j est symétrique pour le terme $J_{ki} J_{kj}$, on peut réécrire le produit $z_i^* z_j$ sous sa forme symétrisée $\frac{1}{2}(z_i^* z_j + z_j^* z_i)$. De plus, la somme des carrés issue de la densité gaussienne se réécrit à l'aide du symbole de Kronecker δ_{ij} (puisque $\sum_{i,j} J_{ij}^2 = \sum_{k,i,j} J_{ki} \delta_{ij} J_{kj}$).

En réorganisant les termes et en introduisant des facteurs de convergence $\epsilon_k \rightarrow 0^+$ pour garantir l'intégrabilité, on obtient la fonctionnelle de taux Q :

$$Q = \sum_k \left(\frac{|\omega|^2}{\sigma_k^2} + \epsilon_k \right) \frac{z_k^* z_k}{N} + \frac{1}{2} \sum_{k,i,j} J_{ki} A_{ij} J_{kj} - \sum_{k,j} B_{kj} J_{kj} \quad (15)$$

où l'on a posé :

$$A_{ij} = \frac{z_i^* z_j}{N} + \frac{z_j^* z_i}{N} + \delta_{ij} \quad \text{et} \quad B_{kj} = \frac{\omega^* z_k^* z_j}{\sigma_k N} + \frac{\omega z_j^* z_k}{\sigma_k N} \quad (16)$$

Enfin, en intégrant sur la matrice aléatoire J , on définit une fonctionnelle de taux \tilde{Q} qui ne dépend plus de J . Le système complet se réduit ainsi à l'évaluation des deux intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \exp(-N\tilde{Q}) &= \int \left(\prod_{i,j=1}^N \sqrt{\frac{N}{2\pi}} dJ_{ij} \right) \exp(-NQ) \\ \exp(-N\phi) &\propto \int \left(\prod_{i=1}^N \frac{dz_i^* dz_i}{\pi} \right) \exp(-N\tilde{Q}) \end{aligned} \quad (17)$$

Remarque 5. (*Rigueur probabiliste et approximation recuite*) Il est important de souligner ici une subtilité probabiliste. Physiquement, le potentiel ϕ que l'on cherche à déterminer dépend rigoureusement de l'espérance du logarithme du déterminant (ce que l'on nomme le désordre « trempé » ou quenched). Or, notre manipulation mathématique via l'équation 17 revient à évaluer le logarithme de l'espérance (l'approximation du désordre « recuit » ou annealed). Bien que cette approximation recuite soit asymptotiquement exacte dans notre contexte pour dériver la densité spectrale macroscopique, une preuve probabiliste strictement rigoureuse exigerait des outils spectraux plus lourds, telle que l'astuce d'hermitisation de Girko exploitée par Tao et Vu [TV10].

Pour calculer l'intégrale gaussienne sur les variables matricielles J_{ij} et déduire la fonctionnelle de taux \tilde{Q} , on remarque que la dépendance en J dans la forme quadratique Q se factorise

par ligne. Pour chaque ligne d'indice k , l'intégrande contient l'exponentielle de :

$$-N \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ki} A_{ij} J_{kj} - \sum_j B_{kj} J_{kj} \right) \quad (18)$$

Pour évaluer cette intégrale multidimensionnelle, on effectue une complétion du carré en introduisant le changement de variable $J_{kj} \rightarrow J_{kj} + \sum_i B_{ki} (A^{-1})_{ij}$. L'intégrale sur ces nouvelles variables centrées génère le facteur usuel lié au déterminant de la matrice A , tandis que le terme constant de la complétion du carré produit un décalage exponentiel. En appliquant cette opération aux N lignes, la fonctionnelle de taux s'écrit :

$$\tilde{Q} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{|\omega|^2}{\sigma_k^2} + \epsilon_k \right) \frac{|z_k|^2}{N} + \frac{1}{2} \ln(\det A) - \frac{1}{2} \sum_{k,i,j} B_{ki} (A^{-1})_{ij} B_{kj} \quad (19)$$

Il convient alors d'analyser les propriétés spectrales de la matrice symétrique A . Sous forme matricielle, elle correspond à une perturbation de rang 2 de la matrice identité :

$$A = I + \frac{1}{N} z^* z^T + \frac{1}{N} z (z^*)^T \quad (20)$$

Dans le régime asymptotique des grands réseaux ($N \rightarrow \infty$), les variables complexes $z_i = |z_i| e^{i\theta_i}$ présentent des phases non corrélées. La moyenne de leurs carrés purs s'annule par compensation des phases (interférence destructive), avec des fluctuations résiduelles d'ordre $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$. À l'inverse, la moyenne des modules au carré converge vers un paramètre d'ordre macroscopique régulier et strictement positif :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i^2 = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \right) \quad \text{et} \quad r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |z_i|^2 \quad (21)$$

En multipliant A par le vecteur z , le terme croisé $\frac{1}{N} z^* (z^T z)$ est dominé par ces fluctuations évanescentes. À l'ordre dominant, on obtient donc :

$$Az = z + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \right) + zr \simeq (1+r)z \quad (22)$$

Le même raisonnement s'applique à z^* . Cela démontre qu'asymptotiquement, z et z^* sont deux vecteurs propres de A associés à la valeur propre double $(1+r)$. Les $N-2$ autres directions orthogonales conservent la valeur propre 1. Le déterminant de A étant le produit de ses valeurs propres, on a $\det A \simeq (1+r)^2$. Le terme logarithmique se simplifie ainsi :

$$\frac{1}{2} \ln(\det A) \simeq \ln(1+r) \quad (23)$$

Par ailleurs, pour chaque ligne k , les composantes du terme linéaire B_{kj} s'écrivent :

$$B_{kj} = \frac{\omega^* z_k^*}{\sigma_k N} z_j + \frac{\omega z_k}{\sigma_k N} z_j^* \quad (24)$$

