

Inégalités de concentration pour les modèles désordonnés

Développement de martingale conditionnelle

Basé sur l'article de Frédérique Watbled (2012)

Yuguang XIAO

M2 Probabilités et Modèles aléatoires – SORBONNE UNIVERSITÉ

Encadrant : Quentin Berger
(LAGA, Université Sorbonne Paris Nord)

30 avril 2026

Focus de l'exposé

Cet exposé se concentre sur le **Théorème 1.2**, le **Théorème 2.1**, le **Lemme 4.1** ainsi que **Corollaire 4.2** issus de l'article de *F. Watbled (2012)*.

Remarques sur l'examen

Le but de cet exposé (examen) est de bien expliquer la section 4 dans l'article, en particulier les techniques dans le Lemme 4.1. Ainsi, je vais présenter la preuve de ce lemme en détail.

Table des matières

- 1 Contexte de la recherche
- 2 Théorème 1.2
- 3 Théorème 2.1 (Q.Liu et F.Watbled, 2009)
- 4 Lemme 4.1
- 5 Corollaire 4.2
- 6 Conclusion

$(\Sigma, \mathcal{E}, \mathbf{P})$: espace de la marche aléatoire $S = (S_n)_{n \geq 0}$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: espace du désordre $\eta = (\eta(n, x))_{(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d}$

- S est une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d , issue de 0.
- Les variables $\eta(n, x)$ sont i.i.d. sous \mathbb{P} .
- \mathbf{E} désigne l'espérance par rapport à la marche aléatoire.
- \mathbb{E} désigne l'espérance par rapport à l'environnement.

$$\lambda(\beta) = \log \mathbb{E}[e^{\beta \eta(1,0)}].$$

Polymère dirigé en environnement aléatoire

À une trajectoire S , on associe l'énergie

$$H_n(S) = \sum_{j=1}^n \eta(j, S_j).$$

La mesure polymère est définie sur (Σ, \mathcal{E}) par

$$\frac{d\mathbf{P}_n}{d\mathbf{P}}(S) = \frac{1}{Z_n} e^{\beta H_n(S)}.$$

La fonction de partition est

$$Z_n = \mathbf{E}[e^{\beta H_n(S)}].$$

Question centrale de l'article

On s'intéresse aux fluctuations de la fonction de partition, et plus généralement à celles de son logarithme.

$$\rho(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{E}[\log Z_n]$$

- $\rho(\beta)$ est l'**énergie libre** du polymère.
- On cherche des **inégalités de concentration** pour contrôler les fluctuations dues au désordre.
- Hypothèse principale de l'article :

$$\mathbb{E}[e^{\beta|\eta|}] < \infty.$$

Pourquoi introduire Y_n ?

L'article ne considère pas seulement

$$Z_n = \mathbf{E}[e^{\beta H_n(S)}],$$

mais la quantité plus générale

$$Y_n = \mathbf{E}[f_n(S_n)e^{\beta H_n(S)}],$$

où f_n est positive et bornée.

- Si $f_n \equiv 1$, on retrouve Z_n .
- Si f_n dépend de S_n , on encode la position finale du polymère.

Théorème 1.2

Théorème 1.2

Supposons que $\mathbb{E}e^{\beta|\eta|} < +\infty$ et posons $K = 2 \exp(\lambda(-\beta) + \lambda(\beta))$. Soit f_n une suite de fonctions positives bornées sur \mathbb{R}^d telle que pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{P}(f_n(S_n) > 0) \neq 0$. Posons $Y_n = \mathbf{E}f_n(S_n)e^{\beta H_n(S)}$. Alors pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}e^{\pm t(\ln Y_n - \mathbb{E} \ln Y_n)} \leq \exp(nKt^2) \quad \text{pour tout } t \in [0, 1], \quad (1)$$

et

$$\mathbb{P}\left(\pm \frac{1}{n}(\ln Y_n - \mathbb{E} \ln Y_n) > x\right) \leq \begin{cases} \exp\left(-\frac{nx^2}{4K}\right) & \text{si } x \in (0, 2K], \\ \exp(-n(x - K)) & \text{si } x \in (2K, \infty). \end{cases} \quad (2)$$

