

# Spectres des valeurs propres des matrices aléatoires pour les réseaux neuronaux

Basé sur l'article de K. Rajan & L. F. Abbott (PRL, 2006)

Yuguang XIAO

UE : Modèles probabilistes en Neurosciences  
M2 Probabilités et Modèles aléatoires  
Sorbonne Université

*Encadrant : Michèle Thieullen*  
LPSM, Sorbonne Université

27 mars 2026

# Table des matières

- 1 Contexte de la recherche
- 2 Théorème I
- 3 Théorème II
- 4 Conclusion

## Definition (Ensemble de Ginibre réel)

Soit  $J_{N \times N}$  une matrice aléatoire de taille  $N \times N$ . On dit que  $J$  appartient à l'ensemble de Ginibre si ses coefficients  $J_{ij}$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) suivant une loi normale :

- $J_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  avec  $\sigma^2 = \frac{1}{N}^*$ .
- Les entrées  $J_{ij}$  sont mutuellement indépendantes pour tout  $1 \leq i, j \leq N$ .

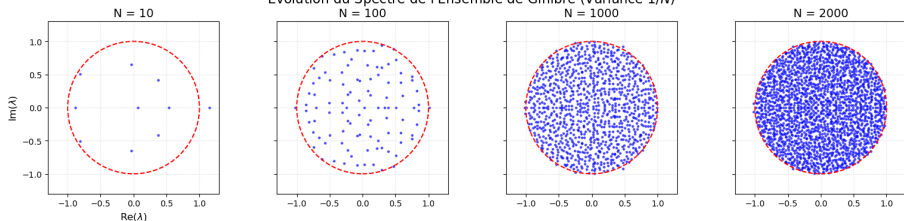
\* : En général, on fixe  $\sigma^2 = \frac{1}{N}$

## Théorème (Loi Circulaire de Girko 1984)

Soit  $J_{N \times N}$  une matrice de l'ensemble de Ginibre avec  $\sigma^2 = \frac{1}{N}$ . Quand  $N \rightarrow \infty$ , la distribution (ou mesure empirique) de ses  $N$  valeurs propres complexes converge vers la loi **uniforme** sur le disque unité.

# Loi Circulaire de Girko

Évolution du Spectre de l'Ensemble de Ginibre (Variance  $1/N$ )



**Figure** – Évolution du spectre des valeurs propres complexes (points bleus) de matrices de Ginibre réel  $J_{N \times N}$  pour des tailles croissantes :  $N \in \{10, 100, 1000, 2000\}$ . Les éléments sont i.i.d. suivant une loi  $\mathcal{N}(0, 1/N)$ . Le cercle rouge pointillé représente le support théorique (disque unité de rayon  $R = 1$ ). On observe la convergence vers une distribution uniforme quand  $N \rightarrow \infty$ .

## Problématique

Comment faire le lien entre ces concepts mathématiques et les neurosciences ?

## Analogies :

- Connectivité synaptique  $\longleftrightarrow$  Matrice aléatoire  $W$ .
  - $W_{ij}$  représente l'effet du neurone  $j$  sur le neurone  $i$ .
- Valeurs propres de  $W$   $\longleftrightarrow$  Dynamique et stabilité du réseau.

## Contrainte biologique (Différence) :

- **Loi de Dale** : Un neurone est strictement excitateur (+) ou inhibiteur (-).
  - $\Rightarrow$  Les colonnes de  $w$  ont un signe fixe.
  - $\Rightarrow$  Perte d'indépendance ( $W \neq$  matrice de Ginibre standard).

# Modélisation Mathématique avec la Loi de Dale

Pour satisfaire le **Principe de Dale**, nous décomposons la matrice de connectivité  $W$  en une partie aléatoire et une structure moyenne déterministe :

$$W = J + M$$

- **Partie aléatoire ( $J$ )** : Appartient à l'Ensemble de Ginibre réel. Elle modélise les fluctuations des poids synaptiques.
- **Partie déterministe ( $M$ )** : Matrice de rang 1 capturant l'effet moyen des neurones. Elle est définie par :

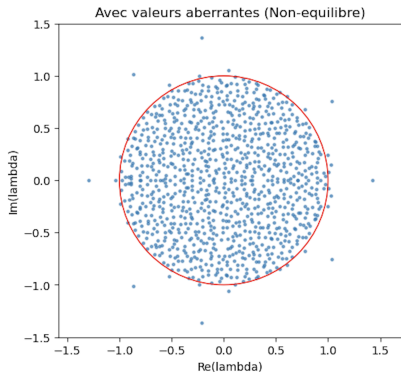
$$M = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{u} \mathbf{m}^T$$

où :