Le vecteur ligne B_k est une simple combinaison linéaire des vecteurs propres z^T et $(z^*)^T$. Puisqu'il appartient au même sous-espace propre, l'action de la matrice inverse A^{-1} sur B_k se réduit à une division par la valeur propre $(1+r)$. Le terme correctif de la complétion du carré devient donc :

$$\frac{1}{2} \sum_{k,i,j} B_{ki} (A^{-1})_{ij} B_{kj} = \frac{1}{2(1+r)} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N B_{kj}^2 \quad (25)$$

En développant le carré B_{kj}^2 , on applique à nouveau le principe d'annulation asymptotique des phases pour les carrés z_j^2 et $(z_j^*)^2$. Seul le terme croisé conjugué survit à l'ordre principal dans la limite $N \rightarrow \infty$:

$$\sum_{j=1}^N B_{kj}^2 \simeq \sum_{j=1}^N \frac{2|\omega|^2 |z_k|^2 |z_j|^2}{\sigma_k^2 N^2} = \frac{2|\omega|^2 |z_k|^2}{N \sigma_k^2} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |z_j|^2 \right) = \frac{2|\omega|^2 r}{N \sigma_k^2} |z_k|^2 \quad (26)$$

Pour intégrer l'effet de l'hétérogénéité des variances, on définit un second paramètre d'ordre $\tilde{r} = \frac{1}{N} \sum_k \frac{|z_k|^2}{\sigma_k^2}$. En sommant sur les N lignes, la correction quadratique totale prend la forme compacte :

$$\frac{1}{2(1+r)} \sum_{k=1}^N \frac{2|\omega|^2 r}{N \sigma_k^2} |z_k|^2 = \frac{|\omega|^2 r}{1+r} \tilde{r} \quad (27)$$

Enfin, on rassemble l'ensemble des termes calculés. En introduisant un terme de régularisation macroscopique $r_\epsilon = \frac{1}{N} \sum_k \epsilon_k |z_k|^2$, le premier terme constant s'écrit :

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{|\omega|^2}{\sigma_k^2} + \epsilon_k \right) \frac{|z_k|^2}{N} = |\omega|^2 \tilde{r} + r_\epsilon \quad (28)$$

3.4 Limite asymptotique et principe des grandes déviations

La fonctionnelle de taux globale devient alors, à la limite des grands N :

$$\tilde{Q} = (|\omega|^2 \tilde{r} + r_\epsilon) + \ln(1+r) - \frac{|\omega|^2 r \tilde{r}}{1+r} \quad (29)$$

En factorisant le terme proportionnel à $|\omega|^2 \tilde{r}$, on exploite l'identité algébrique $1 - \frac{r}{1+r} = \frac{1}{1+r}$. L'intégration sur l'ensemble de la matrice aléatoire aboutit ainsi à une expression analytique

purifiée, ne dépendant plus que des variables macroscopiques :

$$\tilde{Q} = \ln(1 + r) + \frac{|\omega|^2 \tilde{r}}{1 + r} + r_\epsilon \quad (30)$$

La fonctionnelle de taux \tilde{Q} étant déterminée, le calcul du potentiel électrostatique ϕ se réduit à l'évaluation de l'intégrale résiduelle sur l'espace des vecteurs complexes z :

$$\exp(-N\phi) \propto \int \left(\prod_{i=1}^N \frac{dz_i^* dz_i}{\pi} \right) \exp(-N\tilde{Q}) \quad (31)$$

Puisque nous étudions la limite asymptotique ($N \rightarrow \infty$), cette intégrale de très grande dimension est dominée par la configuration qui minimise l'argument de l'exponentielle. Suivant une approche évaluable asymptotiquement par la méthode de Laplace (ou méthode du point col), justifiée de manière heuristique par le formalisme des grandes déviations [AGZ10], nous pouvons déterminer l'état macroscopique dominant. Une preuve probabiliste stricte d'un véritable principe des grandes déviations exigerait cependant de définir une topologie rigoureuse, une fonction de taux semi-continue, et de prouver formellement des bornes inférieures et supérieures.

Pour appliquer cette méthode, nous regroupons les variables microscopiques selon les deux populations de neurones. Les fN premières colonnes correspondent aux synapses excitatrices (de variance matricielle $\sigma_E^2 = \frac{1}{N\alpha}$, ce qui fixe le paramètre $\sigma_i^2 = 1/\alpha$) et les $(1-f)N$ suivantes aux synapses inhibitrices (de variance matricielle $\sigma_I^2 = \frac{1}{N}$, soit $\sigma_i^2 = 1$).

Nous définissons deux paramètres d'ordre macroscopiques r_1 et r_2 , représentant la moyenne des modules au carré pour chaque sous-population :

$$r_1 = \frac{1}{N} \sum_{i \in \text{Exc}} |z_i|^2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1}{N} \sum_{i \in \text{Inh}} |z_i|^2 \quad (32)$$

Les variables globales r et \tilde{r} s'expriment alors simplement comme des combinaisons linéaires de ces paramètres :

$$r = r_1 + r_2 \quad \text{et} \quad \tilde{r} = \alpha r_1 + r_2 \quad (33)$$

Pour transformer l'intégration sur les N variables complexes en une intégration sur ces deux paramètres macroscopiques, nous passons en coordonnées hypersphériques dans les sous-espaces de dimension complexe fN et $(1-f)N$. Ce changement de coordonnées introduit un Jacobien multiplicatif proportionnel au volume de l'espace d'intégration. Le volume d'une sphère complexe croissant asymptotiquement avec son rayon, ce Jacobien génère un facteur géométrique proportionnel à $r_1^{fN} r_2^{(1-f)N}$.