Décomposition de martingale

- $\ln Y_n - \mathbb{E} \ln Y_n = \sum_{j=1}^n V_{n,j}$ avec $V_{n,j} = \mathbb{E}_j \ln(Y_n) - \mathbb{E}_{j-1} \ln(Y_n)$
- $V_{n,j}$ est une différence de martingale. (i.e., $\mathbb{E}_{j-1} V_{n,j} = 0$ p.s.)

Notation : $\mathbb{E}_j[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_j]$ désigne l'espérance conditionnelle par rapport à la filtration $\mathcal{F}_j := \sigma(\eta(i, x) : 1 \leq i \leq j, x \in \mathbb{Z}^d)$ avec $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Théorème 2.1 (Q.Liu et F.Watbled, 2009)

Théorème 2.1

Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie de différences de martingale avec $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Si pour une certaine constante $K > 0$ et pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\mathbb{E}(e^{|X_i|} \mid \mathcal{F}_{i-1}) \leq K \quad \text{p.s.}, \quad (3)$$

alors :

$$\mathbb{E}e^{\pm t M_n} \leq \exp(nKt^2) \quad \text{pour tout } t \in [0, 1], \quad (4)$$

et

$$\mathbb{P}\left(\frac{\pm M_n}{n} > x\right) \leq \begin{cases} \exp\left(-\frac{nx^2}{4K}\right) & \text{si } x \in (0, 2K], \\ \exp(-n(x-K)) & \text{si } x \in (2K, \infty). \end{cases} \quad (5)$$

Lemme 2.2

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un certain espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telle que $\mathbb{E}X \leq 0$ et $\mathbb{E}e^{|X|} \leq K$ pour un certain $K > 0$. Alors, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\mathbb{E}e^{tX} \leq \exp(Kt^2). \quad (6)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{tX}] &= 1 + t \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\leq 0} + \sum_{k=2}^{\infty} t^k \frac{\mathbb{E}[X^k]}{k!} \\ &\leq 1 + t^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[|X|^k]}{k!} \\ &\leq 1 + t^2 \mathbb{E}[e^{|X|}] \leq 1 + Kt^2 \leq \exp(Kt^2) \end{aligned}$$

Preuve du Théorème 2.1

Après lemme 2.2, pour $t \in [0, 1]$ et $i \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$\mathbb{E}[e^{tX_i} \mid \mathcal{F}_{i-1}] \leq \exp(Kt^2) \quad p.s.$$

- Par l'induction sur n , on a (4).
- $\mathbb{P}(M_n/n > x) = \mathbb{P}(e^{tM_n} > e^{tnx}) \stackrel{\text{Markov}}{\leq} e^{-tnx} \mathbb{E}[e^{tM_n}] \leq e^{n(Kt^2 - tx)}$.
- Optimiser $Kt^2 - tx$ sur $t \in [0, 1]$, on a (5) :

$$\inf_{t \in [0, 1]} (Kt^2 - tx) = \begin{cases} -x^2/(4K) & \text{si } x \in (0, 2K], \\ -x + K & \text{si } x \in (2K, \infty). \end{cases}$$

Remarque : En appliquant le même raisonnement à la suite $(-X_i)$, on obtient les inégalités complètes (4) et (5).

Lemme 4.1

Si nous voulons prouver le Théorème 1.2, alors il suffit de prouver :
 $\mathbb{E}_{j-1}[e^{|V_{n,j}|}] \leq K$.