- $\mathbf{u} = (1, 1, \dots, 1)^T$  est un vecteur de uns.
- $\mathbf{m} = \left( \underbrace{\mu_E, \dots, \mu_E}_{fN \text{ (Excitateurs)}}, \underbrace{\mu_I, \dots, \mu_I}_{(1-f)N \text{ (Inhibiteurs)}} \right)^T$

# Résultat Numérique sans ajout de la condition

Dans ce cas, on pose :  $f = 0,5$  ;  $N = 1000$  ;  $\mu_E = 3$  et  $\mu_I = -3$ .



**Sens Biologique [Sompolinsky et al. (1988)] :**

- ⇒ L'apparition de **valeurs propres hors du cercle unité** indique une perte de stabilité du système.
- ⇒ Ce phénomène déclenche une **crise d'épilepsie**.

Figure – Les valeurs propres de  $W$  dans le plan complexe.

# Ajout de la condition (Equilibre)

On ajoute la condition qui s'appelle "équilibre ligne par ligne" :

$$\sum_j J_{ij} = 0 \iff J_u = 0$$

## Sens biologique :

- Les fluctuations des courants excitateurs et inhibiteurs s'annulent localement pour chaque neurone.

# Résultat Numérique avec ajout la condition

Dans ce cas, on pose  $f = 0,5$ ;  $N = 1000$ ;  $\mu_E = 3$  et  $\mu_I = -3$

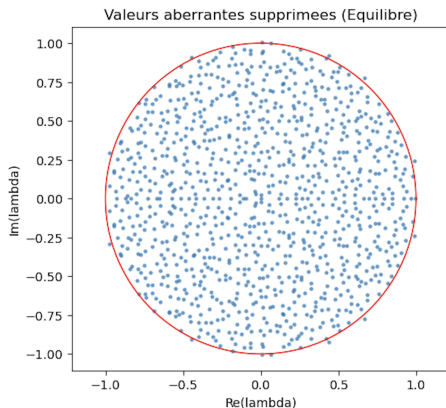


Figure – Les valeurs propres de  $W$  dans le plan complexe avec ajout de la condition

## Definition (Valeurs propres à droite et à gauche)

Soit  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  une matrice non symétrique.

- Soit  $x$  un vecteur propre à droite de  $A$  (couramment appelé vecteur propre), de valeur propre associée  $\lambda$  :

$$Ax = \lambda x$$

- Soit  $y^T$  un vecteur propre à gauche de  $A$  (un vecteur ligne), de valeur propre associée  $\mu$  :

$$y^T A = \mu y^T$$

## Proposition (Orthogonalité des vecteurs propres à gauche et à droite)

Soit  $A$  une matrice non symétrique de taille  $N \times N$ . Soient  $x$  un vecteur propre à droite de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , et  $y^T$  un vecteur propre à gauche de  $A$  associé à la valeur propre  $\mu$ . Si  $\lambda \neq \mu$ , alors  $y^T$  est orthogonal à  $x$  (i.e.,  $y^T x = 0$ ).

## Théorème I

Soient  $L_a$  est un vecteur propre à gauche de la matrice  $J$  associé à une valeur propre non nulle  $\lambda_a$  et  $Ju = 0$ , alors  $L_a$  est un vecteur propre de la matrice  $W$  associé à une valeur propre  $\lambda_a$ .

## Preuve

- $L_a u = 0$  (par proposition et la condition d'équilibre)
- $L_a M = L_a \left( \frac{1}{\sqrt{N}} u m^T \right) = \frac{1}{\sqrt{N}} (L_a u) m^T = 0$
- $L_a W = L_a (J + M) = L_a J + L_a M = L_a J = \lambda_a L_a$

**Le Théorème I a neutralisé l'effet des moyennes.** Qu'en est-il des variances ?

Dans un réseau neuronal biologiquement réaliste, l'espérance de chaque élément demeure strictement nulle, mais la variabilité synaptique diffère selon le type de neurone. Nous introduisons des variances asymétriques pour  $J$  :

- **Synapses excitatrices** (fraction  $f$ ) :  $\sigma_E^2 = \frac{1}{N\alpha}$
- **Synapses inhibitrices** (fraction  $1 - f$ ) :  $\sigma_I^2 = \frac{1}{N}$

Où le paramètre  $\alpha$  contrôle le degré d'asymétrie.