En absorbant ce terme géométrique dans l'exponentielle, il produit un terme entropique (ou logarithmique) de la forme $-N(f \ln r_1 + (1-f) \ln r_2)$. En substituant r et \tilde{r} par leurs

expressions en fonction de r_1 et r_2 , la fonctionnelle de taux devient :

$$\tilde{Q}(r_1, r_2) = \ln(1 + r_1 + r_2) + \frac{|\omega|^2(\alpha r_1 + r_2)}{1 + r_1 + r_2} + \epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 r_2 \quad (34)$$

où le terme infinitésimal de convergence r_ϵ a été décomposé en $\epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 r_2$.

Le potentiel total ϕ évalué au point critique est la somme de la fonctionnelle de taux \tilde{Q} et de ce terme entropique. En utilisant les propriétés des logarithmes, nous obtenons l'expression analytique finale du potentiel :

$$\phi(r_1, r_2) = \ln \left(\frac{1 + r_1 + r_2}{r_1^f r_2^{1-f}} \right) + \frac{|\omega|^2(\alpha r_1 + r_2)}{1 + r_1 + r_2} + \epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 r_2 \quad (35)$$

La configuration dominante, qui caractérise la distribution spectrale de la matrice pour un point ω donné, est celle qui minimise ce potentiel. Le principe des grandes déviations (ou la méthode de Laplace) impose de résoudre le système d'équations variationnelles défini par l'annulation des dérivées partielles :

$$\frac{\partial \phi}{\partial r_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial r_2} = 0 \quad (36)$$

En calculant ces dérivées de manière explicite, on aboutit directement au système couplé suivant :

$$\begin{aligned} -\epsilon_1 &= \frac{1 + \alpha|\omega|^2}{1 + r_1 + r_2} - \frac{f}{r_1} - \frac{|\omega|^2(\alpha r_1 + r_2)}{(1 + r_1 + r_2)^2} \\ -\epsilon_2 &= \frac{1 + |\omega|^2}{1 + r_1 + r_2} - \frac{1 - f}{r_2} - \frac{|\omega|^2(\alpha r_1 + r_2)}{(1 + r_1 + r_2)^2} \end{aligned} \quad (37)$$

Ces deux équations décrivent l'état asymptotique du système et doivent être résolues dans la limite où les termes de convergence $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0^+$.

3.5 Bifurcation du système asymptotique et densité spectrale radiale

Pour exploiter la proposition 3 et déterminer la densité spectrale $\rho(|\omega|^2)$, nous devons résoudre le système d'équations critiques dans la limite $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0^+$. En posant la variable radiale $x = |\omega|^2$ et le rapport $q = r_1/r_2$, l'analyse géométrique de ce système révèle une bifurcation fondamentale séparant le plan complexe en deux régimes.

Supposons en premier lieu qu'il existe une solution mathématiquement admissible où les paramètres r_1 et r_2 sont strictement positifs et finis. En posant $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, la combinaison linéaire des deux équations (obtenue en calculant $r_1 \frac{\partial \phi}{\partial r_1} + r_2 \frac{\partial \phi}{\partial r_2} = 0$) impose la relation géométrique suivante :

$$1 + r_1 + r_2 = x(\alpha r_1 + r_2) \quad (38)$$

En soustrayant ensuite les deux équations critiques, on obtient une relation où l'on peut substituer l'équation (38). Par cette substitution, la variable radiale x s'élimine miraculeusement, conduisant à une équation polynomiale ne dépendant que du rapport q :

$$\alpha(1-f)q^2 + [\alpha(1-f) - f]q - f = 0 \quad (39)$$

Cette équation admet une factorisation remarquable :

$$(q+1)[\alpha(1-f)q - f] = 0 \quad (40)$$

Puisque le rapport de grandeurs positives q doit être strictement positif, la seule solution admissible est une constante :

$$q = \frac{f}{\alpha(1-f)} \quad (41)$$

En réinjectant ce rapport analytique dans l'équation (38), on déduit l'expression exacte du paramètre r_2 :

$$r_2 = \frac{\alpha(1-f)}{(x-1)\alpha + (\alpha-1)f} \quad (42)$$

Pour que cette solution conserve un sens mathématique, il est impératif que $r_2 > 0$, ce qui impose la condition $x > 1 - f + f/\alpha$. Cette inégalité stricte définit géométriquement l'extérieur du spectre.

En substituant cette solution d'équilibre dans l'expression du potentiel électrostatique $\phi(r_1, r_2)$, le second terme se simplifie exactement en $+1$, et le potentiel s'écrit formellement comme une pure fonction logarithmique de x :

$$\phi(x) = \ln(x) + 1 + \ln\left(\frac{\alpha^f}{f^f(1-f)^{1-f}}\right) \quad (43)$$

C'est ici que la proposition 3 démontre toute son efficacité. En dérivant ce potentiel, on obtient aisément $\phi'(x) = 1/x$ et $\phi''(x) = -1/x^2$. L'équation de Poisson complexe donne alors immédiatement :

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} (x\phi''(x) + \phi'(x)) = \frac{1}{\pi} \left(x \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x} \right) = 0 \quad (44)$$

Ce résultat analytique rigoureux prouve que la densité de valeurs propres est strictement nulle dans cette région.