Lemme 4.1

Pour tout $1 \leq j \leq n$, on a

$$\mathbb{E}_{j-1} e^{|V_{n,j}|} \leq K := 2 \exp(\lambda(-\beta) + \lambda(\beta)). \quad (7)$$

Preuve du Lemme 4.1

(a) **(Définition)** $H_{n,j}(S) = \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq j} \eta(k, S_k)$ et
 $Y_{n,j} = \mathbf{E} \left[f_n(S_n) e^{\beta H_{n,j}(S)} \right].$

(b) $\mathbb{E}_j \ln Y_{n,j} = \mathbb{E}_{j-1} \ln Y_{n,j}$ (par indépendance).

(c) $V_{n,j} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}_j \ln Y_n - \mathbb{E}_{j-1} \ln Y_n \stackrel{(b)}{=} \mathbb{E}_j \ln \frac{Y_n}{Y_{n,j}} - \mathbb{E}_{j-1} \ln \frac{Y_n}{Y_{n,j}}.$

(d) $\mathbb{E}_{j-1}[e^{V_{n,j}}] \stackrel{(c)}{=} \mathbb{E}_{j-1} \left[\exp \left(\mathbb{E}_j \ln \frac{Y_n}{Y_{n,j}} \right) \exp \left(-\mathbb{E}_{j-1} \ln \frac{Y_n}{Y_{n,j}} \right) \right]$
 $\stackrel{\mathcal{F}_{j-1}\text{-mes.}}{=} \underbrace{\mathbb{E}_{j-1} \left[\exp \left(\mathbb{E}_j \ln \frac{Y_n}{Y_{n,j}} \right) \right]}_{\textcircled{1}} \underbrace{\exp \left(-\mathbb{E}_{j-1} \ln \frac{Y_n}{Y_{n,j}} \right)}_{\textcircled{2}}$

2 exemples d'inégalité de Jensen - convexité de e^x et e^{-x}

$$\exp(\mathbb{E}_j[X]) \leq \mathbb{E}_j[e^X] \quad (8)$$

$$\exp(-\mathbb{E}_j[X]) \leq \mathbb{E}_j[e^{-X}] \quad (9)$$

On utilise (8) pour obtenir :

$$\exp\left(\mathbb{E}_j \ln \frac{Y_n}{Y_{n,j}}\right) \leq \mathbb{E}_j \frac{Y_n}{Y_{n,j}}$$

$$\mathbb{E}_{j-1}\left[\exp\left(\mathbb{E}_j \ln \frac{Y_n}{Y_{n,j}}\right)\right] \leq \mathbb{E}_{j-1}\left[\mathbb{E}_j \frac{Y_n}{Y_{n,j}}\right] = \mathbb{E}_{j-1}\left[\frac{Y_n}{Y_{n,j}}\right]$$

On utilise (9) pour obtenir :

$$\exp\left(-\mathbb{E}_{j-1} \ln \frac{Y_n}{Y_{n,j}}\right) \leq \mathbb{E}_{j-1}\left[\exp\left(-\ln \frac{Y_n}{Y_{n,j}}\right)\right] = \mathbb{E}_{j-1}\left[\left(\frac{Y_n}{Y_{n,j}}\right)^{-1}\right]$$

le petit corollaire du lemme 4.1

Par (d), $\mathbb{E}_{j-1}[\exp(V_{n,j})] \leq \textcircled{1} \cdot \textcircled{2}$, on a :

Corollaire

$$\mathbb{E}_{j-1}[\exp(V_{n,j})] \leq \mathbb{E}_{j-1}\left[\frac{Y_n}{Y_{n,j}}\right] \cdot \mathbb{E}_{j-1}\left[\left(\frac{Y_n}{Y_{n,j}}\right)^{-1}\right] \quad (10)$$

(e) **(Définition)** $H_n = H_{n,j} + \eta(j, S_j)$ et $Y_n = \mathbf{E}[f_n(S_n)e^{\beta H_{n,j}(S)}e^{\beta\eta(j, S_j)}]$.