## Problématique

Sous la condition  $Ju = 0$ , quel est l'impact de ces variances asymétriques ( $\alpha \neq 1$ ) sur la géométrie et la densité du spectre ? La loi circulaire de Girko s'applique-t-elle encore ?

## Définition (Trace de la résolvante)

Soit  $\omega$  un point quelconque du plan complexe,  $I$  la matrice identité de taille  $N$ , et  $J$  une matrice aléatoire telle que définie précédemment. Nous définissons :

$$G(\omega) = \frac{1}{N} \text{Tr} \left[ \frac{1}{\omega I - J} \right]$$

La densité spectrale macroscopique  $\rho(\omega)$  est étudiée via la trace de la résolvante, quand  $N \rightarrow \infty$  :

$$G(\omega) = \iint \frac{\rho(\lambda)}{\omega - \lambda} d^2\lambda \quad \text{Analogue à} \quad E_{\text{total}}(\omega) = \iint \frac{\rho(\lambda)}{\omega - \lambda} d^2\lambda$$

Par analogie avec la **physique statistique**, on définit un **potentiel électrostatique bidimensionnel**  $\phi$ , soit  $w^*$  un vecteur conjugué de  $w$  :

$$\phi(\omega, \omega^*) = \frac{1}{N} \ln |\det(\omega I - J)|^2 \iff \exp(-N\phi) = \frac{1}{\det[(\omega I - J)^\dagger(\omega I - J)]}$$

La densité des valeurs propres agit comme une charge obéissant à **l'équation de Poisson complexe** ( $\Delta\phi = 4\pi\rho$ ). En posant  $x = |\omega|^2$ , cela se simplifie rigoureusement en :

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} (|\omega|^2 \phi''(x) + \phi'(x)) = \frac{1}{\pi} (x\phi''(x) + \phi'(x))$$

## Intégrales gaussiennes multidimensionnelles complexes

Soit  $H \in \mathbb{C}^{N \times N}$  une matrice **définie positive**. L'intégrale sur l'espace complexe  $\mathbb{C}^N$  est donnée par :

$$\int_{\mathbb{C}^N} \exp(-\mathbf{z}^\dagger H \mathbf{z}) \prod_{i=1}^N \frac{dz_i^* dz_i}{\pi} = \frac{1}{\det H}$$

On l'applique dans ce cas, on a :

$$\exp(-N\phi) \propto \int \left( \prod_{i=1}^N \frac{dz_i^* dz_i}{\pi} \right) \exp \left( \underbrace{-N \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \left| \omega z_k - \sum_{j=1}^N J_{kj} \sigma_j z_j \right|^2}_{:=\tilde{Q}} \right)$$

Avant d'appliquer le Principe des Grandes Déviations (PGD), on intègre d'abord la matrice aléatoire  $J$  pour définir une **action microscopique**  $\tilde{Q}$  :

$$\exp(-N\phi) \propto \int \left( \prod_{i=1}^N \frac{dz_i^* dz_i}{\pi} \right) \exp(-N\tilde{Q})$$

L'intégration gaussienne exacte sur les éléments  $J_{ij}$  donne :

$$\exp(-N\tilde{Q}) = \int \left( \prod_{i,j=1}^N \sqrt{\frac{N}{2\pi}} dJ_{ij} \right) \exp(-NQ)$$

où la forme quadratique initiale  $Q$  s'écrit :

$$Q = \sum_k \left( \frac{|\omega|^2}{\sigma_k^2} + \epsilon_k \right) \frac{z_k^* z_k}{N} + \frac{1}{2} \sum_{k,i,j} J_{ki} A_{ij} J_{kj} - \sum_{k,j} B_{kj} J_{kj}$$

$$A_{ij} = \frac{z_i^* z_j}{N} + \frac{z_j^* z_i}{N} + \delta_{ij} \quad \text{et} \quad B_{kj} = \frac{\omega^* z_k^* z_j}{\sigma_k N} + \frac{\omega z_j^* z_k}{\sigma_k N}$$

Dans la limite asymptotique  $N \rightarrow \infty$ , l'intégrale est dominée par l'état qui minimise l'argument de l'exponentielle. On définit deux paramètres d'ordre macroscopiques :

$$r_1 = \frac{1}{N} \sum_{i \in \text{Excitateurs}} |z_i|^2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1}{N} \sum_{i \in \text{Inhibiteurs}} |z_i|^2$$