La frontière géométrique du nuage de valeurs propres correspond à la perte de validité de la solution précédente. Le carré du rayon spectral maximal R est donc donné par l'annulation du dénominateur de r_2 :

$$R^2 = 1 - f + \frac{f}{\alpha} \quad (45)$$

À l'intérieur de ce disque ($x \leq R^2$), la solution finie deviendrait négative. Le minimum de la fonctionnelle de taux (ou du potentiel asymptotique) est alors repoussé à l'infini, c'est-à-dire que $r_1, r_2 \rightarrow \infty$. Dans cette limite asymptotique, l'évaluation des équations critiques se simplifie en une équation du second degré dont la racine positive définit $q(x)$:

$$q(x) = \frac{(1 - \alpha)x + 2f - 1 + \sqrt{[(1 - \alpha)x - 1]^2 + 4f(1 - \alpha)x}}{2(1 - f)} \quad (46)$$

Le potentiel limite prend alors la forme paramétrique non triviale :

$$\phi(x) = \ln \left(\frac{1 + q(x)}{q(x)^f} \right) + \frac{x(\alpha q(x) + 1)}{q(x) + 1} \quad (47)$$

Puisque q dépend désormais analytiquement de x , l'application de la proposition 3 (via l'utilisation de la règle de dérivation en chaîne pour évaluer ϕ' et ϕ'') génère formellement une densité spectrale strictement positive $\rho(x) > 0$. Contrairement au spectre plat prédit par la loi du cercle de Girko classique, l'asymétrie des variances ($\alpha \neq 1$) garantit que $q'(x) \neq 0$. Cela engendre une densité radiale **non uniforme**, avec une concentration accrue des valeurs propres vers le centre du plan complexe.

Afin de relier cette frontière géométrique R^2 aux propriétés intrinsèques du réseau neuronal, nous remplaçons le paramètre d'asymétrie α par son expression initiale. En rappelant que la variance synaptique excitatrice est $\sigma_E^2 = \frac{1}{N\alpha}$ et l'inhibitrice est $\sigma_I^2 = \frac{1}{N}$, l'équation (45) devient :

$$R^2 = N [f\sigma_E^2 + (1 - f)\sigma_I^2] \quad (48)$$

Ce résultat final élégant démontre mathématiquement que, sous la contrainte d'un équilibre synaptique local, l'étendue globale du spectre (qui dicte la stabilité de la dynamique macroscopique) est strictement déterminée par la **moyenne pondérée des variances** des forces synaptiques, neutralisant totalement l'effet de leurs moyennes respectives.

Afin d'illustrer ces dérivations analytiques, nous présentons ci-dessous les résultats de nos simulations numériques (voir le code en Annexe).

4 Conclusion

Dans cette étude, nous avons analysé les propriétés spectrales de matrices aléatoires modélisant la connectivité synaptique au sein de réseaux de neurones, en y intégrant des contraintes biologiques structurelles fondamentales : le principe de Dale (séparation stricte entre neurones excitateurs et inhibiteurs) et l'hétérogénéité des distributions synaptiques. En conjuguant des outils d'algèbre linéaire et des méthodes asymptotiques issues de la théorie des grandes déviations, nous avons mis en évidence les mécanismes mathématiques qui régissent la dynamique