(f) $Y_{n,j} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{E} \left[f_n(S_n)e^{\beta H_{n,j}(S)} \mathbf{1}_{\{S_j=x\}} \right] e^{\beta\eta(j,x)}$.

(g)

$$\frac{Y_n}{Y_{n,j}} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \alpha_x e^{\beta\eta(j,x)}$$

$$\text{avec } \alpha_x = \frac{\mathbf{E} \left[f_n(S_n)e^{\beta H_{n,j}(S)} \mathbf{1}_{\{S_j=x\}} \right]}{Y_{n,j}}.$$

Remarque : $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \alpha_x = 1$ et $\alpha_x \geq 0$.

On définit $\mathcal{F}_{n,j} = \sigma(\eta(k, x) : k \neq j, x \in \mathbb{Z}^d)$

(h) $\mathcal{F}_{j-1} \subset \mathcal{F}_{n,j}$

(i) α_x est $\mathcal{F}_{n,j}$ -mesurable et $\eta(j, x)$ et $\mathcal{F}_{n,j}$ sont indépendants.

$$\mathbb{E}_{j-1} \left[\frac{Y_n}{Y_{n,j}} \right] \stackrel{(h),(g)}{=} \mathbb{E}_{j-1} \left[\underbrace{\mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \alpha_x e^{\beta \eta(j,x)} \mid \mathcal{F}_{n,j} \right]}_{\textcircled{3}} \right] \quad (11)$$

(j) $\textcircled{3} \stackrel{(i)}{=} \sum_x \alpha_x \mathbb{E} e^{\beta \eta(j,x)} = \sum_x \alpha_x e^{\lambda(\beta)} = e^{\lambda(\beta)}$

Après (11) et (j), on a :

$$\mathbb{E}_{j-1} \left[\frac{Y_n}{Y_{n,j}} \right] = \mathbb{E}_{j-1} e^{\lambda(\beta)} = e^{\lambda(\beta)} \quad (12)$$

$$(k) \left(\frac{Y_n}{Y_{n,j}} \right)^{-1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left(\sum_x \alpha_x e^{-\beta \eta(j,x)} \right)^{-1} \stackrel{\text{Jensen}}{\leq} \sum_x \alpha_x \left(e^{\beta \eta(j,x)} \right)^{-1}$$

Apr\u00e8s (h),(i), (k) et la m\u00eame m\u00e9thode de obtenir (12), on a :

$$\mathbb{E}_{j-1} \left[\left(\frac{Y_n}{Y_{n,j}} \right)^{-1} \right] \leq \sum_x \alpha_x \mathbb{E} [e^{-\beta \eta(j,x)}] = e^{\lambda(-\beta)} \quad (13)$$

Fin de la preuve du Lemme 4.1

D'après (10), (12) et (13), on a :

$$\mathbb{E}_{j-1}[e^{V_{n,j}}] \leq e^{\lambda(\beta)} e^{\lambda(-\beta)} = e^{\lambda(\beta)+\lambda(-\beta)} \quad (14)$$

En considérant également le cas symétrique $(-V_{n,j})$:

$$\mathbb{E}_{j-1}[e^{|V_{n,j}|}] \leq 2e^{\lambda(\beta)+\lambda(-\beta)} \quad (15)$$

Fin de preuve du Théorème 1.2 ■

Corollaire 4.2 (1/2) et démonstration (1/2)

Corollaire 4.2 (1/2)

Supposons que $\mathbb{E}e^{\beta|\eta|} < +\infty$. Soit (f_n) une suite de fonctions positives bornées sur \mathbb{R}^d telles que pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{P}(f_n(S_n) > 0) \neq 0$. Posons $Y_n = \mathbf{E}f_n(S_n)e^{\beta H_n(S)}$. Alors :

$$X_n := \frac{\ln Y_n}{n} - \mathbb{E} \frac{\ln Y_n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{a.s. et dans } L^p \text{ pour tout } p \geq 1. \quad (16)$$

Démonstration.