La résolution du système  $\left( \frac{\partial \phi}{\partial r_1} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial r_2} = 0 \right)$  nous donne le potentiel limite :

$$\phi(r_1, r_2) = \ln \left( \frac{1 + r_1 + r_2}{r_1^f r_2^{1-f}} \right) + \frac{|\omega|^2 (\alpha r_1 + r_2)}{1 + r_1 + r_2} + \epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 r_2$$

# Théorème II : Frontière géométrique du spectre

## Rayon spectral maximal

Sous contrainte d'équilibre synaptique local, le spectre est strictement délimité :

$$R^2 = 1 - f + \frac{f}{\alpha}$$

Ce qui correspond exactement à la **moyenne pondérée des variances** :

$$R^2 = N [f\sigma_E^2 + (1 - f)\sigma_I^2]$$

**Conclusion** : Le spectre forme un disque parfait. Le potentiel électrostatique garantit qu'il n'y a **aucune valeur propre** au-delà du rayon  $R$ .

# À l'intérieur du disque : Densité non uniforme

Que se passe-t-il pour  $|\omega|^2 \leq R^2$  ?

- **Cas classique** ( $\alpha = 1$ ) : Spectre plat et uniforme (Loi circulaire de Girko).
- **Notre modèle** ( $\alpha \neq 1$ ) : L'asymétrie des variances brise cette uniformité.

## Résultat clé

Une **concentration massive** des valeurs propres vers l'origine du plan complexe.

# Validation Numérique du Théorème II

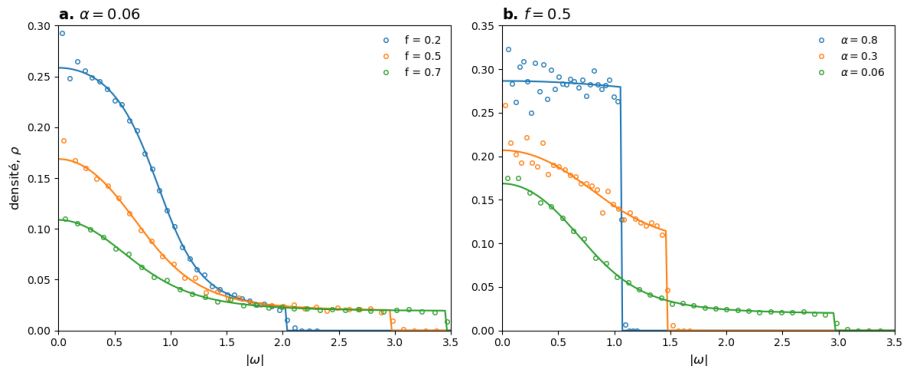


Figure – Dépendance de la densité spectrale radiale non-uniforme. **À gauche** : Effet de la proportion  $f$  sur l'étendue et la forme du spectre pour une asymétrie  $\alpha$  fixe. **À droite** : Effet de l'asymétrie des variances  $\alpha$  sur la concentration et le rayon spectral limite  $R$  pour une proportion  $f$  fixe.

# Validation Numérique du Théorème II

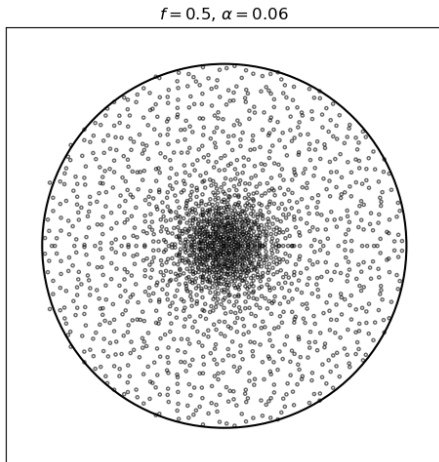


Figure – Cas :  $f = 0,5$ ,  $\alpha = 0,06$  et  $N = 2000$ , les valeurs propres dans le plan complexe

## 1. Résultats Théoriques

- **Condition**  $J_u = 0 \rightarrow$  Confinement spectral (cercle), élimination des valeurs aberrantes.
- **Variances hétérogènes**  $\rightarrow$  Calcul analytique du spectre (limite et densité radiale).

## 2. Interprétation Biologique

- **Réalité de  $Ju = 0$**  → Balance locale Excitation/Inhibition.
- **Stabilité globale** → Contrôle par la **variance** (plasticité), non par la moyenne.

**Merci pour votre attention !**