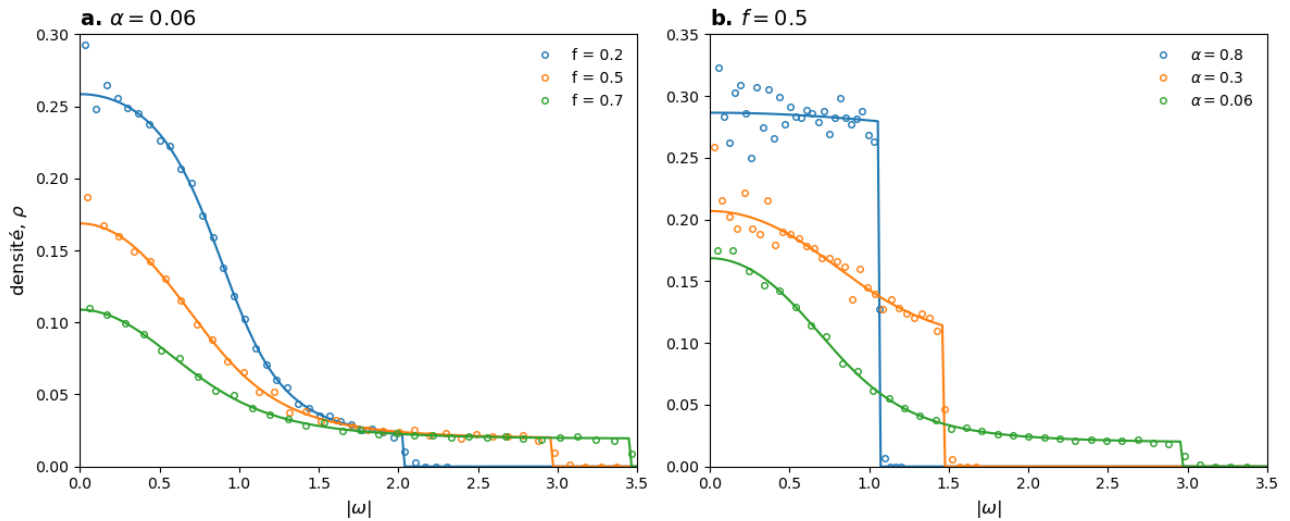


FIGURE 2 – **Densité radiale des valeurs propres ρ en fonction du module $|\omega|$.** Les symboles (cercles) représentent les densités empiriques obtenues par simulation numérique sur des matrices aléatoires de taille $N = 1000$. Les courbes continues correspondent aux solutions analytiques exactes dérivées via la méthode de Laplace (justifiée heuristiquement par le formalisme des grandes déviations) et l'équation de Poisson. **a.** Profils de densité pour différentes fractions de neurones excitateurs f , avec un paramètre d'asymétrie de variance fixé à $\alpha = 0.06$. **b.** Profils de densité pour différentes valeurs du paramètre d'asymétrie α , avec une population équilibrée ($f = 0.5$). Contrairement à la densité uniforme postulée par la loi classique du cercle de Girko (retrouvée ici pour $\alpha = 1$), l'introduction de variances synaptiques hétérogènes engendre une distribution radiale non uniforme, caractérisée par une forte concentration asymptotique des valeurs propres vers le centre du spectre.

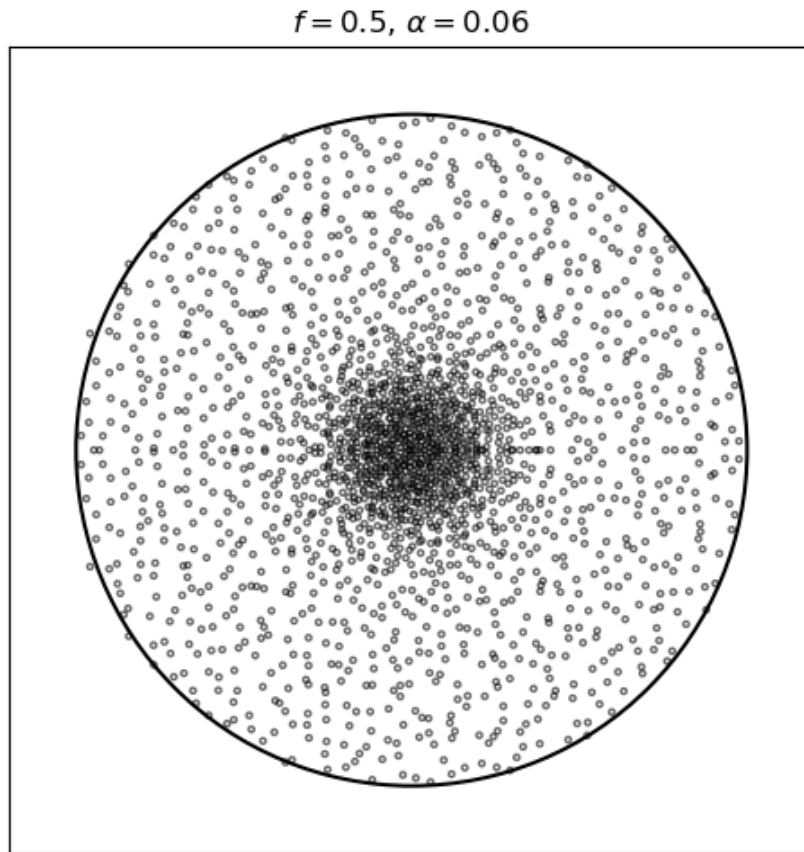


FIGURE 3 – **Répartition des valeurs propres dans le plan complexe.** Résultats d’une simulation numérique pour une matrice de connectivité paramétrée par $N = 2000$, $f = 0.5$ et $\alpha = 0.06$. Le cercle continu noir délimite la frontière spectrale absolue déduite de l’analyse asymptotique, dont le rayon maximal est analytiquement donné par $R = \sqrt{1 - f + f/\alpha}$. Cette visualisation géométrique corrobore l’absence stricte de valeurs propres au-delà de ce domaine (région de vide spectral). Elle illustre également de manière directe la nature de la solution intérieure : l’hétérogénéité des variances condense massivement les modes propres au voisinage de l’origine, réduisant drastiquement la proportion de valeurs propres à la périphérie du disque.

macroscopique de ces réseaux complexes.

Notre première analyse a démontré algébriquement que l'asymétrie des moyennes entre les populations excitatrices et inhibitrices agit comme une perturbation matricielle de rang un. Cette perturbation génère des valeurs propres aberrantes (outliers) fortement déstabilisatrices pour la dynamique du réseau. Toutefois, nous avons prouvé que l'imposition d'une contrainte d'équilibre local strict — où la somme des entrées synaptiques reçues par chaque neurone s'annule ($Ju = 0$) — permet de neutraliser intégralement l'effet de ces moyennes. Sous cette condition d'équilibre géométrique, les valeurs aberrantes disparaissent et le spectre réintègre un domaine confiné, garantissant la stabilité linéaire du système sans altérer la distribution de ses modes principaux.

Dans un second temps, pour appréhender l'hétérogénéité des variances synaptiques, le déploiement de l'analogie électrostatique complexe et l'évaluation d'intégrales gaussiennes multidimensionnelles par le principe des grandes déviations nous ont permis de dériver la densité spectrale exacte. Ce développement mathématique prouve que l'introduction de variances distinctes ($\alpha \neq 1$) brise l'uniformité spatiale postulée par la loi classique du cercle de Girko. L'analyse dans la limite asymptotique ($N \rightarrow \infty$) aboutit à deux résultats fondamentaux concernant la structure du spectre :

- **La frontière spectrale** : L'étendue maximale du nuage de valeurs propres dans le plan complexe est rigoureusement dictée par la moyenne pondérée des variances des connexions excitatrices et inhibitrices ($R^2 = N[f\sigma_E^2 + (1 - f)\sigma_I^2]$).
- **La concentration de la densité** : L'asymétrie des variances engendre une densité radiale non uniforme. Les valeurs propres se concentrent massivement vers l'origine du plan complexe, un phénomène analytique que nos simulations numériques ont parfaitement corroboré.