- Par le Théorème 1.2 et le Lemme de Borel-Cantelli, on a $X_n \rightarrow 0$ a.s.
- On utilise la formule : $\mathbb{E}|X_n|^p = p \int_0^{+\infty} x^{p-1} \mathbb{P}(|X_n| > t) dt$ pour montrer la convergence dans L^p .



Corollaire 4.2 (2/2)

Si de plus la suite $\mathbb{E} \ln Y_n$ est suradditive, alors la limite

$$L(\beta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \ln Y_n = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \mathbb{E} \ln Y_n \quad (17)$$

existe, tout comme la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \ln \mathbf{E}_n f_n(S_n) = L(\beta) - p(\beta), \quad (18)$$

et alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{E}_n f_n(S_n) = L(\beta) - p(\beta) \quad \text{a.s. et dans } L^p, \text{ pour tout } p \geq 1. \quad (19)$$

Démonstration (2/2)

Démonstration.

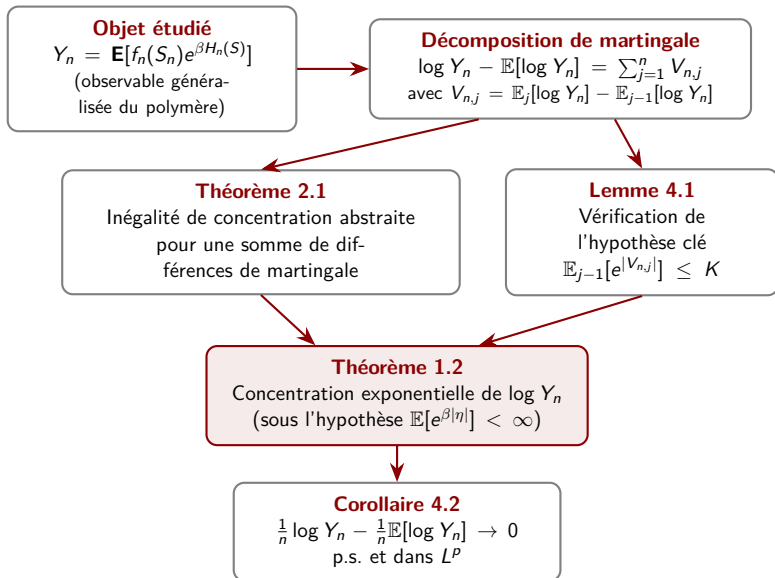
- Pour (17), on utilise directement le lemme de suradditivité (lemme de Fekete).

- Pour (18),
$$\frac{1}{n} \mathbb{E} \ln \mathbf{E}_n f_n(S_n) = \underbrace{\frac{1}{n} \mathbb{E} \ln Y_n}_{\rightarrow L(\beta)} - \underbrace{\frac{1}{n} \mathbb{E} \ln Z_n}_{\rightarrow p(\beta)}$$

- Pour (19) avec $\mathbf{E}_n f_n(S_n) := \frac{Y_n}{Z_n}$:
 - $\frac{1}{n} \mathbb{E} \ln Y_n \rightarrow L(\beta)$ p.s et dans L^p après Corollaire (1/2).
 - $\frac{1}{n} \mathbb{E} \ln Z_n \rightarrow p(\beta)$ p.s et dans L^p aussi.
 - l'inégalité de Minkowski



Conclusion (1/2) : Fil directeur de la preuve



Conclusion (2/2)

- Sous l'hypothèse plus faible $\mathbf{E}[e^{\beta|\eta|}] < \infty$, on obtient **une inégalité de concentration exponentielle** pour $\log Y_n$ autour de son espérance. (Théorème 1.2)
- Un outil important vient de Colloraire 4.2 pour montrer les grandes déviations de S_n/n sous la mesure polymère (Théorème 1.3 et 1.4 dans l'article)