D'un point de vue neurobiologique, ces résultats théoriques offrent un éclairage profond sur la régulation de l'activité corticale. Dans l'analyse des systèmes dynamiques, ce sont les valeurs propres situées à la périphérie du spectre (celles dont la partie réelle est la plus grande) qui gouvernent l'émergence des modes lents et des activités spontanées persistantes.

Nos dérivations prouvent que dans un régime équilibré, un réseau neuronal n'a paradoxalement pas besoin d'ajuster l'intensité moyenne absolue de ses connexions pour moduler sa dynamique temporelle. Il lui suffit, par l'entremise des mécanismes de plasticité, de contrôler la **variance** — c'est-à-dire le degré d'hétérogénéité de ses distributions synaptiques (bien que la connectivité corticale réelle soit fortement non-aléatoire et non-gaussienne [Son+05]). En réduisant la densité des valeurs propres à la lisière du spectre via ce contrôle de la variance, le cerveau limite le nombre de modes oscillatoires lents, s'assurant ainsi une stabilité robuste face à sa propre complexité microscopique.

Références

- [AGZ10] Greg W ANDERSON, Alice GUIONNET et Ofer ZEITOUNI. *An introduction to random matrices*. Cambridge university press, 2010.
- [Bro+81] Thomas A BRODY et al. « Random-matrix physics : spectrum and strength fluctuations ». In : *Reviews of Modern Physics* 53.3 (1981), p. 385.
- [CS06] Bruno CESSAC et Jacques-Alexandre SEPULCHRE. « Linear variance dynamics in random neural networks ». In : *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 16.1 (2006), p. 013104.
- [Gir84] Vyacheslav L GIRKO. « Circular law ». In : *Theory of Probability & Its Applications* 29.4 (1984), p. 694-706.
- [LNV18] Giacomo LIVAN, Marcel NOVAES et Pierpaolo VIVO. *Introduction to Random Matrices : Theory and Practice*. Springer Nature, 2018.
- [Meh67] Madan Lal MEHTA. *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels*. Academic Press, New York, 1967.
- [RA06] Kanaka RAJAN et Larry F ABBOTT. « Eigenvalue spectra of random matrices for neural networks ». In : *Physical Review Letters* 97.18 (2006), p. 188104.
- [SCS88] Haim SOMPOLINSKY, Andrea CRISANTI et Hans-Jürgen SOMMERS. « Chaos in random neural networks ». In : *Physical Review Letters* 61.3 (1988), p. 259.
- [SHS03] Oren SHRIKI, David HANSEL et Haim SOMPOLINSKY. « Rate models for conductance-based cortical neuronal networks ». In : *Neural computation* 15.8 (2003), p. 1809-1841.
- [SN94] Michael N SHADLEN et William T NEWSOME. « Noise, neural codes and cortical organization ». In : *Current opinion in neurobiology* 4.4 (1994), p. 569-579.
- [Som+88] Hans-Jürgen SOMMERS et al. « Spectrum of large random asymmetric matrices ». In : *Physical Review Letters* 60.19 (1988), p. 1895.
- [Son+05] Sen SONG et al. « Highly nonrandom features of synaptic connectivity in local cortical circuits ». In : *PLoS biology* 3.3 (2005), e68.
- [TM97] Todd W TROYER et Kenneth D MILLER. « Physiological gain leads to high ISI variability in a simple model of a cortical regular spiking cell ». In : *Neural Computation* 9.5 (1997), p. 971-983.
- [TV10] Terence TAO et Van VU. « Random matrices : Universality of ESDs and the circular law ». In : *The Annals of Probability* 38.4 (2010), p. 2023-2065.
- [VRA05] Tim P VOGELS, Kanaka RAJAN et Larry F ABBOTT. « Neural network dynamics ». In : *Annual review of neuroscience* 28 (2005), p. 357-376.

- [WC72] Hugh R WILSON et Jack D COWAN. « Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons ». In : *Biophysical journal* 12.1 (1972), p. 1-24.

Annexes

Code de génération de la Figure 1

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def reproduce_rajana_abbott(N=1000, f=0.5, mu_E=1.0, mu_I=-1.0,
5     apply_balance=False):
6     # 1. Déterminer le nombre de neurones (N), la fraction (f), la
7     #     force moyenne excitatrice (mu_E) et la force moyenne
8     #     inhibitrice (mu_I).
9     N_E = int(f * N)
10    # le nombre de neurones d'excitateurs
11    N_I = N - N_E
12    # le nombre de neurones d'inhibitrice
13
14    # 2. Initialiser la matrice J de taille N x N selon une
15    #     distribution normale (moyenne 0, variance 1/N)
16    J = np.random.normal(0, np.sqrt(1/N), (N, N))
17
18    # 3. Construire la matrice M (décalage des colonnes selon le
19    #     type)
20    # Ajouter mu_E/sqrt(N) aux colonnes excitatrices et mu_I/sqrt(N)
21    #     aux inhibitrices
22    M = np.zeros((N, N))
23    M[:, :N_E] = mu_E / np.sqrt(N)
24    M[:, N_E:] = mu_I / np.sqrt(N)
25
26    # Matrice synaptique finale W = J + M
27    W = J + M
28
29    # 4. Appliquer la contrainte d'équilibre par ligne (row-wise
30    #     balance)
31    if apply_balance:
32        # Soustraire la moyenne de chaque ligne pour que la somme
33        #     soit nulle
34        row_means = np.mean(W, axis=1, keepdims=True)
35        W = W - row_means
```

```

29     # 5. Calculer les valeurs propres
30     eigenvalues = np.linalg.eigvals(W)
31     return eigenvalues
32
33 # --- Tracer les resultats ---
34 evals_a = reproduce_rajan_abbott(apply_balance=False) # Correspond
35           a la figure 1a
36 evals_b = reproduce_rajan_abbott(apply_balance=True)  # Correspond
37           a la figure 1b
38
39 fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 5))
40
41 # Graphique 1 : Sans equilibre (presence de valeurs aberrantes)
42 ax1.scatter(evals_a.real, evals_a.imag, s=5, alpha=0.6)
43 ax1.set_title("Avec valeurs aberrantes (Non-equilibre)")
44 ax1.add_patch(plt.Circle((0, 0), 1, color='r', fill=False))
45 ax1.set_xlim(-3/2, 3/2)
46 ax1.set_ylim(-3/2, 3/2) #limite des axes x et y
47 ax1.set_xlabel("Re(lambda)")
48 ax1.set_ylabel("Im(lambda)") #label des axes x et y
49 ax1.axis('equal') # Pour s'assurer que le cercle apparait bien rond
50
51 # Graphique 2 : Avec equilibre (valeurs aberrantes supprimees)
52 ax2.scatter(evals_b.real, evals_b.imag, s=5, alpha=0.6)
53 ax2.set_title("Valeurs aberrantes supprimees (Equilibre)")
54 ax2.add_patch(plt.Circle((0, 0), 1, color='r', fill=False))
55 ax2.set_xlim(-3/2, 3/2)
56 ax2.set_ylim(-3/2, 3/2) #limite des axes x et y
57 ax2.set_xlabel("Re(lambda)")
58 ax2.set_ylabel("Im(lambda)") #label des axes x et y
59 ax2.axis('equal')
60
61 plt.show()

```

Code de génération de la Figure 2

```

1 def densite_analytique(w_mag, f, alpha):
2     """
3     Calcule la densite analytique des valeurs propres pour un rayon
4     w_mag donne

```

```

4      """
5      x = w_mag**2
6      rayon_critique_sq = 1 - f + f / alpha
7
8      if x > rayon_critique_sq:
9          return 0.0
10
11     if x == 0:
12         x = 1e-10
13
14     terme_racine = np.sqrt(((1 - alpha) * x - 1)**2 + 4 * f * (1 -
15         alpha) * x)
16     q = ((1 - alpha) * x + 2 * f - 1) / (2 * (1 - f)) +
17         terme_racine / (2 * (1 - f))
18
19     q_prime = ((1 - alpha) / (2 * (1 - f))) * (1 + ((1 - alpha) * x
20         - 1 + 2 * f) / terme_racine)
21
22     terme_pour_q_dp = 1 - (((1 - alpha) * x - 1 + 2 * f)**2) / (
23         terme_racine**2)
24     q_seconde = (((1 - alpha)**2) / (2 * (1 - f) * terme_racine)) *
25         terme_pour_q_dp
26
27     phi_prime_terme1 = 1 / (q + 1) - f / q + (alpha * x) / (q + 1)
28         - (x * (alpha * q + 1)) / ((q + 1)**2)
29
30     phi_prime = q_prime * phi_prime_terme1 + (alpha * q + 1) / (q +
31         1)
32
33     phi_dp_terme2 = 2 * q_prime * (alpha / (q + 1) - (alpha * q +
34         1) / ((q + 1)**2))
35     phi_dp_terme3 = (q_prime**2) * (-1 / ((q + 1)**2) + f / (q**2)
36         - (2 * alpha * x) / ((q + 1)**2) + (2 * x * (alpha * q + 1))
37         / ((q + 1)**3))
38
39     phi_seconde = q_seconde * phi_prime_terme1 + phi_dp_terme2 +
40         phi_dp_terme3
41
42     rho = (x * phi_seconde + phi_prime) / np.pi
43     return rho

```

```
33
34 def densite_numerique(N, f, alpha, num_bins=35, num_essais=20):
35     """
36     Construit une matrice aleatoire et calcule la densite de
37     distribution numerique
38     (inclut la moyenne sur plusieurs essais)
39     """
40     N_E = int(f * N)
41     N_I = N - N_E
42
43     sigma_E = np.sqrt(1 / (N * alpha))
44     sigma_I = np.sqrt(1 / N)
45
46     # Pour assurer la coherence des compartiments (bins), on
47     # utilise le rayon critique analytique
48     rayon_critique = np.sqrt(1 - f + f / alpha)
49     max_r = rayon_critique * 1.15
50     bins = np.linspace(0, max_r, num_bins + 1)
51
52     comptes_totaux = np.zeros(num_bins)
53
54     # Boucle sur plusieurs essais pour generer les matrices (
55     # moyenne d'ensemble)
56     for _ in range(num_essais):
57         J_E = np.random.normal(0, sigma_E, (N, N_E))
58         J_I = np.random.normal(0, sigma_I, (N, N_I))
59         J = np.hstack((J_E, J_I))
60
61         valeurs_propres = np.linalg.eigvals(J)
62         rayons = np.abs(valeurs_propres)
63
64         comptes, _ = np.histogram(rayons, bins=bins)
65         comptes_totaux += comptes
66
67     # Calcul de la moyenne des valeurs propres tombant dans chaque
68     # anneau par essai
69     moyenne_comptes = comptes_totaux / num_essais
70
71     centres_bins = (bins[:-1] + bins[1:]) / 2
72     # Aire de chaque anneau : pi * (r_exterieur^2 - r_interieur^2)
```

```
69     aires = np.pi * (bins[1:]**2 - bins[:-1]**2)
70
71     # Densite = Nombre moyen / (Dimension totale N * Aire de l'
72     #         anneau)
73     densites = moyenne_comptes / (N * aires)
74
75     return centres_bins, densites
76
77 N = 1000
78 w_vals = np.linspace(0, 3.5, 200)
79
80 fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 5))
81
82 # Liste de couleurs : bleu, orange, vert
83 couleurs = ['#1f77b4', '#ff7f0e', '#2ca02c']
84
85 # ----- Figure 2(a) -----
86 alpha_a = 0.06
87 f_vals_a = [0.2, 0.5, 0.7]
88
89 for f, couleur in zip(f_vals_a, couleurs):
90     # Solution analytique (ligne continue)
91     rho_analytique = [densite_analytique(w, f, alpha_a) for w in
92                       w_vals]
93     axes[0].plot(w_vals, rho_analytique, color=couleur, linestyle='
94                 -')
95
96     # Solution numerique (points)
97     centres_bins, densites = densite_numerique(N, f, alpha_a)
98     axes[0].plot(centres_bins, densites, marker='o', markersize=4,
99                 label=f'f = {f}',
100                 markerfacecolor='none', markeredgecolor=couleur,
101                 linestyle='none')
102
103 axes[0].set_xlim(0, 3.5)
104 axes[0].set_ylim(0, 0.3)
105 axes[0].set_xlabel(r'$|\omega|$', fontsize=12)
106 axes[0].set_ylabel(r'densite, $\rho$', fontsize=12)
```

```

103 axes[0].set_title(r'a.  $\alpha = 0.06$ ', loc='left', fontsize=14,
104                 fontweight='bold')
105 axes[0].legend(frameon=False)
106 # ----- Figure 2(b) -----
107 f_b = 0.5
108 alpha_vals_b = [0.8, 0.3, 0.06]
109
110 for alpha, couleur in zip(alpha_vals_b, couleurs):
111     # Solution analytique (ligne continue)
112     rho_analytique = [densite_analytique(w, f_b, alpha) for w in
113                     w_vals]
114     axes[1].plot(w_vals, rho_analytique, color=couleur, linestyle='
115                 -')
116
117     # Solution numerique (points)
118     centres_bins, densites = densite_numerique(N, f_b, alpha)
119     axes[1].plot(centres_bins, densites, marker='o', markersize=4,
120                 label=rf' $\alpha = \{alpha\}$ ',
121                 markerfacecolor='none', markeredgecolor=couleur,
122                 linestyle='none')
123
124 axes[1].set_xlim(0, 3.5)
125 axes[1].set_ylim(0, 0.35)
126 axes[1].set_xlabel(r' $|\omega|$ ', fontsize=12)
127 axes[1].set_title(r'b.  $f = 0.5$ ', loc='left', fontsize=14,
128                 fontweight='bold')
129 axes[1].legend(frameon=False)
130
131 plt.tight_layout()
132 plt.show()

```

Code de génération de la Figure 3

```

1 def tracer_encadre_plan_complexe(N=2000, f=0.5, alpha=0.06):
2     """
3     Genere l'encadre (inset) de la Figure 2(a) : distribution des
4     valeurs propres dans le plan complexe.
5     """
6     # 1. Configuration des parametres du reseau

```

```
6 N_E = int(f * N)
7 N_I = N - N_E
8
9 # 2. Definition de l'ecart-type (moyenne a 0)
10 sigma_E = np.sqrt(1 / (N * alpha))
11 sigma_I = np.sqrt(1 / N)
12
13 # 3. Construction de la matrice aleatoire
14 J_E = np.random.normal(0, sigma_E, (N, N_E))
15 J_I = np.random.normal(0, sigma_I, (N, N_I))
16 J = np.hstack((J_E, J_I))
17
18 # 4. Calcul des valeurs propres
19 valeurs_propres = np.linalg.eigvals(J)
20
21 # 5. Calcul du rayon du cercle limite theorique
22 # Selon l'article, les valeurs propres se situent dans un
23 # cercle de rayon sqrt(1 - f + f/alpha)
24 rayon_theorique = np.sqrt(1 - f + f / alpha)
25
26 # 6. Trace du graphique
27 fig, ax = plt.subplots(figsize=(5, 5))
28
29 # Trace du nuage de points des valeurs propres
30 ax.scatter(np.real(valeurs_propres), np.imag(valeurs_propres),
31            s=5, facecolors='none', edgecolors='black', alpha
32            =0.6)
33
34 # Trace du cercle de limite theorique
35 cercle = plt.Circle((0, 0), rayon_theorique, color='black',
36                    fill=False, linestyle='-', linewidth=1.5)
37 ax.add_patch(cercle)
38
39 # Formatage des axes
40 ax.set_aspect('equal', 'box')
41 limite = rayon_theorique * 1.2
42 ax.set_xlim(-limite, limite)
43 ax.set_ylim(-limite, limite)
```

```
42     # Masquer les graduations pour correspondre au style de l'  
         article original  
43     ax.set_xticks([])  
44     ax.set_yticks([])  
45  
46     plt.title(f'$f=0.5$, $\alpha=0.06$', fontsize=12)  
47     plt.tight_layout()  
48     plt.show()  
49  
50 # Execution pour generer le graphique  
51 tracer_encadre_plan_complexe()
```